Wybrane metody numeryczne poszukiwania miejsc zerowych funkcji ciągłych

Niech dana będzie funkcja skalarna jednej zmiennej rzeczywistej: $f \in C^0([a,b])$, dla której $f(a) \cdot f(b) < 0$ (wartości funkcji dla argumentów a i b są przeciwnych znaków).
Celem jest określenie miejsca zerowego x_0 funkcji f, gdzie $x_0 \in [a,b]$.

Algorytm bisekcji

Przyjmuje się: $a_0 = a$, $b_0 = b$, tol ≈ 0 (np. tol $= 10^-6$).
Poszukuje się $x^* \in [a,b]$, będącego przybliżeniem miejsca zerowego.
Dla $n = 1, 2, \ldots,$ nmax:

1. $c_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$
2. Jeżeli $f(c_n) \cdot f(a_{n-1}) < 0$, to $b_n = c_n$ oraz $a_n = a_{n-1}$, w przeciwnym razie $a_n = c_n$ oraz $b_n = b_{n-1}$
3. Jeżeli $n =$ nmax lub $f(c) = 0$ lub $\frac{b_n - a_n}{2} <$ tol, to $x^* = c_n$ oraz następuje zakończenie procedury iteracyjnej

Metoda Newtona

Niech dana będzie funkcja skalarna jednej zmiennej rzeczywistej: $f \in C^1([a,b])$, dla której $\exists \overline{x} \in [a,b] : f(\overline{x}) = 0$, a f' jest jej pochodną.
Przyjmuje się wartość początkową $x_0 \in [a,b]$ oraz tol ≈ 0.
Poszukuje się $x^* \in [a,b]$, będącego przybliżeniem miejsca zerowego.
Dla $n = 1, 2, \ldots,$ nmax:

1. $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$
2. Jeżeli $n =$ nmax lub $f(x_n) = 0$ lub $\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} <$ tol, to $x^* = x_n$ oraz następuje zakończenie procedury iteracyjnej

Krok 1. algorytmu dla ustalonego n uzasadnia się wykorzystując liniową aproksymację funkcji f w pewnym otoczeniu punktu x_{n-1}, za pomocą stycznej do wykresu funkcji w punkcie x_{n-1} zadanej wzorem $y = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1}(x - x_{n-1})$. Jako punkt x_n przyjmuje się miejsce zerowe przywołanej stycznej, tzn. $f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = 0 \Leftrightarrow x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$.

Przykłady zastosowania metod

1. **Numeryczne przybliżenie wartości pierwiastka**
   Numeryczne przybliżenie wartości pierwiastka kwadratowego z liczby $k \in \mathbf{R}_+$. Miejscem zerowym dla wielomianu drugiego stopnia $f(x) = x^2 - k$ jest:
   $\overline{x}^2 - k = 0 \Leftrightarrow |\overline{x}| = \sqrt{k} \Leftrightarrow \overline{x} = \pm\sqrt{k}$.
   Tym samym przyjmując za przedział $[a,b] \subset \mathbf{R}_+$, taki, że $\sqrt{k} \in [a,b]$, można z pomocą metody bisekcji znaleźć przybliżenie miejsca zerowego wielomianu $f(x) = x^2 - k$, będące tym samym przybliżeniem wartości $\sqrt{k}$.

2. **Wyznaczanie wartości wewnętrznej stopy zwrotu dla inwestycji**
   Wyznaczanie wartości wewnętrznej stopy zwrotu (IRR), będącej pierwiastkiem funkcji:

$$f(r) = \sum_{t=0}^{T} \frac{CF_t}{(1+r)^t} = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{t=0}^{T} CF_t (1+r)^{T-t}$$

przy czym $r \in \mathbf{R} - \{-1\}$, $CF_t \in \mathbf{R} - \{0\}$, $t = 0, 1, \ldots, T$ są ustalonymi przepływami pieniężnymi w równoodalonych momentach t.
Miejsce zerowe $\overline{r}$ funkcji f, określa:

$$f(\overline{r}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{t=0}^{T} CF_t(1+\overline{r})^{T-t} = 0$$

Podstawiając $x = 1 + r$, rozważamy wielomian T-tego stopnia

$$w(x) = \sum_{t=0}^{T} CF_t x^{T-t}$$

o współczynnikach $CF_t, t = 0, 1, \ldots, T$, dla którego poszukujemy miejsc zerowych $\overline{x}$, takich że $w(\overline{x}) = 0$.

W celu rozważenia liczby możliwych pierwiastków rzeczywistych (dodatnich i ujemnych) wykorzystuje się regułę znaków Kartezjusza. Dla wielomianu w, współczynniki CF_t uporządkowane są malejąco względem potęg zmiennej x, do których się odnoszą.
Zgodnie z regułą znaków Kartezjusza liczba dodatnich pierwiastków rzeczywistych $\overline{x}$ wielomianu w odpowiada liczbie zmian znaków pomiędzy kolejnymi niezerowymi współczynnikami, bądź jest ona mniejsza od niej o wielokrotność 2.
Przy założeniu, niezerowych przepływów CF_t w każdym z momentów $t = 0, 1, \ldots, T$ (założenie to zostało utrzymane także w dalszej części), rozpatruje się liczbę zmian znaku wśród par wartości CF_{t-1} oraz CF_t dla $t = 1, 2, \ldots, T$.
Maksymalna możliwa liczba dodatnich pierwiastków rzeczywistych wielomianu w wynosi

$$l^+_{\max} = \sum_{t=1}^{T} I\left(\operatorname{sgn}(CF_{t-1}) \neq \operatorname{sgn}(CF_t)\right)$$

gdzie I jest funkcją wskaźnikową, $I(p) = \begin{cases} 1 & \text{, gdy } p \text{ jest prawdziwe} \\ 0 & \text{, gdy } p \text{ jest fałszywe} \end{cases}$, natomiast sgn jest funkcją signum. Liczbę możliwych pierwiastków rzeczywistych dodatnich określają elementy zbioru:

$$\{l \in \mathbf{N}_0 : l^+_{\max} - 2k,\ k \in \mathbf{N}_0\}$$

Co tyczy się pierwiastków rzeczywistych ujemnych ich możliwą liczbę można okreslić wykorzystując regułę znaków Kartezjusza dla $w(-x)$, który można równoważnie wyrazić

$$w(-x) = \sum_{t=0}^{T} [(-1)^{T-t} CF_t] x^{T-t}$$

Tym samym maksymalna liczba ujemnych pierwiastków rzeczywistych wielomianu w wynosi

$$l^-_{\max} = \sum_{t=1}^{T} I\left(\operatorname{sgn}\left((-1)^{T-t+1} CF_{t-1}\right) \neq \operatorname{sgn}\left((-1)^{T-t} CF_t\right)\right)$$

Liczbę możliwych pierwiastków rzeczywistych dodatnich określają elementy zbioru:

$$\{l \in \mathbf{N}_0 : l^-_{\max} - 2k,\ k \in \mathbf{N}_0\}$$

Wykorzystując pierwiastki rzeczywiste $\overline{x}$, takie że $w(\overline{x}) = 0$, których położenie można określić z pomocą metod numerycznych (m.in. metody bisekcji, Newtona), można wyznaczyć pierwiastki $\overline{r} = \overline{x} - 1$, spośród których odpowiednio określone przyjmuje się za wartość wewnętrznej stopy zwrotu IRR.