

无线网络中定位信息的时空传播机理研究

姓名: 赵丰
指导老师: 沈渊
联合指导老师: 梁恒

清华大学数学科学系

2017 年 6 月 4 日

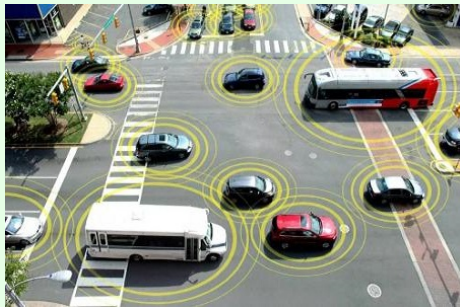
概要

- 1 问题背景
- 2 数学模型
 - 时间协作定位
- 3 线型网络
 - 直接法
 - 连分式法
- 4 小结

协作定位技术有着广泛的应用前景:



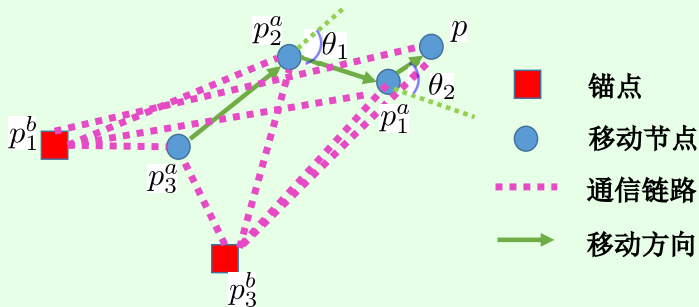
无人机编队



车联网

数学模型

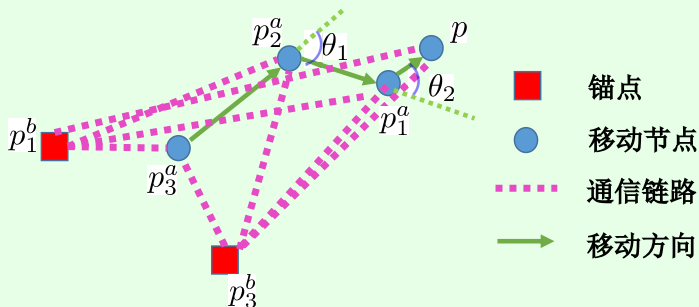
- 场景中有 N_b 个位置已知的锚点
- 锚点在时刻 t_1, t_2, \dots, t_{N_a} 对待定位节点进行测距
- 距离测量量服从正态分布
- 节点在相邻时刻间可以测量速度，服从正态分布
- 速度测量可以转化为节点相邻时刻间的距离测量



时间协作定位图示

- 各个测量量彼此独立
- 基于这些观测寻找对节点 p 的位置估计最大可能的精度。

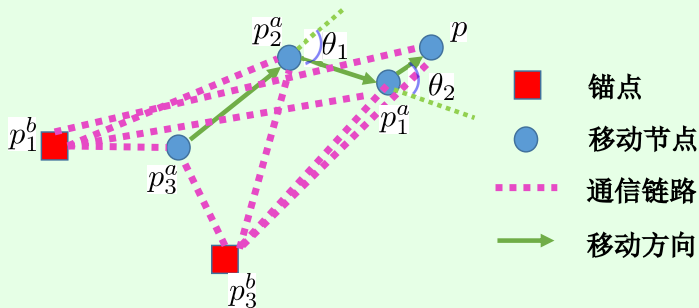
- 各个测量量彼此独立
- 基于这些观测寻找对节点 p 的位置估计最大可能的精度。
- 根据点估计的理论，对于一个无偏估计量，它的方差的下界是费舍尔信息量(Fisher Information) 的倒数，称之为克拉美罗界(Cramér-Rao Bound)。



如果估计量是高维的 (节点的2 维位置), 费舍尔信息量推广为费舍尔信息矩阵(Fisher Information Matrix)。

克拉美罗界在我们研究的问题中也称之为定位误差下界(Spatial Position Error Bound), 它的计算公式为:

$$\text{SPEB} = \text{tr}(\mathbf{I}(\mathbf{p})^{-1}).$$



以节点各时刻的位置 $\{p_i\}$ 作为待估计的参数, 可以得到费舍尔信息矩阵有如下的表达式

$$I(P) =$$

$$\begin{pmatrix} a\mathbf{I}_2 + b\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T & -b\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -b\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T & a\mathbf{I}_2 + b\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + b\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T & -b\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -b\mathbf{u}_{N_a-1}\mathbf{u}_{N_a-1}^T & a\mathbf{I}_2 + b\mathbf{u}_{N_a-1}\mathbf{u}_{N_a-1}^T \end{pmatrix}.$$

以节点各时刻的位置 $\{p_i\}$ 作为待估计的参数, 可以得到费舍尔信息矩阵有如下的表达式

$$\mathbf{I}(\mathbf{P}) =$$

$$\begin{pmatrix} a\mathbf{I}_2 + b\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T & -b\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -b\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T & a\mathbf{I}_2 + b\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + b\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T & -b\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -b\mathbf{u}_{N_a-1}\mathbf{u}_{N_a-1}^T & a\mathbf{I}_2 + b\mathbf{u}_{N_a-1}\mathbf{u}_{N_a-1}^T \end{pmatrix}.$$

这里, 费舍尔信息矩阵 $\mathbf{I}(\mathbf{P})$ 具有块三对角的形式。

直接法

直接法可以给出当节点作直线运动时的平均定位误差下界:

$$\begin{aligned}\text{SPEB} &= \lim_{N_a \rightarrow \infty} \frac{\text{tr}(\mathbf{I}(\mathbf{p})^{-1})}{N_a} \\ &= \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4ab}}\end{aligned}$$

$$f(n) := \frac{\text{tr}(\mathbf{I}(\mathbf{P})^{-1})}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{n+1}{a} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{a + 2b(1 - \cos(\frac{\pi j}{n}))} \right)$$

当 $n \rightarrow \infty$, 根据 Riemann 积分的定义:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{1}{a} + \int_0^1 \frac{1}{a + 2b(1 - \cos(\pi x))} dx$$

化为复积分由留数定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4ab}}.$$

a 和 $\sqrt{a^2 + 4ab}$ 分别代表了平均定位误差下界在两个方向的信息量。

一般的，对平面上节点的位置估计的精度可以借助平面上的椭圆方程来描述：

定义 1

关于位置 p 的 2×2 的费舍尔信息矩阵 I 定义了平面上的椭圆方程

$$\mathbf{x}^T I_p^{-1} \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

称之为节点位置 p 的信息椭圆。

a 和 $\sqrt{a^2 + 4ab}$ 分别代表了平均定位误差下界在两个方向的信息量。

一般的，对平面上节点的位置估计的精度可以借助平面上的椭圆方程来描述：

定义 1

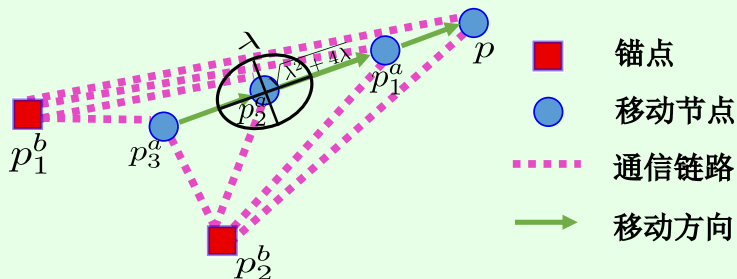
关于位置 p 的 2×2 的费舍尔信息矩阵 I 定义了平面上的椭圆方程

$$\mathbf{x}^T I_p^{-1} \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

称之为节点位置 p 的信息椭圆。

信息椭圆各个主轴的长度衡量了特征值的大小，代表了该方向的定位精度。

采样时刻 N_a 很大，协作强度 $b = 1$ ，锚点定位强度 $a = \lambda$:

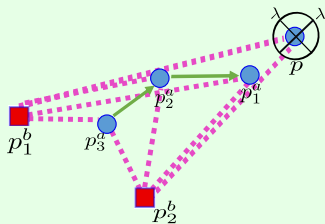


信息椭圆图示

连分式法

终点 p 的信息椭圆在只有锚点定位的情况下是一个圆。

$$T_1 = \lambda$$



锚点



移动节点



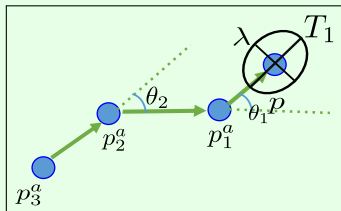
通信链路



移动方向

增加了和上一时刻的协作链路后终点 p 的信息椭圆在沿 pp_1^a 方向上的信息 T_1 可以写成连分式的形式:

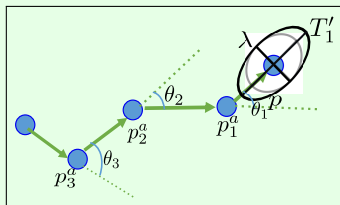
$$T_1 = \lambda + \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 \theta_1}{\lambda} + \frac{\cos^2 \theta_1}{\lambda + \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 \theta_2}{\lambda} + \frac{\cos^2 \theta_2}{\lambda + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda}}}}}}}$$



距 p 较远的节点 p_3^a 提供的信息在连分式的最内侧

考虑增加一个角度参数 θ_{N_a} ，由此得到的新的 T_1 记为 $T'_1(N_a)$ ，研究 $T'_1(N_a)$ 比原来的 $T_1(N_a)$ 增大的量。

$$T'_1 = \lambda + \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 \theta_1}{\lambda} + \frac{\cos^2 \theta_1}{\dots + \frac{\sin^2 \theta_3}{1 + \frac{\sin^2 \theta_3}{\lambda} + \frac{\cos^2 \theta_3}{\lambda + \frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda}}}}}.$$



一般地, 可以得到终点时刻信息椭圆短轴方向的特征值为 λ , 长轴方向的特征值 T_1 可以用连分式表示。

设 $\mathbf{u}_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T$

$$T_{i-1} = \lambda + \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 \theta_i}{\lambda} + \frac{\cos^2 \theta_i}{T_i}}, 2 \leq i \leq N_a - 1$$

$$T_{N_a-1} = \lambda + \frac{1}{1 + 1/\lambda}$$

一般地, 可以得到终点时刻信息椭圆短轴方向的特征值为 λ , 长轴方向的特征值 T_1 可以用连分式表示。

设 $\mathbf{u}_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T$

$$T_{i-1} = \lambda + \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 \theta_i}{\lambda} + \frac{\cos^2 \theta_i}{T_i}}, 2 \leq i \leq N_a - 1$$

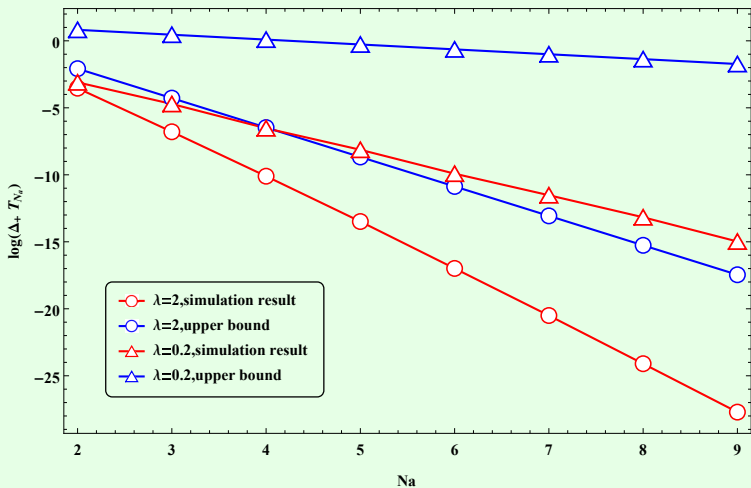
$$T_{N_a-1} = \lambda + \frac{1}{1 + 1/\lambda}$$

记增量 $\Delta_+ T_1(N_a) := T'_1(N_a) - T_1(N_a)$, 则我们可以得到 $N_a \geq 2$ 时 $\Delta_+ T_1(N_a)$ 满足:

$$\Delta_+ T_1(N_a) \leq \frac{1}{(\lambda^2 + 2\lambda)(1 + \lambda)^{2(N_a-2)}}.$$

从而得到 $N_a \rightarrow \infty$ 时 T_1 的收敛性。

基于连分式法, 取 $\theta_i \sim U[0, 2\pi]$ 的随机数, 增量 $T'_1(N_a) - T_1(N_a)$ 随 N_a 变化的仿真结果如下图所示



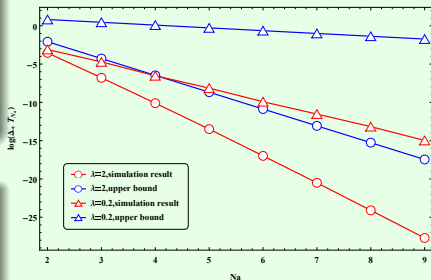
协作链路信息衰减图示

衰减规律

N_a 条链路之外增加一层协作链路使目标节点定位误差的下降的数量是随 N_a 指数衰减的。

工程启示

对某时刻的节点进行定位时，只需考虑其前后几个时刻的位置即可，较远的时刻基本没有信息量。



T_1 是关于 $\theta_1, \dots, \theta_{N_a-1}$ 的减函数, 关于 N_a 的增函数。

T_1 方向上的信息量有一个上界, 当诸夹角均趋于 0 且协作节点个数 $N_a \rightarrow \infty$, 这个上界可以达到:

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0, N_a \rightarrow \infty} T_1(N_a) = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda}}{2}$$

其中

$$\Delta\theta = \max_{2 \leq k \leq N_a-1} |\theta_k|$$

直接法和连分式法的联系

$$[t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n] = t_1 + \frac{1}{t_2 + \frac{1}{t_3 + \dots + \frac{1}{t_{n-1} + \frac{1}{t_n}}}}$$

当 $\theta_k = 0$ 时, 设

$$x = \lim_{N_a \rightarrow \infty} T_1(N_a) \qquad x = \frac{\lambda + \sqrt{4\lambda + \lambda^2}}{2}$$

则 x 满足不动点迭代方程

如果考虑的是时间中点时刻的位置的信息椭圆, 另一个特征值是

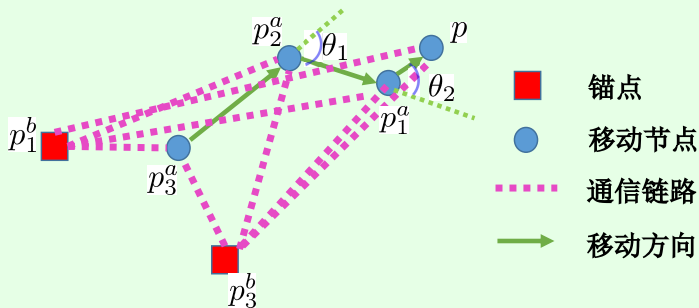
$$x = \lambda + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\lambda + \frac{2}{[1, \lambda, 1, \dots]} = \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda}$$

小结

在单节点时间协作的定位网络中，

- 直接法可以得到直线情形下费舍尔信息矩阵的全部特征值，获得网络规模趋于无穷大时的定位误差下界。
- 连分式法可以得到时间终点位置处的信息椭圆，以及增加协作链路后信息量的衰减情况。



时间协作定位图示

直接求解该问题需要如下两个引理:

引理 1

设 L 是 $m \times n$ 的矩阵, $a, \epsilon > 0$ 则

$$|a\mathbf{I}_m + \epsilon\mathbf{L}\mathbf{L}^T| = a^m |\mathbf{I}_n + \frac{\epsilon}{a}\mathbf{L}^T\mathbf{L}|$$

Proof.

不妨设 $a = \epsilon = 1$, 考虑到

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n + \mathbf{L}^T\mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L} & \mathbf{I}_m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & -\mathbf{L}^T \\ \mathbf{L} & \mathbf{I}_m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & -\mathbf{L}^T \\ 0 & \mathbf{I}_m + \mathbf{L}\mathbf{L}^T \end{pmatrix}$$

其中 \sim 表示矩阵相抵, 两边取行列式即得

$$|\mathbf{I}_m + \mathbf{L}\mathbf{L}^T| = |\mathbf{I}_n + \mathbf{L}^T\mathbf{L}|.$$



引理 2

S_{n-1} 是一个 $n-1$ 维的方阵, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 则 S_{n-1} 的 $n-1$ 个特征值为: $\lambda_j = 2 \cos(\frac{\pi j}{n}), j = 1, 2, \dots, n-1$

Proof.

- ① 用数学归纳法证明 S_n 的特征多项式有递推公式
$$P_n(\lambda) = \lambda P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda)$$
- ② $U_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{\lambda}{2})^2}} \sin((n+1) \arccos(\frac{\lambda}{2}))$ 适合上面的递推关系式。
- ③ $U_1(\lambda), U_2(\lambda)$ 是多项式, 所以 $U_n(\lambda)$ 是关于 λ 的多项式



直接法

不妨设节点沿 x 轴运动, 费舍尔信息矩阵 $I(\mathbf{P})$ 化简为:

$$I(\mathbf{P}) = a\mathbf{I} + b \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T & -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T & \dots & & 0 \\ -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T & 2\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T & -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T & \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \end{pmatrix}$$

其中 $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$I(\mathbf{P}) = a\mathbf{I} + b\mathbf{L}\mathbf{L}^T$, 其中

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 且 } \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & 0 & \dots & 0 \\ -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & -\mathbf{e}_1 & 0 \end{pmatrix}_{2n \times n}$$

\mathbf{L} 的最后一列全为零。

$$I(\mathbf{P}) = a\mathbf{I} + b\mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

$I(\mathbf{P})$ 的特征多项式为 $|(\lambda - a)\mathbf{I} - b\mathbf{L}\mathbf{L}^T|$

$$I(\mathbf{P}) = a\mathbf{I} + b\mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

$I(\mathbf{P})$ 的特征多项式为 $|(\lambda - a)\mathbf{I} - b\mathbf{L}\mathbf{L}^T|$

根据引理 (1), $|(\lambda - a)\mathbf{I} - b\mathbf{L}\mathbf{L}^T| = (\lambda - a)^{2n}|\mathbf{I}_n - \frac{b}{\lambda - a}\mathbf{L}^T\mathbf{L}|$

$$\mathbf{L}^T\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$I(\mathbf{P}) = a\mathbf{I} + b\mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

$I(\mathbf{P})$ 的特征多项式为 $|(\lambda - a)\mathbf{I} - b\mathbf{L}\mathbf{L}^T|$

根据引理 (1), $|(\lambda - a)\mathbf{I} - b\mathbf{L}\mathbf{L}^T| = (\lambda - a)^{2n}|\mathbf{I}_n - \frac{b}{\lambda - a}\mathbf{L}^T\mathbf{L}|$

$$\mathbf{L}^T\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

设 \mathbf{K}_{n-1} 为 $\mathbf{L}^T\mathbf{L}$ 第 $n-1$ 阶主子式, 则

$$|(\lambda - a)\mathbf{I} - b\mathbf{L}\mathbf{L}^T| = (\lambda - a)^{n+1}|(\lambda - a)\mathbf{I}_{n-1} - b\mathbf{K}_{n-1}|$$

$\mathbf{K}_{n-1} = 2\mathbf{I}_{n-1} - \mathbf{S}$, 由引理 (2) 可求出 \mathbf{K}_{n-1} 的全部特征值。

$\mathbf{K}_{n-1} = 2\mathbf{I}_{n-1} - \mathbf{S}$, 由引理 (2) 可求出 \mathbf{K}_{n-1} 的全部特征值。

$$f(n) := \frac{\text{tr}(\mathbf{I}(\mathbf{P})^{-1})}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{n+1}{a} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{a + 2b(1 - \cos(\frac{\pi j}{n}))} \right)$$

当 $n \rightarrow \infty$, 根据 Riemann 积分的定义:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{1}{a} + \int_0^1 \frac{1}{a + 2b(1 - \cos(\pi x))} dx$$

化为复积分由留数定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4ab}}.$$

连分式法推导过程

提取公因子后，下面用连分式法研究 $\mathbf{I}(\mathbf{P}) = \lambda \mathbf{I} + \mathbf{J}$ 的结构。

连分式法推导过程

提取公因子后，下面用连分式法研究 $\mathbf{I}(\mathbf{P}) = \lambda \mathbf{I} + \mathbf{J}$ 的结构。 t_i 时刻的位置信息椭圆为

$$\mathbf{e}_i^T (\mathbf{I}(\mathbf{P}))^{-1} \mathbf{e}_i$$

其中

$$\mathbf{e}_i = (\mathbf{0}, \dots, \underbrace{\mathbf{I}_2}_{i\text{-th item}}, \dots, \mathbf{0})^T.$$

$I(P)$ 可以简写为:

$$I(P) = \begin{pmatrix} B_1 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ A_2 & B_2 & A_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{N_a} & B_{N_a} \end{pmatrix}.$$

$I(P)$ 可以做 LU 分解如下:

$I(P)$ 可以简写为:

$$I(P) = \begin{pmatrix} B_1 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ A_2 & B_2 & A_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{N_a} & B_{N_a} \end{pmatrix}.$$

$I(P)$ 可以做 LU 分解如下:

$$I(P) = \begin{pmatrix} I_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_2 & I_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & L_{N_a} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U_2 & A_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & U_{N_a} \end{pmatrix}.$$

U_i 满足如下递推关系:

$$\begin{cases} U_1 &= B_1 \\ U_i &= B_i - A_i U_{i-1}^{-1} A_i, i \geq 2. \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} A_i &= -\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \\ B_i &= \lambda I_2 + \mathbf{u}_{i-1} \mathbf{u}_{i-1}^T + \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T, 2 \leq i \leq N_a - 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{I}(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{N_a} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_2 & \mathbf{A}_3 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U}_{N_a} \end{pmatrix}.$$

从上式可以求出

$$\mathbf{e}_{N_a}^T (\mathbf{I}(\mathbf{P}))^{-1} \mathbf{e}_{N_a} = \mathbf{U}_{N_a}^{-1}.$$

$$\mathbf{I}(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{N_a} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_2 & \mathbf{A}_3 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U}_{N_a} \end{pmatrix}.$$

从上式可以求出

$$\mathbf{e}_{N_a}^T (\mathbf{I}(\mathbf{P}))^{-1} \mathbf{e}_{N_a} = U_{N_a}^{-1}.$$

关于 U_{N_a} 的结构我们有结论，它的一个特征值是 λ , 另一个特征值可以用连分式表示出来。

设 $\mathbf{u}_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T$

$$T_{i-1} = \lambda + \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 \theta_i}{\lambda} + \frac{\cos^2 \theta_i}{T_i}}, 2 \leq i \leq N_a - 1$$

$$T_{N_a-1} = \lambda + \frac{1}{1 + 1/\lambda}$$

T_1 就是 U_{N_a} 的另一个特征值。

连分式与 Padé 逼近

可以用归纳法得到

$$[\lambda, 1, \underbrace{\lambda, 1}_{n \text{ item}}] = \frac{P_{n+1}(\lambda)}{Q_n(\lambda)}$$

其中 $P_{n+1}(\lambda)$, $Q_n(\lambda)$ 是关于 λ 的 $n+1$ 和 n 次多项式。

有理分式逼近 (Padé 逼近) 理论指出对于光滑函数 $f(x)$, 可构造有理分式:

$$R_{n+m}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

来逼近 $f(x)$, 使得 $R_{n+m}(x)$ 与 $f(x)$ 在 $x=0$ 处直到 $n+m$ 次导数相等。

有理分式逼近 (Padé 逼近) 理论指出对于光滑函数 $f(x)$, 可构造有理分式:

$$R_{n+m}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

来逼近 $f(x)$, 使得 $R_{n+m}(x)$ 与 $f(x)$ 在 $x=0$ 处直到 $n+m$ 次导数相等。
Taylor 级数是 $m=0$ 的情形

有理分式逼近 (Padé 逼近) 理论指出对于光滑函数 $f(x)$, 可构造有理分式:

$$R_{n+m}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

来逼近 $f(x)$, 使得 $R_{n+m}(x)$ 与 $f(x)$ 在 $x=0$ 处直到 $n+m$ 次导数相等。

Taylor 级数是 $m=0$ 的情形

函数的有限连分式展开在某些情况下是 $|n-m|=1$ 的情形

Padé approximation and continued fractions, Applied Numerical Mathematics, 2010

下面我们考虑 $m + n$ 相等时不同的展开方式对 $f(\lambda) = \frac{\lambda + \sqrt{4\lambda + \lambda^2}}{2}$ 逼近的效果情况，

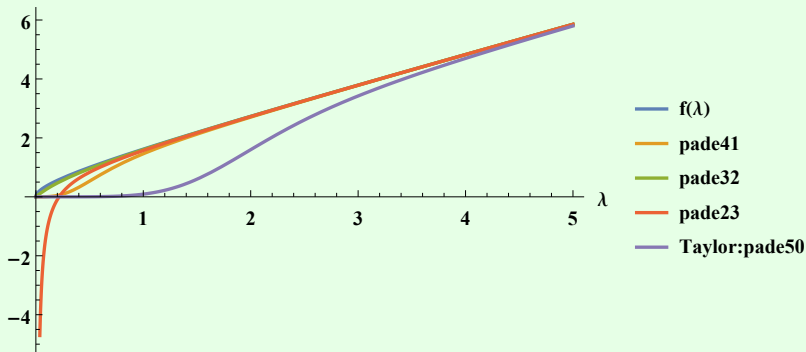
下面我们考虑 $m + n$ 相等时不同的展开方式对 $f(\lambda) = \frac{\lambda + \sqrt{4\lambda + \lambda^2}}{2}$ 逼近的效果情况,

由于 $f(\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 处有奇性 (一阶导数不存在), 我们考虑其在复平面关于 ∞ 的 Taylor 展开式, 通过令 $x = 1/\lambda$ 不难得到

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{2}{\sqrt{1+4x}-1} \\ &= \frac{1}{x - x^2 + 2x^3 - 5x^4 + 14x^5 + \dots} \end{aligned} \quad (1)$$

由于 $\sqrt{1+4x}$ 收敛域为 $|4x| < 1$ 可得 $|\lambda| > 4$, 可见 Taylor 展开对 λ 的取值有限制。

取 $n+m=5$ 对 $f(\lambda)$ 的有理逼近图示



- Taylor 展开逼近在 $\lambda < 4$ 时偏离较大
- pade41 收敛域大于 Taylor 展开, 但在 λ 较小处仍然不收敛
- 连分式对应的 pade32 对于 $\lambda > 0$ 逐点收敛到 $f(\lambda)$