きな区分
-Top)
校数学Ⅲ
>>定積分
と前後の項目
***
本
換積分法1
換積分法2
分積分法
分
式問題
分
.無理関数の定
定積分
関数の定積分
化式
める
**
まれた面積1
まれた面積
数)
まれた面積
数)
程式 ***
微分方程式
2階線形微分方
形)
2階線形微分
同次形)
面積 ***
長さ ***

■定数係数の２階線形微分方程式（非同次）

→ 携帯版は別頁

■非同次方程式とは

○　次の式
$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$
を「２階線形同次微分方程式」というのに対して，
$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$$
を「２階線形非同次微分方程式」といいます．

○　定数係数の２階線形微分方程式については，同次方程式は次の(1)の形，非同次方程式は(2)の形になります．
（a, b は定数の係数）
$$y''+ay'+by=0 \cdots(1)$$
$$y''+ay'+by=R(x) \cdots(2)$$
⇒ y'', y', y 以外に関数 $R(x)$ が付いているのが「非同次形」

○　微分方程式を満たす１つの解を特殊解（特別解）という．…これはたまたま見つかった１つの解でよい．
非同次方程式(2)の一般解について，次の定理が成り立ちます．

【定理】
　非同次方程式
$$y''+ay'+by=R(x) \cdots(2)$$
の特殊解に，
　同次方程式
$$y''+ay'+by=0 \cdots(1)$$
の一般解を加えると，非同次方程式(2)の一般解が得られます．

（解説）
(2)式の特殊解を y_0，(1)の一般解を y_1 とおくと，
$$y_0''+ay_0'+by_0=R(x)$$
$$y_1''+ay_1'+by_1=0$$
したがって，$y=y_0+y_1$ とおくと，
$$\begin{aligned}&y''+ay'+by\\&=(y_0+y_1)''+a(y_0+y_1)'+b(y_0+y_1)\\&=(y_0''+ay_0'+by_0)+(y_1''+ay_1'+by_1)\\&=R(x)\end{aligned}$$
が成り立ち，(1)の一般解 y_1 は任意定数を２つ含んでいるから，この y は(2)の一般解になります．

※　(1)の一般解が右の（まとめ）のように求まるので，非同次方程式(2)の特殊解を（偶然でもよいからとにかく１つ）見つけると，それらの和により非同次方程式(2)の一般解が得られることになります．

（前頁のまとめ）
【定数係数の２階線形同次形微分方程式の一般解】
　a, b を定数とするとき，微分方程式
$$y''+ay'+by=0 \cdots(1)$$
の一般解は，２次方程式
$$r^2+ar+b=0 \cdots(*)$$
の解によって表すことができ，

1. (*)が異なる２つの実数解 p, q をもつとき
$$y=C_1e^{px}+C_2e^{qx}$$
2. (*)が異なる２つの虚数解 $h\pm ki$ をもつとき
$$y=e^{hx}(C_1\cos kx+C_2\sin kx)$$
3. (*)が重解 p をもつとき
$$y=e^{px}(C_1+C_2x)$$
となる．

【例１】
$y''-3y'+2y=1$ の一般解を求めるには
まず，同次方程式 $y''-3y'+2y=0$ の一般解を求めると
　$r^2-3r+2=0$ の解は $r=1, 2$ だから
　右のまとめ1.により
$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$$
次に，非同次方程式 $y''-3y'+2y=1$ の特殊解を求めると（どのように求めるかは後述）
$$y=\frac{1}{2}$$
これらの和を作ると，元の方程式の一般解は
$$y=\frac{1}{2}+C_1e^x+C_2e^{2x}$$

【例２】
$y''-4y'+4y=x$ の一般解を求めるには
まず，同次方程式 $y''-4y'+4y=0$ の一般解を求めると
　$r^2-4r+4=0$ の解は $r=2$（重解）だから
　上のまとめ3.により
$$y=e^{2x}(C_1+C_2x)$$
次に，非同次方程式 $y''-4y'+4y=x$ の特殊解を求める（どのように求めるかは後述）
$$y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$$
これらの和を作ると，元の方程式の一般解は
$$y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}+e^{2x}(C_1+C_2x)$$

■非同次方程式の特殊解の求め方

　上記のように，２階線形非同次微分方程式の一般解を求めるためには，１つの特殊解を求めればよい．
　この特殊解（１つの解）を「一発で求めよう」とすると，少し複雑なことを覚えなければならない．ここでは，もう少し気楽に考えて，

1回か2回なら失敗してもよい
と考える（試行錯誤を受け入れる）ことにより，
覚えることを減らす作戦とします．

【要点】
(1)
ある関数 y，その導関数 y' 及び第2次導関数 y'' の定数倍を加えたものは，元の関数 y の形を反映している．
したがって，$y''+ay'+by$ が $R(x)$ に等しくなるのは，関数 y 自身が $R(x)$ の形と深い関係があるときです．
○ y が多項式 ⇒ y', y'' も多項式
⇒ $y''+ay'+by$ は多項式
○ $y=e^{kx}$ ⇒ $y'=..e^{kx}, y''=..e^{kx}$
⇒ $y''+ay'+by=...e^{kx}$
○ $y=\sin kx$ ⇒ $y'=..\cos kx, y''=..\sin kx$
⇒ $y''+ay'+by=...\sin kx+...\cos kx$

(2) …ここが試行錯誤ありの求め方…運が悪くても，2回の失敗で解答にたどり着けます
1)　多項式，指数関数，三角関数，…
で試してみて未定係数が定まればそれを解答とする．

2)　上記の係数 a, b 及び k の組合せにより未定係数が定まらないときは，
x ×多項式，x ×指数関数，x ×三角関数，…
を試してみます．

3)　それでもダメなときは，
x^2 ×多項式，x^2 ×指数関数，x^2 ×三角関数，…
を試してみます．

※　限りなく続くわけではなく，3)までで解けます．

【例－右辺が多項式のもの1】
$y''+y'+2y=3$ の1つの特殊解を求めてください．

（解答）
右辺 $R(x)=3$ の形に合わせて
$y=A$
の形で試してみる（未定係数 A を求めることが，ここでの目標）
$y'=0$
$y''=0$
となるから
$y''+y'+2y=0+0+2A=2A$
これが3に等しくなるには
$2A=3$
$A=\frac{3}{2}$
ゆえに
$y=\frac{3}{2}$ …（答）

（検算）
$y=\frac{3}{2}$ のとき
$y'=y''=0$ だから
$y''+y'+2y=0+0+2\times\frac{3}{2}=3$
が成り立ちます．

【例－右辺が多項式のもの2】
$y''+3y'=2$ の1つの特殊解を求めてください．

$y''+ay'+by=c\ (\neq 0)$ （a, b, c は与えられた係数）において，$b=0$ のときは，$y=A$ （A は未定係数）とおいたとしても，$y'=y''=0$ により
左辺 $y''+ay'+by=0+0+bA=bA$ は $c\ (\neq 0)$ に等しくなることはできません．
（$A=\frac{c}{b}$ とはできない）
この場合は，$y=Ax$ を試します．

（解答）
（試してみてダメな部分）
右辺 $R(x)=2$ の形に合わせて
$y=A$
の形で試してみると，
$y'=0$
$y''=0$
となるから
$y''+3y'=0+0$ となって，どんな定数 A を持ってきても $c\ (\neq 0)$ に等しくなることはできません．

【例－右辺が多項式のもの3】
$y''+4y'-5y=6x$
の1つの特殊解を求めてください．

○　右辺が1次式のときは，一般の1次式 $y=Ax+B$ を試します．
○　右辺が2次式のときは，一般の2次式 $y=Ax^2+Bx+C$ を試します．
○　3次以上のときも同様です．

（解答）
$y=Ax+B$ とおくと
$y'=A$
$y''=0$
となるから
$y''+4y'-5y$
$=0+4A-5(Ax+B)$
$=(-5A)x+(4A-5B)$
これが，右辺の $6x$ に等しくなるには
$$\begin{cases} -5A=6 & \cdots(1) \\ 4A-5B=0 & \cdots(2) \end{cases}$$
$A=-\frac{6}{5}$
$B=-\frac{24}{25}$
ゆえに
$y=-\frac{6}{5}x-\frac{24}{25}$ …（答）

【例－右辺が多項式のもの4】
$y''-3y'+y=2x^2$
の1つの特殊解を求めてください．

（解答）
$y=Ax^2+Bx+C$ とおくと
$y'=2Ax+B$
$y''=2A$
となるから
$y''-3y'+y$
$=2A-3(2Ax+B)+(Ax^2+Bx+C)$
$=Ax^2+(-6A+B)x+(2A-3B+C)$
これが，右辺の $2x^2$ に等しくなるには
$$\begin{cases} A=2 & \cdots(1) \\ -6A+B=0 & \cdots(2) \\ 2A-3B+C=0 & \cdots(3) \end{cases}$$
$A=2, B=12, C=32$
ゆえに
$y=2x^2+12x+32$ …（答）

【例－右辺が多項式のもの5】
$y''-2y'=3x-4$
の1つの特殊解を求めてください．

$y=Ax+B$ とおくと，係数 A, B が定まりませんので，$y=x(Ax+B)$ で試します．

（解答）
$y=x(Ax+B)=Ax^2+Bx$ とおくと
$y'=2Ax+B$
$y''=2A$
となるから
$y''-2y'$
$=2A-2(2Ax+B)$
$=(-4A)x+(2A-2B)$
これが，右辺の $3x-4$ に等しくなるには
$$\begin{cases} -4A=3 & \cdots(1) \\ 2A-2B=-4 & \cdots(2) \end{cases}$$
$A=-\frac{3}{4}, B=\frac{5}{4}$
ゆえに

$y=Ax$ とおくと

$y'=A$

$y''=0$

となるから

$y''+3y'=0+3A=3A$

これが，右辺の 2 に等しくなるには

$3A=2$

$A=\frac{2}{3}$

ゆえに

$y=\frac{2}{3}x$ …（答）

（検算）

$y=\frac{2}{3}x$ のとき

$y'=\frac{2}{3}$, $y''=0$ だから

$y''+3y'=0+3\times\frac{2}{3}=2$

が成り立ちます．

右に続く→

$y=x(-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4})$ …（答）

○　$y=e^{kx}$ を微分すると y' や y'' に e^{kx} が登場しますので，$R(x)=..e^{kx}$ のときは，$y=Ae^{kx}$ を試してみます

【例－右辺が指数関数のもの１】

$y''+2y'-3y=e^{2x}$

の１つの特殊解を求めてください．

（解答）

$y=Ae^{2x}$ とおくと

$y'=2Ae^{2x}$

$y''=4Ae^{2x}$

となるから

$y''+2y'-3y$

$=4Ae^{2x}+4Ae^{2x}-3Ae^{2x}=5Ae^{2x}$

これが，右辺の e^{2x} に等しくなるには

$5A=1$

$A=\frac{1}{5}$

ゆえに

$y=\frac{1}{5}e^{2x}$ …（答）

【例－右辺が指数関数のもの２】

$y''-4y'-5y=e^{5x}$

の１つの特殊解を求めてください．

（解答）

$y''+ay'+by=c\,e^{dx}$ （$a,b,c\neq0,d\neq0$ は与えられた定数）

において，$y=Ae^{dx}$ とおくと

$y'=dAe^{dx}$

$y''=d^2Ae^{dx}$

となるから

$y''+ay'+by=A(d^2+ad+b)e^{dx}$

となり，これが方程式の右辺の $c\,e^{dx}$ と等しくなるためには

$A(d^2+ad+b)=c\ (\neq0)$

でなければなりませんが，

$d^2+ad+b=0$ （← d が特性方程式の解であるとき）

のときは，係数 A が定まらないので，$y=Axe^{dx}$ を試します

$y=Axe^{5x}$ とおくと

$y'=A(e^{5x}+5xe^{5x})=Ae^{5x}(1+5x)$

$y''=A(5e^{5x}(1+5x)+e^{5x}(5))=Ae^{5x}(10+25x)$

となるから

$y''-4y'-5y$

$=Ae^{5x}(10+25x-4-20x-5x)=6Ae^{5x}$

これが，右辺の e^{5x} に等しくなるには

$6A=1$

$A=\frac{1}{6}$

ゆえに

$y=\frac{1}{6}x\,e^{5x}$ …（答）

○　$\sin kx$ や $\cos kx$ を微分すると $\cos kx$ と $\sin kx$ が交互に登場しますので，$R(x)=\sin kx$ だからといって，$y=A\sin kx$ だけで解決するとは限らず，$R(x)=\cos kx$ だからといって，$y=A\cos kx$ だけで解決するとは限りません．特に，$b\neq0$ のとき，逆の側が登場します．

⇒ 三角関数が登場する場合には，$y=A\sin kx+B\cos kx$ を想定して係数を合わせます．

【例－右辺が三角関数のもの１】

$y''-3y'+2y=20\sin 2x$

の１つの特殊解を求めてください．

（解答）

$y=A\sin 2x+B\cos 2x$ とおくと

$y'=2A\cos 2x-2B\sin 2x$

$y''=-4A\sin 2x-4B\cos 2x$

となるから

$y''-3y'+2y$

$=(-4A\sin 2x-4B\cos 2x)-3(2A\cos 2x-2B\sin 2x)$

$+2(A\sin 2x+B\cos 2x)$

$=(-2A+6B)\sin 2x+(-6A-2B)\cos 2x$

(*) 一般に，p,q,r,s が未定係数であるとき，次のように係数比較できます．

$p\sin nx+q\cos nx=0$ が恒等式（１つの x に対してでなく，すべての x に対して成り立つとき）

$\Leftrightarrow\ p=q=0$

$p\sin nx+q\cos nx=r\sin nx+s\cos nx$ が恒等式

$\Leftrightarrow\ p=r,\ q=s$

これが，右辺の $20\sin 2x$ に等しくなるには

$$\begin{cases}-2A+6B=20 & \cdots(1)\\ -6A-2B=0 & \cdots(2)\end{cases}$$

$A=-1,\ B=3$

ゆえに

$y=-\sin 2x+3\cos 2x$ …（答）

上記の(*)の証明

三角関数の合成公式により

$p\sin nx+q\cos nx=\sqrt{p^2+q^2}\ \sin(nx+\alpha)$

と書けるから，これがつねに 0 となるのは

$p=q=0$ の場合に限る．

（別の証明）

$p\sin nx+q\cos nx=0$ がすべての x に対して成り立つならば，当然 $x=0,\ x=\frac{\pi}{2n}$ のときも成り立つはずだから

$x=0$ を代入すると $q=0$

$x=\frac{\pi}{2n}$ を代入すると $p=0$ （以上は必要条件）

逆に，$p=q=0$ のとき $p\sin nx+q\cos nx=0$ が成り立つのは明らか．（十分条件も満たす）

（２番目の式）

$p\sin nx+q\cos nx=r\sin nx+s\cos nx$

$\Leftrightarrow\ (p-r)\sin nx+(q-s)\cos nx=0$ だから，

上の結果により

$p\sin nx+q\cos nx=r\sin nx+s\cos nx$

$\Leftrightarrow\ p=r,\ q=s$

【問題１】

次の微分方程式の特殊解を求めてください．

$y''+2y'+3y=4$

$y=1$　$y=2$　$y=\frac{2}{3}$　$y=\frac{3}{2}$　$y=\frac{4}{3}$

【問題３】
次の微分方程式の特殊解を求めてください．
$y''-2y'+y=e^{3x}$

$y=\frac{1}{4}e^{3x}$　$y=\frac{1}{2}e^{3x}$
$y=e^{3x}$　$y=x\,e^{3x}$　$y=\frac{x}{2}e^{3x}$

【問題２】
次の微分方程式の特殊解を求めてください．
$y''-2y'=1$

$y=1$　$y=-\frac{1}{2}$　$y=\frac{1}{2}$　$y=-\frac{x}{2}$　$y=\frac{x}{2}$

【問題４】
次の微分方程式の特殊解を求めてください．
$y''-4y'+4y=e^{2x}$

$y=\frac{1}{2}e^{2x}$　$y=\frac{1}{2}xe^{2x}$　$y=\frac{1}{2}x^2e^{2x}$
$y=\frac{1}{4}e^{2x}$　$y=\frac{1}{4}xe^{2x}$

【問題５】
次の微分方程式の特殊解を求めてください．
$y''+y=\sin 2x$

$y=\sin 2x$　$y=\frac{1}{2}\sin 2x$　$y=\frac{1}{3}\sin 2x$
$y=-\frac{1}{2}\sin 2x$　$y=-\frac{1}{3}\sin 2x$

【問題６】
次の微分方程式の特殊解を求めてください．
$y''-2y'+3y=\cos x$

$y=\frac{1}{3}\cos x$　$y=\frac{1}{2}\sin x$　$y=\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{4}\cos x$
$y=-\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{4}\cos x$　$y=-\frac{1}{4}\sin x-\frac{1}{4}\cos x$

○　非同次方程式において，右辺が幾つかの関数の和差及びそれらの定数倍になっているとき，元の非同次方程式の特殊解は，個別に求めた特別解の和差及びそれらの定数倍により求められます．

【例】
$y''-4y'+8y=3x+5e^{2x}$
の１つの特殊解を求めてください．

【重ね合わせの原理】
非同次方程式
$y''+ay'+by=R_1(x)$ …(1)
の解を y_1 とし，
非同次方程式
$y''+ay'+by=R_2(x)$ …(2)
の解を y_2 とするとき，
$y=C_1y_1+C_2y_2$
は，非同次方程式
$y''+ay'+by=C_1R_1(x)+C_2R_2(x)$ …(3)
の解となる．

例えば，
$y''+ay'+by=4e^{3x}+5\cos 2x$
の特殊解を求めたいとき
$y''+ay'+by=e^{3x}$
の特殊解 y_1 と
$y''+ay'+by=\sin 2x$
の特殊解 y_2 をそれぞれ求めておくと，
元の方程式の解は
$y=4y_1+5y_2$ で得られます．
※　これにより，別々に求めて定数倍の和差を作ればよい．

（証明）
$y_1''+ay_1'+by_1=R_1(x)$
$y_2''+ay_2'+by_2=R_2(x)$
のとき
$y=C_1y_1+C_2y_2$
とおくと
$$\begin{aligned}y''+ay'+by&=(C_1y_1''+C_2y_2'')\\&+a(C_1y_1'+C_2y_2')\\&+b(C_1y_1+C_2y_2)\\&=C_1(y_1''+ay_1'+by_1)+C_2(y_2''+ay_2'+by_2)\\&=C_1R_1(x)+C_2R_2(x)\end{aligned}$$
が成り立ちます．

（解答）
(1) $y''-4y'+8y=x$ の特殊解 y_1 を求める．
$y_1=Ax+B$ とおくと
$y_1'=A$
$y''=0$
となるから
$y_1''-4y_1'+8y_1=-4A+8(Ax+B)=(8A)x+(-4A+8B)$
これが，x に等しくなるには
$$\begin{cases}8A=1\\-4A+8B=0\end{cases}$$
$A=\frac{1}{8},\ B=\frac{1}{16}$
したがって，
$y_1=\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}$
(2) $y''-4y'+8y=e^{2x}$ の特殊解 y_2 を求める．
$y_2=Ae^{2x}$ とおくと
$y_2'=2Ae^{2x}$
$y''=4Ae^{2x}$
となるから
$y_2''-4y_2'+8y_2=4Ae^{2x}$
これが，e^{2x} に等しくなるには
$4A=1$
$A=\frac{1}{4}$
したがって，
$y_2=\frac{1}{4}e^{2x}$
(1)(2)より
$3y_1+5y_2=\frac{3}{8}x+\frac{3}{16}+\frac{5}{4}e^{2x}$ …（答）

【問題７】
次の微分方程式の特殊解を求めてください．
$y''-3y'+2y=4x-e^x\cos x$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$
$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)$
$y=2x+3+\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$
$y=2x-3+e^x(\sin x-\cos x)$

【問題８】
次の微分方程式の特殊解を求めてください．
$y''+3y'-2y=x+4e^x-5\sin x$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}+2e^x+\frac{5}{6}(\sin x+\cos x)$
$y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}+2e^x+\frac{5}{6}(\sin x+\cos x)$
$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}-2e^x+\frac{5}{6}(\sin x-\cos x)$
$y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}-2e^x+\frac{5}{6}(\sin x-\cos x)$

○　この頁の先頭部分で述べましたように，非同次方程式の特殊解と同次方程式の一般解がわかれば，非同次方程式の一般解が求められます．
○　一般解が求まれば，与えられた初期条件を満たす特殊解も求められることになります．

【問題９】
次の微分方程式の一般解を求めてください．
$y''-y'-2y=2+3e^x$

$y=2+3e^{-x}+C_1e^x+C_2e^{-2x}$
$y=-1-\frac{3}{2}e^x+C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$
$y=-1-\frac{3}{2}e^{-x}+C_1e^x+C_2e^{-2x}$

【問題10】
次の微分方程式の解で，初期条件 $y(0)=y'(0)=0$ を満たすものを求めてください．
$y''-y=\sin x+x$

$y=-\frac{1}{2}\sin x-x-\frac{3}{4}e^{-x}+\frac{3}{4}e^x$
$y=-\frac{1}{2}\sin x+x-\frac{3}{4}e^{-x}+\frac{3}{4}e^x$
$y=\frac{1}{2}\sin x-x-\frac{3}{4}e^{-x}+\frac{3}{4}e^x$
$y=\frac{1}{2}\sin x+x-\frac{3}{4}e^{-x}+\frac{3}{4}e^x$

$y=2+3e^{-x}+C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$

定数係数.２階線形.非同次.微分方程式［例と解］

$y"+ay'+by=R(x)$において

R(x)が

1. 定数や多項式， 2. 指数関数， 3. 三角関数，

4. これらの組合せ

(1) $D=a^2-4b>0$, (2) $D=a^2-4b<0$

(3) $D=a^2-4b=0$

のできるだけ多くの組合せで方程式と一般解を示す.

1.(1)1 …R(x)が定数，$D=a^2-4b>0$ の場合

$y"-5y'+6y=3$

一つの特殊解を求める

$y=A$とおくと

$y'=0,\ y"=0$だから

$y"-5y'+6y=0-0+6A=3$

$A=\frac{1}{2}$

したがって，一つの特殊解は，

$y=\frac{1}{2}$

次に，同次方程式 $y"-5y'+6y=0$の一般解を求める

２次方程式 $r^2-5r+6=0$の解は，$r=2, 3$であるから，一般解は

$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

（参考）

→定数係数の２階.線形.同次.微分方程式

$y"+ay'+by=0$が異なる２つの実数解 $r=p, q$

を持つときの一般解は

$y=C_1e^{px}+C_2e^{qx}$

結局，初めの非同次方程式 $y"-5y'+6y=3$の一般解は

$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{2}$…（答）

1.(1)2 …R(x)が１次式，$D=a^2-4b>0$ の場合

$y"-4y'+y=x+2$

一つの特殊解を求める

$y=Ax+B$とおくと

$y'=A,\ y"=0$だから

$y"-5y'+6y=0-4A+Ax+B=x+2$

係数比較により

$A=1,\ -4A+B=2$

$A=1,\ B=6$

したがって，一つの特殊解は，

$y=x+6$

次に，同次方程式 $y"-4y'+y=0$の一般解を求める

２次方程式 $r^2-4r+1=0$の解は，$r=2\pm\sqrt{3}$であるから，一般解は

$y=C_1e^{(2-\sqrt{3})x}+C_2e^{(2+\sqrt{3})x}$

（参考）

→定数係数の２階.線形.同次.微分方程式

$y"+ay'+by=0$が異なる２つの実数解 $r=p, q$

を持つときの一般解は

$y=C_1e^{px}+C_2e^{qx}$

結局，初めの非同次方程式 $y"-4y'+y=x+2$の一般解は

$y=C_1e^{(2-\sqrt{3})x}+C_2e^{(2+\sqrt{3})x}+x+6$…（答）

1.(2)1 …R(x)が２次式，$D=a^2-4b<0$ の場合

$y"+2y'+4y=x^2$

一つの特殊解を求める

1.(3)1 …R(x)が２次式，$D=a^2-4b=0$ の場合

$y"-2y'+y=x^2+x$

一つの特殊解を求める

$y=Ax^2+Bx+C$ とおくと

$y'=2Ax,\ y''=2A$ だから

$$y''+2y'+4y$$
$$=2A+4Ax+2B+4Ax^2+4Bx+4C$$
$$=x^2$$

係数比較により

$$4A=1,\ 4A+4B=0,\ 2A+2B+4C=0$$
$$A=\frac{1}{4},\ B=-\frac{1}{4},\ C=0$$

したがって，一つの特殊解は，

$$y=\frac{x^2-x}{4}$$

次に，同次方程式 $y''+2y'+4y=0$ の一般解を求める

２次方程式 $r^2+2r+4=0$ の解は，$r=-1\pm\sqrt{3}i$ であるから，一般解は

$$y=e^{-x}(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x)$$

（参考）

→定数係数の２階.線形.同次.微分方程式

$y''+ay'+by=0$ が虚数解 $r=h+ki$ を持つときの一般解は

$y=e^{hx}(C_1\cos kx+C_2\sin kx)$

結局，初めの非同次方程式 $y''+2y'+4y=x^2$ の一般解は

$$y=e^{-x}(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x)+\frac{x^2-x}{4}\cdots$$（答）

$y=Ax^2+Bx+C$ とおくと

$y'=2Ax,\ y''=2A$ だから

$$y''-2y'+y$$
$$=2A-4Ax-2B+Ax^2+Bx+C$$
$$=x^2+x$$

係数比較により

$$A=1,\ -4A+B=1,\ 2A-2B+C=0$$
$$A=1,\ B=5,\ C=8$$

したがって，一つの特殊解は，

$$y=x^2+5x+8$$

次に，同次方程式 $y''-2y'+y=0$ の一般解を求める

２次方程式 $r^2+2r+4=0$ の解は，$r=1$（重解）であるから，一般解は

$$y=e^x(C_1+C_2x)$$

（参考）

→定数係数の２階.線形.同次.微分方程式

$y''+ay'+by=0$ が重解 $r=p$ を持つときの一般解は

$y=e^{px}(C_1+C_2x)$

結局，初めの非同次方程式 $y''-2y'+y=x^2+x$ の一般解は

$$y=e^x(C_1+C_2x)++x^2+5x+8\cdots$$（答）

2.(1)1 …R(x)が指数関数，$D=a^2-4b>0$ の場合

$$y''-2y'=e^{3x}$$

一つの特殊解を求める

右辺が e^{3x} だから $y=Ae^{3x}$ とおくと

$y'=3Ae^{3x},\ y''=9Ae^{3x}$ だから

$$y''-2y'=9Ae^{3x}-6Ae^{3x}=e^{3x}$$

係数比較により

$$3A=1$$
$$A=\frac{1}{3}$$

したがって，一つの特殊解は，

$$y=\frac{1}{3}e^{3x}$$

次に，同次方程式 $y''-2y'=0$ の一般解を求める

２次方程式 $r^2-2r=0$ の解は，$r=0,2$ であるから，一般解は

$$y=C_1e^0+C_2e^{2x}=C_1+C_2e^{2x}$$

（参考）

→定数係数の２階.線形.同次.微分方程式

$y''+ay'+by=0$ が異なる２つの実数解 $r=p,q$ を持つときの一般解は

$y=C_1e^{px}+C_2e^{qx}$

結局，初めの非同次方程式 $y''-2y'=e^{3x}$ の一般解は

$$y=C_1+C_2e^{2x}+\frac{1}{3}e^{3x}\cdots$$（答）

2.(2)1 …R(x)が指数関数，$D=a^2-4b<0$ の場合

$$y''-y'+y=e^{-x}$$

一つの特殊解を求める

右辺が e^{-x} だから $y=Ae^{-x}$ とおくと

$y'=-Ae^{x},\ y''=Ae^{-x}$ だから

$$y''-y'+y=Ae^{-x}+Ae^{-x}+Ae^{-x}=e^{-x}$$

係数比較により

$$3A=1$$
$$A=\frac{1}{3}$$

したがって，一つの特殊解は，

$$y=\frac{1}{3}e^{-x}$$

次に，同次方程式 $y''-y'+y=0$ の一般解を求める

２次方程式 $r^2-2r+1=0$ の解は，虚数解 $r=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ であるから，一般解は

$$y=e^{\frac{x}{2}}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

（参考）

→定数係数の２階.線形.同次.微分方程式

$y''+ay'+by=0$ が虚数解 $r=h+ki$ を持つときの一般解は

$y=e^{hx}(C_1\cos kx+C_2\sin kx)$

結局，初めの非同次方程式 $y''-2y'+y=e^{-x}$ の一般解は

$$y=e^{\frac{x}{2}}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)+\frac{1}{3}e^{-x}\cdots$$（答）

2.(3)1 …R(x)が指数関数，$D=a^2-4b=0$ の場合

$$y''+4y'+4y=e^{5x}$$

一つの特殊解を求める

$y=Ae^{5x}$ とおくと

$y'=5Ae^{5x},\ y''=25Ae^{5x}$ だから

$$y''+4y'+4y=25Ae^{5x}+20Ae^{5x}+4Ae^{5x}$$
$$=49Ae^{5x}=e^{5x}$$

係数比較により

$$A=\frac{1}{49}$$

したがって，一つの特殊解は，

$$y=\frac{1}{49}e^{5x}$$

次に，同次方程式 $y''+4y'+4y=0$ の一般解を求める

２次方程式 $r^2+4r+4=0$ の解は，$r=-2$（重解）であるから，一般解は

$$y=e^{-2x}(C_1+C_2x)$$

（参考）

→定数係数の２階.線形.同次.微分方程式

3.(1)1 …R(x)が三角関数，$D=a^2-4b>0$ の場合

$$y''-3y'-4y=2\cos 3x$$

一つの特殊解を求める

$y=A\cos 3x+B\sin 3x$ とおくと

$y'=-3A\sin 3x+3B\cos 3x$

$y''=-9A\cos 3x-9B\sin 3x$ だから

$$y''-3y'-4y$$
$$=(-13A-9B)\cos 3x+(9A-13B)\sin 3x$$
$$=2\cos 3x$$

係数比較により

$$-13A-9B=2,\ 9A-13B=0$$
$$A=-\frac{13}{125},\ B=-\frac{9}{125}$$

したがって，一つの特殊解は，

$$y=-\frac{13\cos 3x+9\sin 3x}{125}$$

次に，同次方程式 $y''-3y'-4y=0$ の一般解を求める

２次方程式 $r^2-3r-4=0$ の解は，$r=-1,4$ であるから，一般解は

$y''+ay'+by=0$ が重解 $r=p$ を持つときの一般解は
$y=e^{px}(C_1+C_2x)$

結局，初めの非同次方程式 $y''+4y'+4y=e^{5x}$ の一般解は

$y=e^{px}(C_1+C_2x)+\frac{1}{49}e^{5x}$ …（答）

$y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$

（参考）
→定数係数の２階.線形.同次.微分方程式
$y''+ay'+by=0$ が異なる２つの実数解 $r=p, q$ を持つときの一般解は
$y=C_1e^{px}+C_2e^{qx}$

結局，初めの非同次方程式 $y''-2y'=e^{3x}$ の一般解は

$y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}-\frac{13\cos 3x+9\sin 3x}{125}$ …（答）

3.(2)1 …R(x)が三角関数，$D=a^2-4b<0$ の場合
$y''-2y'+4y=\sin x$

一つの特殊解を求める

$y=A\cos x+B\sin x$ とおくと
$y'=-A\sin x+\cos x$, $y''=-A\cos x-B\sin x$
だから
$y''-2y'+4y$
$=(3A-2B)\cos x+(2A+3B)\sin x=\sin x$
係数比較により
$3A-2B=0, 2A+3B=1$
$A=\frac{2}{13}$, $B=\frac{3}{13}$
したがって，一つの特殊解は，
$y=\frac{2\cos x+3\sin x}{13}$

次に，同次方程式 $y''-2y'+4y=0$ の一般解を求める

２次方程式 $r^2-2r+4=0$ の解は，虚数解
$r=1\pm\sqrt{3}i$ であるから，一般解は
$y=e^x(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x)$

（参考）
→定数係数の２階.線形.同次.微分方程式
$y''+ay'+by=0$ が虚数解 $r=h+ki$ を持つときの一般解は
$y=e^{hx}(C_1\cos kx+C_2\sin kx)$

結局，初めの非同次方程式 $y''-2y'+4y=\sin x$ の一般解は

$y=e^x(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x)+\frac{2\cos x+3\sin x}{13}$ …（答）

3.(3)1 …R(x)が三角関数，$D=a^2-4b=0$ の場合
$y''-6y'+9y=\cos 2x$

一つの特殊解を求める

$y=A\cos 2x+B\sin 2x$ とおくと
$y'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x$
$y''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x$ だから
$y''-6y'+9y=-4A\cos 2x-4B\sin 2x$
$+12A\sin 2x-12B\cos 2x+9Acos2x+9B\sin 2x$
$=(5A-12B)\cos 2x+(12A+5B)\sin 2x=\cos 2x$
係数比較により
$5A-12B=1, 12A+5B=0$
この連立方程式を解くと
$A=\frac{5}{169}$, $B=-\frac{12}{169}$
したがって，一つの特殊解は，
$y=\frac{5\cos 2x-12\sin 2x}{169}$

次に，同次方程式 $y''-6y'+9y=0$ の一般解を求める

２次方程式 $r^2-6r+9=0$ の解は，$r=3$（重解）であるから，一般解は
$y=e^{3x}(C_1+C_2x)$

（参考）
→定数係数の２階.線形.同次.微分方程式
$y''+ay'+by=0$ が重解 $r=p$ を持つときの一般解は
$y=e^{px}(C_1+C_2x)$

結局，初めの非同次方程式 $y''-6y'+9y=\cos 2x$ の一般解は

$y=e^{3x}(C_1+C_2x)+\frac{5\cos 2x-12\sin 2x}{169}$ …（答）

4.(1)1 …R(x)が多項式，指数関数，三角関数の組合せ，$D=a^2-4b>0$ の場合
$y''-4y'+3y=x^2+2x-3+e^{2x}\sin 3x$

【重ね合わせの原理】を利用して，特殊解を分けて求める

(1) $y''-4y'+3y=x^2+2x-3$ の特殊解

$y=Ax^2+Bx+C$ とおくと
$y'=2Ax+B$
$y''=2A$ だから
$y''-4y'+3y$
$=3Ax^2+(-8A+3B)x+(2A-4B+3C)$
$=x^2+2x-3$
係数比較により
$3A=1,\ -8A+3B=2, 2A-4B+3C=-3$
この連立方程式を解くと
$A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{14}{9}$, $C=\frac{23}{27}$
したがって，一つの特殊解は，
$y=\frac{1}{3}x^2+\frac{14}{9}x+\frac{23}{27}$

(2) $y''-4y'+3y=e^{2x}\sin 3x$ の特殊解

$y=e^{2x}(P\cos 3x+Q\sin 3x)$ とおくと
$y'=2e^{2x}(P\cos 3x+Q\sin 3x)$
$+e^{2x}(-3P\sin 3x+3Q\cos 3x)$
$y''=4e^{2x}(P\cos 3x+Q\sin 3x)$
$+2e^{2x}(-3P\sin 3x+3Q\cos 3x)$
$+2e^{2x}(-3P\sin 3x+3Q\cos 3x)$
$+e^{2x}(-9P\cos 3x-9Q\sin 3x)$
だから
$y''-4y'+3y$
$=4e^{2x}(P\cos 3x+Q\sin 3x)$
$+2e^{2x}(-3P\sin 3x+3Q\cos 3x)$

4.(2)1 …R(x)が多項式，指数関数，三角関数の組合せ，$D=a^2-4b<0$ の場合
$y''+2y'+2y=x+4+e^{-x}\cos 2x$

【重ね合わせの原理】を利用して，特殊解を分けて求める

(1) $y''+2y'+2y=x+4$ の特殊解

$y=Ax+B$ とおくと
$y'=A$
$y''=0$ だから
$y''+2y'+2y$
$=0+2A+2Ax+2B$
$=x+4$
係数比較により
$2A=1, 2A+2B=4$
この連立方程式を解くと
$A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{3}{2}$
したがって，一つの特殊解は，
$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

(2) $y''+2y'+2y=e^{-x}\cos 2x$ の特殊解

$y=e^{-x}(P\cos 2x+Q\sin 2x)$ とおくと
$y'=-e^{-x}(P\cos 2x+Q\sin 2x)$
$+e^{-x}(-2P\sin 2x+2Q\cos 2x)$
$y''=e^{-x}(P\cos 2x+Q\sin 2x)$
$-e^{-x}(-2P\sin 2x+2Q\cos 2x)$
$-e^{-x}(-2P\sin 2x+2Q\cos 2x)$
$+e^{-x}(-4P\cos 2x-4Q\sin 2x)$
だから
$y''+2y'+2y$
（消せるものは消して簡単にすると）
$=e^{-x}(-3P\cos 2x-3Q\sin 2x)$

$+2e^{2x}(-3P\sin 3x+3Q\cos 3x)$
$+e^{2x}(-9P\cos 3x-9Q\sin 3x)$
$-8e^{2x}(P\cos 3x+Q\sin 3x)$
$-4e^{2x}(-3P\sin 3x+3Q\cos 3x)$
$+3e^{2x}(P\cos 3x+Q\sin 3x)$
（消せるものは消して簡単にすると）
$=e^{2x}(-13P\cos 3x-10Q\sin 3x)$
$=e^{2x}\sin 3x$
係数比較により
$$P=0,\ Q=-\frac{1}{10}$$
したがって，一つの特殊解は，
$$y=-\frac{1}{10}e^{2x}\sin 3x$$

次に，同次方程式 $y''-6y'+9y=0$ の一般解を求める
2次方程式 $r^2-4r+3=0$ の解は，$r=1, 3$ であるから，一般解は
$y=C_1e^x+C_2e^{3x}$

結局，初めの非同次方程式 $y''-4y'+3y=e^{2x}\sin 3x$ の一般解は
$$y=C_1e^x+C_2e^{3x}+\frac{1}{3}x^2+\frac{14}{9}x+\frac{23}{27}-\frac{1}{10}e^{2x}\sin 3x$$
…（答）

$=e^{-x}\cos 2x$
係数比較により
$$-3P=1,\ -3Q=0$$
$$P=-\frac{1}{3},\ Q=0$$
したがって，一つの特殊解は，
$$y=-\frac{1}{3}e^{-x}\cos 2x$$

次に，同次方程式 $y''+2y'+2y=0$ の一般解を求める
2次方程式 $r^2+2r+2=0$ の解は，$r=-1\pm i$ であるから，一般解は
$y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

結局，初めの非同次方程式 $y''+2y'+2y=e^{-x}\cos 2x$ の一般解は
$$y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}-\frac{1}{3}e^{-x}\cos 2x$$
…（答）

4.(3)1 …R(x)が多項式，指数関数，三角関数の組合せ，$D=a^2-4b=0$ の場合
$$y''-4y'+4y=x\sin x$$

$y''-4y'+4y=x\sin x$ の特殊解
$y=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x$ とおく
途中経過を省略すると
一つの特殊解は，
$$y=\frac{(15x+4)\sin x+(20x+22)\cos x}{125}$$

初めの非同次方程式 $y''-4y'+4y=x\sin x$ の一般解は
$$y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\frac{(15x+4)\sin x+(20x+22)\cos x}{125}$$
…（答）

4.(3)2 …R(x)が多項式，指数関数，三角関数の組合せ，$D=a^2-4b=0$ の場合
$$y''-4y'+4y=xe^x$$

$y''-4y'+4y=xe^x$ の特殊解
$y=(Ax+B)e^x$ とおく
途中経過を省略すると
一つの特殊解は，
$$y=(x+2)e^x$$

初めの非同次方程式 $y''-4y'+4y=x\sin x$ の一般解は
$y=e^{2x}(C_1+C_2x)+(x+2)e^x$ …（答）

（参考）
定数係数.2階.線形.微分方程式で右辺の非同次の項R(x)が，
$\tan x,\ \frac{1}{x},\ \log x$
などを含んでいると，とても難しい問題になる．
筆算で解くには，次のような結果を覚えていると解けるが，これを自分で思いつくのは大変
$\alpha<\beta$ が異なる2つの実数であるとき
$$y''-(\alpha+\beta)y'+(\alpha\beta)y=R(x)$$
の1つの特殊解は
$$\frac{1}{\beta-\alpha}\left\{e^{\beta x}\int e^{-\beta x}R(x)dx-e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}R(x)dx\right\}$$
この式が解になっていることを確かめるには，実際に $y''-(\alpha+\beta)y'+(\alpha\beta)y$ を計算してみるとよい．

(1) $y''-3y'+2y=\tan x$

1つの特殊解は
$$e^{2x}\int e^{-2x}\tan x dx-e^x\int e^{-x}\tan x dx$$
一般解は
$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$$
$$+\int e^{-2x}\tan x dx-e^x\int e^{-x}\tan x dx$$
なお，この積分は初等的には表せない．

(2) $y''-4y'+3y=\frac{1}{x}$

1つの特殊解は
$$\frac{1}{2}\left\{e^{3x}\int\frac{e^{-3x}}{x}dx-e^x\int\frac{e^{-x}}{x}dx\right\}$$
一般解は
$$y=C_1e^x+C_2e^{3x}$$
$$+\frac{1}{2}\left\{e^{3x}\int\frac{e^{-3x}}{x}dx-e^x\int\frac{e^{-x}}{x}dx\right\}$$
なお，この積分は初等的には表せない．

(3) $y''-5y'+6y=\log x$

1つの特殊解は
$$\left\{e^{3x}\int e^{-3x}\log x dx-e^{2x}\int e^{-2x}\log x dx\right\}$$
一般解は
$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$$
$$+\left\{e^{3x}\int e^{-3x}\log x dx-e^{2x}\int e^{-2x}\log x dx\right\}$$
なお，この積分は初等的には表せない．

○===高卒～大学数学基礎メニューに戻る
♣..メニューに戻る

■ ［個別の頁からの質問に対する回答］[定数係数の２階線形微分方程式（非同次）について／17.7.10]

定数係数の2階非同次微分方程式について、y'' +2y' +y = (e^(-x))*ln(x) のような、右辺にln(x)を含む方程式についてはどのようなアプローチをするべきでしょうか。 ln(x)については、解いている感じだとln(x)に対してx^2を乗じたA*(x^2)*ln(x) を特殊解としておくとうまくいっている気がします。しかしln(x)を含む方程式はロンスキアンを用いる解法が良いという話も聞きます。

=>［作者］：連絡ありがとう．右辺に対数関数がある場合も,ロンスキアンも当教材で想定している範囲を超えています．

別頁に解説していますようにwxMaximaをインストールして，wxMaximaを起動し，画面上で空打ちすると入力画面になります．そこで

ode2('diff(y,x,2)+2*'diff(y,x,1)+y =%e^(-1*x)*log(x),y,x);　（←diff の前にカンマを忘れないように！）

のように入力すると

$$y=\frac{\%e^{-x}(2x^2\log(x)-3x^2)}{4}+(\%k1x+\%k2)\%e^{-x}$$

が得られます．これは

$$y=\frac{e^{-x}(2x^2\log x-3x^2)}{4}+(Ax+B)e^{-x}$$

を表しています．

■ ［個別の頁からの質問に対する回答］[定数係数の２階線形微分方程式（非同次）について／17.7.3]

【例－右辺が指数関数のもの２】 y''－4y'－5y=e5x の１つの特殊解を求めてください． のAは1/4でないでしょうか？ ごかくにんいただけると幸いです。

=>［作者］：連絡ありがとう．教材の途中経過に一部余計な係数が付いていましたが，結果については間違いはありませんでした．A=1/6

■ ［個別の頁からの質問に対する回答］[定数係数の２階線形微分方程式（非同次）について／17.5.8]

定数係数の2階非同次微分方程式について、y''+y=tanx のときは特殊解の候補をどのように置けばいいのでしょうか？

=>［作者］：連絡ありがとう．右辺がtan xの場合は，この頁で想定している初歩的な解き方の範囲外です．すなわち，特殊解を求める簡単な方法がありませんので，そのアプローチでは無理でしょう．

解くためには，一般解を求めてから「定数変化法」を試みることになるでしょう．

同次方程式の一般解は $y=A\sin x+B\cos x$ なので，定数変化法により，非同次方程式の解を $y=A(x)\sin x+B(x)\cos x$ とおいて微分方程式に代入して，関数 $A(x),B(x)$ の満たすべき微分方程式に直してこれを解きます．ただし，そのままでは余りに無限定で解けませんので

$A'(x)\sin x+B'(x)\cos x=0$ …(1)

という条件を勝手に追加します．このようにすると，(1)がうまく働いて， $A(x),B(x)$ の関数と第2次導関数を含まない $A'(x),B'(x)$ だけの連立方程式になります．

$A'(x)\cos x-B'(x)\sin x=\tan x$ …(2)

(1)(2)より

$$A'(x)=-\frac{\sin x}{\cos 2x}\rightarrow A(x)=-\int\frac{\sin x}{\cos 2x}dx \quad \cdots(3)$$

$$B'(x)=\frac{\tan x\sin x}{\cos 2x}\rightarrow B(x)=\int\frac{\tan x\sin x}{\cos 2x}dx \quad \cdots(4)$$

などとなって，理屈の上では解けますが，(3)(4)の計算も結構大変です．

■ ［個別の頁からの質問に対する回答］[定数係数2階線形非同次微分方程式について／16.12.23]

2階線形非同次微分方程式のページの問題5の解答が間違っていると思われますので，確認をお願いします．

=>［作者］：連絡ありがとう．あなたが考える解答をお知らせください．

■ ［個別の頁からの質問に対する回答］[定数係数の２階線形微分方程式（非同次）について／16.10.27]

分かりやすくて助かりました。 ありがとうございました。

=>［作者］：連絡ありがとう．

【 アンケート送信 】

… このアンケートは教材改善の参考にさせていただきます

■ この頁について，良い所，悪い所，間違いの指摘，その他の感想があれば送信してください．

○文章の形をしている感想は全部読ませてもらっています．

○感想の内で，どの問題がどうであったかを正確な文章で伝えていただいた改善要望に対しては，可能な限り対応するようにしています． （※なお，攻撃的な文章になっている場合は，それを公開すると筆者だけでなく読者も読むことになりますので，採用しません．）

送信

質問に対する回答の中学版はこの頁，高校版はこの頁にあります