Elementarne działania na macierzach - krótkie przypomnienie

25 marca 2017

Definicja macierzy A o wymiarach $m \times n$

Niech K będzie ciałem przemiennym oraz niech zbiór $\mathbf{N}_m^* = \{1, 2, \ldots, m\}$. Macierzą A typu (m, n) (o wymiarach $m \times n$) nazywamy odwzorowanie zbioru $\mathbf{N}_m^* \times \mathbf{N}_n^*$ w ciało K, dla którego stosuje się zapis

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \end{bmatrix}$$

bądź też w skróconej formie $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

Macierz rzeczywista

W przypadku, gdy K jest zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$, macierz A definiuje się jako odwzorowanie przyporządkowujące parom (i, j), $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ wartości rzeczywiste $a_{ij} \in \mathbf{R}$, a macierz A nazywamy macierzą rzeczywistą. Zbiór wszystkich macierzy rzeczywistych o wymiarach $m \times n$ określamy jako:

$$M_{mn}(\mathbf{R}) = \{A = [a_{ij}]_{m \times n} : a_{ij} \in \mathbf{R},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\}$$

W przypadku, gdy dla macierzy A wymiarach $m \times n$, $m = n$, macierz A określa się mianem macierzy kwadratowej $n \times n$, a zbiór rzeczywistych macierzy kwadratowych oznacza się symbolem $M_n(\mathbf{R})$.

Macierz symetryczna

Macierz kwadratową $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nazywamy macierzą symetryczną, wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall i, j = 1, \ldots, n : a_{ij} = a_{ji}$.

Określoność macierzy

Symetryczną macierz A o wymiarach $n \times n$ nazywamy dodatnio określoną, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} :\ x'Ax > 0$$

Ponadto macierz symetryczną A definiujemy jako dodatnio półokreśloną albo ujemnie określoną, poprzez zastąpienie $x'Ax > 0$ w powyższej definicji odpowiednio przez $x'Ax \geqslant 0$ albo $x'Ax < 0$.

Transpozycją macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ nazywamy macierz $A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$. Wymiary danej macierzy oraz jej transpozycji wynoszą odpowiednio: $\dim(A) = m \times n$ oraz $\dim(A') = n \times m$.

Iloczynem dwóch macierzy o odpowiednich wymiarach $A_{m\times n}$ i $B_{n\times p}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$

jest macierz $C_{m\times p} = A_{m\times n} \cdot B_{n\times p}$, taka, że

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot b_{jp} \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} \cdot b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{2j} \cdot b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{2j} \cdot b_{jp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} \cdot b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{mj} \cdot b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{mj} \cdot b_{jp} \end{bmatrix}$$

Skrótowy zapis iloczynu $A \cdot B = C$:

$$[a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \cdot [b_{jk}]_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,p}} = [\textstyle\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,p}} = [c_{ik}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,p}}$$

Iloczynem Hadamarda dwóch macierzy (inne nazwy: iloczyn Schura, iloczyn po współrzędnych) o takich samych wymiarach $D_{m\times n}$ i $E_{m\times n}$:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & e_{m2} & \dots & e_{mn} \end{bmatrix},$$

jest macierz $F_{m\times n} = D_{m\times n} \odot E_{m\times n}$, taka, że

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} \cdot e_{11} & d_{12} \cdot e_{12} & \dots & d_{1n} \cdot e_{1n} \\ d_{21} \cdot e_{21} & d_{22} \cdot e_{22} & \dots & d_{2n} \cdot e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} \cdot e_{m1} & d_{m2} \cdot e_{m2} & \dots & d_{mn} \cdot e_{mn} \end{bmatrix}$$

Skrótowy zapis iloczynu Hadamarda $D \odot E = F$:

$$[d_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \odot [e_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = [d_{ij} \cdot e_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = [f_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

Wyznacznik macierzy kwadratowej A (tzn. $\dim(A) = n \times n$), oznaczany $\det(A)$ jest następująco zdefiniowanym skalarem:

- dla $n = 1$, dla macierzy $A = [a]$, $\det(A) = a$
- dla $n > 1$, dla macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$
  $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{i,j})$, gdzie $1 \leqslant i \leqslant n$, a $\det(A_{i,j})$ jest wyznacznikiem (minorem) podmacierzy powstałej poprzez wykreślenie z macierzy A i-tego wiersza i j-tej kolumny

Macierz kwadratową nazywamy macierzą nieosobliwą (niezdegenerowaną), jeżeli jej wyznacznik jest różny od 0 ($\det(A) \neq 0$).
Macierz kwadratową nazywamy macierzą osobliwą (zdegenerowaną), jeżeli jej wyznacznik jest równy 0 ($\det(A) = 0$).

Macierzą odwrotną do kwadratowej macierzy A ($dim(A) = n \times n$), nazywamy macierz A^{-1}, taką, że:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

gdzie I jest macierzą jednostkową stopnia n.

Twierdzenie:
Macierz kwadratowa A ma macierz odwrotną $A^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$, tzn. A jest macierzą nieosobliwą

Rozwiązywanie układu równań liniowych

$$A \cdot x = b$$

gdzie

- A jest macierzą nieosobliwą ($\det(A) \neq 0$) parametrów układu równań, o wymiarach $n \times n$ ($\dim(A) = n \times n$)
- x jest n-wymiarowym wektorem niewiadomych ($\dim(x) = n \times 1$)
- b jest n-wymiarowym wektorem wyrazów wolnych układu równań ($\dim(x) = n \times 1$)

Rozwiązanie powyższego ukladu równań liniowych uzyskuje się poprzez lewostronne pomnożenie obu stron równania przez macierz odwrotną do A:

$$A^{-1} \cdot Ax = A^{-1} \cdot b \Leftrightarrow I \cdot x = A^{-1} \cdot b \Leftrightarrow x = A^{-1} \cdot b$$

Metoda wzorów Cramera:
Alternatywną metodą rozwiązania układu równań jest metoda wzorów Cramera. Pamiętając, że $\dim(A) = n \times n$ oraz $\det(A) \neq 0$, mamy:

$$x_j = \frac{\det \tilde{A}_j}{\det A},\ j = 1, \ldots, n$$

$\tilde{A}_j$ - macierz powstała przez zastąpienie w macierzy A j-tej kolumny przez wektor wyrazów wolnych b
x_j, $j = 1, \ldots, n$ - jest wartością rozwiązania układu równań liniowych dla j-tej niewiadomej

Rząd macierzy A, oznaczany symbolem $r(A)$ (albo $rk(A)$), definiuje się równoważanie jako:

- maksymalną liczbę liniowo niezależnych wektorów tworzących wiersze (kolumny) macierzy A.
- największy możliwy wymiar niezerowego minora macierzy A.

Wybrane własności rzędu macierzy A o wymiarach $m \times n$ ($\dim(A) = m \times n$):

- $r(A) \leqslant \min\{m, n\}$, gdy $r(A) = \min\{m, n\}$ A jest nazywana macierzą pełnego rzędu,
- dla kwadratowej macierzy A, $\dim(A) = n \times n$, istnieje macierz odwrotna A^{-1}, wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = n$,
- operacje elementarne nie zmieniają rzędu macierzy.

Twierdzenie Kroneckera-Capellego (o istnieniu rozwiązań układu równań liniowych)

Układ równań liniowych $A \cdot x = b$, taki, że $\dim(A) = m \times n$ (układ m równań o n niewiadomych), macierz A ma rząd równy r: $r(A) = r$, a macierz rozszerzona $U = [A|b]$ ma rząd równy s: $r(U) = s$, ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r = s$.
W szczególności, gdy $r = s = n$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie układu równań liniowych, w przeciwnym wypadku ($r = s \neq n$) układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Możliwa realizacja numeryczna działań na macierzach:

- rozwiązywanie układów równań liniowych metodą eliminacji Gaussa, ewentualnie zastosowanie dekompozycji LU macierzy A, jako macierzowego wariantu procedury eliminacji Gaussa: $A = LU$, gdzie L, U to odpowiednio macierz dolno- i górnotrójkątna $Ax = b$, $LUx = b$, przyjmując $Ux = y$ rozwiązujemy układ $Ly = b$, po czym dysponując y rozwiązujemy układ $Ux = y$.

- wyznaczanie macierzy odwrotnej metodą eliminacji Gaussa lub z wykorzystaniem dokompozycji $A = LU$ (w procedurze rozwiązania układu równań, w miejsce wektora wyrazów wolnych wstawia się macierz jednostkową odpowiedniego wymiaru),
- obliczanie wyznacznika macierzy: ze względu na niezmienniczość wyznacznika macierzy na operacje elementarne (dodawania pomnożonego przez skalar wiersza macierzy do innego wiersza tej macierzy), macierz sprowadza się metodą eliminacji Gaussa do macierzy górnotrójkątnej, dla której wyznacznik równy wyznacznikowi pierwotnej macierzy, wyznacza się jako iloczyn elementów diagonalnych.

Norma indukowana macierzy

Normą indukowaną macierzy A o wymiarach $m \times n$ określa się wartość $||A||_p$, taką, że:

$$||A||_p = \sup\{||Ax||_p : x \in \mathbf{R}^n,\ ||x||_p = 1\}$$

lub równoważnie

$$||A||_p = \sup\{\frac{||Ax||_p}{||x||_p} : x \in \mathbf{R}^n,\ x \neq 0\}$$

gdzie $x \in \mathbf{R}^n$ $||\cdot||_p$, $p \in \mathbf{Z}$ jest wektorową p-normą, tzn. $||x||_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}$.

Wskaźnik uwarunkowania macierzy

Niech A będzie nieosobliwą macierzą $n \times n$. Rozważmy wpływ na dokładność uzyskanego rozwiązania układu równań liniowych $Ax = b$ (wyznaczonego z wykorzystaniem arytmetyki zmiennopozycyjnej) błędu zaokrąglenia ε wektora b. Błąd rozwiązania, związany z zaokrągleniem wektora b o wektor ε rozumie się jako $||A^{-1}\varepsilon||$, ponieważ $A^{-1}(b \pm \varepsilon) = A^{-1}b \pm A^{-1}\varepsilon = x \pm A^{-1}\varepsilon$.
Pomiaru możliwej dokładności dla uzyskanego rozwiązania względem prawdziwego rozwiązania $A^{-1}b$ można dokonać za pomocą wskaźnika uwarunkowania macierzy A.
Rozważmy relację błędu względnego dla rozwiązania $A^{-1}b$ oraz błędu względnego dla b:

$$\frac{||A^{-1}\varepsilon|| \setminus ||A^{-1}b||}{||\varepsilon|| \setminus ||b||}$$

co jest równoważne

$$(||A^{-1}\varepsilon|| \setminus ||\varepsilon||) \cdot (||b|| \setminus ||A^{-1}b||)$$

Jako, że oba czynniki iloczynu są dodatnie przyjmuje on wartość maksymalną przy $\sup\{\frac{||A^{-1}\varepsilon||}{||\varepsilon||} : \varepsilon \neq 0\}$ oraz $\sup\{\frac{||b||}{||A^{-1}b||} : A^{-1}b \neq 0\}$, biorąc pod uwagę, że $||b|| \setminus ||A^{-1}b|| = ||A \cdot A^{-1}b|| \setminus ||A^{-1}b||$, czyli przy wartościach równych odpowiednio wartościom norm indukowanych $||A^{-1}||$ oraz $||A||$.
Stąd też wskaźnik uwarunkowania nieosobliwej macierzy A definiuje się jako:

$$\kappa(A) = ||A^{-1}|| \cdot ||A||$$

Im wyższa wartość wskaźnika uwarunkowania macierzy A, $\kappa(A) \geqslant 1$, tym maksymalny relatywny błąd dla rozwiązania równania $Ax = b$ jest większy.

Algebra macierzy:

- Białas S., *Macierze. Wybrane problemy*, Wydawnictwa AGH, Kraków 2006
- Bierski F., *Struktury algebraiczne. Elementy algebry liniowej.*, Wydawnictwa AGH, Kraków 1999 (w szczególności rozdział 4)

Zastosowanie metod numerycznych w rozwiązywaniu układów równań liniowych i nie tylko:

- Kosiorowska M., Stanisz T., *Metody numeryczne*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków 2004
- Kiełbasiński A., Schwetlick H., *Numeryczna algebra liniowa*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1994

Dekompozycja LU kwadratowej macierzy A
Niech:
A – macierz kwadratowa, $\dim(A) = N \times N$
$A = LU$ – dekompozycja LU macierzy A
Algorytm Doolittle dla wyznaczenia dekompozycji LU:

1. $A^{(0)} = A$

2. dla $n = 1, \ldots, N-1$:
W celu określenia macierzy $A^{(n)}$, w macierzy $A^{(n-1)}$ dokonuje się za pomocą operacji elementarnych wyzerowania elementów leżących poniżej diagonali w n-tej kolumnie. Krok procedury można również wyrazić za pomocą działań macierzowych.
Przyjmując: $a_{i,n}^{(n-1)}$ – element na przecięciu i-tego wiersza oraz n-tej kolumny macierzy $A^{(n-1)}$ oraz dla $i = n+1, \ldots, n$:
$$-l_{i,n} = -\frac{a_{i,n}^{(n-1)}}{a_{n,n}^{(n-1)}}$$
gdzie $a_{n,n}^{(n-1)} \neq 0$
definiujemy macierz:
$$L_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & & \\ \vdots & & -l_{n+1,n} & & \vdots \\ & & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & & -l_{N,n} & & 1 \end{bmatrix}$$
Macierz $A^{(n)}$ (którą można wyznaczyć z wykorzystaniem wspomnianych operacji elementarnych) można również wyznaczyć za pomocą iloczynu macierzy:
$$A^{(n)} = L_n A^{(n-1)}$$

3. macierz A można wyrazić przez:
$$A = L_1^{-1} \underbrace{L_1 A^{(0)}}_{=A^{(1)}} = L_1^{-1} A^{(1)} = L_1^{-1} L_2^{-1} \underbrace{L_2 A^{(1)}}_{=A^{(2)}} = \ldots = L_1^{-1} \ldots L_{N-1}^{-1} A^{(N-1)}$$
Macierz $A^{(N-1)}$ jest macierzą górnotrójkątną, którą przyjmujemy za U:
$$U = A^{(N-1)}$$
Macierze L_n, $n = 1, \ldots, N-1$ są macierzami dolnotrójkątnymi, stąd też macierze do nich odwrotne L_n^{-1}, $n = 1, \ldots, N-1$ są także macierzami dolnotrójkątnymi. Ponadto iloczyn dwóch macierzy dolnotrójkątnych jest macierzą dolnotrójkątną, tym samym iloczyn $L_1^{-1} \ldots L_{N-1}^{-1}$ jest macierzą dolnotrójkątną, którą przyjmujemy za L:
$$L = L_1^{-1} \ldots L_{N-1}^{-1}$$
Można pokazać, że macierz L jest zadana następująco:
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ l_{2,1} & \ddots & \ddots & & & \\ & & 1 & & & \\ \vdots & & l_{n+1,n} & & & \vdots \\ & & \vdots & & 1 & 0 \\ l_{N,1} & & l_{N,n} & & l_{N,N-1} & 1 \end{bmatrix}$$

4. Dekompozycja macierzy A jest wyrażona przez: $A = LU$.

Nawiązując do kroku 2 algorytmu, w sytuacji, gdy $a_{n,n}^{(n-1)} = 0$, należy zamienić miejscami n-ty wiersz z innym wierszem macierzy, co można wyrazić za pomocą macierzy permutacji P, stąd w ogólności dekompozycja macierzy A, zadana jest jako: $P^{-1}A = LU$.
Rozwiązanie układu równań liniowych z kwadratową macierzą parametrów A, z wykorzystaniem dekompozycji LU:

- $Ax = b \Leftrightarrow LUx = b$,
- Przyjmując $Ux = y$, wyznaczamy rozwiązanie układu $Ly = b$,
- Podstawiając uzyskaną wartość y, wyznaczamy rozwiązanie układu $Ux = y$.

Dekompozycja QR macierzy A:
Dekompozycja polega na wyrażeniu macierzy A jako iloczynu macierzy ortonormalnej Q (tzn. takiej, dla której $Q'Q = I$) i macierzy górnotrójkątnej R:

$$A = QR$$

- Dla kwadratowej macierzy nieosobliwej A, przy dodatkowym założeniu, że wszystkie elementy diagonalne macierzy R są dodatnie, dekompozycja $A = QR$ jest wyrażona jednoznacznie. W sytuacji, gdy pierwsze k ($1 \leqslant k \leqslant n$) kolumn macierzy A tworzą wektory liniowo niezależne, pierwsze k kolumn macierzy Q tworzy bazę ortonormalną przestrzeni rozpinanej przez pierwsze k kolumn macierzy A. Fakt, iż początkowe k kolumn macierzy A zależy od początkowych k kolumn macierzy Q, wpływa na to, że macierz R dekompozycji ma postać górnotrójkątną.
  Rozwiązanie układu równań liniowych z kwadratową, nieosobliwą macierzą parametrów A, z wykorzystaniem dekompozycji QR:
  $Ax = b$
  $QRx = b \mid \cdot Q'$ lewostronnie
  $\underbrace{Q'Q}_{=I} Rx = Q'b$
  $Rx = Q'b$, dla którego to układu wyznaczamy rozwiązanie x spełniające równanie.
- W przypadku macierzy prostokątnej tzw. „pionowej” A, $\dim(A) = m \times n$, gdzie $m \geqslant n$, dekompozycja $A = QR$, zadana jest przez macierz ortonormalną Q o wymiarach $m \times m$ oraz macierz górnotrójkątną R o wymiarach $m \times n$, w której $(m - n)$ ostatnich wierszy składa się wyłącznie z zer. Tym samym wygodne jest wyrażenie macierzy Q i R w sposób blokowy:

$$A = QR = Q \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 R_1$$

  przy czym R_1 to macierz górnotrójkątna o wymiarach $n \times n$, 0 to macierz zerowa o wymiarach $(m - n) \times n$, natomiast Q_1 oraz Q_2 o wymiarach odpowiednio $m \times n$ oraz $m \times (m - n)$ to macierze o ortogonalnych kolumnach.
  Rozważmy nadokreślony układ równań liniowych $Ax = b$, taki, że $\dim(A) = m \times n$, $\dim(x) = n \times 1$, $\dim(b) = m \times 1$ oraz $rk(A) = n$, $rk(A|b) = n + 1$, tak więc $rk(A) \neq rk(A|b)$.
  W takim przypadku układ jest sprzeczny i nie ma rozwiązań. Poszukuje się więc takiego wektora x, który w przybliżeniu spełniałby relację $Ax \approx b$. Przyjmuje się, że jest to wektor x, który minimalizuje kryterium najmniejszych kwadratów: $||Ax - b||^2$, gdzie $||\cdot||$ jest wektorową normą euklidesową.
  Pomnożenie $(Ax - b)$ przez ortonormalną macierz Q' nie zmienia wartości normy $||Ax - b||$, stąd: $||Ax - b||^2 = ||Q'(Ax - b)||^2 = ||Rx - Q'b||^2 = || \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} Q_1'b \\ Q_2'b \end{bmatrix} ||^2 = || \begin{bmatrix} R_1x - Q_1'b \\ Q_2'b \end{bmatrix} ||^2 = ||R_1x - Q_1'b||^2 + ||Q_2'b||^2$.
  Drugi składnik ostatniego wyrażenia nie zależy od x, więc problem sprowadza się do minimalizacji wartości $||R_1x - Q_1'b||^2$.
  Wyrażenie $||R_1x - Q_1'b||^2$ przyjmuje wartość minimalną, wtedy i tylko wtedy, gdy $R_1x = Q_1'b$, czyli dla rozwiązania układu równań liniowych, w którym rolę macierzy parametrów pełni górnotrójkątna macierz R_1.
- W przypadku macierzy prostokątnej tzw. „poziomej” A, $\dim(A) = m \times n$, gdzie $n \geqslant m$. Można wykorzystać dekompozycję QR transpozycji macierzy A', która jest macierzą „pionową” o wymiarach $n \times n$: $A' = QR$. W związku z czym, $A = R'Q' = \begin{bmatrix} R_1' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1' \\ Q_2' \end{bmatrix}$.

Rozważmy niedookreślony układ równań liniowych $Ax = b$, taki, że $\dim(A) = m \times n$, $\dim(x) = n \times 1$, $\dim(b) = m \times 1$ oraz $rk(A) = rk(A|b) = m$.
W tej sytuacji układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań i jest spełniony dla dowolnego wektora z odpowiedniej podprzestrzeni wektorowej o wymiarze $n - r = n - m$, dla której należy określić wektory bazowe.
Biorąc pod uwagę, że w takim przypadku $A = R'Q'$, dla dowolnego x zachodzi $Ax = R'Q'x = \begin{bmatrix} R'_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q'_1 \\ Q'_2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} R'_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q'_1 \\ Q'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = R'_1 Q'_1 x_1 + 0 Q'_2 x_2$; przy czym $\dim(x_1) = m \times 1$, $\dim(x_2) = (n - m) \times 1$.
Tym samym układ $Ax = b$ można wyrazić przez: $R'_1 Q'_1 x_1 + 0 Q'_2 x_2 = b$, jako, że x_2 nie ma wpływu na wartość wyrażenia po lewej stronie układu, przyjmujemy, że $x_2 = 0$, stąd $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} (R'_1)^{-1} b \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 (R'_1)^{-1} b$, który jest jednym z możliwych rozwiązań bazowych.

Procedura ortogonalizacji Grama-Schmidta w wyznaczaniu dekompozycji QR. . . . (Podać algorytm)

Procedura wykorzystująca refleksję Householdera do wyznaczenia dekompozycji QR. . . . (Podać algorytm)