

Note sulle esperienze

Maurizio Loreti
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Padova

Anno Accademico 2006-2007
<http://www.pd.infn.it/~loreti/did/appl.pdf>

Nel seguito discuteremo per sommi capi sia le esperienze preliminari sulle misure ripetute che alcuni aspetti teorici relativi alle esperienze “fisiche” dei corsi di Esperimentazioni di Fisica 1 e 2 per il primo anno del Corso di Laurea in Fisica. La trattazione è volutamente lasciata su un piano generale poiché la stesura di relazioni che descrivano l'apparato sperimentale usato, le modalità di acquisizione dei dati, la loro successiva elaborazione e le conclusioni finali costituisce parte integrante del corso.

1 Misure ripetute

1.1 Triangoli

Bisogna disegnare 60 triangoli e misurarne gli angoli interni, stimando a occhio il decimo di grado ed alternandosi tra misuratori; l'esperienza è stata scelta sia per la facilità di esecuzione sia perché il valore vero della grandezza misurata è noto dalla geometria euclidea. *Possibili* cause di errore sistematico sono gli strumenti e lo sperimentatore; errori casuali sono introdotti dal disegno dei triangoli, dal posizionamento del goniometro, dalla stima del decimo di grado e dalla cattiva definizione dei triangoli.

L'elaborazione consiste nel calcolo di moda, mediana e media aritmetica del campione; dell'errore quadratico medio e dell'errore della media; nell'eliminare eventuali dati anomali; nell'istogrammare i risultati e nel controllare il loro andamento normale; ed infine nella verifica della compatibilità del risultato ottenuto col valore di 180° .

1.2 Pendoli

Bisogna eseguire misure ripetute di durata usando un pendolo; occorre che l'ampiezza delle oscillazioni sia approssimativamente costante nel corso della presa dati, così che gli errori siano introdotti solo dal misuratore. Si prendono 3 campioni (tutti al millesimo di secondo): 100 misure della durata di 1 oscillazione completa, 50 misure della durata di 2 oscillazioni e 25 misure della durata di 4 oscillazioni; in ognuno di essi tutti gli studenti si alternano alla presa dati.

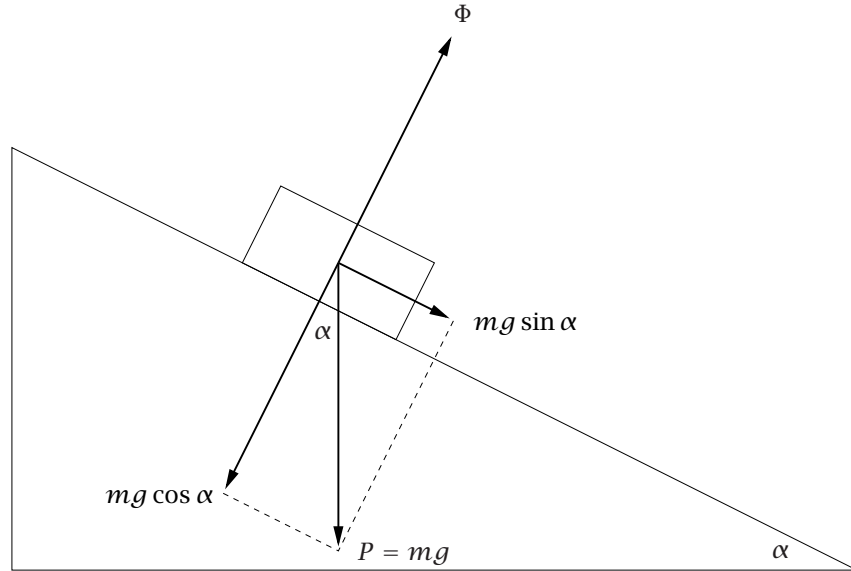
Per ognuno dei tre campioni si istogrammano i risultati e si calcolano media, errore quadratico medio ed errore della media (eliminando eventuali valori anomali); si verifica l'andamento normale degli istogrammi; si stima il periodo a partire dai tre campioni; e si verifica che gli errori quadratici medi ed i periodi siano compatibili tra loro.

2 Piano inclinato

Con la guidovia a cuscino d'aria si effettua un'esperienza avente come scopo lo studio del moto di un carrello che scivola su un piano inclinato sotto l'azione del proprio peso.

Le forze agenti sul carrello, ammettendo di poter trascurare gli attriti, sono schematizzate nella figura 1: la componente normale della forza peso, di modulo $mg \cos \alpha$ (ove α è l'angolo di inclinazione

FIGURA 1 - Rappresentazione schematica delle forze agenti su di un corpo che scivola (in assenza di attrito) su di un piano inclinato.



del piano), viene equilibrata dalla reazione del vincolo Φ ; l'unica forza attiva è quindi la componente parallela al piano inclinato della forza peso, avente modulo $mg \sin \alpha$ costante.

Il moto del corpo è quindi *uniformemente accelerato*; accelerazione, velocità e spazio percorso dal corpo in funzione del tempo sono date dalle

$$\begin{cases} a &= g \sin \alpha \\ v &= v_0 + a t \\ s &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \end{cases}$$

Il primo scopo dell'esperienza consiste nella verifica di questa legge del moto: la maniera più conveniente di farlo è quella di misurare, in vari punti della guidovia, sia le velocità della slitta che i tempi impiegati a raggiungerle; e verificare poi che il grafico di v in funzione di t sia rappresentato effettivamente da una linea retta.

La pendenza di questa retta (che numericamente misura l'accelerazione del moto) si può calcolare eseguendo sui punti misurati un'interpolazione lineare con il metodo dei minimi quadrati, e dall'accelerazione si può risalire poi al valore di g attraverso la

$$g = \frac{a}{\sin \alpha} \quad (2.1)$$

L'errore σ_v sulle velocità (che sono in ordinata nel nostro grafico) si può ricavare usando la formula dell'errore a posteriori; in questa maniera non è necessario fare alcuna assunzione sulla precisione con cui si sono posizionati i traguardi di misura sulla guidovia.

Una volta calcolato σ_v , si può da esso risalire all'errore sull'accelerazione; e da questo all'errore su

g attraverso la formula di propagazione applicata alla (2.1):

$$\begin{aligned}\sigma_g^2 &= \left(\frac{\partial g}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sin \alpha}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{a}{\sin^2 \alpha} \cos \alpha\right)^2 \sigma_\alpha^2 \\ &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left[\sigma_a^2 + \frac{a^2}{\tan^2 \alpha} \sigma_\alpha^2 \right] \\ &= g^2 \left[\frac{\sigma_a^2}{a^2} + \frac{\sigma_\alpha^2}{\tan^2 \alpha} \right]\end{aligned}$$

(la formula è *approssimata*, non essendo g lineare rispetto ad α).

Si eseguono misure per tre differenti valori dell'angolo α (15', 30' e 45'); quelle alla massima inclinazione si ripetono poi dopo aver fissato rigidamente alla slitta un apposito disco di ottone.

Lo scopo è quello di verificare la dipendenza dell'accelerazione del moto dall'inclinazione del piano (controllando che la relazione tra a e $\sin \alpha$ sia esprimibile mediante una retta che passi approssimativamente per l'origine) e la sua indipendenza dalla massa del corpo (controllando la compatibilità delle accelerazioni negli ultimi due campioni).

3 Il volano

Le forze applicate al sistema fisico del volano, rappresentato schematicamente nella figura 2, sono:

- *sul peso*: la forza di gravità, di modulo $P = mg$, e la tensione del filo di modulo T' ;
- *sul volano*: la tensione del filo T ed il momento delle forze di attrito M_a .

Trattandosi di attrito tra corpi solidi (rotolamento delle sfere dei cuscinetti), la teoria prevede che il momento delle forze d'attrito agenti sull'asse del volano sia indipendente dalle condizioni del moto: quindi M_a è una *costante*. Le equazioni del moto, per il peso ed il volano, sono dunque:

$$\begin{cases} mg - T' &= ma \\ Tr - M_a &= I \frac{d\omega}{dt} \end{cases} \quad (3.1)$$

in cui abbiamo indicato con a l'accelerazione del peso; con I il momento d'inerzia del volano rispetto all'asse fisso di rotazione; e con ω la sua velocità angolare.

Se il filo che connette il peso al volano si può considerare *di massa trascurabile*, risulterà in conseguenza $T = T'$; inoltre la velocità angolare del volano ω , la velocità lineare del peso v e la sua accelerazione a sono legate tra loro (se il filo si può considerare anche *inestensibile*) dalla relazione

$$\omega = \frac{v}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dv}{dt} = \frac{a}{r}$$

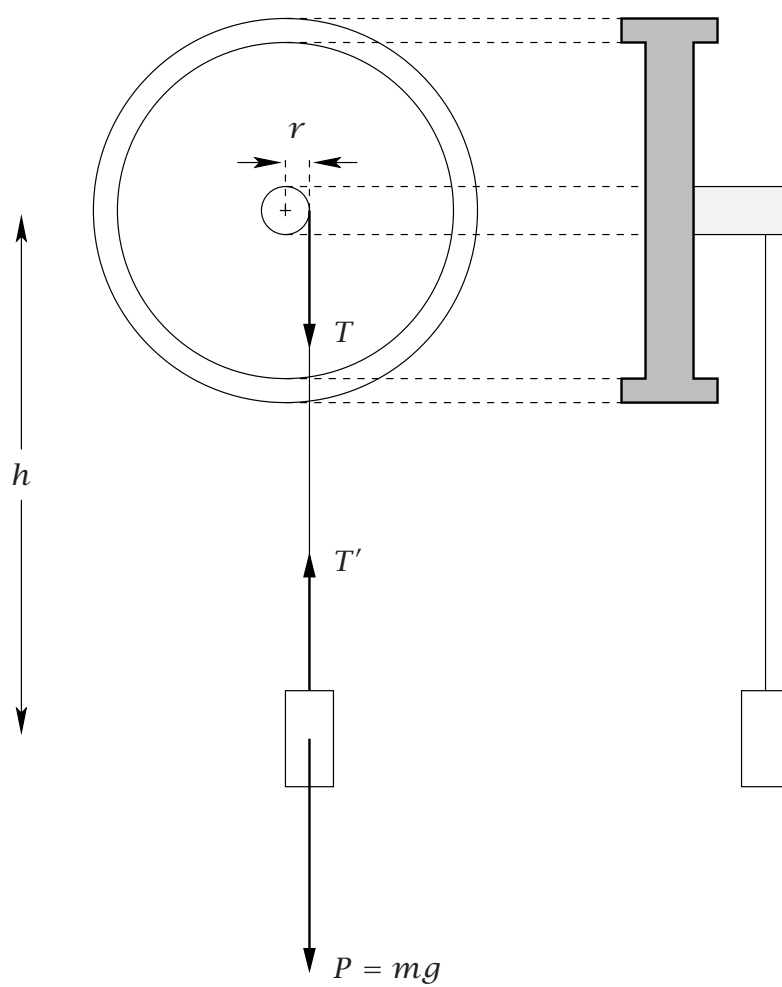
e, sostituendo nel sistema (3.1), avremo

$$\begin{cases} mg - T &= ma \\ Tr - M_a &= \frac{I}{r} a \end{cases} \quad (3.2)$$

Per risolvere il sistema (3.2), si può ad esempio ricavare dalla prima equazione la tensione del filo $T = m(g - a)$, e sostituire nella seconda:

$$mr(g - a) - M_a = \frac{Ia}{r}$$

FIGURA 2 - Il volano: apparato sperimentale.



da cui

$$a(I + mr^2) = (mrg - M_a)r$$

ed infine

$$a = \frac{(mrg - M_a)r}{I + mr^2} \quad (3.3)$$

Essendo tutte le grandezze da cui a dipende costanti nel tempo, l'accelerazione del peso sarà anch'essa *costante* e pertanto il suo moto *uniformemente accelerato*: così come sarà uniformemente accelerato il moto del volano, vista la proporzionalità tra l'accelerazione angolare $d\omega/dt$ ed a . Se si misurano i tempi a partire dall'istante in cui si mette in moto il sistema, la velocità v e lo spazio s percorso dal peso sono date in ogni istante dalle

$$v = at \quad \text{e} \quad s = \frac{1}{2} at^2$$

in cui a avrà il valore trovato nella (3.3).

Sempre se il filo si può considerare *inestensibile*, lo spazio percorso dal peso è legato all'angolo ϕ di cui è ruotato il volano; risulta in effetti

$$s = \frac{1}{2} at^2 = r\phi \quad (3.4)$$

per cui la velocità angolare ω del volano, espressa in funzione del tempo, è data dalla

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{v}{r} = \frac{at}{r}$$

$$\omega(t) = \frac{a}{r} t = \frac{mrg - M_a}{I + mr^2} t$$

Una grandezza che è particolarmente facile studiare è il tempo intercorso tra l'inizio del moto del volano e la fine di ognuno dei giri successivamente osservati. Dalla (3.4), esprimendo l'angolo di rotazione in funzione dei giri del volano, si ricava

$$\frac{1}{2} at^2 = 2\pi r \cdot n \quad \Rightarrow \quad t = 2 \sqrt{\frac{\pi r}{a}} \sqrt{n} = \alpha \sqrt{n}$$

in cui si è posto per brevità

$$\alpha = 2 \sqrt{\frac{\pi r}{a}} = 2 \sqrt{\frac{\pi(I + mr^2)}{mrg - M_a}} \quad (3.5)$$

Per verificare la legge del moto, si misurano i tempi parziali t intercorsi tra la partenza del volano da fermo e la fine di ogni giro; si riporta poi in grafico t in funzione di \sqrt{n} , e si controlla che l'andamento sia lineare. La pendenza della retta, cioè il valore di α , si può ricavare (con il relativo errore) dai dati effettuando un'interpolazione lineare ed usando poi la formula dell'errore a posteriori.

Anche se la retta *dovrebbe* passare per l'origine degli assi coordinati, è preferibile effettuare l'interpolazione con una generica retta di equazione $t = t_0 + \alpha\sqrt{n}$ e verificare poi che l'intercetta t_0 abbia valore (entro gli errori stimati) compatibile con lo zero; anche se non lo fosse, per i particolari scopi di questa esperienza ciò non sarebbe rilevante.

Il momento d'inerzia I del volano si può ricavare sperimentalmente dalla formula (3.5), una volta noto il valore di α ; bisognerebbe però conoscere anche il valore del momento delle forze d'attrito M_a . Per misurare quest'ultimo si può studiare il moto del sistema nella sua fase di decelerazione, dopo che il peso si è staccato: l'energia iniziale del sistema stesso è l'energia cinetica posseduta dal volano all'atto del distacco del peso, e viene gradualmente trasformata in calore attraverso l'intervento delle forze di attrito — il cui lavoro è proporzionale al momento M_a ed all'angolo di rotazione del volano.

Il momento delle forze d'attrito M_a è, in ogni istante, legato al valore dell'accelerazione angolare (ora negativa) dalla

$$-M_a = I \frac{d\omega}{dt}$$

Integrando,

$$\omega(t) = \omega_{\max} - \frac{M_a}{I} t = \omega_{\max} + \beta t$$

in cui si è posto

$$\beta = -\frac{M_a}{I} \quad (3.6)$$

e si è indicato con ω_{\max} la velocità angolare del volano all'istante $t = 0$ in cui il peso si stacca: anche β , come α , si può agevolmente ricavare sperimentalmente misurando ω in funzione del tempo dopo il distacco del peso ed interpolando; il relativo errore si ottiene ancora "a posteriori". L'osservata linearità di ω in funzione di t convalida poi questa seconda legge del moto e conferma così sperimentalmente che M_a si può effettivamente considerare costante.

Una volta misurato β , si può dalla (3.6) ricavare il valore di M_a e, sostituendo nella precedente (3.5), ottenere il momento d'inerzia del volano I : risulta

$$M_a = -\beta I \quad (3.7)$$

e finalmente

$$I = \frac{mr(g\alpha^2 - 4\pi r)}{4\pi - \alpha^2\beta} \quad (3.8)$$

(il valore di g in Padova vale 980.6 cm/s^2).

Ricordatevi che β è un numero negativo: il termine $-\alpha^2\beta$ a denominatore è pertanto positivo.

Passando al calcolo dell'errore, notiamo che I è stato da noi ricavato come funzione di α , β , m ed r : l'errore su I si otterrà dagli errori su queste quattro grandezze attraverso la formula di propagazione applicata alla (3.8). Ora, r si può considerare con buona approssimazione esente da errore (o, per essere più precisi, il termine che contiene $\partial I / \partial r$ risulta trascurabile rispetto agli altri); indicati con σ_m , σ_α e σ_β gli errori rispettivi di m , α e β , la formula da usare è la

$$\sigma_I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial \beta}\right)^2 \sigma_\beta^2}$$

(formula approssimata) con

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I}{\partial m} = \frac{r(g\alpha^2 - 4\pi r)}{4\pi - \alpha^2\beta} \\ \frac{\partial I}{\partial \alpha} = \frac{2mr g \alpha (4\pi - \alpha^2\beta) + 2mr \alpha \beta (g\alpha^2 - 4\pi r)}{(4\pi - \alpha^2\beta)^2} \\ \quad = \frac{8\pi mr \alpha (g - \beta r)}{(4\pi - \alpha^2\beta)^2} \\ \frac{\partial I}{\partial \beta} = \frac{mr \alpha^2 (g\alpha^2 - 4\pi r)}{(4\pi - \alpha^2\beta)^2} \end{array} \right.$$

Il momento delle forze di attrito, M_a , si può ricavare attraverso la (3.7); il suo errore vale

$$\sigma_{M_a} = M_a \sqrt{\left(\frac{\sigma_\beta}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2}$$

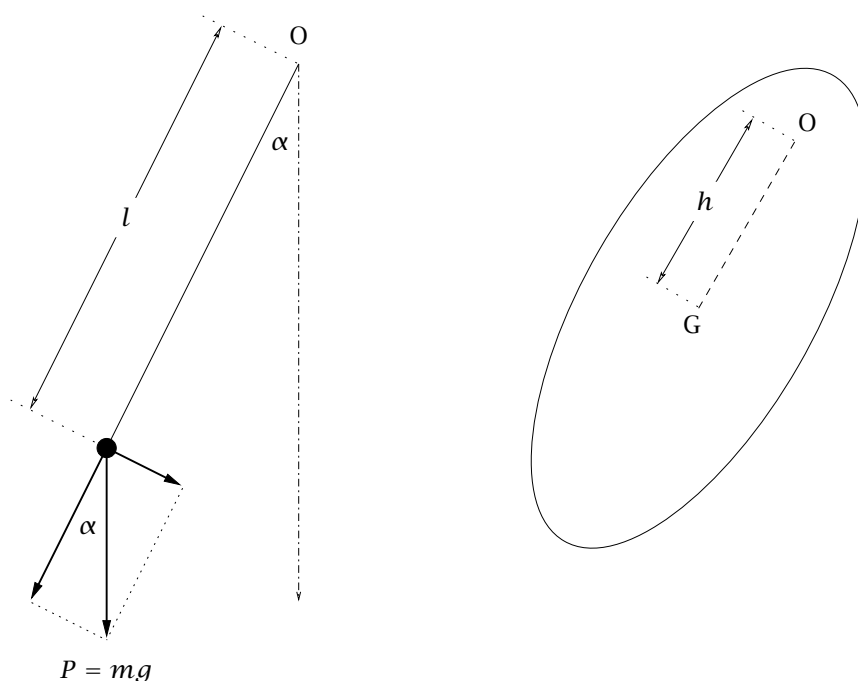
4 Il pendolo reversibile di Kater

Il periodo delle oscillazioni del pendolo semplice è dato dalla nota formula

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (4.1)$$

(valida per oscillazioni *piccole*, cioè tali per cui si possa confondere il seno del massimo angolo α tra

FIGURA 3 - Rappresentazione schematica del pendolo semplice e del pendolo composto.



esso e la verticale con l'angolo stesso); e risulta quindi indipendente sia da α che dalla massa m del pendolo. Se α non si può ritenere piccolo, la formula del periodo si può ricavare mediante sviluppo in serie; T è funzione delle sole potenze pari di α , e vale

$$T = T_0 \left[1 + \frac{1}{16} \alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^4) \right]$$

Si vede subito che T è comunque maggiore di T_0 e che coincide con esso solo per oscillazioni infinitesime; i termini di ordine superiore ad α^2 sono poi del tutto trascurabili (nelle condizioni presenti in laboratorio) rispetto a quelli precedenti: per cui si può a tutti gli effetti ritenere che la durata delle nostre oscillazioni sia data **esattamente** dalla

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} \right) \quad (4.2)$$

Per ogni $\alpha > 0$ si introduce quindi nei calcoli, usando la formula (4.1), un errore *sistematico* che si può ricavare dalla (4.2); esso vale

$$\Delta T = T - T_0 = T_0 \frac{\alpha^2}{16} \quad \text{cioè} \quad \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\alpha^2}{16}$$

e può risultare o meno trascurabile a seconda delle condizioni sperimentali.

Il *pendolo composto* è invece costituito da un corpo rigido libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse fisso, non verticale e non passante per il baricentro; la legge del moto del pendolo composto è, ancora per le piccole oscillazioni,

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

indicando con I il momento d'inerzia rispetto all'asse di oscillazione e con h la distanza di quest'ultimo dal baricentro. Per oscillazioni non piccole vale ancora la stessa legge espressa dalla (4.2); ed il pendolo composto si comporta quindi esattamente come un pendolo semplice avente lunghezza

$$l = \frac{I}{mh}$$

che prende il nome di *lunghezza ridotta*. Sfruttando il teorema di *Steiner-Huygens* che afferma:

Il momento d'inerzia I di un corpo rigido rispetto ad un asse qualsiasi R è uguale al momento d'inerzia I_G dello stesso corpo rispetto ad un asse parallelo ad R e passante per il baricentro G , sommato al prodotto tra la massa del corpo ed il quadrato della distanza tra l'asse R ed il baricentro

cioè, in formula,

$$I = I_G + mh^2$$

si ottiene per la lunghezza ridotta del pendolo composto l'espressione

$$l = \frac{I}{mh} = \frac{I_G + mh^2}{mh} = h + \frac{I_G}{mh} \quad (4.3)$$

Il pendolo reversibile di Kater¹ può essere fatto oscillare attorno a due assi diversi e tra loro paralleli, passanti per i due coltelli in O e O' ; ricaviamo le condizioni sotto le quali i periodi di oscillazione rispettivi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{e} \quad T' = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}}$$

sono uguali. Dovendo essere ovviamente $l = l'$, sfruttando la (4.3) otteniamo

$$h + \frac{I_G}{mh} = h' + \frac{I_G}{mh'}$$

cioè (moltiplicando entrambi i membri per mhh')

$$mh'h^2 - (I_G + mh'^2)h + I_Gh' = 0$$

Risolvendo questa equazione di secondo grado rispetto ad h , si trova che essa ammette le due soluzioni reali e distinte

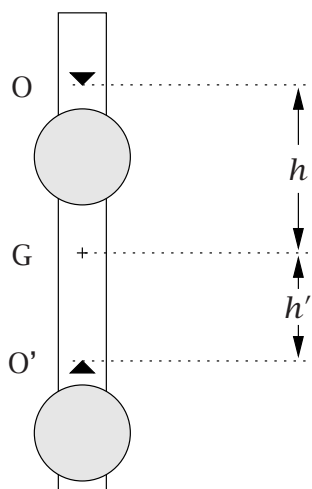
$$h = h' \quad \text{e} \quad h = \frac{I_G}{mh'}$$

Nel primo caso l'interpretazione fisica è che i due assi di oscillazione sono simmetrici rispetto al baricentro del pendolo; nel secondo, che implica anche

$$h' = \frac{I_G}{mh} \quad \Rightarrow \quad l = h + \frac{I_G}{mh} = h + h'$$

¹Inventato da Henry Kater nel 1817, e da lui descritto in *Philos. Trans. Roy. Soc. London* **108** (1818), pag. 33.

FIGURA 4 - Rappresentazione schematica del pendolo reversibile di Kater.



la distanza tra i due assi di oscillazione è *pari alla lunghezza ridotta*.

Nel pendolo reversibile di Kater la prima situazione è da escludere per la costruzione dello strumento; se i periodi di oscillazione attorno ai due assi sono uguali e di valore T , indicando con l la distanza tra O e O' (che è facilmente misurabile), si può ricavare il valore dell'accelerazione di gravità dalla

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

L'errore casuale su g sarà poi (dalla formula per i prodotti di potenze):

$$\left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_g = g \sqrt{\frac{\sigma_l^2}{l^2} + 4\frac{\sigma_T^2}{T^2}}$$

mentre gli errori sistematici (dovuti all'uso della formula approssimata per le piccole oscillazioni; all'usura del coltello; alla spinta di Archimede; ed all'attrito viscoso dell'aria) sono, nelle condizioni del laboratorio, trascurabili.

$g \text{ a Padova vale } 980.6 \text{ cm/s}^2$

5 L'estensimetro

Un corpo solido, per esempio un prisma od un cilindro retto, vincolato ad avere una delle sue facce in una posizione prefissata, quando viene sottoposto all'azione di una forza normale alla faccia opposta (ed alla relativa reazione vincolare) si deforma: e l'entità di tale deformazione è approssimativamente proporzionale al modulo della forza applicata, almeno fino a che la forza stessa non supera certi valori caratteristici del corpo (limiti di *elasticità* e di *rottura*). Questo comportamento è stato scoperto e studiato da Robert Hooke², ed un corpo per cui la deformazione segue una legge esattamente lineare (legge di Hooke) in funzione della forza applicata si dice *elastico*.

²R. Hooke - De Potentia Restitutiva, 1678.

In definitiva, se un cilindro retto (per esempio un filo) di materiale perfettamente elastico è sottoposto a due forze di modulo uguale F applicate sulle sue basi, aventi direzione perpendicolare alle basi stesse e verso opposto l'una all'altra, la legge di Hooke impone che si allunghi o si accorci di una quantità

$$\Delta x = x - x_0 = K \cdot F$$

dove x_0 rappresenta la lunghezza del corpo non soggetto ad alcuna sollecitazione; il modulo F delle forze va preso con segno positivo quando il loro verso è tale da provocare un allungamento, e negativo altrimenti.

Semplici considerazioni di similitudine geometrica permettono di capire che la *costante elastica* K deve dipendere in modo direttamente proporzionale dalla lunghezza del corpo a riposo, ed in modo inversamente proporzionale dalla sua sezione; per cui la legge di Hooke per l'allungamento di un filo elastico è data, in definitiva, dalla formula

$$\Delta x = \frac{1}{E} \frac{x_0}{S} F \quad (5.1)$$

in cui la costante (positiva) E dipende dal materiale di cui il filo è costituito. E si chiama *modulo di Young*, ed ha le dimensioni di una forza per unità di area; si misura quindi in Newton su metro quadro (o in dine su centimetro quadro)³.

L'estensimetro è un apparecchio che permette di applicare delle forze note ad una estremità di un filo elastico il cui altro estremo è vincolato, e di misurarne il conseguente allungamento. Nel contesto del corso viene utilizzato: per la verifica sperimentale della legge di Hooke; per la determinazione del modulo di Young di sostanze differenti; e per la verifica della proporzionalità tra la costante elastica e la lunghezza (o la sezione) del filo a parità di altre condizioni.

La lunghezza del filo non sollecitato ed il suo diametro vengono forniti direttamente dal laboratorio, assieme al relativo errore; gli allungamenti del filo vengono invece letti su di un comparatore (o *minimetro*) che amplifica, con un opportuno gioco di ingranaggi, lo spostamento di un'asta solidale all'estremità del filo stesso, trasmettendolo ad una lancetta rotante. Un giro completo della lancetta corrisponde ad 1 mm di allungamento, ed il minimetro permette di apprezzare il centesimo di millimetro (10 μ m); per allungamenti superiori al millimetro si può considerare un piccolo quadrante interno, la cui lancetta è collegata ad un ingranaggio del primo stadio di amplificazione.

La forza applicata è generata da una molla tarata (*dinamometro*), e si può variare agendo su una ghiera rotante; il valore della forza si legge su una scala, graduata di 100 in 100 grammi: la forza viene applicata al filo attraverso una leva, per cui il suo valore effettivo è quello letto sulla scala *moltiplicato per 4*. In questo modo la forza è espressa in grammi-peso; se la si desidera in Newton, bisogna anche moltiplicare per il relativo fattore di conversione, che come noto vale 9.806 N/Kg: il risultato è che, per ogni aumento di 100 g = 0.1 Kg della forza esercitata dalla molla, quella applicata al filo aumenta di $4 \cdot 0.1 \cdot 9.806 \approx 3.92$ N.

Non si compie nessuna misura in assenza completa di forze applicate, perché bisogna essere ben certi che il filo sia teso; per questo motivo si parte da una forza iniziale $F_I = 200$ g sulla scala, e si prosegue di 100 in 100 g fino a 1200 g (sempre sulla scala⁴). Quindi quello che si misura, in realtà, è la differenza tra la lunghezza x del corpo soggetto all'azione di una forza F , e la lunghezza x_I dello stesso corpo soggetto alla forza F_I . È facile vedere, partendo dalla (5.1), che tra queste grandezze intercorre la relazione

$$x - x_I = K (F - F_I) = \frac{x_0}{ES} (F - F_I)$$

Visto che si tratta di eseguire una misura differenziale, si può per convenienza azzerare la scala del minimetro (ruotandone la ghiera) fino a portarne lo zero a coincidere con la lettura iniziale x_I ; in questo modo sul comparatore si leggeranno poi direttamente le differenze $x - x_I$. La sezione del filo si può poi calcolare, noto il diametro, attraverso la

$$S = \frac{\pi D^2}{4}$$

³Essendo assai piccola questa unità, è diffuso anche l'uso di Newton su millimetro quadrato.

⁴Alcuni estensimetri possono raggiungere soltanto 1100 g.

ed il diametro D viene (per ogni estensimetro) fornito dal laboratorio, assieme al relativo errore.

Una volta raggiunto il valore massimo della forza, si torna indietro diminuendola ancora di 100 in 100 g fino a tornare al valore iniziale di 200 g; ed, eseguite tutte queste operazioni, si riporta in grafico il valore misurato dell'allungamento $x - x_I$ in funzione della forza applicata $F - F_I$ (corretta per la presenza della leva!), e con il metodo dell'interpolazione lineare (N.B.: usando *tutti* i punti misurati, sia aumentando che diminuendo la forza applicata — senza considerare separatamente queste due fasi) si determina la costante elastica K con il relativo errore.

Anche se si sa che la retta *dovrebbe* passare per l'origine degli assi coordinati, conviene usare la formula generale e controllare poi che il valore calcolato dell'intercetta sia compatibile con 0 entro gli errori stimati. Se non lo è, presumibilmente il gioco interno degli ingranaggi del minimetro ha introdotto un errore sistematico nella fase dell'azzeramento iniziale; errore che tuttavia non ha alcuna importanza per gli scopi della nostra esperienza. Il modulo di Young si ricava dalla

$$E = \frac{x_0}{SK} = \frac{4x_0}{\pi D^2 K}$$

e la formula per il calcolo degli errori (prodotti di potenze) è la

$$\frac{\sigma_E}{E} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x_0}}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_K}{K}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2}$$

e, come valori di riferimento, si possono assumere

Acciaio	$E \approx 20 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
Ottone	$E \approx 9.31 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
Tungsteno	$E = 38 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$

Avendo a disposizione dati ottenuti da estensimetri che montano fili che differiscano *solo* per la sezione (o la lunghezza) del filo, si può verificare la dipendenza della costante elastica K da tali parametri: a parità di materiale e sezione, ad esempio, ci si aspetta che K sia direttamente proporzionale alla lunghezza a riposo; si riportano quindi in grafico i valori misurati di K in funzione di x_0 , e si controlla poi che i punti sperimentali siano disposti lungo una retta passante per l'origine.

A parità di materiale e lunghezza a riposo, invece, la proporzionalità inversa di K alla sezione (e quindi al quadrato del diametro D) si verifica riportando in grafico i valori di K in funzione di $1/D^2$; e, ancora, controllando che i punti misurati si dispongano lungo una retta passante per l'origine.

6 Il viscosimetro

Si lascia cadere, sotto l'azione della forza peso, un corpo *sferico* in un mezzo fluido; applicando a questo fenomeno il secondo principio della dinamica $F = ma$ (le forze agenti sono il peso, la spinta di Archimede e l'attrito viscoso) ricaviamo

$$\frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_0) g - 6\pi\eta r v = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \frac{dv}{dt}$$

in cui abbiamo indicato: con ρ e ρ_0 le densità del corpo e del fluido rispettivamente; con η la viscosità del fluido; e con r il raggio del corpo. Abbiamo inoltre assunto che il regime di moto sia *laminare*, e che si possa quindi esprimere la forza di attrito viscoso F_A mediante la *legge di Stokes*

$$F_A = 6\pi\eta r v \quad (6.1)$$

Semplificando e separando dv/dt , si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} r^2 (\rho - \rho_0) g - 3\eta v &= \frac{2}{3} r^2 \rho \frac{dv}{dt} \\ \frac{dv}{dt} &= g \frac{\rho - \rho_0}{\rho} - \frac{9\eta}{2\rho r^2} v = -\frac{9\eta}{2\rho r^2} \left[v - \frac{2\rho r^2}{9\eta} g \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \right] \end{aligned}$$

ed infine

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tau} (v - v_L)$$

se si definiscono, per brevità,

$$\tau = \frac{2 \rho r^2}{9 \eta} \quad \text{e} \quad v_L = \frac{2 r^2 g}{9 \eta} (\rho - \rho_0) \quad (6.2)$$

Integrando, si ricava dapprima

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v - v_L} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt$$

(in cui v_0 è la velocità iniziale, al tempo $t = 0$); poi

$$\ln \frac{v - v_L}{v_0 - v_L} = -\frac{t}{\tau}$$

ed infine

$$v = v_L + (v_0 - v_L) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

In questa formula v_L (che *non dipende* da v_0) rappresenta la *velocità limite*; è chiaro infatti che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v = v_L$$

Nel caso particolare, poi, che risulti $v_0 = 0$, la formula per $v = v(t)$ diventa

$$v = v_L (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

L'esperienza consiste nel lasciar cadere sfere di acciaio aventi 10 differenti diametri nel recipiente cilindrico contenente il liquido, cercando di mantenere la traiettoria quanto più possibile vicina al suo asse verticale. Si misurano per ognuna i tempi di caduta⁵ usando i riferimenti incisi sulla faccia esterna del recipiente: questi coprono un tratto lungo complessivamente 50 cm a intervalli di 5 cm, ed a partire circa da 5 cm sotto la superficie libera del liquido. In queste condizioni la velocità limite viene raggiunta dopo un percorso nel liquido di pochi millimetri; per cui il moto si può pensare *uniforme* in tutta la regione di misura.

Si dispone di sfere di diametro 0.15 cm e 0.2 cm, e di altre i cui diametri coprono tutti i valori interi compresi tra 2 e 9 trentaduesimi di pollice⁶: per le sfere con i quattro diametri più piccoli (0.15 cm, 2''/32, 0.2 cm e 3''/32) si misurano i tempi parziali ogni 5 cm; per le due successive (4''/32 e 5''/32) ogni 10 cm; e per tutte le altre si prende nota solamente del tempo necessario a percorrere l'intero tratto di 50 cm. **Il maggior numero di dati compensa in qualche modo le maggiori fluttuazioni dei tempi che si hanno per le sfere più piccole;** gli errori di misura si mantengono così dello stesso ordine di grandezza. Ogni misura viene ripetuta 5 volte, e si usano per ogni distanza le medie aritmetiche delle misure; **riportando in grafico (per le sei sfere più piccole) il tempo impiegato in funzione della distanza percorsa si può verificare che la velocità (come già anticipato) si mantiene sempre apprezzabilmente costante.**

Per la verifica della legge di Stokes si riporta poi in grafico l'inverso della velocità limite (calcolato attraverso la pendenza della retta interpolante per i primi sei valori del diametro, e dividendo invece l'unico tempo misurato per la distanza percorsa negli altri casi) in funzione dell'inverso dei quadrati dei diametri (espressi tutti in centimetri); e se ne verifica la linearità. Possibili cause di errore sistematico sono:

⁵È opportuno trapiantare verso uno sfondo chiaro.

⁶Un pollice (1'') corrisponde a 2.54 cm.

1. Le sfere trascinano all'interno del liquido delle bolle d'aria, che si staccano quasi subito dalle più piccole ma rimangono a lungo nella scia delle più grandi; per queste ultime la forza d'attrito risulta quindi sensibilmente maggiore di quanto previsto dalla (6.1).
2. Nella caduta le sfere possono incontrare delle bolle lasciate da quelle che le hanno precedute; è quindi opportuno eseguire le misure per valori crescenti dei diametri.
3. La legge di Stokes è valida per il moto attraverso un mezzo infinitamente esteso; se la parete del recipiente è ad una distanza dalla sfera confrontabile con il suo diametro, la forza di attrito è, ancora, maggiore di quanto previsto dalla (6.1).
4. Il liquido si può essere stratificato, separandosi per densità crescenti con la profondità; in queste condizioni sia la spinta di Archimede che la viscosità non sono costanti lungo la traiettoria.

La pendenza della retta interpolante corrisponde al rapporto D^2/v_L ; per la presenza degli errori sistematici è però opportuno eseguire una interpolazione lineare a due parametri con una retta di equazione

$$\frac{1}{v_L} = A + \frac{B}{D^2}$$

B con il relativo errore si ricava dalle formule dei minimi quadrati; il laboratorio mette poi a disposizione le densità con i rispettivi errori, $\rho = 7.87 \pm 0.005 \text{ g/cm}^3$ e $\rho_0 = 1.032 \pm 0.001 \text{ g/cm}^3$. La viscosità si ottiene dalla seconda delle (6.2) come

$$\eta = \frac{2r^2g}{9v_L}(\rho - \rho_0) = \frac{D^2g}{18v_L}(\rho - \rho_0) = \frac{Bg}{18}(\rho - \rho_0)$$

ed il suo errore dalla

$$\sigma_\eta = \eta \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\rho-\rho_0}}{\rho - \rho_0}\right)^2} = \eta \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2 + \frac{\sigma_\rho^2 + \sigma_{\rho_0}^2}{(\rho - \rho_0)^2}}$$

La viscosità dovrebbe essere dell'ordine di $20 \div 22 \text{ poise}^7$; tenete però presente che il liquido è sostituito ogni anno, e che la viscosità varia fortemente con la temperatura: questo è solo un valore di riferimento.

7 Il calorimetro delle mescolanze

Il calorimetro di Regnault (o delle mescolanze) è costituito da un ambiente isolato termicamente dall'esterno, e nel quale si fanno avvenire processi termodinamici controllando le variazioni della temperatura interna in relazione alle varie fasi dei processi stessi.

In pratica si tratta di un vaso Dewar all'interno del quale sono contenuti: un vaso di rame stagnato in cui fare avvenire i processi da studiare; un agitatore (sempre in rame stagnato) che serve a mantenere quanto più possibile uniforme la temperatura all'interno del vaso stesso; ed un termometro che pesca in questo recipiente e che è leggibile dall'esterno. Nel coperchio sono inoltre praticati tre fori: per l'introduzione di oggetti dall'esterno, e per il passaggio sia dell'agitatore che del termometro.

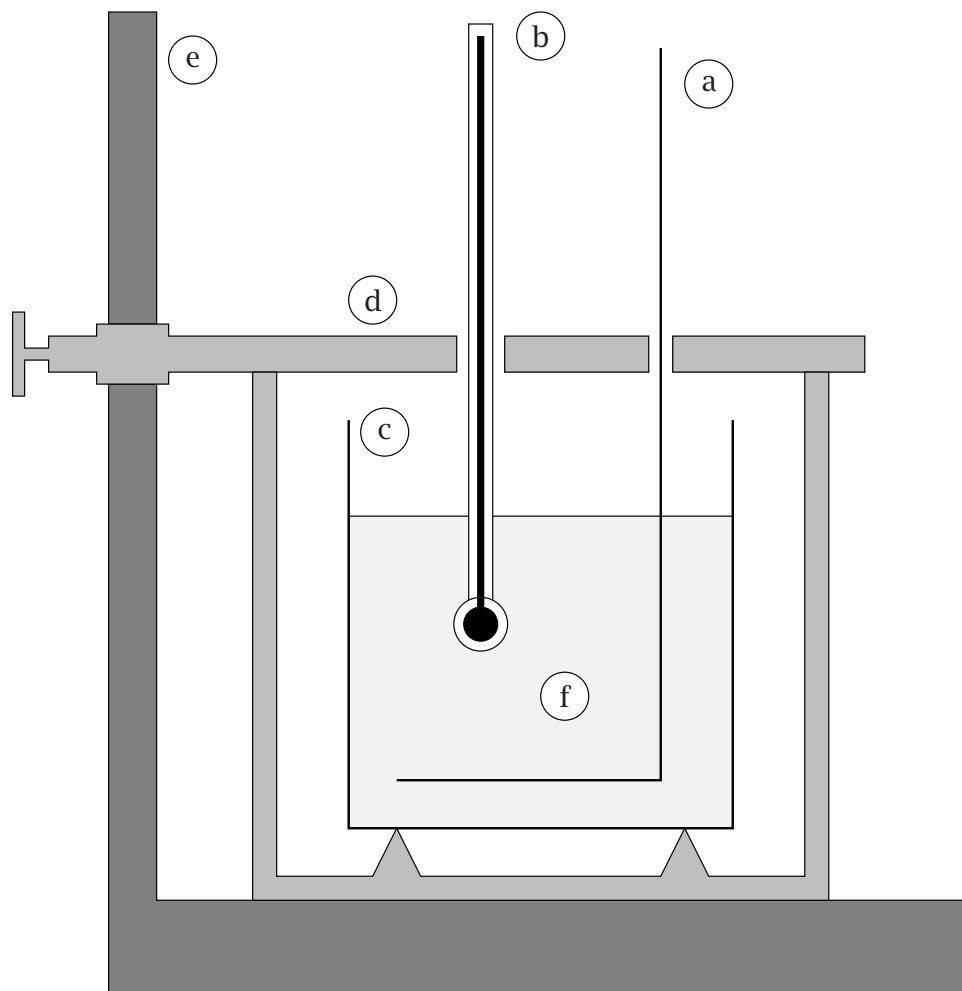
Nel corso di Esperimentazioni il calorimetro delle mescolanze viene usato per la determinazione del calore specifico di un corpo solido (un cilindro di acciaio inossidabile).

7.1 Calore specifico di un corpo solido

Se un corpo scambia una certa quantità di calore Q con l'ambiente, la sua temperatura varia di una quantità ΔT ad essa approssimativamente proporzionale: la costante di proporzionalità K prende il

⁷Il *poise* è l'unità di misura della viscosità nel sistema CGS.

FIGURA 5 - Il calorimetro delle mescolanze.



Legenda

- a: Agitatore
- b: Termometro
- c: Vaso calorimetrico
- d: Coperchio scorrevole
- e: Sostegno del coperchio
- f: Acqua

nome di *capacità termica*. Essa è, a sua volta, proporzionale alla massa m del corpo stesso secondo un fattore c che dipende sia dalla sostanza da cui esso è costituito sia dalle modalità della trasformazione, e che prende il nome di *calore specifico*. In formule,

$$Q = K \cdot \Delta T \quad \text{e} \quad Q = mc \cdot \Delta T$$

Per determinare il calore specifico di un corpo solido mediante il calorimetro delle mescolanze, le operazioni da eseguire in sequenza sono:

1. Si prende il campione della sostanza in esame e se ne determina la massa m_x ; lo si introduce poi in un riscaldatore che lo porterà gradualmente ad una temperatura T_1 .
2. Si estraggono il vaso calorimetrico e l'agitatore, e si determina la loro massa complessiva m_r .
3. Si riempie il vaso calorimetrico, sempre contenente l'agitatore, con acqua distillata a temperatura ambiente T_0 e si misura la massa complessiva $m_r + m_a$; per differenza si ricava poi la massa m_a dell'acqua.
4. Riposto il recipiente nel calorimetro e richiusolo, si prende innanzi tutto nota di T_0 ; si introduce poi il campione a temperatura T_1 che scambierà calore con l'ambiente calorimetrico fino a raggiungere una temperatura finale di equilibrio T .

Il campione, nel processo esaminato, ha ceduto una quantità di calore $Q = m_x c_x (T_1 - T)$. Nell'ipotesi che l'ambiente calorimetrico sia perfettamente isolato esso deve essere stato assorbito: dal vaso e dall'agitatore in rame; dall'acqua distillata; e dal termometro. Indicando con c_r il calore specifico del rame, con c_a quello dell'acqua e con K la capacità termica del termometro, dovrà pertanto risultare

$$\begin{aligned} m_x c_x (T_1 - T) &= m_r c_r (T - T_0) + m_a c_a (T - T_0) + K(T - T_0) \\ &= C(T - T_0) \end{aligned}$$

La costante $C = m_r c_r + m_a c_a + K$ (che rappresenta la capacità termica totale dell'ambiente calorimetrico) prende il nome di *equivalente in acqua del calorimetro*. Se si vuole ricavare il calore specifico c_x del campione, questo è dato da

$$c_x = \frac{C (T - T_0)}{m_x (T_1 - T)}$$

Alcune costanti sono date dal laboratorio stesso:

c_r	=	0.093	cal/(g °C)
c_a	=	1	cal/(g °C)
K	=	2.2 ± 0.05	cal/°C

(c_r si suppone privo di errore, o meglio è noto con un errore che si propaga sul risultato in maniera trascurabile rispetto agli errori delle altre grandezze fisiche da cui dipende c_x ; c_a è invece fissato dalla scelta delle unità di misura).

Per il calcolo dell'errore si può usare la formula di propagazione:

$$\sigma_{c_x}^2 = \left(\frac{\partial c_x}{\partial C} \right)^2 \sigma_C^2 + \left(\frac{\partial c_x}{\partial m_x} \right)^2 \sigma_{m_x}^2 + \left(\frac{\partial c_x}{\partial T_0} \right)^2 \sigma_{T_0}^2 + \left(\frac{\partial c_x}{\partial T_1} \right)^2 \sigma_{T_1}^2 + \left(\frac{\partial c_x}{\partial T} \right)^2 \sigma_T^2$$

con

$$\sigma_C^2 = c_a^2 \sigma_{m_a}^2 + c_r^2 \sigma_{m_r}^2 + \sigma_K^2$$

Risultando poi

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c_x}{\partial C} = \frac{(T - T_0)}{m_x (T_1 - T)} = \frac{c_x}{C} \\ \frac{\partial c_x}{\partial m_x} = \frac{C (T - T_0)}{(T_1 - T)} \left(-\frac{1}{m_x^2} \right) = -\frac{c_x}{m_x} \\ \frac{\partial c_x}{\partial T_0} = -\frac{C}{m_x (T_1 - T)} = -\frac{c_x}{(T - T_0)} \\ \frac{\partial c_x}{\partial T_1} = -\frac{C (T - T_0)}{m_x (T_1 - T)^2} = -\frac{c_x}{(T_1 - T)} \\ \frac{\partial c_x}{\partial T} = \frac{C m_x (T_1 - T) + C m_x (T - T_0)}{m_x^2 \cdot (T_1 - T)^2} = \\ = \frac{C}{m_x (T_1 - T)} + \frac{C (T - T_0)}{m_x (T_1 - T)^2} = \frac{c_x}{(T - T_0)} + \frac{c_x}{(T_1 - T)} \end{array} \right.$$

sostituendo si ha

$$\sigma_{c_x}^2 = c_x^2 \left[\frac{\sigma_C^2}{C^2} + \frac{\sigma_{m_x}^2}{m_x^2} + \frac{\sigma_{T_0}^2}{(T - T_0)^2} + \frac{\sigma_{T_1}^2}{(T_1 - T)^2} + \sigma_T^2 \left(\frac{1}{T - T_0} + \frac{1}{T_1 - T} \right)^2 \right]$$

Il riscaldatore è tarato per una temperatura finale di 100 °C, che viene raggiunta per fasi successive di aumenti più o meno rapidi: è controllato internamente da un microprocessore, che mostra continuamente sul display la temperatura della resistenza interna T_R ; quella del campione T_C (quest'ultima letta da un sensore che trova alloggiamento nella zona interna del campione stesso); ed infine lo stato operativo (ON/OFF) che corrisponde a resistenza alimentata o non alimentata. Il riscaldatore può restare acceso anche senza contenere il campione; l'unica cautela deve essere quella di *non introdurvi assolutamente acqua*.

In questa esperienza sono presenti due fonti di errore *sistematico*: innanzi tutto il calorimetro non è perfettamente isolato dall'esterno; inoltre la temperatura iniziale T_1 del campione viene letta quando questo è ancora nel riscaldatore, ed all'atto dell'introduzione nel calorimetro si è abbassata di una certa quantità a causa del trasporto in aria.

Il primo errore può essere corretto stimando l'entità delle perdite di calore del calorimetro: si riporta a tale scopo in grafico la temperatura interna in funzione del tempo t dall'istante dell'introduzione del campione. Questa sale rapidamente fino ad un massimo, poi decresce lentamente con andamento approssimativamente lineare; se si fa l'ipotesi che le perdite di calore siano costanti nel tempo, si può correggere l'errore prendendo come valore della temperatura di equilibrio T non quello più elevato letto sul termometro, ma quello ottenuto estrapolando indietro all'istante $t = 0$ la retta delle temperature discendenti. Occorre, sostanzialmente, eseguire una interpolazione lineare sui punti dal massimo in avanti; e poi usare come valore di T l'intercetta di questa retta interpolante.

Il secondo errore può essere corretto prendendo come temperatura iniziale del campione T_1 non già il valore letto sul termometro del riscaldatore, ma quest'ultimo diminuito di un fattore $\Delta = 1.5 \pm 1.0$ °C (stimato sulla base di valori di c_x ottenuti in passato).

Alle masse degli oggetti direttamente pesati si attribuisce un errore di 0.02 g; per l'acqua, la cui massa è calcolata per differenza, bisogna usare la formula di propagazione dell'errore. L'errore sulla temperatura T_1 è dato essenzialmente dalla correzione effettuata, e come errore sia per T che per T_0 si può usare la sensibilità dello strumento: insomma, si può assumere che sia $\sigma_{T_1} = 1$ °C e $\sigma_T = \sigma_{T_0} = 0.1$ °C.

Il risultato deve essere $0.11 \div 0.12$ cal/(g °C)