



Università degli studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"
Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

Laurea Triennale in Fisica

La stabilità dei punti lagrangiani L_4 e L_5 : sviluppi recenti

Riccardo Milocco

Relatore: Prof. Giancarlo Benettin

Indice

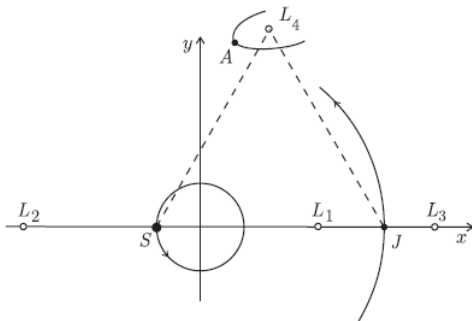
- 1 Introduzione al pCRTBP e criticità analitiche
- 2 Studio della stabilità di L_4 con "metodi perturbativi" ($t \sim 14 \cdot 10^9 y$)
- 3 Sviluppi Recenti: approccio numerico alla stabilità di L_4 ($t \sim 6 \cdot 10^3 y$)

Introduzione

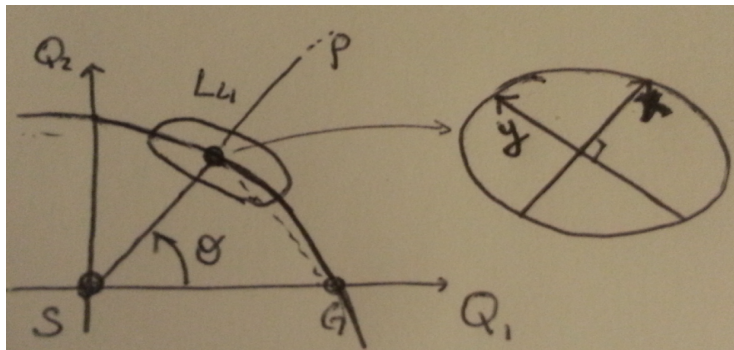
Hamiltoniana nel sistema baricentrico e corotante

Assunte $\mathcal{G} = 1, (m_S + m_J) = 1, \omega = 1, \mu := \frac{m_J}{m_S + m_J}, |q_S - q_J| = 1,$

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_2 p_1 - q_1 p_2 - \frac{1 - \mu}{\sqrt{(q_1 - \mu)^2 + q_2^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(q_1 + 1 - \mu)^2 + q_2^2}} \quad (1)$$



Cambio di Coordinate



$$i) \begin{cases} Q_1 = q_1 - \mu \\ Q_2 = q_2 \\ P_1 = p_1 \\ P_2 = p_2 - \mu \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} p_\rho = P_1 \cos(\theta) + P_2 \sin(\theta) \\ p_\theta = \rho(P_2 \cos(\theta) - P_1 \sin(\theta)) \\ Q_1 = \rho \cos(\theta) \\ Q_2 = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

$$iii) \begin{cases} x = \rho - 1 \\ y = \theta - \pi/3 \\ p_x = p_\rho \\ p_y = p_\theta - 1 \end{cases}$$

Hamiltoniana nelle nuove coordinate

$$H = \frac{1}{2} \left[p_x^2 + \left(\frac{p_y + 1}{x + 1} \right)^2 \right] - p_y + \mu(x + 1) \cos\left(y + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1 - \mu}{1 + x} + \frac{\mu}{\sqrt{(x + 1)^2 + 1 + 2(x + 1) \cos\left(y + \frac{\pi}{3}\right)}} \quad (2)$$

Sviluppo in serie

$$H = H_2 + H_3 + \dots$$

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - 2xp_y + \left(\frac{1}{2} + \frac{9\mu}{8}\right)x^2 - \frac{9\mu}{8}y^2 + \frac{3\sqrt{3}\mu}{4}xy \quad (3)$$

e H_3 è un polinomio omogeneo

Stabilità secondo Lyapunov di H_2

- se $\mu \leq \mu_R$, $\mu \geq 1 - \mu_R$ allora l'equilibrio è "ellittico";
- se $\mu_R < \mu < 1 - \mu_R$ "iperbolico".

H_2 in coordinate normali

$$H_2 = \frac{\omega_1(x_1^2 + y_1^2)}{2} + \frac{\omega_2(x_2^2 + y_2^2)}{2} \quad \omega_1 > 0, \quad \omega_2 < 0 \quad (4)$$

dove ω_1, ω_2 sono le frequenze di oscillazione rispetto a L_4 .

Dato che ω_1 e ω_2 sono discordi H_2 non ha un minimo stretto nell'origine
 \Rightarrow non vale il "*teorema di Lagrange-Dirichlet*". Pertanto, non si può concludere che l'aggiunta dei termini di ordine superiore che formano H non inficino la natura ellittica di L_4 .

La stabilità di L_4 deve essere trattata con altri metodi analitici.

Studio della stabilità di L_4 con "metodi perturbativi"

Obbiettivo

Individuare la regione di stabilità per $T(\rho_0) \sim 14 \cdot 10^9 y$ e confrontarla con gli asteroidi catalogati il 14/12/94.

Metodologia sviluppata:

- A) Construzione della "forma normale di Birkhoff (all' ordine r)" $H^{(r)}$:
 $H^{(r)} := H_2 + \dots + Z_r + \mathcal{R}^{(r+1)}$, dove $Z_s = (\frac{x_j'^2 + y_j'^2}{2})^s$ dipendono solo dalle azioni $I_j' = \frac{x_j'^2 + y_j'^2}{2}$
- B) Individuazione di una famiglia (parametrica) di intorni di L_4 ($\Delta_{\rho R}$) e introduzione di una norma su di essi;
- C) Stima del resto $\mathcal{R}^{(r+1)}$ e del "tempo di fuga" $T(\rho_0)$ di un'orbita con dato iniziale in $\Delta_{\rho_0 R}$;
- D) Confronto tra la regione di stabilità teorica e gli asteroidi osservati.

- A.1: Costruzione di $H^{(r)}$ con "metodo di Birkhoff"

Per portare H nella forma normale si utilizza l' "Operatore di Lie" T_χ tale che $T_\chi H^{(r)} = H$.

Definizione Operatore di Lie T_χ

Sia Π lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei, definiamo la successione di polinomi omogenei di grado s come $\chi := \{\chi_s\}_{s \geq 3}$, con $\chi_s \in \Pi$. Definiamo, inoltre, $E_s \in \Pi$ e $T_\chi : \Pi \rightarrow \Pi$ "operatore di Lie" tale che

$$T_\chi = \sum_{s \geq 0} E_s$$

$$E_0 = 1, \quad E_s = \sum_{j=1}^s \frac{j}{s} L_{\chi_{j+2}} E_{s-j}$$

dove $L_\chi * = \{\chi, *\}$ è la derivata di Lie di $*$ rispetto a χ detta "hamiltoniana generatrice della forma normale (fino) all'ordine s "

A.2: Osservazioni sull'Operatore di Lie

Confronto con la serie di Lie:

Posta $\chi_s = \{\chi_3, 0, \dots\} \Rightarrow E_0 = 1, E_s = \frac{1}{s} L_{\chi_3} E_{s-1} = \frac{1}{s!} L_{\chi_3}^s$.

Generalizzando: $T_{\chi_k} = \exp(L_{\chi_k})$

Proprietà T_χ

- lineare, invertibile, conserva il prodotto e preserva le parentesi di Poisson.

Osservazioni:

- Trasformazione canonica alle coordinate normali:

$$\text{Se } (x, y) \in \Pi \Rightarrow (x', y') = T_\chi(x, y) \in \Pi;$$

- Vale il *Teorema di scambio*:

$$\text{Se } f(x, y) \in \Pi \Rightarrow f(x, y)|_{(x,y)=T_\chi^{-1}(x',y')} = (T_\chi^{-1}f)(x', y').$$

A.3.1: Dimostrazione $T_{\chi^{(r)}} H^{(r)} = H$

$$- \sum_{s \geq 0} E_s (H_2 + Z_3 + \cdots + Z_r + \mathcal{R}^{(r+1)}) = H_2 + H_3 + \dots$$

Osservazione 1: Se $g \in \Pi^r \Rightarrow E_k g \in \Pi^{k+r}$

- Definendo $Z_{s-k}^k := E_k Z_{s-k}$ e uguagliando ogni ordine, si ottiene

$$\begin{cases} Z_2 = H_2 \\ Z_s = H_s - \sum_{k=1}^{s-2} Z_{s-k}^k \quad s=3, \dots, r \end{cases}$$

Osservazione 2: E_{s-2} contiene per definizione la successione

χ_1, \dots, χ_s

$$\Rightarrow Z_s - \mathcal{L}_{H_2} \chi_s = H_s + Q_s =: P_s^{(s-1)} \quad s = 2, \dots, r \quad (5)$$

ove $\mathcal{L}_{H_2} * = \{H_2, *\}$ e Q_s è un polinomio di ordine s , dipendente da χ_t e Z_t con $t = 3, \dots, s-1$.

A.3.1: Gerarchia determinata da $Z_s - \mathcal{L}_{H_2}\chi_s = P_s^{(s-1)}$

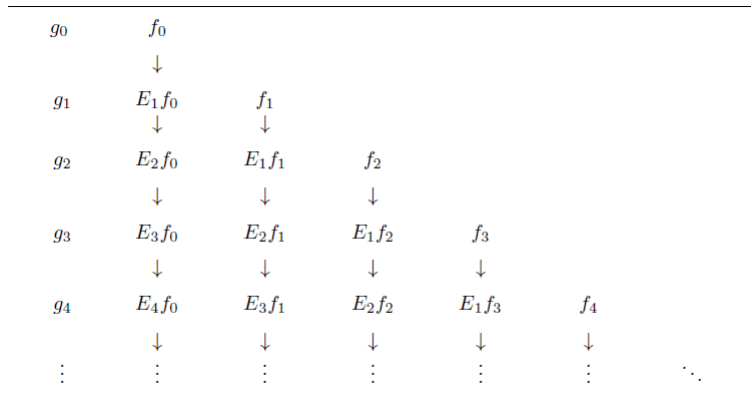


Figure: Schema del processo risolutivo del sistema: $g = T_\chi f$.

Nelle righe si sono allineati i termini con dello stesso ordine; mentre in colonna si trovano i termini generati da $T_\chi f_k$.

A.3.2: Dimostrazione $Z_s - \mathcal{L}_{H_2} \chi_s = P_s^{(s-1)}$

$$- x_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_j + i\eta_j), \quad y_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_j - i\eta_j), \quad \text{per } j = 1, 2$$

Osservazione: $H_2 = i(\omega_1 \xi_1 \eta_1 + \omega_2 \xi_2 \eta_2)$;
mentre le azioni $l_j(\xi_j, \eta_j) = i\eta_j \xi_j$ con $j = 1, 2$.

$$- \text{Se } k := (k_1, k_2), \quad l = (l_1, l_2), \quad (\xi^k \eta^l) := \xi_1^{k_1} \eta_1^{l_1} \xi_2^{k_2} \eta_2^{l_2} \text{ e } \omega := (\omega_1, \omega_2),$$

$$\Rightarrow \{H_2, \chi_s\} = i[\omega_1(\xi_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \eta_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \eta_1}) + \omega_2(\xi_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_2} - \eta_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \eta_2})]\chi_s.$$

$$- s = 2, Z_2 = H_2; \quad s = 3 \quad \chi_3 = \sum_{|k+l|=3} \mathcal{C}_{k,l} \xi^k \eta^l \quad \mathcal{C}_{k,l} \in \mathbb{C}$$

$$- \begin{cases} P_s^{(s-1)} = \sum_{|k+l|=s} \mathcal{A}_{k,l} \xi^k \eta^l, & k \neq l, \\ Z_s = \sum_{2|l|=s} \mathcal{A}_{l,l} \xi^l \eta^l, & k = l \end{cases}$$

$$\Rightarrow \chi_3 = \sum_{|k+l|=3} \frac{\mathcal{A}_{k,l}}{i(k-l) \cdot \omega} \xi^k \eta^l \quad k \neq l.$$

A.3.3 Integrali del moto: le azioni I'_j

Osservazione: $H^{(r)}(x', y') = T_{\chi^{(r)}}^{-1} H$ è in forma normale fino all'ordine r .

(Quasi) costanti del moto

$$I'_j(x', y') = \frac{x_j'^2 + y_j'^2}{2} \quad j = 1, 2.$$

Infatti,

$$\dot{I}'_j = \{I'_j, \mathcal{R}^{(r+1)}\} \neq 0$$

Per la parte di H in forma normale il sistema è integrabile secondo Liouville. Dunque, si può immaginare graficamente che le orbite giacciono su un toro r -dimensionale \mathbb{T}^r .

D'altra parte con l'aggiunta di $\mathcal{R}^{(r+1)}$, le azioni non sono esattamente delle costanti del moto e il sistema perde la proprietà di integrabilità.

B) Individuazione di una famiglia (parametrica) di intorni di L_4 ($\Delta_{\rho R}$) e introduzione di una norma su di essi

Famiglia di intorni

$$\Delta_{\rho R} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^4 : x_j^2 + y_j^2 \leq (\rho R_j)^2\} \quad \text{per } j = 1, 2$$

Individuazione di una norma di facile calcolo numerico:

– Sia $f \in \Pi^s$, $f(\xi, \eta) = \sum_{j_1+j_2+k_1+k_2=s} \mathcal{C}_{j_1 j_2 k_1 k_2} \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \eta_1^{k_1} \eta_2^{k_2}$

– $|f|_{\rho R} = \sup_{\Delta_{\rho R}} |f(x, y)| \leq \|f\|_{\rho R} :=$

$$\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)^s \sum_{j_1+j_2+k_1+k_2=s} |\mathcal{C}_{j_1 j_2 k_1 k_2}| R_1^{j_1+k_1} R_2^{j_2+k_2} = \rho^s \|f\|_R$$

Norma

$$|f|_{\rho R} \leq \|f\|_{\rho R} := \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)^s \sum_{j_1+j_2+k_1+k_2=s} |\mathcal{C}_{j_1 j_2 k_1 k_2}| R_1^{j_1+k_1} R_2^{j_2+k_2}$$

D) Stima del resto $\mathcal{R}^{(r+1)}$ e del "tempo di fuga" $T(\rho_0)$ di un'orbita con dato iniziale in $\Delta_{\rho_0 R}$;

Osservazione: $|I_j(t) - I_j(0)| \leq \sup_{\Delta_{\rho R}} |\dot{I}_j| |t|$

"Tempo di Fuga" da $\Delta_{\rho R}$ con $\rho > \rho_0$

$$\tau_r(\rho_0, \rho) = \min_{j=1,2} \frac{R_j^2(\rho^2 - \rho_0^2)}{2 \sup_{\Delta_{\rho R}} |\dot{I}_j|}$$

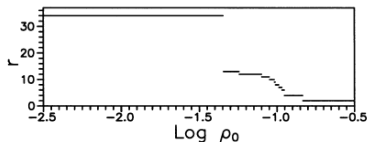
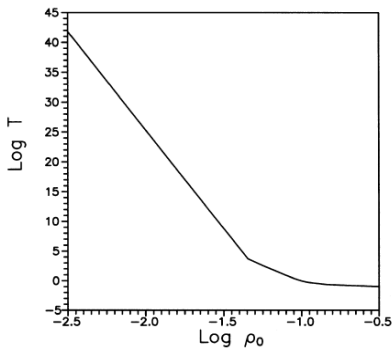
Rielaborazione di $\tau_r(\rho_0, \rho)$:

- $\|H_s\|_R < (R^*)^{r+1-s} \|H_{r+1}\|_R \Rightarrow \rho \leq \frac{R^*}{2}, \sum_{s>r} \|H_s\|_{\rho R} < 2 \|H_{r+1}\|_{\rho R}$
- Si massimizza rispetto ρ e $r \in [3, 35 =: \tilde{r}]$

"Tempo di Fuga"

$$T(\rho_0) := \max_{3 \leq r \leq \tilde{r}} \sup_{\rho_0 > \rho} \tau_r(\rho_0, \rho)$$

D.1) Risultati generali per $T(\rho_0)$ e r



Andamento del "tempo di fuga" e dell'ordine ottimale \tilde{r}_{opt} in funzione di ρ_0 nel caso Sole-Giove:

$$\text{Log} T(\rho_0) \sim -m \text{Log}(\rho_0) + q,$$

$$m = \frac{1}{2\rho^{r+1} ||\{J_j, H_{r+1}^{(r)}\}||_R}$$

Parametri caso Sole-Giove:

- $\mu = 9.5387536 \cdot 10^{-4}$;
- $\omega_1 = 9.9675752552 \cdot 10^{-1}$;
- $\omega_2 = -8.0463875837 \cdot 10^{-2}$;
- $R_1 = 1 = R_2$ (generale)

D.2) Stima della regione di stabilità teorica

Raggio di stabilità ρ_0 per unità di ω_J in coordinate normali

$$\mathcal{T}_J = \frac{T_{Jup}}{2\pi} \Rightarrow T_{uni} = 14 \cdot 10^9 y \sim 10^{10} \mathcal{T}_J \Rightarrow \rho_0 = 2.911 \cdot 10^{-2}$$

Osservazione: $T_{\chi(r)}^{-1} \Delta'_{\rho_0 R} = T_{\chi(r)}^{-1} \left(\frac{x_j'^2 + y_j'^2}{2} \right) = \frac{x_j^2 + y_j^2}{2}$ (th. di scambio)

- Raggio di stabilità ρ in coordinate polari: $\rho = \sqrt{(\rho_0^2 - 2|I_j - I_j'|)}$;
- $I_j(x, y)|_{x=T_{\chi}^{-1}(x'_j, y'_j)} = (T_{\chi}^{-1} I_j)(x', y')$
- $|I_j - I_j'|_{\rho_0 R} \leq ||I_j - I_j'||_{\rho_0 R} = \sum_{k=3}^{\tilde{r}} \rho_0^{\tilde{r}} ||\Phi_j^{(\tilde{r})}||_R < 2||\Phi_j^{(3)}||_{\rho_0 R}, \rho_0 \leq \frac{R^*}{2}$
- Avendo $E_k, \rho_0 \Rightarrow |I_1 - I_1'|_{\rho_0 R} \simeq 5.032 \cdot 10^{-5}; |I_2 - I_2'|_{\rho_0 R} \simeq 1.834 \cdot 10^{-4}$

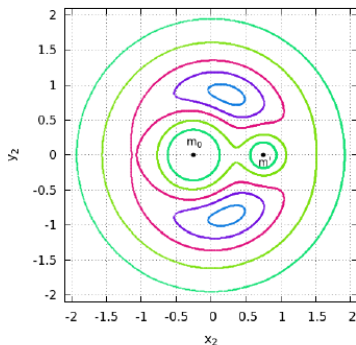
Raggio di Stabilità

$$\rho = \sqrt{(\rho_0^2 - 2|I_2 - I_2'|)} \simeq 2.912 \cdot 10^{-2} \simeq \rho_0$$

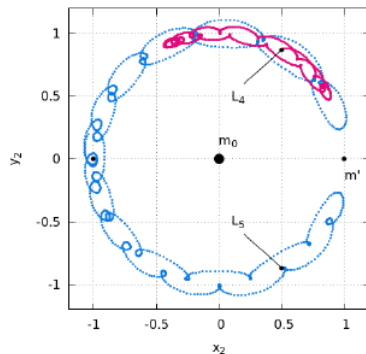
D.3) Insoddisfacente confronto con gli asteroidi esistenti

N_A	R_1	R_2	ρ	\tilde{r}_{opt}	N_A	R_1	R_2	ρ	\tilde{r}_{opt}
88181612	$3.130230 \cdot 10^{-2}$	$2.101250 \cdot 10^{-3}$	1.487790	33	4348	$1.265200 \cdot 10^{-1}$	$7.450120 \cdot 10^{-2}$	$2.977800 \cdot 10^{-1}$	34
89211605	$3.314960 \cdot 10^{-2}$	$1.959370 \cdot 10^{-2}$	1.135130	34	4827	$5.760190 \cdot 10^{-2}$	$1.213100 \cdot 10^{-1}$	$2.868400 \cdot 10^{-1}$	34
41790004	$1.651660 \cdot 10^{-2}$	$3.106310 \cdot 10^{-2}$	1.100990	34	4722	$1.354100 \cdot 10^{-1}$	$8.204770 \cdot 10^{-2}$	$2.755600 \cdot 10^{-1}$	34
1870	$3.871410 \cdot 10^{-2}$	$1.717610 \cdot 10^{-2}$	1.048060	33	1173	$1.600900 \cdot 10^{-1}$	$4.983620 \cdot 10^{-2}$	$2.721800 \cdot 10^{-1}$	32
2357	$4.234620 \cdot 10^{-2}$	$2.850950 \cdot 10^{-2}$	$8.470200 \cdot 10^{-1}$	34	10240002	$8.412220 \cdot 10^{-2}$	$1.368200 \cdot 10^{-1}$	$2.434500 \cdot 10^{-1}$	34
5257	$3.183610 \cdot 10^{-2}$	$4.242410 \cdot 10^{-2}$	$7.504500 \cdot 10^{-1}$	34	2594	$9.109540 \cdot 10^{-2}$	$1.393500 \cdot 10^{-1}$	$2.360100 \cdot 10^{-1}$	34
88181912	$7.083260 \cdot 10^{-2}$	$6.687100 \cdot 10^{-3}$	$6.597200 \cdot 10^{-1}$	33	4829	$6.679660 \cdot 10^{-2}$	$1.486500 \cdot 10^{-1}$	$2.358500 \cdot 10^{-1}$	34
5233	$4.163300 \cdot 10^{-2}$	$4.662950 \cdot 10^{-2}$	$6.495000 \cdot 10^{-1}$	34	88180812	$1.671900 \cdot 10^{-1}$	$9.927530 \cdot 10^{-2}$	$2.247200 \cdot 10^{-1}$	34
4708	$7.099190 \cdot 10^{-2}$	$1.894850 \cdot 10^{-2}$	$6.275300 \cdot 10^{-1}$	32	4754	$4.806640 \cdot 10^{-2}$	$1.677300 \cdot 10^{-1}$	$2.157600 \cdot 10^{-1}$	34
88181311	$3.914500 \cdot 10^{-2}$	$5.262120 \cdot 10^{-2}$	$6.063800 \cdot 10^{-1}$	34	4707	$1.470000 \cdot 10^{-1}$	$1.294500 \cdot 10^{-1}$	$2.138800 \cdot 10^{-1}$	34
1871	$5.121390 \cdot 10^{-2}$	$4.691570 \cdot 10^{-2}$	$6.000700 \cdot 10^{-1}$	34	43170004	$1.345900 \cdot 10^{-1}$	$1.403400 \cdot 10^{-1}$	$2.106900 \cdot 10^{-1}$	34
31080004	$7.002890 \cdot 10^{-2}$	$2.745100 \cdot 10^{-2}$	$5.956600 \cdot 10^{-1}$	32	89210305	$1.881300 \cdot 10^{-1}$	$1.057300 \cdot 10^{-1}$	$2.032200 \cdot 10^{-1}$	34
94031908	$1.4433780 \cdot 10^{-2}$	$6.123500 \cdot 10^{-2}$	$5.928600 \cdot 10^{-1}$	34	88182012	$1.910400 \cdot 10^{-1}$	$1.094400 \cdot 10^{-1}$	$1.989500 \cdot 10^{-1}$	34
2674	$6.527500 \cdot 10^{-2}$	$3.592170 \cdot 10^{-2}$	$5.894200 \cdot 10^{-1}$	34	4805	$1.221800 \cdot 10^{-1}$	$1.606700 \cdot 10^{-1}$	$1.974600 \cdot 10^{-1}$	34
88180412	$7.829610 \cdot 10^{-2}$	$1.451120 \cdot 10^{-2}$	$5.876200 \cdot 10^{-1}$	32	5511	$1.328100 \cdot 10^{-1}$	$1.631800 \cdot 10^{-1}$	$1.908600 \cdot 10^{-1}$	34
88180710	$5.420360 \cdot 10^{-2}$	$5.338740 \cdot 10^{-2}$	$5.425600 \cdot 10^{-1}$	34	89211505	$1.139400 \cdot 10^{-1}$	$1.739200 \cdot 10^{-1}$	$1.890100 \cdot 10^{-1}$	34
88191102	$9.320020 \cdot 10^{-2}$	$1.316370 \cdot 10^{-2}$	$4.979700 \cdot 10^{-1}$	33	20350004	$1.754200 \cdot 10^{-1}$	$1.475100 \cdot 10^{-1}$	$1.838900 \cdot 10^{-1}$	34
88182510	$8.859670 \cdot 10^{-2}$	$3.638490 \cdot 10^{-2}$	$4.658500 \cdot 10^{-1}$	32	884	$1.441100 \cdot 10^{-1}$	$1.686700 \cdot 10^{-1}$	$1.820300 \cdot 10^{-1}$	34
2207	$1.747150 \cdot 10^{-2}$	$8.093470 \cdot 10^{-2}$	$4.487900 \cdot 10^{-1}$	34	2893	$1.219200 \cdot 10^{-1}$	$1.871300 \cdot 10^{-1}$	$1.758800 \cdot 10^{-1}$	34
89201902	$7.247770 \cdot 10^{-2}$	$6.844550 \cdot 10^{-2}$	$4.163900 \cdot 10^{-1}$	34	1872	$8.983270 \cdot 10^{-2}$	$2.039900 \cdot 10^{-1}$	$1.723100 \cdot 10^{-1}$	34
94031500	$4.552550 \cdot 10^{-2}$	$8.58320 \cdot 10^{-2}$	$4.075300 \cdot 10^{-1}$	34	90202212	$2.078400 \cdot 10^{-1}$	$6.032100 \cdot 10^{-1}$	$5.963150 \cdot 10^{-2}$	34
89212405	$3.008840 \cdot 10^{-2}$	$8.992360 \cdot 10^{-2}$	$4.005000 \cdot 10^{-1}$	34	2895	$1.843700 \cdot 10^{-1}$	$6.294600 \cdot 10^{-1}$	$5.746530 \cdot 10^{-2}$	34
89211705	$6.369570 \cdot 10^{-2}$	$8.261660 \cdot 10^{-2}$	$3.826400 \cdot 10^{-1}$	34	5120	$2.533600 \cdot 10^{-1}$	$6.210100 \cdot 10^{-1}$	$5.713580 \cdot 10^{-2}$	34
5907	$9.759570 \cdot 10^{-2}$	$6.062860 \cdot 10^{-2}$	$3.790100 \cdot 10^{-1}$	34	3451	$2.285800 \cdot 10^{-1}$	$6.288900 \cdot 10^{-1}$	$5.705220 \cdot 10^{-2}$	34
88181411	$9.442780 \cdot 10^{-2}$	$6.523500 \cdot 10^{-2}$	$3.757900 \cdot 10^{-1}$	34	4791	$1.298900 \cdot 10^{-1}$	$6.811600 \cdot 10^{-1}$	$5.332600 \cdot 10^{-2}$	34
4792	$1.091900 \cdot 10^{-1}$	$5.448570 \cdot 10^{-2}$	$3.617700 \cdot 10^{-1}$	34	4709	$1.737100 \cdot 10^{-1}$	$6.851900 \cdot 10^{-1}$	$5.294080 \cdot 10^{-2}$	34
88180811	$1.160100 \cdot 10^{-1}$	$5.001570 \cdot 10^{-2}$	$3.519900 \cdot 10^{-1}$	33	3317	$3.085000 \cdot 10^{-1}$	$7.051000 \cdot 10^{-1}$	$4.989590 \cdot 10^{-2}$	34
3240	$1.362500 \cdot 10^{-1}$	$2.751300 \cdot 10^{-2}$	$3.359200 \cdot 10^{-1}$	32	4867	$2.331200 \cdot 10^{-1}$	$7.362600 \cdot 10^{-1}$	$4.901550 \cdot 10^{-2}$	34
5638	$1.079900 \cdot 10^{-1}$	$8.124580 \cdot 10^{-2}$	$3.162000 \cdot 10^{-1}$	34	1867	$2.169200 \cdot 10^{-1}$	$7.582500 \cdot 10^{-1}$	$4.773260 \cdot 10^{-2}$	34
43690004	$1.018300 \cdot 10^{-1}$	$9.101430 \cdot 10^{-2}$	$3.061600 \cdot 10^{-1}$	34	88172500	$2.429700 \cdot 10^{-1}$	$9.020800 \cdot 10^{-1}$	$4.017310 \cdot 10^{-2}$	34
31630002	$1.430300 \cdot 10^{-1}$	$4.449490 \cdot 10^{-2}$	$3.046700 \cdot 10^{-1}$	32	1208	$3.619200 \cdot 10^{-1}$	$9.975700 \cdot 10^{-1}$	$3.597040 \cdot 10^{-2}$	34
					2363	$2.937300 \cdot 10^{-1}$	1.012520	$3.573360 \cdot 10^{-2}$	34

Sviluppi Recenti: approccio numerico alla stabilità di L_4



(a) "curve di velocità zero" al variare di $C_J := 2U - v_2^2$



(b) Moto di un asteroide nei pressi di L_4 con dettaglio nelle orbite "a larva" (rosa) e "a ferro di cavallo" (azzurro)

Confronto tra hamiltoniana "mediata" \mathcal{Z} e completa H

Hamiltoniana normalizzata e autonoma

$$H^{(R_1, R_2)}(\rho, \xi, \tau, \eta) = \mathcal{Z}^{(R_1, R_2)}(\rho, \frac{\eta^2 + \xi^2}{2}, \tau) + \mathcal{R}^{(R_1, R_2)}(\rho, \xi, \tau, \eta)$$

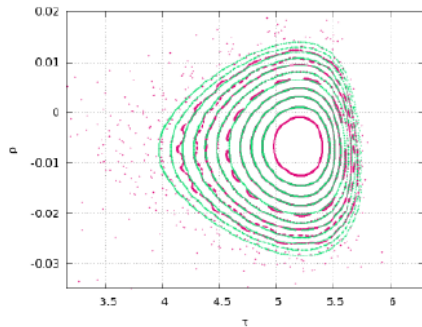
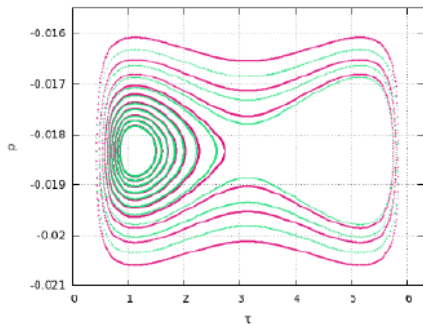


Figure: Confronto delle orbite di \mathcal{Z} (azzurro) e H (rosa) nel il problema Sole-Terra (sinistra) e Sole-Giove (destra) in prossimità di L5, per un tempo di integrazione di $6 \cdot 10^3 y$

Conclusioni

Approccio analitico ($t \sim 14 \cdot 10^9 y$)

- Attraverso la costruzione in "*forma normale di Birkhoff*" di H , si sono ottenute le costanti del moto fino all'ordine r : le azioni I_j^r ;
- Valutando il resto $\mathcal{R}^{(r+1)}$ e la norma $\|f\|_{\rho R}$, è stato determinato il minimo "*tempo di fuga*" con il quale si è stimata la regione di stabilità;
- il raggio del dominio di stabilità è insoddisfacente e va migliorato

Approccio numerico ($t \sim 6 \cdot 10^3 y$)

- Si sono individuate la "*curve di velocità zero*" e le orbite "*a larva*" e "*a ferro di cavallo*" per μ del caso Sole-Giove ($\mu = 0.001$).
- Si sono confrontate le hamiltoniane "*mediata*" Z e completa H nei problemi Sole-Terra ($\mu = 0.3 \cdot 10^{-5}$) e Sole-Giove ($\mu = 0.95 \cdot 10^{-3}$). Solo il caso Sole-Terra, poichè caratterizzato da μ piccolo, si può ritenere valido.

GRAZIE PER L'ATTENZIONE!