

图像复原与重建

由投影重建图像

$$g(x,y)=h(x,y)*f(x,y)+\eta(x,y) \iff g=Hf+\eta$$
$$\begin{bmatrix} 50 & 24 & 33 & 39 \\ 79 & 12 & 14 & 20 \\ 103 & 102 & 98 & 32 \\ 210 & 101 & 19 & 17 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} g,f,\eta:M\times N\Rightarrow MN\times 1 \\ H:MN\times MN \end{matrix}$$

约束最小二乘方滤波

与维纳滤波相比

$$\min C=\sum_{i=1}^M\sum_{j=1}^N\left[\nabla^2f(x,y)\right]^2$$

subject to $\left\|g-H\hat{f}\right\|^2=\left\|\eta\right\|^2 \quad \left\|\eta\right\|^2=MN(\sigma_g^2+m_\eta^2)$

$$F(u,v)=\left[\frac{H^*(u,v)}{\left|H(u,v)\right|^2+\gamma}P(u,v)\right]G(u,v)$$
$$p(x,y)=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\text{FFT}} P(u,v)$$

维纳滤波的最优是平均意义上的，代数法是针对每一幅具体图像

确定未污染图像 f 的一个估计 \hat{f} ，使得他们之间的均方误差最小

$$e^2=E\left\{\left(f-\hat{f}\right)^2\right\}$$

$$F(u,v)=\left[\frac{1}{\left|H(u,v)\right|^2\left|H(u,v)\right|^2+S_g(u,v)/S_f(u,v)}\right]G(u,v)$$
$$F(u,v)=\left[\frac{1}{\left|H(u,v)\right|^2\left|H(u,v)\right|^2+K}\right]G(u,v)$$

最小均方误差（维纳）滤波

- 最简单且粗糙的恢复方法
- 降质图像频谱直接除以降质函数：
$$\hat{F}(u,v)=\frac{G(u,v)}{H(u,v)} \quad \hat{F}(u,v)=F(u,v)+\frac{N(u,v)}{H(u,v)}$$
- 由于 $N(u,v)$ 未知，即使得到降质函数 $H(u,v)$ ，也难以精确重建
- $H(u,v)$ 在某些位置为0或者是非常小的值， $F(u,v)$ 被淹没
 - 解决方法：限制频谱范围

逆滤波

估计退化函数 Estimating the Degradation Function

通过观测图像估计(Estimation by Image Observation)

通过实验估计(Estimation by Experimentation)

通过数学建模估计(Estimation by Modeling)

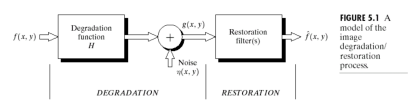
降质过程：
$$g(x,y)=H[f(x,y)]+\eta(x,y)$$

线性系统：
$$H[af(x,y)+bf_1(x,y)]=aH[f(x,y)]+bH[f_1(x,y)]$$

位置不变系统：
$$H[f(x-\alpha,y-\beta)]=g(x-\alpha,y-\beta)$$

线性位置不变降质模型：
$$g(x,y)=h(x,y)*f(x,y)+\eta(x,y)$$
$$G(u,v)=H(u,v)F(u,v)+N(u,v)$$

线性、位置不变的退化



图像退化/复原过程的模型

$$g(x,y)=h(x,y)*f(x,y)+\eta(x,y)$$
$$G(u,v)=H(u,v)F(u,v)+N(u,v)$$

线性位移不变系统，加性噪声

噪声模型

噪声的产生

- 图像获取：CCD相机
- 图像传输：无线传输

噪声的空域特性和频域特性

- 空域特性：噪声的直方图分布
- 频域特性：噪声在Fourier频谱上的分布

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\left(x-\mu\right)^2/2\sigma^2} \quad \text{《高斯噪声,正态》}$$
$$p(x)=\begin{cases} \frac{2}{b} & (x-a)(x-a)^2/b \text{ for } x\geq a \\ 0 & \text{for } x<a \end{cases} \quad \text{《瑞利噪声,正态》}$$
$$p(x)=\begin{cases} \frac{a^2}{(b-1)!}e^{-ax} & \text{for } x\geq 0 \\ 0 & \text{for } x<0 \end{cases} \quad \text{《厄兰噪声,正态》}$$
$$p(x)=\begin{cases} ae^{-ax} & \text{for } x\geq 0 \\ 0 & \text{for } x<0 \end{cases} \quad \text{《指数噪声,正态》}$$
$$p(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{if } a\leq x\leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{《均匀噪声,正态》}$$
$$p(x)=\begin{cases} p_0 & \text{for } x=a \\ p_1 & \text{for } x=b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{《椒盐噪声,正态》}$$

几种典型的噪声模型

高斯噪声 (Gaussian noise), 瑞利噪声(Rayleigh noise) 厄兰噪声(Erlang noise), 指数噪声(Exponential noise), 均匀噪声(Uniform noise), 椒盐噪声(salt-and-pepper)

用频率域消除周期噪声Periodic Noise Reduction by Frequency Domain Filtering

理想带阻滤波器(Ideal Bandreject Filters)

$$H(u,v)=\begin{cases} 1 & \text{if } D(u,v)<D_0-\frac{B}{2} \\ 0 & \text{if } D_0-\frac{B}{2}\leq D(u,v)\leq D_0+\frac{B}{2} \\ 1 & \text{if } D(u,v)>D_0+\frac{B}{2} \end{cases}$$

Butterworth带阻滤波器(Butterworth Bandreject Filters)

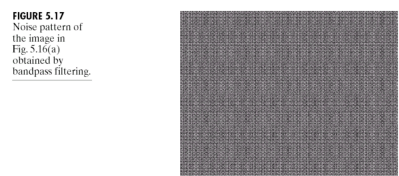
$$H(u,v)=\left[\frac{1}{1+\left[\frac{D(u,v)B}{D_0^2}\right]^2}\right]^N$$

高斯带阻滤波器(Gaussian Bandreject Filters)

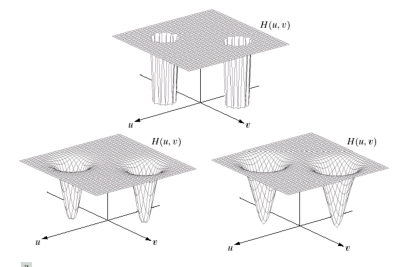
$$H(u,v)=1-e^{-\left[\frac{D(u,v)B}{D_0^2}\right]^2}$$

带阻滤波器(Bandreject Filters)

带通滤波器与带阻滤波器功能相反

$$H_B(u,v)=1-H_R(u,v)$$


带通滤波器(Bandpass Filters)



槽口滤波器(Notch Filters)

基于空域滤波的方法仅针对加性噪声

与空域增强原理相同

算术平均滤波器(Arithmetic mean filters)

$$\hat{f}(x,y)=\frac{1}{mn}\sum_{(s,t)\in S_{xy}}g(s,t)$$

几何平均滤波器(Geometric mean filter)

$$\hat{f}(x,y)=\left[\prod_{(s,t)\in S_{xy}}g(s,t)\right]^{\frac{1}{mn}}$$

调和平均滤波器(Harmonic mean filter)

$$\hat{f}(x,y)=\frac{1}{\sum_{(s,t)\in S_{xy}}\frac{1}{g(s,t)}}$$

反调和平均滤波器(Contraharmonic filter)

$$\hat{f}(x,y)=\frac{\sum_{(s,t)\in S_{xy}}g(s,t)^Q}{\sum_{(s,t)\in S_{xy}}g(s,t)^{Q+1}}$$

几种常用滤波器

均值滤波器 (Mean Filters)

中值滤波器(Median filter)

$$\hat{f}(x,y)=\text{median}\{g(s,t)\}_{(s,t)\in S_{xy}}$$

最大最小滤波器(Max and min filters)

$$\hat{f}(x,y)=\max_{(s,t)\in S_{xy}}\{g(s,t)\}$$
$$\hat{f}(x,y)=\min_{(s,t)\in S_{xy}}\{g(s,t)\}$$

中点滤波器(Midpoint filter)

$$\hat{f}(x,y)=\frac{1}{2}\left[\max_{(s,t)\in S_{xy}}\{g(s,t)\}+\min_{(s,t)\in S_{xy}}\{g(s,t)\}\right]$$

Alpha截取中值滤波器(Alpha-trimmed mean filter)

$$\hat{f}(x,y)=\frac{1}{mn-d}\sum_{(s,t)\in S_{xy}}g(s,t)$$

次序统计滤波器 (Order Statistic Filters)

自适应滤波器(Adaptive Filters)