Matemáticas en la baraja

Un estudio sobre diversas mezclas usando R

Manuel Ojeda-Hernández

24/2/2021

Matemáticas en la baRaja

Para este estudio trabajaremos en el grupo de permutaciones S_{52} salvo que se diga explícitamente lo contrario, es decir, el grupo formado por las posibles ordenaciones de una baraja de póker estándar sin comodines.

Son objetivos de esta charla tanto las propias mezclas como la programación de las mismas y su representación gráfica mediante una aplicación en R.

Generadores de S_{52}

- El grupo S_{52} no es cíclico.

  Seleccionemos una mezcla, la que sea. La repetición de esta mezcla **no** pasará por todas las ordenaciones posibles de una baraja de 52 cartas. De hecho, **ninguna** mezcla tiene esa propiedad para cualquier baraja de más de dos cartas.

  La demostración es simple. Si la repetición de una mezcla permitiera obtener cualquier ordenación posible, eso sería matemáticamente decir que S_{52} es cíclico y todo grupo cíclico es conmutativo, es decir $a \cdot b = b \cdot a$, para todo $a, b \in S_{52}$.

  Sin embargo, si tenemos tres cartas, existe un par de mezclas a y b tales que $a \cdot b \neq b \cdot a$. Por lo tanto, en cualquier baraja de más de dos cartas, no existe una mezcla que, al repetirla, recorra todos los órdenes posibles.

Generadores de S_{52}

- Toda mezcla repetida las suficientes veces vuelve al origen.

  Esto es simplemente consecuencia de la finitud del grupo. S_{52} tiene cardinal 52!, lo cual es un número enorme pero sigue siendo finito. Así, para una mezcla m, la sucesión $m, m^2, \ldots, m^{52!}, m^{52!+1}$ es tiene elementos repetidos por el principio del palomar. Así, existen $n_1 < n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $m^{n_1} = m^{n_2}$, al ser un grupo m tiene inverso y se verifica $m^{n_2 - n_1} = 1$.

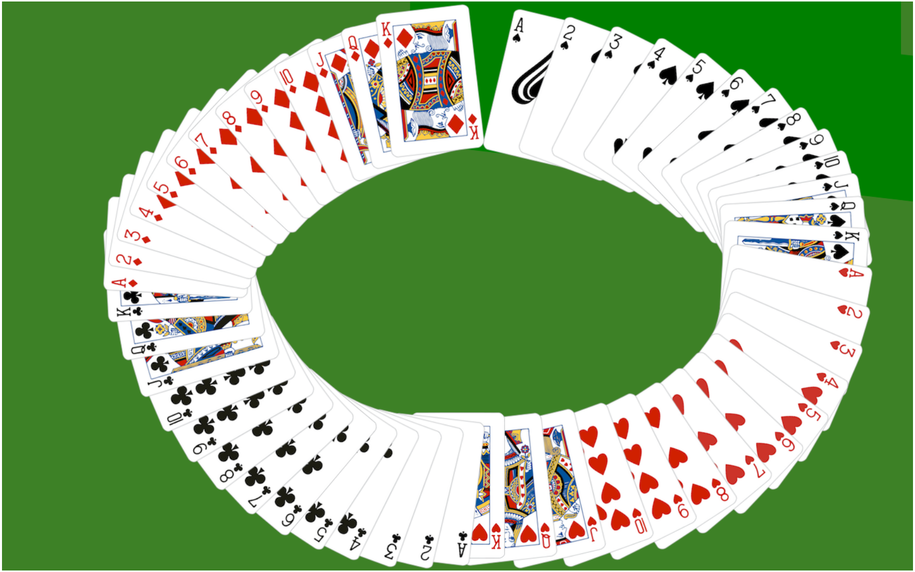
- El mayor orden de un elemento de S_{52} es 180180.

  Toda permutación puede expresarse como producto de ciclos disjuntos. Para hallar una permutación de orden máximo habría que encontrar un conjunto de números naturales $\{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$ tales que $\sum_i n_i \leq 52$ y con el máximo mínimo común múltiplo posible. Estos números son 13, 11, 9, 7, 5, 4 y 3.

La estructura cíclica de la baraja

Es habitual leer “se puede cortar tantas veces como se quiera ya que los cortes no alteran el orden cíclico de la baraja”. Esto, en lenguaje matemático, viene a decir que vamos a considerar una relación de equivalencia muy sencilla. Una ordenación A y una B están relacionadas si existe un corte que lleve el corte A en el B. Una representación bastante aclaratoria de los órdenes en el conjunto cociente son los ciclos.

La estructura cíclica de la baraja



La mezcla faro

La mezcla faro debe su nombre a un juego de cartas (el faro o el faraón, depende de la región) muy popular en Francia durante el S. XVII y exportado a los Estados Unidos en el S. XIX en el que se podía hacer trampas si se intercalaban las cartas de la baraja una a una hábilmente. Perdió su popularidad cuando los tahúres (o tramposos) decidieron dedicar su habilidad al póker.

Definition

Se llama mezcla faro a la mezcla en la que se corta por la mitad de la baraja y las cartas de los dos paquetes se imbrican exactamente una a una.

Tipos de mezcla faro

-Faro impar

-Faro out

-Faro in

A diferencia de las barajas estándar que encontramos en las tiendas: 52 cartas para póker, 48 ó 40 la española y 78 la del tarot; la mezcla faro tiene sus propiedades óptimas cuando trabajamos con una baraja impar. Veamos las fórmulas.

Tipos de mezcla faro

Una baraja de k cartas con k impar obedece a la siguiente fórmula

$$f(n) = 2n \pmod{k}$$

Una baraja con k cartas con k par hay dos maneras distintas de imbricar

$$f_{in}(n) = 2n + 1 \pmod{k+1} \text{ ó } f_{out}(n) = 2n \pmod{k-1}$$

Tipos de mezcla faro

<table>
<tr><th>CARTAS</th><th>FAROS-OUT</th><th>FAROS-IN</th></tr>
<tr><td>28</td><td>18</td><td>28</td></tr>
<tr><td>29</td><td colspan="2">28</td></tr>
<tr><td>30</td><td>28</td><td>5</td></tr>
<tr><td>31</td><td colspan="2">5</td></tr>
<tr><td>32</td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td>33</td><td colspan="2">10</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>CARTAS</th><th>FAROS-OUT</th><th>FAROS-IN</th></tr>
<tr><td>48</td><td>23</td><td>21</td></tr>
<tr><td>49</td><td colspan="2">21</td></tr>
<tr><td>50</td><td>21</td><td>8</td></tr>
<tr><td>51</td><td colspan="2">8</td></tr>
<tr><td>52</td><td>8</td><td>52</td></tr>
<tr><td>53</td><td colspan="2">52</td></tr>
</table>

Teorema

Sea una baraja con un número par de cartas k tal que necesita n faros out para volver al orden original. Entonces una baraja con $k-2$ cartas necesitaría n faros in para volver al orden original.

Problemas con los cortes

Teorema (feliz)

En una baraja impar, cortar entre mezclas faro no modifica el orden cíclico.

Teorema (triste)

En una baraja par, cortar entre mezclas faro out (in) nos puede hacer llegar a cualquiera de los 52! órdenes posibles.

Demostración: Muy sencilla. Sabemos que hay un número mágico N tal que hacer N faros out vuelve a ser el orden inicial. A la iteración de $N-1$ mezclas faro out vamos a llamarla antifaro out. Si hacemos una antifaro out, llevamos la carta superior abajo, luego hacemos una faro out y llevamos las dos cartas inferiores arriba, producimos una transposición $(1\,2)$. Dado que el llevar la carta inferior arriba es un corte y es el ciclo $(1\,2\ldots n)$. Dado que tenemos una transposición y un ciclo de longitud n, hemos generado todo S_n.

Generalizando un poco

Como buenos matemáticos, no nos podemos parar en la mezcla faro, ¿qué es el estudio de la 2-faro cuando podemos generalizar hasta la k-faro para todo k? Matemáticamente tiene todo el sentido, cortar en k montones lo más iguales posible e imbricar una de cada montón. Lo que realmente se complica es el hacerlo de manera manual y la búsqueda de aplicaciones reales en el mundo de la cartomagia.

Karl Fulves fue un gran mago americano que escribió un libro con 16 magníficos efectos con la trifaro (3-faro). Remataba el libro con la frase "estas son las aplicaciones que he encontrado a pesar de que esta mezcla no es técnicamente posible".

Como dice la I Ley de Clarke:«Cuando un científico distinguido pero de edad avanzada afirma que algo es imposible, es muy probable que esté equivocado». Hay decenas magos que hacen la trifaro, aunque pocos realmente la dominan. Entre ellos uno que tenemos muy cerca.

Nos ponemos a programar

Sentando las bases

```r
baraja <- c("AP","2P","3P","4P","5P","6P","7P","8P",
            "9P","10P","JP","QP","KP",
            "AC","2C","3C","4C","5C","6C","7C","8C",
            "9C","10C","JC","QC","KC",
            "AT","2T","3T","4T","5T","6T","7T","8T",
            "9T","10T","JT","QT","KT",
            "AD","2D","3D","4D","5D","6D","7D","8D",
            "9D","10D","JD","QD","KD")
```

Nos ponemos a programar

Sentando las bases

```
corte <- function(v, numero) {
  #esta function calcula el resultado de cortar un numero
  #de cartas de arriba a abajo
  if(numero<0){
    numero <- 52+numero
    resultado <- c(corte(v[-1:-numero]),v[seq_len(numero)])
  } else if(number>0){
    resultado <- c(v[-1:-numero],v[seq_len(numero)])
  } else{
    resultado <- v
  }
  return(resultado)
}#end corte
```

Nos ponemos a programar

Sentando las bases

```
inserta <-  function(carta, v, pos){
  #inserta la carta dada en la posición especificada
  #en el parametro pos empezando por el dorso
  return(append(v, carta, after=pos-1))
}#end inserta

invierte <- function(v,numero){
  #invierte el orden del numero de cartas especificado
  #empezando por el dorso
  resultado <- c(rev(v[seq_len(numero)]),v[-seq_len(numero)])
  return(resultado)
} #end invierte
```

Nos ponemos a programar

faro out

```
faro_out <- function(v) {
  cartas <- length(v)
  mitad <- ceiling(cartas/2)
  primeramitad <- v[1:mitad]
  segundamitad <- v[-1:-mitad]
  resultado <- v
  resultado[c(FALSE,TRUE)] <- segundamitad
  resultado[c(TRUE,FALSE)] <- primeramitad
  return(resultado)
}#end faro_out
```

Nos ponemos a programar

faro in

```
faro_in <- function(v) {
  cartas <- length(v)
  mitad <- floor(cartas/2)
  primeramitad <- v[1:mitad]
  segundamitad <- v[-1:-mitad]
  resultado <- v
  resultado[c(FALSE,TRUE)] <- primeramitad
  resultado[c(TRUE,FALSE)] <- segundamitad
  return(resultado)
}#end faro_in
```

Nos ponemos a programar

faro impar

```r
faro_impar <- function(v) {
  cartas <- length(v)
  mitad <- cartas%/%2
  primeramitad <- v[1:(mitad+1)]
  segundamitad <- v[-1:-(mitad+1)]
  resultado <- v
  resultado[c(FALSE,TRUE)] <- segundamitad
  resultado[c(TRUE,FALSE)] <- primeramitad
  return(resultado)
}#end faro_impar
```

Nos ponemos a programar

Inversas

```
antifaro_out <- function(v){
  resultado <- c(v[c(TRUE,FALSE)],v[c(FALSE,TRUE)])
  return(resultado)
}

antifaro_in <- function(v){
  resultado <- c(v[c(FALSE,TRUE)],v[c(TRUE,FALSE)])
  return(resultado)
}
```

Nos ponemos a programar

Trifaro

```
trifaro <- function(v) {
  cartas <- length(v)
  tercio <- ceiling(cartas/3)
  primertercio <- v[1:tercio]
  segundotercio <- v[(tercio+1):(2*tercio)]
  tercertercio <- v[-1:-(2*tercio)]
  resultado <- v
  resultado[c(FALSE,FALSE,TRUE)] <- primertercio
  resultado[c(FALSE,TRUE,FALSE)] <- segundotercio
  resultado[c(TRUE,FALSE, FALSE)] <- tercertercio
  return(resultado)
}#end trifaro
```

Agradecimientos

Entre otros muchos

- Al grupo de usuarios de R en Málaga
- A Ángel Mora y Domingo López
- A Alex Elmsley por ponerle nombre a tantas cosas
- A Luis García y Gabriel Moreno por la teoría de las mezclas aplicada a la magia
- A Carlos Vinuesa por ayudarme a contar esto para no magos y no matemáticos

Matemáticas en la baraja

Un estudio sobre diversas mezclas usando R

Manuel Ojeda-Hernández

24/2/2021