

均值和方差是很容易理解的概念，实验多次测量，测量值的均值作为估计，样本方差的大小衡量数据的可靠性，我觉得对于简单的统计问题（单样本，抽样之间独立），搬出理论框架并不会比凭感觉乱搞多增加多少可靠性；对于比较复杂的问题（数据维数多，相关性错综复杂），感觉帮不上太多的忙，主要要靠理论指导，然而我对其理论框架并不甚了解，故以下的讨论只好举出非常简单的例子，讨论推断性统计学的框架均值和方差的问题，大概至少要分三种情况：

1. 区间估计
2. 点估计
3. 假设检验

先讨论第一种情形，大学物理绪论课（参见 [1]）讲由于随机误差的存在，结果要写成 $\bar{x} + t_{\xi}(\nu)S_{\bar{x}}$ 的形式，就是区间估计的表达方式。意思是说，假设待测物理量是一个随机变量 X ， X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma)$ 。现在要测它的均值 $E(X)$ （就是估计参数 μ ）。先给定一个置信度 α （比如 95%），那么我有 α 的把握断言 $E(X)$ 落在区间 $[\bar{X} - t_{\xi}(\nu)S_{\bar{X}}, \bar{X} + t_{\xi}(\nu)S_{\bar{X}}]$ ，关于 α ，实验重复次数和区间大小的关系具体表达式就不给出了，只是定性地说， α 越接近 1， $t_{\xi}(\nu)$ 会越大，要估计的值落在一个更大的区间里，极端情况是说我有 100% 的把握断言 $E(X)$ 落在区间 $[\bar{X} - \infty, \bar{X} + \infty]$ ，这样 Inference 也没什么意义了；实验重复次数越多 $S_{\bar{X}}$ 会越小，要估计的值落在一个更小的区间里，极端情

况是说只要实验重复足够多次，我就有 α 的把握断言 $E(X)$ 一定是 \bar{X} 。

上面举了 X 是连续性随机变量的例子，对于离散的情形，一般会考虑 Bernoulli 分布 $B(p)$ 。同样是先给定一个置信度 α ，那么我有 α 的把握断言 $E(X)$ （就是估计参数 p ）落在某个区间，关于这个区间构造最简单的方法是：

$$[\bar{x} - z\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + z\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}] \quad [2]$$

这个估计并不好，一方面只有当实验重复次数足够多时近似程度才比较好，另一方面当 p 接近 0 或者 1 时区间长度会很窄，估计效果很差 [3]。

References

- [1] 大学物理实验误差与数据处理章节
- [2] <http://www.math.uah.edu/stat/interval/Bernoulli.html>
- [3] https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_proportion_confidence_interval#Wilson_score_interval