PARCIAL 2

~~33/4,98~~ 66/6/24 6,66 ~~0~~ /7/24

Teoría de números: Divisibilidad

$\mathbb{N} \rightarrow$ números naturales $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\mathbb{Z} \rightarrow$ números Enteros $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$n \in \mathbb{Z}$ ~~$\mathbb{Z}$~~ $\exists\, x \in \mathbb{N} \rightarrow x \in \mathbb{N}$

Pertenece

Existe
Por lo menos
1

$\forall x$

Para todo

Divisibilidad: $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}$
Si $a \mid b \leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \;/\; ak = b$

Divide

Tal que

Ej: $3 \mid 12$ porque $4 \cdot 3 = 12$
$2 \mid 18$ porque $9 \cdot 2 = 18$

Propiedades:

Para $a, b, c \in \mathbb{Z}$

a) Si $a \mid b$ y $a \mid c \rightarrow a \mid b+c$

b) Si $a \mid b$ y $k \in \mathbb{Z} \rightarrow a \mid kb$

c) Si $a \mid b$ y $b \mid c \rightarrow a \mid c$

Scribe

$n = 10a + b$ ← unidades

$2 \mid n \leftrightarrow 2 \mid b$ — Expresión Decimal hipótesis

$\hookrightarrow 2 \mid 10a + b \leftrightarrow 2 \mid b$

$\boxed{\text{P.D. } 2 \mid n}$

Axiomas

2) $2 \mid 10a + b$

3) Supongamos que $2 \mid b$ — Divisibilidad (3)

Inferencias

4) $b = 2 \cdot k_1$ — Sustituir (4,2)

5) $n = 10a + b = 10a + 2k_1$ — Factorizar (2,5)

6) $n = 2(5a + k_1)$ — $k_2 = 5a + k_1$

7) $n = 2k_2$ — Divisibilidad (7)

8) $2 \mid n$ (QED)

Divisibilidad entre 3 — Suma de los dígitos es Divisible entre 3

Si $n = \sum_{i=\phi}^{m} 10^{i} a_i$ (Expansión decimal)

$3 \mid n \leftrightarrow 3 \mid \sum_{i=\phi}^{m} a_i$

Divisibilidad entre 4 — Sus últimos 2 Dígitos son divisibles entre 4

$n = 100a + b$ $\quad b = 10c + d = 4k_1$

$4 \mid n \leftrightarrow 4 \mid 10c + d$

$4 \mid b \rightarrow b = 4 \cdot k_1$

$n = 100a + 4k_1$

$n = 4(25a + k_1)$

$\therefore 4 \mid n$

Divisibilidad entre 5 — Termina en ϕ o 5

Divisibilidad entre 7:

De forma recursiva, el (7) número resultante de quitar el doble producto de las unidades)

$$n = \sum_{i=0}^{m} 10^i a_i$$

$7 | n$

$7 | n \rightarrow 7 | n - 2a_{\phi}$

Criterio del 8

Últimos 3 dígitos divisibles entre 8

$$n = 10^{\log_2(k)} b + \sum_{i=\phi}^{\log_2(k)} 10^i a_i$$

$k | n$

$$k | n \leftrightarrow k | 10^{\log_2(k)} b + \sum_{i=\phi}^{\log_2(k)} 10^i a_i$$

$$k | n \equiv k | 10^{\log_2(k)} \cdot b + \underbrace{\sum_{i=\phi}^{\log_2(k)} 10^i a_i}_{C}$$

$$\boxed{k | n \leftrightarrow k | C \quad \forall C \in \sum_{i=\phi}^{\log_2(k)} 10^i a_i}$$

$$\boxed{k | n \leftrightarrow k | C \quad \forall C \in \sum_{i=\phi}^{\log_2(k)} 10^i a_i}$$

$$\boxed{n = 10^{\log_2(k)} b + C}$$

Scribe

$\forall \log_2(k) \in \mathbb{N}$ $\quad n = 10^{\log_2(k)} b + \underbrace{\sum_{i=0}^{\log_2(k)} 10^i a_i}_{c}$

$k \mid n \leftrightarrow k \mid c$

no se puede log

$\forall m \in \mathbb{N}$

$2^m \mid n \leftrightarrow 2^m \mid b$

$n = a_m 10^m + b$

$b = \sum_{i=0}^{m} 10^i a_i$

Tarea: Criterio de Divisibilidad del 11

$$\sum_{i=\log_{10}\left(\frac{11}{b}\right)}^{\log_{10}\left(\frac{11}{b}\right)} a_{i+z^i+z} - a_{i+z^i+1} = \phi \quad \sum_{i=\phi}^{\frac{\log_{10}\left(\frac{11k-c}{b}\right)}{2}} a_{i+z^i} - a_{i+z^i-1} = \phi$$

$$\left[\sum_{i=\phi}^{\log_{10}\left(\frac{11k+11-c}{b}\right)} a_{i+z^i} - a_{i+z^i-1} + \phi = \phi\right.$$

LQQD

CONGRUENCIAS

Teorema del residuo:

$\forall a, b \in \mathbb{N}, \exists q, r \ni b = q \cdot a + r$ donde $\phi \leq r < a$

No divisibilidad

$a \nmid b \leftrightarrow$ si $b = a \cdot q + r$, $\phi \leq r < a$ $\rightarrow r \neq \phi$

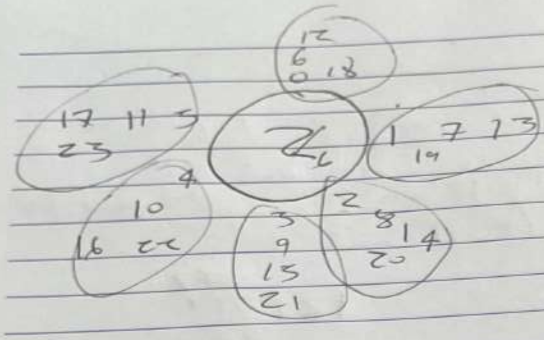
Notación

cociente $29 // 7 \equiv 29$ div 7

Residuo $29 \% 7 \equiv 29$ mod 7

	div 6	mod 6		div 6	mod 6
0	0	0	10	1	4
1	0	1	11	1	5
2	0	2		2	0
3	0	3	13	2	1
4	0	4	14	2	2
5	0	5	15	2	3
6	1	0	16	2	4
7	1	1	17	2	5
8	1	2	18	3	0
9	1	3	19	3	1

Scribe



~~Congruencias~~
Congruencias

$16 \bmod 6 = 22 \bmod 6$

$\Updownarrow$

$10 \equiv 22 \pmod 6$

Congruentes — Espacio $\mathbb{Z}_6$

Ejercicios:

✓a) $23 \equiv 19 \pmod 4$ →

$$4\overline{)23}\ \to 5,\quad 23-20 = 3 \qquad 4\overline{)19}\ \to 4,\quad 19-16 = 3 \qquad 3 \equiv 3$$

b) $123 \equiv 78 \pmod{11}$

$$11\overline{)123}\ \to 11,\quad 12-11=1,\quad 13-11 = 2 \qquad 11\overline{)78}\ \to 7,\quad 78-77 = 1 \qquad 2 \not\equiv 1$$

✓c) $3 \equiv 1 \pmod 2$

$$2\overline{)3}\ \to 1,\quad 3-2 = 1 \qquad 2\overline{)1}\ \to 0,\quad 1-0 = 1 \qquad 1 \equiv 1$$

✓d) $2 \equiv -1 \bmod (3)$

$$3\overline{)2}\ \to 0,\quad 2-0 = 2 \qquad 3\overline{)-1}\ \to -1,\quad -1-(-3) = 2 \qquad 2 \equiv 2$$

TAREA

¿Qué hora marca un reloj de 12 hr?

a) 80 hras después de las 11

$80 \bmod 12$

$12 \overline{)91}$
84
7

$91 \bmod 12 = 7$

b) 100 horas antes de las 6

$-94 \bmod 12 = 2$

$12 \overline{)-94}$
-96
2

② Comprueba si

a) $31 \equiv 19 \pmod 6$ V

b) $59 \equiv 18 \pmod 4$ F

c) $-11 \equiv 11 \pmod 5$ F

a) $6 \overline{)31}$ — 30 — 1; $6 \overline{)19}$ — 18 — 1; $1 \equiv 1$ V

b) $4 \overline{)59}$ — 4 — 19 — 16 — 3; $4 \overline{)18}$ — 16 — 2; $3 \not\equiv 2$ F

F c) $5 \overline{)-11}$ — -15 — 4; $5 \overline{)11}$ — 10 — 1; $4 \not\equiv 1$