

清 华 大 学

综 合 论 文 训 练

题目：无线网络中定位信息的时空传播机理研究

系 别：数学科学系

专 业：数学与应用数学

姓 名：赵丰

指导教师：沈渊 副教授

辅导教师：梁恒 副教授

2017 年 5 月 20 日

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文的复印件，允许该论文被查阅和借阅；学校可以公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存该论文。

(涉密的学位论文在解密后应遵守此规定)

签 名：_____ 导师签名：_____ 日 期：_____

中文摘要

对于目标的实时位置的获取是无线通信技术的应用的重要一部分。在有多目标节点的定位场景下，利用目标节点之间相互通信得到的距离信息的协作定位技术对定位精度的提高有显著的作用。随着定位网络规模的扩大和时间上的延长，各种测量数据如何影响定位误差是本文要研究的内容。

本文从高斯测量信号模型出发，从费舍尔信息矩阵的角度刻画了定位误差的时空衰减特性。在数学方法方面，本文主要运用了矩阵代数的运算规则推导了费舍尔信息矩阵特征值的闭式表达式，并运用函数的连分式展开的分析方法求出了定位误差的时空衰减速度的量阶，从而揭示了定位误差与协作信息的关系的一般机理。

在本文的研究工作中比较突出的一点在于，本文在单节点时间协作问题上得出了一般情形下误差下界的连分式表达形式，并且在理论上证明了采样时间间隔趋于零时的误差下界和节点的运动轨迹无关的性质，这对于单节点路径规划与运动控制有一定的理论指导意义。

关键词：协作定位；费舍尔信息矩阵；定位误差下界；矩阵代数；连分式

ABSTRACT

Translation of the chinese abstract.

Keywords: $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$; $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$; CJK; template; thesis

目 录

第 1 章 引言	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究问题	2
1.3 文章结构	2
第 2 章 数学模型	3
2.1 非协作定位场景	3
2.2 协作定位场景	4
2.3 时间协作定位	5
2.4 关于模型的讨论	7
第 3 章 简单网络	8
3.1 非协作单节点定位网络	8
3.2 两个未知节点协作的场景	10
3.3 本章小节	13
第 4 章 特殊结构网络	15
4.1 特殊全连接网络	15
4.2 线型网络	18
4.3 正方形网络与正六边形网络	29
4.4 本章小节	30
第 5 章 结论	32
5.1 已取得的成果	32
5.2 未来展望	32
插图索引	33
参考文献	34
致 谢	35

声 明	36
附录 A 公式的推导	37
A.1 建模过程的一些推导过程	37
A.1.1 定位问题中费舍尔信息矩阵一般结构推导	37
A.2 研究成果的一些推导过程	37
A.2.1 两个未知节点协作最小误差界的一个充分条件	37
A.2.2 单节点动态定位问题等效费舍尔信息矩阵推导	39
A.2.3 定理 4.4 的证明	40
A.2.4 单节点动态定位问题等效费舍尔信息衰减上下界	41
A.2.5 单节点非均一测距误差等效费舍尔信息矩阵推导	42
A.2.6 引理 4.3 的推导	43
A.3 本文中用到的关于连分式的结论	43

主要符号对照表

N_b	锚点数量
\mathbf{p}_i	第 i 个待定位节点的位置，在时间协作中表示目标节点各个时刻的位置
\mathbf{P}	全部要估计的待定位节点的位置向量，即 $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{N_a})$
\mathbf{p}_i^b	第 i 个锚点的位置
$f(x_1, \dots, x_n \theta)$	参数 θ 已知条件下随机变量 X_1, \dots, X_n 联合概率密度函数
$\mathbf{I}(\mathbf{p})$	关于待定位节点位置 \mathbf{p} 的费舍尔信息矩阵
N_a	待定位节点数量，在时间协作中表示采样的数量
σ_i^2	待定位节点和锚点 i 之间测距的方差
$\sigma_{i,j}^2$	节点 i 和节点 j 之间测距的方差
$\mathbf{u}_{i,j}$	节点 i 和节点 j 之间的单位方向向量，时间协作中表示采样时刻 t_i 和 t_j 之间目标节点的位置变化向量
$\mathbf{C}_{i,j}$	费舍尔信息矩阵位于 i 行 j 列的元素的相反数
Δt	时间协作中采样时间间隔
λ_i	表示 σ_i^2 的倒数
\mathbf{u}_i	待定位节点和锚点 i 之间的单位方向向量, 时间协作中表示第 i 个时刻的位置和第 $i+1$ 个时刻的位置之间的单位方向向量
ϕ_i	\mathbf{u}_i 的方向角，时间协作中表示第 t_i 时刻 $\mathbf{u}_{i,i+1}$ 的方向角
$\mathbf{A}_{1 \times 2, 1 \times 2}^{-1}$	方阵 \mathbf{A} 的逆阵由前两行和前两列决定的子矩阵

第1章 引言

1.1 研究背景

对于目标的实时位置的获取是无线通信技术的应用的重要一部分^[1]，其在车辆导航与编队、军事演习等方面有着广泛的应用前景。

通常一个无线定位系统可以依赖于 GPS 卫星定位，但在室内定位的场合，由于微波被建筑物散射等原因，定位效果并不理想，在这种情况下需要根据应用的场景开发地面无线定位系统。通常一个地面无线定位系统会事先部署一些位置已知的锚点（基站）采用某个特殊的频段的电磁波与位置未知的目标节点进行通信，在锚点处可以通过测量无线信号到达的时间或信号强度等信息估计出某个基站与场景中目标节点的距离，如果是对目标的追踪也会利用上前一个时刻得到的定位结果，利用统计学的方法对这些数据进行实时的处理，可以估计出目标节点的位置或运动的轨迹。

传统的定位方法是只利用锚点和目标节点彼此之间的测距信息对目标节点进行定位，在有多个目标节点的定位场景下，随着技术的成熟近年来发展出了利用目标节点之间相互通信得到的距离信息的协作定位技术，协作定位技术不仅利用了目标节点和已知位置的锚点之间的信息，还利用了目标节点彼此之间的定位信息，从而提高了定位精度。

协作定位技术已经有了一定的研究基础，目前已经有大量的文献针对定位算法展开探讨，对定位算法的性能研究一般可以通过理论推导和仿真比较等方法，在理论推导方面，已经得出了在给定的定位场景（定位网络）下存在一个统计平均意义上的定位误差下界^[2]，任何基于测量数据对目标节点的位置估计的误差都在这个定位误差下界之上。因此研究和分析这个定位误差下界随着定位网络规模的扩大和采样时间间隔的缩短对于定位算法的设计具有一定的指导意义。

在文献^[3]中为研究定位误差下界提出了等效费舍尔信息矩阵、信息椭圆等概念，同时对两个节点协作的简单场景分析了定位误差和定位信息强度的关系；本文中会引用^[3]中相关的结论，同时在必要之处会采用新的数学方法给出更加简洁的结论推导。

1.2 研究问题

在本人的研究中，我会首先建立定位网络的数学模型并根据建立的模型推导定位误差下界的一般表达式，然后分别针对若干特殊的定位网络推导误差下界的解析表达式，并根据解析表达式辅助以必要的数值计算分析定位性能随网络的时空规模的变化规律。

1.3 文章结构

本文的研究重点是特殊定位网络误差下界的推导，在第 (2) 章中给出了问题的数学模型，主要分非协作定位场景 (2.1)、空间协作定位场景 (2.2)、时间协作定位场景 (2.3) 三部分，(2.4) 一节中对模型的合理性进行了进一步讨论。在第 (3) 章中分别对上一节提出的数学模型进行初步的分析和求解，其中非协作情形 (3.1) 针对小节 (2.1) 的模型，空间两个节点协作 (3.2) 针对 (2.2) 的模型。在第 (4) 章中分别对上一节提出的数学模型进行深入的分析 and 求解，其中 N 个节点两两协作 (4.1)、大规模正方形和正六边形网络协作 (4.3) 针对 (2.2) 的模型，一个节点时间上的协作 (4.2) 针对 (2.3) 的模型。最后第 (5) 章对全文使用的数学方法和取得的成果进行了总结，

第2章 数学模型

2.1 非协作定位场景

单个节点定位

考虑一个平面定位场景中部署了 N_b 个位置已知的锚点，锚点的位置记为 $\{p_1^b, p_2^b, \dots, p_{N_b}^b\}$ ，现在要对场景中一个位置未知的节点进行定位，待定位节点的位置为 p ，如图 (2.1) 所示。假设待定位节点和每一个锚点都可以相互通信进行无线测距，距离测量量服从均值为 $\|p_i^b - p\|$ ，方差为 σ_i^2 的正态分布 X_i 。

N_b 个独立测量量的联合概率分布为：

$$f(x_1, \dots, x_{N_b} | p) = \prod_{i=1}^{N_b} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \|p_i^b - p\|)^2}{2\sigma_i^2}\right) \quad (2-1)$$

根据点估计的理论，对于一个无偏估计量，它的方差的下界是费舍尔信息量 (Fisher Information) 的倒数，称之为克拉美罗界 (Crame Rao Bound)，在本文的讨论中，也称之为定位误差下界 (Spatial Position Error Bound)，它的计算公式为：

$$\text{SPEB} = \text{tr}(\mathbf{I}(p)^{-1}) \quad (2-2)$$

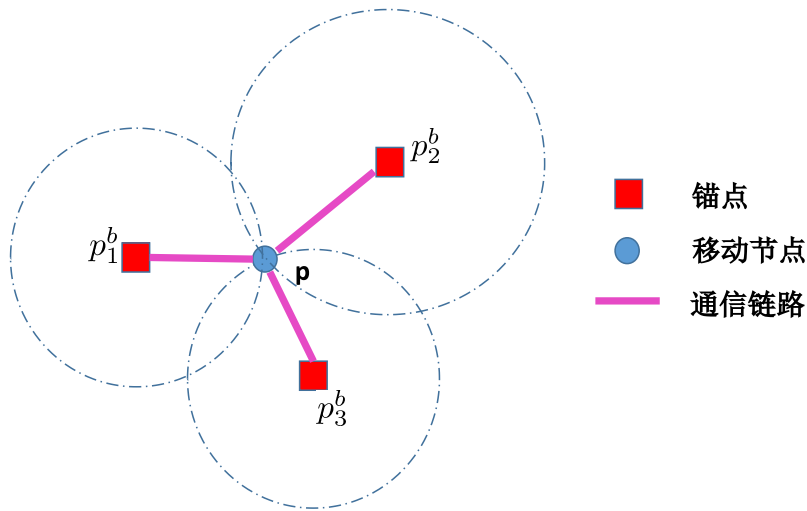


图 2.1 非协作静态场景下的定位

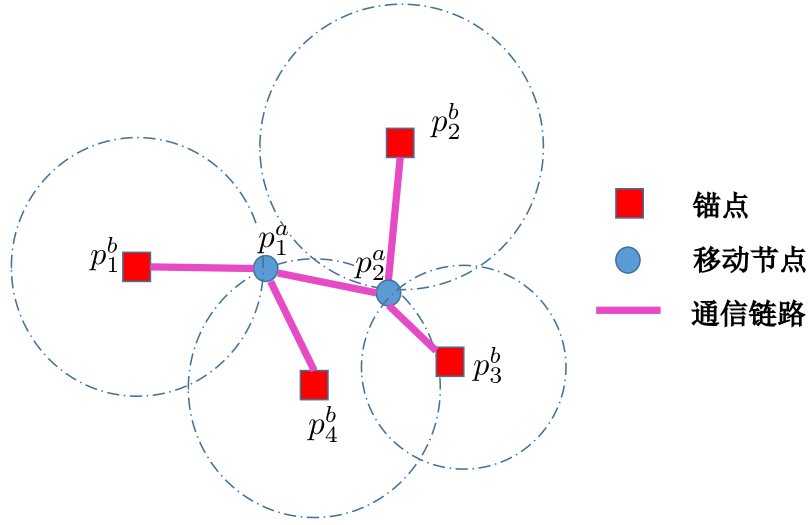


图 2.2 协作静态场景下的定位

费舍尔信息矩阵 以节点的 **2 维**位置为待估计参数，费舍尔信息量推广为费舍尔信息矩阵 (Fisher Information Matrix)。

对于我们的模型问题，费舍尔信息矩阵有如下的形式：

$$I(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N_b} \frac{1}{\sigma_i^2} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \quad (2-3)$$

其中

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{p}_i^b - \mathbf{p}}{\|\mathbf{p}_i^b - \mathbf{p}\|} \quad (2-4)$$

2.2 协作定位场景

多个待测节点协作定位

考虑一个平面定位场景中不仅部署了 N_b 个位置已知的锚点，还有 N_a 个位置未知的待定位节点，某些位置未知的节点之间可以彼此测距，如图 (2.2) 所示。第 i 和第 j 个未知节点距离测量量服从均值为 $\|\mathbf{p}_i^a - \mathbf{p}_j^a\|$ ，方差为 σ_{ij} 的正态分布 X_{ij} 。

以 N_a 个未知节点的位置 $\{\mathbf{p}_i\}$ 作为待估计的参数，可以得到测距量的联合概率密度函数为

$$F(\mathbf{X}|\mathbf{P}) = \prod_{i=1}^{N_a} f(x_1^i, \dots, x_{N_b}^i | \mathbf{p}_i) \prod_{(i,j) \in \mathcal{E}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{ij}^2}} \exp\left(-\frac{(x_{ij} - \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|)^2}{2\sigma_{ij}^2}\right) \quad (2-5)$$

上式中 f 的具体表达式为式 (2-1), \mathcal{E} 表示可以彼此测距的未知节点的二元组的集合, 而 x_t^i 表示第 t 个锚点和第 i 个未知节点的距离测量量。

费舍尔信息矩阵

仿照单节点时费舍尔信息矩阵的推导, 关于 $2N_a$ 个参数 $\{p_i^a\}$ 的费舍尔信息矩阵 $\mathbf{I}(\mathbf{P})$ 有如下的表达形式:

$$\mathbf{I}(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} I(\mathbf{p}_1) + \sum_{j \in \{1, \dots, N_a\} \setminus \{1\}} \mathbf{C}_{1,j} & -\mathbf{C}_{1,2} & \dots & -\mathbf{C}_{1,N_a} \\ -\mathbf{C}_{1,2} & I(\mathbf{p}_2) + \sum_{j \in \{1, \dots, N_a\} \setminus \{2\}} \mathbf{C}_{2,j} & \dots & -\mathbf{C}_{2,N_a} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{C}_{1,N_a} & -\mathbf{C}_{2,N_a} & \dots & I(\mathbf{p}_{N_a}) + \sum_{j \in \{1, \dots, N_a\} \setminus \{N_a\}} \mathbf{C}_{N_a,j} \end{pmatrix} \quad (2-6)$$

上面的式子中 $I(\mathbf{p}_i)$ 表示 N_b 个锚点对未知节点距离测量的贡献, 和前面的 (2-3) 式相同。 $\mathbf{C}_{i,j} = \mathbf{1}_{(i,j) \in \mathcal{E}} \mathbf{u}_{ij} \mathbf{u}_{ij}^T / \sigma_{ij}^2$, 表示未知节点 i 和 j 协作的矩阵。 $\mathbf{u}_{ij} = \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j}{\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|}$ 表示未知节点 i 和 j 的方向向量。

2.3 时间协作定位

单个待测节点时间协作定位考虑一个平面定位场景中有一个待定位的移动节点, 场景中部署的 N_b 个位置已知的锚点分别在在 t_1, \dots, t_{N_a} 时刻对该节点进行定位, 移动节点可以通过自身的加速度传感器对自己的速度有测量, 如图 (2.3) 所示。

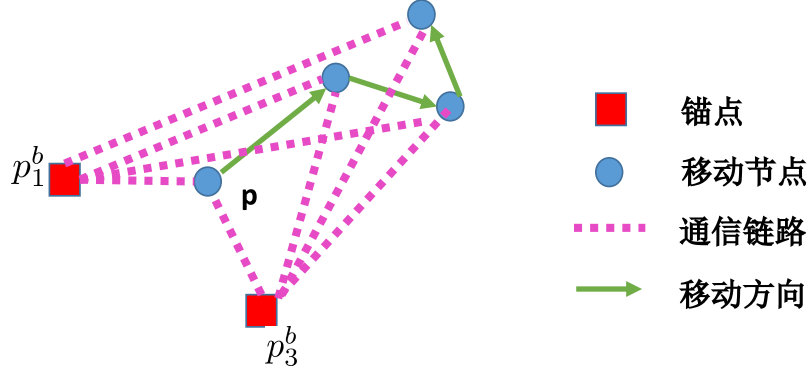


图 2.3 协作动态场景下的定位

假设测量时间间隔比较小使得相邻测量间节点速度方向可近似看作不变, 速度测量值服从均值为 v , 方差为 σ_v 的正态分布 V_{ij} 。那么以节点各时刻的位置 $\{p_i\}$ 作为待估计的参数, 可以得到包括相邻时刻间的所有测距量的联合概率密度函数为

$$F(\mathbf{X}|\mathbf{P}) = \prod_{i=1}^{N_a} f(x_1^i, \dots, x_{N_b}^i | \mathbf{p}_i) \prod_{i=1}^{N_a-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v(t_{i+1} - t_i)} \exp\left(-\frac{(v_{i,i+1}(t_{i+1} - t_i) - \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}\|)^2}{2\sigma_v^2(t_{i+1} - t_i)^2}\right) \quad (2-7)$$

费舍尔信息矩阵 关于 $2N_a$ 个参数 $\{p_i\}$ 的费舍尔信息矩阵有如下的表达形式:

$$\mathbf{I}(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}(\mathbf{p}_1) + \mathbf{C}_{1,2} & -\mathbf{C}_{1,2} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_{1,2} & \mathbf{I}(\mathbf{p}_2) + \mathbf{C}_{1,2} + \mathbf{C}_{2,3} & -\mathbf{C}_{2,3} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{C}_{N_a-1, N_a} & \mathbf{C}_{N_a-1, N_a} + \mathbf{I}(\mathbf{p}_{N_a}) \end{pmatrix} \quad (2-8)$$

上面的式子中若将 2 乘 2 的矩阵看作单位元素, 则是一个三对角的矩阵。 $\mathbf{I}(\mathbf{p}_i)$ 表示 N_b 个锚点对未知节点距离测量的贡献, 和前面的 (2-3) 式相同。 $\mathbf{C}_{i,i+1} = \mathbf{1}_{(i,j) \in E} \mathbf{u}_{ij} \mathbf{u}_{ij}^T / (\sigma_v^2(t_{i+1} - t_i)^2)$, 表示未知节点 i 和 j 协作的矩阵, \mathbf{u}_{ij} 表示未知节点 i 和 j 的方向向量。

我们可以将第二个模型问题与线性网络单节点时间协作建立联系, 只需对上面概率密度函数中出现的符号重排即可: 将两移动节点在 t_1 时刻的协作的边作为链路的中心, 该链路记为 l , 左右各有 N_a 个节点, 分别表示各节点 t_i 时刻的

位置。以其中一个移动节点为参照，研究其 t_{N_a} 时刻的位置在有无 l 的影响，无 l 时，协作链路长度只有 $N_a - 1$ ，有 l 时，协作链路长度是 $2N_a - 1$ ，增加了 N_a 条链路的协作信息。于是得到的费舍尔信息矩阵与式 (2-8) 形式相同，维数为 $4N_a$ 。

两个节点时间协作定位考虑一个平面定位场景中有两个待定位的移动节点 p, q ，在初始时刻 t_1 两个移动节点之间有一次测距，服从无偏的标准差为 σ 的正态分布，之后时刻 t_2, \dots, t_{N_a} 两个节点不再协作，在各个时刻场景中部署的 N_b 个位置已知的锚点都可以对两个节点进行定位，移动节点可以通过自身的加速度传感器对自己的速度有测量，假设时间间隔比较小使得相邻测量间节点速度方向可近似看作不变，速度测量值分别服从方差为 σ_i 的正态分布 V_i 和标准差为 σ'_i 的正态分布 V'_i （均值未知，但测量是无偏的），同时假设每个节点从 t_i 到 t_{i+1} 时刻的角度符从 $[0, 2\pi]$ 的正态分布，但角度没有测量量，是未知参数。我们试图研究初始时刻 t_1 两个移动节点之间的一次测距对后续 t_n 时刻每个节点的定位精度平均来说还有多大的贡献？

针对两个节点各时刻的位置 $\{p_i, q_i\}$ 共计 $2N_a$ 个二维向量作为待估计的参数，可以得到包括相邻时刻间的所有测距量的联合概率密度函数为

$$F(\mathbf{X}|\mathbf{P}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x - \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1\|)^2}{2\sigma^2}\right) \prod_{i=1}^{N_a} f(x_1^i, \dots, x_{N_b}^i | \mathbf{p}_i) \prod_{i=1}^{N_a} f(x_1^i, \dots, x_{N_b}^i | \mathbf{q}_i) \quad (2-9)$$

$$\prod_{i=1}^{N_a-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i(t_{i+1} - t_i)} \exp\left(-\frac{(v_i(t_{i+1} - t_i) - \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}\|)^2}{2\sigma_i^2(t_{i+1} - t_i)^2}\right) \prod_{i=1}^{N_a-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'_i(t_{i+1} - t_i)} \exp\left(-\frac{(v'_i(t_{i+1} - t_i) - \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i+1}\|)^2}{2\sigma'^2_i(t_{i+1} - t_i)^2}\right)$$

2.4 关于模型的讨论

上面三小节给出了三种典型的定位场景，我们还需要如下限制条件模型才比较合理：

- 如果测量误差 σ 有一个最小的阈值的话，部署的锚点不能离目标节点太近以及多个目标节点之间的距离也不能太近，于是随着网络中目标节点数目的增加，满足我们的模型的平面定位网络的覆盖范围也随之增大；
- 另外目标节点由于信道等原因，一般只能和距离自身比较近的其他目标节点进行通信，这就使得在定位网络中一个节点的度受到限制。
- 在动态协作网络中，相邻两次测量的时间间隔受硬件的限制不能太短，一般来说，如果 $\Delta t \rightarrow 0$ ，对节点整个轨迹的追踪会更准确，因此我们将研究这一极限情形。

第3章 简单网络

3.1 非协作单节点定位网络

非协作单节点定位网络描述与求解 非协作单节点定位网络的性能描述可以借助一种比较直观的方式，为此引入以下信息椭圆的概念^[2]:

定义 3.1: 信息椭圆是参数空间 θ 上由费舍尔信息矩阵定义的空间曲面:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{I}_\theta^{-1} \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N} \quad (3-1)$$

信息椭圆各个主轴的长度衡量了特征值的大小，代表了该方向的定位精度。下面研究二维情形下由 $\mathbf{I}(\mathbf{p}) = \sum \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$ 决定的信息椭圆的形状，即求 $\mathbf{I}(\mathbf{p})$ 的特征值和特征向量。将二维向量看成复平面的复数， $\mathbf{I}(\mathbf{p})$ 看成复平面上的线性算子，作用规则是 $\mathbf{I}(\mathbf{p})\mathbf{x} = \sum \lambda_i (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i) \mathbf{u}_i$ ，其值域仍在复平面内，算子 $\mathbf{I}(\mathbf{p})$ 的特征值 λ 和特征向量 \mathbf{y} 满足 $\mathbf{I}(\mathbf{p})\mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}$ 。

设 \mathbf{x} 幅角为 θ , \mathbf{u}_i 幅角为 ϕ_i , 由 $\mathbf{I}(\mathbf{p})\mathbf{x} = \sum \lambda_i (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i) \mathbf{u}_i$ 可得

$$\sum \lambda_i \cos(\theta - \phi_i) e^{j\phi_i} = \lambda e^{j\theta} \quad (3-2)$$

利用虚部为 0 的条件，可以进一步得到: θ 满足方程

$$0 = \sum \lambda_i \sin(2(\theta - \phi_i)) \quad (3-3)$$

$$\lambda = \sum \lambda_i \cos^2(\theta - \phi_i) \quad (3-4)$$

下面给出关于矩阵 $\mathbf{I}(\mathbf{p})$ 有两个不同的特征值即信息椭圆非退化的一个充要条件:

定理 3.1: (3-4) 有两个不同的实根当且仅当

$$\sum (\sin(2\phi_i) \lambda_i)^2 + (\cos(2\phi_i) \lambda_i)^2 \neq 0$$

证明 设 $A := \sum \sin(2\phi_i)\lambda_i$, $B := \sum \cos(2\phi_i)\lambda_i$

充分性: 若 $\sqrt{A^2 + B^2} \neq 0$, 设 $\cos \phi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, $\sin \phi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ 等式 (3-3) 可化为:

$$\cos(2\theta + \phi) = 0$$

, 等式 (3-4) 可化为:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\sum \lambda_i}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2} \sin(2\theta + \phi) \\ &= \frac{\sum \lambda_i}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2} \end{aligned} \quad (3-5)$$

由条件 $A^2 + B^2 \neq 0$ 故有两个不相同的实根。

必要性: 反设 $A=0, B=0$, 则 $\forall \theta$, 等式 (3-3) 成立, 且等式 (3-4) 化为 $\lambda = \frac{\sum \lambda_i}{2}$, 只有一个特征根, 对应 $I(\mathbf{p})$ 退化为对角阵, 矛盾。 \square

根据式 (3-5) 和 (2-2), 误差下界为

$$\begin{aligned} \text{SPEB} &= \frac{1}{\tilde{\lambda}_1} + \frac{1}{\tilde{\lambda}_2} \\ &= \frac{4 \sum \lambda_i}{(\sum \lambda_i)^2 - (A^2 + B^2)} \end{aligned} \quad (3-6)$$

由此可以看出当 $A^2 + B^2 = 0$ 时误差下界最小, 此时 $I(\mathbf{p})$ 的两个特征值相等, 信息椭圆退化为圆。

为进一步验证此结论, 我们考虑一仿真情形: 在单位正方形顶点部署 4 个锚点, 定位强度量 $\lambda_i = 2 + 0.3 \times (i - 1)$, 考虑目标节点的位置在每次定位中服从正方形内的二维均匀分布, 仿真 1000 次后得到的定位误差下界和信息椭圆离心率的关系曲线如图3.1所示。从图3.1可以看出:

- 定位误差下界在 λ_i 给定的情况下完全由椭圆离心率决定, 如果我们联立 $e = \sqrt{1 - \lambda_{\min}/\lambda_{\max}}$ 与式 (3-5), 式 (3-6) 不难得出这个结论
- 定位误差下界是椭圆离心率的增函数, 这与式 (3-6) 相吻合。在椭圆离心率比较小的情况下, 误差下界已经接近 $e = 0$ 时的 $1/\sum \lambda_i = 0.408$

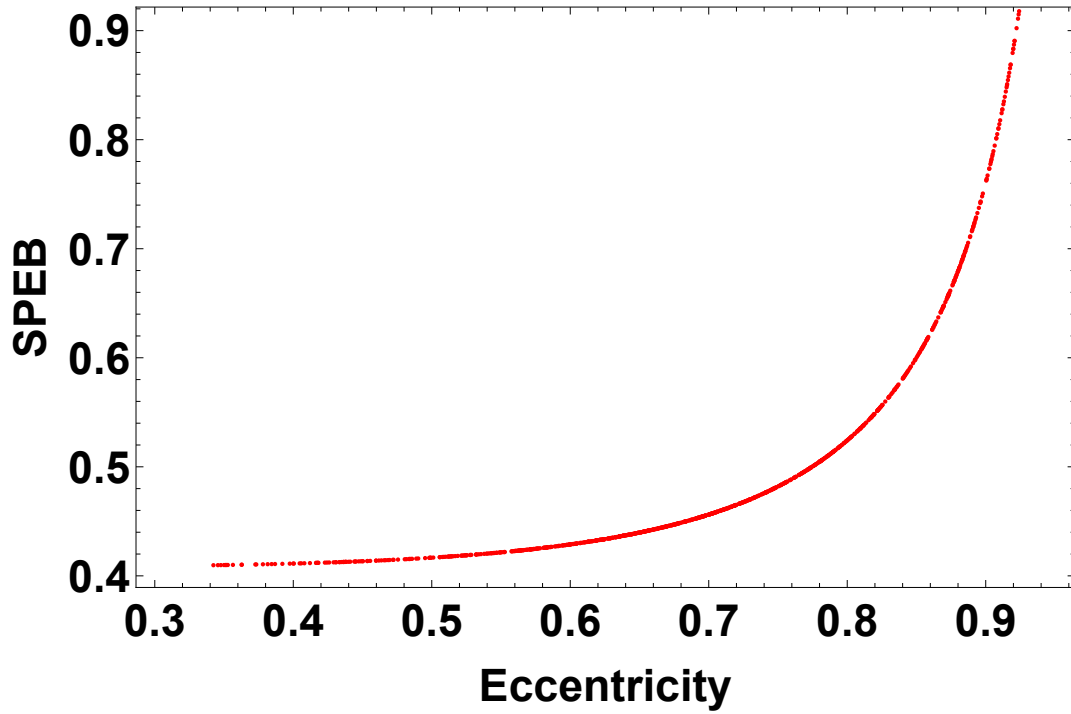


图 3.1 SPEB 与信息椭圆离心率的关系

3.2 两个未知节点协作的场景

两个移动节点协作情况下，为求 4 维费舍尔信息矩阵特征多项式的表达式，需要下面的定理：

定理 3.2： 设 J 是对称正定的矩阵 (对于 FIM 这一点成立)，那么下式成立：

$$|J + \epsilon \mathbf{u} \mathbf{u}^T| = |J| + \epsilon \mathbf{u}^T J^* \mathbf{u} \quad (3-7)$$

其中 J^* 表示 J 的伴随矩阵，满足等式 $JJ^* = |J|I$

证明上面的定理需要如下两个引理：

引理 3.1： 如果方阵 M 可以写成分块的形式 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ，而且 A 是可逆的对角阵，那么 M 的行列式 $|M| = |A||D - CA^{-1}B|$

证明 通过第三类初等变换方阵我们有

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式即得要证明的式子。 \square

引理 3.2: 如果 \mathbf{u} 是一个 n 维的列向量, \mathbf{I} 是 n 维单位阵, 则我们有行列式恒等式:

$$|(1 + \mathbf{u}^T \mathbf{u})\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{u}^T| = (1 + \mathbf{u}^T \mathbf{u})^{n-1} \quad (3-8)$$

证明 (3-8) 需要下面的 Woodbury 矩阵求逆公式:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{UCV})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{VA}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{VA}^{-1} \quad (3-9)$$

其中 \mathbf{A}, \mathbf{C} 均是可逆的方阵。

证明 用数学归纳法证明, 首先我们对 $n = 2$ 的情形直接验证可得 (3-8) 成立。假设结论对 $n-1$ 维的情形成立, 设 $\mathbf{u} = (\mathbf{v}^T, u_n)^T$, 其中 \mathbf{v} 是 $n-1$ 维的列向量, 那么对 $\mathbf{v}/\sqrt{1 + u_n^2}$ 用归纳假设有:

$$|(1 + \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{1 + u_n^2})\mathbf{I}_{n-1} - \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{1 + u_n^2}| = (1 + \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{1 + u_n^2})^{n-2} \quad (3-10)$$

其中, $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v}$, $\|\cdot\|$ 表示欧式空间的 2 范数。由上式可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &:= (1 + u_n^2 + \|\mathbf{v}\|^2)\mathbf{I}_{n-1} - \mathbf{v}\mathbf{v}^T \\ |\mathbf{A}| &= (1 + u_n^2)(1 + u_n^2 + \|\mathbf{v}\|^2)^{n-2} \end{aligned}$$

对 n 维的情形, $(1 + \mathbf{u}^T \mathbf{u})\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{u}^T$ 可以写成分块矩阵的形式 $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & -u_n \mathbf{v} \\ -u_n \mathbf{v}^T & \|\mathbf{v}\|^2 + 1 \end{pmatrix}$

由引理 (3.1) 得:

$$|(1 + \mathbf{u}^T \mathbf{u})\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{u}^T| = |\mathbf{A}|(\|\mathbf{v}\|^2 + 1 - u_n^2 \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{v}) \quad (3-11)$$

由 Woodbury 矩阵求逆公式:

$$A^{-1} = \frac{1}{1 + \|\mathbf{v}\|^2 + u_n^2} - \frac{\mathbf{v}(-1 + \|\mathbf{v}\|^2/(1 + \|\mathbf{v}\|^2 + u_n^2))^{-1}\mathbf{v}^T}{(1 + \|\mathbf{v}\|^2 + u_n^2)^2} \quad (3-12)$$

将 (3-12) 代入 (3-11) 中, 化简即可得对 \mathbf{n} 的情形要证的恒等式成立。 \square

证明 (定理 (3.2) 证明) 式 (3-7) 等价于:

$$|J + \epsilon \mathbf{u} \mathbf{u}^T| = |J|(1 + \epsilon \mathbf{u}^T J^{-1} \mathbf{u}) \quad (3-13)$$

因为 J 是对称正定的矩阵, 所以存在正交矩阵 Q , 使得 $J = Q D Q^{-1}$, D 是对角阵, 代入 (3-13) 中得: $|D + \epsilon \mathbf{y} \mathbf{y}^T| = |D|(1 + \epsilon \mathbf{y}^T D^{-1} \mathbf{y})$ 其中 $\mathbf{y} = Q^{-1} \mathbf{u}$, 因此我们只需对对角矩阵证明定理成立。设 J 是 \mathbf{n} 维对角阵, 由 Woodbury 矩阵恒等式可得:

$$(J + \epsilon \mathbf{u} \mathbf{u}^T)^{-1} = J^{-1} - \frac{1}{\epsilon^{-1} + \mathbf{u}^T J^{-1} \mathbf{u}} J^{-1} \mathbf{u} \mathbf{u}^T J^{-1} \quad (3-14)$$

整理得:

$$(J + \epsilon \mathbf{u} \mathbf{u}^T)^{-1} = J^{-1} \frac{(1 + \epsilon \mathbf{u}^T J^{-1} \mathbf{u}) \mathbf{I} - \epsilon \mathbf{u} \mathbf{u}^T J^{-1}}{1 + \epsilon \mathbf{u}^T J^{-1} \mathbf{u}} \quad (3-15)$$

如果我们能证明:

$$|(1 + \epsilon \mathbf{u}^T J^{-1} \mathbf{u}) \mathbf{I} - \epsilon \mathbf{u} \mathbf{u}^T J^{-1}| = (1 + \epsilon \mathbf{u}^T J^{-1} \mathbf{u})^{n-1} \quad (3-16)$$

则通过对 (3-15) 两边取行列式即可得到要证的式子, 这里设 $J = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 取 $\mathbf{y} = \sqrt{\epsilon}(u_1/\sqrt{\lambda_1}, \dots, u_n/\sqrt{\lambda_n})$, 那么上式和 (3-8) 具有相同的形式, 因此定理结论成立。 \square

定理 (3.2) 可以推广为如下一般形式, 证明方法不变:

推论 3.1: 设 J 是对称正定的矩阵, 则

$$|J + \epsilon \mathbf{u} \mathbf{v}^T| = |J| + \epsilon \mathbf{u}^T J^* \mathbf{v} \quad (3-17)$$

下面考虑两个节点协作的情形: 原 4 维 FIM 结构为:

$$A = \begin{pmatrix} \Sigma_0 + \epsilon \mathbf{u} \mathbf{u}^T & -\epsilon \mathbf{u} \mathbf{u}^T \\ -\epsilon \mathbf{u} \mathbf{u}^T & \Sigma_1 + \epsilon \mathbf{u} \mathbf{u}^T \end{pmatrix} \quad (3-18)$$

通过坐标变换将 Σ_0, Σ_1 对角化可以得到等价的形式:

$$A = J + \epsilon \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ -\mathbf{w} \end{pmatrix} (\mathbf{v}^T, -\mathbf{w}^T) \quad (3-19)$$

其中 \mathbf{v}, \mathbf{w} 为单位方向向量, 方向角为 θ 和 ϕ 。而 J 是对角矩阵, 第 i 个对角元为 λ_i , 这样特征多项式 $|\lambda A - I| = 0$ 就有简单的表达形式:

$$P(\lambda) = (\lambda - a_1)(\lambda - a_2)(\lambda - a_3)(\lambda - a_4) \left(1 + \epsilon \left(\frac{\cos^2(\theta)}{\lambda - a_1} + \frac{\sin^2(\theta)}{\lambda - a_2} + \frac{\cos^2(\phi)}{\lambda - a_3} + \frac{\sin^2(\phi)}{\lambda - a_4} \right) \right) \quad (3-20)$$

利用 SPEB 的定义和式 (3-20), 可以得到相比于非协作的情形定位误差下界下降的成分为:

$$\Delta = \sum \frac{1}{\lambda_i} - \text{SPEB}_{\text{global}} = \xi \left(\frac{\cos^2(\theta)}{a_1^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{a_2^2} + \frac{\cos^2(\phi)}{a_3^2} + \frac{\sin^2(\phi)}{a_4^2} \right) \quad (3-21)$$

其中

$$\xi = \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{\cos^2(\phi)}{a_3} + \frac{\sin^2(\phi)}{a_4} + \frac{\cos^2(\theta)}{a_1} + \frac{\sin^2(\theta)}{a_2} \right)^{-1} \quad (3-22)$$

考察上面关于 θ 和 ϕ 的函数, 我们有如下定理, 推导过程见附录 [A.2.1]:

定理 3.3: 如果 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \geq \max\{\frac{1}{a_4}, \frac{1}{a_3}\}$ 且 $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} \geq \max\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}\}$, 那么 $\theta = \phi = \frac{\pi}{2}$ 是 Δ 的最大值点。

3.3 本章小节

我们在本章中研究了通过改变角度参数使得误差下界最小这一问题, 现总结如下:

- 对于非协作情形，如果能改变锚点部署的角度使得费舍尔信息矩阵是对角阵，则误差下界最小，但存在无论怎样改变锚点部署都不可能使得费舍尔信息矩阵是对角阵的情况，即式 (3-6) 可能达不到。
- 对于两节点协作的情形，定理3.3给出了一个充分条件以确定定位误差最小的情形。

总体来说，上面的结论都比较弱，在锚点贡献的信息是各向异性的情况下，很难对协作信息作理论推导，因此在接下来的研究中，我们总假设锚点贡献的信息是各向同性的，并且我们会采用不同于3.2小节的数学方法来求解费舍尔信息矩阵的特征值。

第4章 特殊结构网络

4.1 特殊全连接网络

特殊全连接网络描述与求解 在协作定位网络的问题模型下, 给出下面三个简化条件:

1. 锚点测距方差 $\sigma_i^2 = \frac{1}{a}$
2. 未知节点彼此测距方差 $\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{b}$
3. $\mathcal{E} = \{(i, j) | 1 \leq i < j \leq N\}, N := N_a, \angle \mathbf{u}_j = \frac{2\pi j}{n}$

$\mathbf{I}(\mathbf{P})$ 的最大特征值和最小特征值可由瑞利商求出, 关于瑞利商有如下定理:

定理 4.1: 设 \mathbf{A} 是一个对称正定的矩阵, 设 \mathbf{v}_λ 为 \mathbf{A} 的特征值 λ 对应的特征向量, 则:

$$\begin{cases} \lambda_{\max} &= \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\ \mathbf{v}_{\lambda_{\max}} &= \operatorname{argmax}_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_{\min} &= \min_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\ \mathbf{v}_{\lambda_{\min}} &= \operatorname{argmin}_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \end{cases}$$

在条件 (1),(2) 成立的情况下, 费舍尔信息矩阵 $\mathbf{I}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = a\mathbf{I}_{2N} + b\mathbf{J}$, 其中

$$\mathbf{J}_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1, k \neq i}^N \mathbf{u}_{ik} \mathbf{u}_{ik}^T & i = j \\ -\mathbf{u}_{ij} \mathbf{u}_{ij}^T & i \neq j, \end{cases}$$

瑞利商为:

$$R(\mathbf{x}) = b \sum_{i \leq j \leq N} (\mathbf{u}_{ij}^T (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j))^2 + a, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^2 \quad (4-1)$$

容易看出, 当 $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j$ 或 $(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ 与 \mathbf{u}_{ij} 正交时, 瑞利商 $R(\mathbf{x})$ 取到最小值, 利用定理 (4.1), 关于 $\mathbf{I}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ 的特征值, 我们有如下定理:

定理 4.2: 如果简化条件 1 和 2 成立, 那么 $I(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ 的最大特征值是 $a + Nb$, 最小特征值是 a ; 如果三个简化条件均成立, 那么 $\mathbb{R}_{2N} = V_{a+Nb} \oplus V_a \oplus V_{a+Nb/2}$, 且 $\dim(V_a) = 3, \dim(V_{a+Nb/2}) = 2N - 4$

证明 设 $\dot{\mathbf{p}}_i$ 表示 \mathbf{p}_i 绕原点旋转 90° 后的向量, $\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)$, 容易看出

$$V_a \supset \text{span}\{\{\dot{\mathbf{p}}_1, \dot{\mathbf{p}}_2, \dots, \dot{\mathbf{p}}_N\}, \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_1\}, \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_2\}\} := K_a$$

下面证明 $a + Nb$ 是 $I(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ 的最大特征值, 由 Cauchy 不等式:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{y}) &\leq b \sum_{i \leq j \leq N} \|\mathbf{u}_{ij}\|^2 \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\|^2 + a \\ &= b \sum_{i \leq j \leq N} \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\|^2 + a \end{aligned} \quad (4-2)$$

取等条件是 $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}, i \neq j$, 有 $\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j$ 与 \mathbf{u}_{ij} 均平行, 比如可以取 $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_j = k(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_j), j = 2, \dots, N$ 。满足 $\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j = (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_j) - (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_i) = k(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) \parallel \mathbf{u}_{ij}$ 这时原来 $2N$ 个自由度的 \mathbf{y} 还剩下 \mathbf{y}_1 和 k 三个自由度, 考虑条件极值 $f(\mathbf{y}) = \sum_{i \leq j \leq N} \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\|^2, \text{s.t. } \|\mathbf{y}\| = 1$ 设矩阵 T 为:

$$T = \begin{pmatrix} (N-1)\mathbf{I}_2 & -\mathbf{I}_2 & \dots & -\mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & (N-1)\mathbf{I}_2 & \dots & -\mathbf{I}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{I}_2 & -\mathbf{I}_2 & \dots & (N-1)\mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

T 可以写成 $T = N\mathbf{I} - \mathbf{e}\mathbf{e}^T$, 其中 $\mathbf{e} = (\mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_2)^T$ 。而 $f(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T T \mathbf{y} = N - (\mathbf{e}^T \mathbf{y})^T (\mathbf{e}^T \mathbf{y}) \leq N$ 取等条件是 $\mathbf{e}^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$, 这个条件限制住了两个自由度, 再加上 \mathbf{y} 模长为 1 的约束, 前一次不等式取等剩下的三个自由度刚好够用, 所以 \mathbf{y} 按该方法可以唯一取到, 其张成的子空间记为 K_b 。具体求解可得: $\mathbf{y}_1 = \frac{k}{N} \sum_{j=2}^N (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_j)$ 将 \mathbf{y}_i 的表达式代入 $\|\mathbf{y}\| = 1$ 中, 可以解出唯一的 $k^2 = M$ 其中

$$M \sum_{i=1}^N \left\| \sum_{j=1, j \neq i}^N (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_j) \right\|^2 = 1$$

在条件 (3) $\angle \mathbf{u}_j = \frac{2\pi j}{n}$ 的进一步假设下, 设 $\mathbf{x} \in (K_a \oplus K_b)^\perp$, 下面证明 \mathbf{x} 是矩阵 \mathbf{J} 的特征值为 $\frac{N}{2}$ 对应的特征向量。由正交性条件, 有:

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{x}_i^{(k)} &= 0, k = 1, 2 \\ \sum \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}_i &= \sum x_i^{(1)} \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) + x_i^{(2)} \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) = 0 \end{aligned} \quad (4-3)$$

$$\sum \mathbf{x}_i \cdot \hat{\mathbf{u}}_i = \sum -x_i^{(1)} \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) + x_i^{(2)} \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) = 0 \quad (4-4)$$

下面考虑 $\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}$ 的第 j 行为:

$$(\mathbf{K} \cdot \mathbf{x})_{(\cdot, j)} = \sum_{k \neq j}^n \frac{(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k)^\top (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)}{\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k\|^2} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k) \quad (4-5)$$

我们要证明上面的式子等于 $\frac{N}{2} \mathbf{x}_j$, 为此, 首先化简 $\frac{(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k)}{\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k\|}$ 可以推出上式等于:

$$\frac{(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k)}{\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k\|} = \text{sgn}(j - k) \begin{pmatrix} -\sin \frac{\pi(j+k)}{n} \\ \cos \frac{\pi(j+k)}{n} \end{pmatrix} \quad (4-6)$$

上面的式子中符号函数 $\text{sgn}(j - k)$ 因为在式 (4-5) 中出现 2 次, 所以相乘恒为 1, 它与求和指标 k 无关, 可以作为公因子提取出来。所以证明

$$\sum_{k \neq j}^n \frac{(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k)^\top (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)}{\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k\|^2} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k) = \frac{N}{2} \mathbf{x}_j$$

化简为分别证明:

$$(*) \sum \left(\left(-\sin \frac{(j+k)\pi}{n}, \cos \frac{(j+k)\pi}{n} \right) \begin{pmatrix} x_j^{(1)} - x_k^{(1)} \\ x_j^{(2)} - x_k^{(2)} \end{pmatrix} \right) \cos \frac{(j+k)\pi}{n} = \frac{N}{2} x_j^{(2)}$$

$$(**) \sum \left(\left(-\sin \frac{(j+k)\pi}{n}, \cos \frac{(j+k)\pi}{n} \right) \begin{pmatrix} x_j^{(1)} - x_k^{(1)} \\ x_j^{(2)} - x_k^{(2)} \end{pmatrix} \right) \left(-\sin \frac{(j+k)\pi}{n} \right) = \frac{N}{2} x_j^{(1)}$$

(*) 式等价于证明:

$$\sum \left(-\sin \frac{(j+k)2\pi}{n}, 1 + \cos \frac{(j+k)2\pi}{n} \right) \begin{pmatrix} x_j^{(1)} - x_k^{(1)} \\ x_j^{(2)} - x_k^{(2)} \end{pmatrix} = Nx_j^{(2)}$$

在 (4-3),(4-4) 式中, 分别将 (4-3) 乘以 $\sin(\frac{2\pi k}{n})$ 与 (4-4) 乘以 $\cos(\frac{2\pi k}{n})$ 相减得:

$$\sum x_i^{(1)} \sin \frac{(j+k)2\pi}{n} - x_i^{(2)} \cos \frac{(j+k)2\pi}{n} = 0 \quad (4-7)$$

利用上面这个等式即可证 (*) 式。在 (4-3),(4-4) 式中, 分别将 (4-3) 乘以 $\cos(\frac{2\pi k}{n})$ 与 (4-4) 乘以 $\sin(\frac{2\pi k}{n})$ 相加得:

$$\sum x_i^{(1)} \cos \frac{(j+k)2\pi}{n} + x_i^{(2)} \sin \frac{(j+k)2\pi}{n} = 0 \quad (4-8)$$

利用上面这个等式同理可证明 (**) 式。 □

注释 4.1:

- 当场景中各待测节点相距较近, 而锚点离各待测节点较远时, 3.1 小节说明了各向同性是锚点最优部署的形态, 如果考虑锚点相对于各待测节点的分布范围是最优部署的, 那么上面对锚点部署使得其贡献的信息量为 aI 的假设成立, 在之后的讨论中, 我们均持此假设。
- 假设 3 是说各待测节点分布在一个圆上, 因为各待测节点相距较近, 在圆周半径不是很小的情况下, 可以近似认为各节点相互测距方差均相等, 即假设 2 成立。
- 通过对特征值的倒数和取平均, 每个节点的误差下界的量级是 $\frac{4}{bN}$, 3.1 小节最优部署下非协作情形每个节点的误差下界的量级是 $\frac{2}{aN}$, 相比之下可以看出在 $a=b$ 的情况下增加 2 个协作节点才有一个锚点的效果。

4.2 线型网络

在动态协作定位网络的问题模型下, 得到的费舍尔信息矩阵是块三对角矩阵, 在时间段 $[0, T]$ 内, 为研究减小时间间隔对定位性能的提高, 我们需要对原

来的模型作出如下的简化:

- 锚点测距方差 $\sigma_i^2 = \frac{1}{a}$
- 未知节点彼此测距方差 $\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{b}$

那么费舍尔信息矩阵式 (2-8) 可化简为

$$I(P) = a\mathbf{I} + b\mathbf{J} \quad (4-9)$$

其中

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T & -\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T & \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T & -\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{u}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1}^T & \mathbf{u}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1}^T \end{pmatrix}$$

其中 $u_i := u_{i,i+1}$ 求 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{Tr}(\mathbf{J}^{-1})}{N}$

直接求解该问题需要如下两个引理:

引理 4.1: 设 \mathbf{L} 是 $m \times n$ 的矩阵, $a, \epsilon > 0$ 则

$$|a\mathbf{I}_m + \epsilon\mathbf{L}\mathbf{L}^T| = a^m |\mathbf{I}_n + \frac{\epsilon}{a}\mathbf{L}^T\mathbf{L}| \quad (4-10)$$

证明 不妨设 $a = \epsilon = 1$, 考虑到

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n + \mathbf{L}^T\mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L} & \mathbf{I}_m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & -\mathbf{L}^T \\ \mathbf{L} & \mathbf{I}_m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & -\mathbf{L}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m + \mathbf{L}\mathbf{L}^T \end{pmatrix}$$

其中 \sim 表示矩阵相抵, 两边取行列式即得 $|\mathbf{I}_m + \mathbf{L}\mathbf{L}^T| = |\mathbf{I}_n + \mathbf{L}^T\mathbf{L}|$, 证毕。 \square

引理 4.2: S 是一个 $n-1$ 维的方阵,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

则 S 的 $n-1$ 个特征值为: $\lambda_j = 2 \cos(\frac{\pi j}{n}), j = 1, 2, \dots, n-1$

证明 首先可以用数学归纳法证明 S 的特征多项式有递推公式:

$$P_n(\lambda) = \lambda P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda)$$

$P_n(\lambda)$ 对应 n 维的 S 。其次证明

$$U_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda}{2})^2}} \sin((n+1) \arccos(\frac{\lambda}{2}))$$

适合上面的递推关系式。最后证明 $U_n(\lambda)$ 是关于 λ 的多项式, 而这只需要证明 $U_1(\lambda), U_2(\lambda)$ 是多项式即可。 \square

$I(p_1, \dots, p_N)$ 的特征多项式为

$$p(\lambda) = |(\lambda - a)I - bLL^T|$$

其中 L 是 $2N$ 乘以 N 的矩阵:

$$L = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & 0 & \dots & & 0 \\ -\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\mathbf{u}_{N-1} & 0 \end{pmatrix}$$

为获得该多项式的全部零点，我们进一步设 $u_i = (1, 0)^T$ ，即目标节点作直线运动，后面可以看到直线运动对应着误差最小的情形。根据引理 (4.1)，

$$|(\lambda - a)\mathbf{I} - bLL^T| = (\lambda - a)^{2N} |\mathbf{I}_n - \frac{b}{\lambda - a} L^T L|$$

$L^T L$ 是 N 阶方阵：

$$L^T L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

设 \mathbf{K}_{N-1} 为 $L^T L$ 第 $N-1$ 阶主子式，则

$$|(\lambda - a)\mathbf{I} - bLL^T| = (\lambda - a)^{N+1} |(\lambda - a)\mathbf{I}_{N-1} - b\mathbf{K}_{N-1}|$$

设 $n := N$ ，则 $\mathbf{K}_{n-1} = 2\mathbf{I}_{n-1} - \mathbf{S}$ ，由引理 (4.2) 可求出 $\mathbf{I}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ 的全部特征值。

$$f(n) = \frac{\text{Tr}(J^{-1})}{n} == \frac{1}{n} \left(\frac{n+1}{a} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{a + 2b(1 - \cos(\frac{\pi j}{n}))} \right)$$

当 $n \rightarrow \infty$ ，根据 Riemann 积分的定义：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{1}{a} + \int_0^1 \frac{1}{a + 2b(1 - \cos(\pi x))} dx$$

化为复积分由留数定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4ab}} \quad (4-11)$$

解析求解 $\mathbf{I}(\mathbf{P})$ 的全部特征值在 \mathbf{u}_i 不共线时非常困难，在数值代数中针对三对角矩阵有追赶法 (Thomas algorithm) 来快速求解 $A^{-1}\mathbf{b}$ ^[4]，下面我们会推广这一

方法使之适用于我们研究中的块三对角矩阵 $\mathbf{I}(\mathbf{P})$ 。首先注意到式 (4-9) 中 $a\mathbf{I} + b\mathbf{J}$ 可以提取 b (相当于对 \mathbf{b} 作归一化), 记 $\lambda = \frac{a}{b}$, 下面我们针对 $\lambda\mathbf{I} + \mathbf{J}$ 进行研究。

记 $\mathbf{e}_i = (\mathbf{0}, \dots, \underbrace{\mathbf{I}_2}_{i\text{-th item}}, \dots, \mathbf{0})^T$ 在式 (2-2) 中 SPEB 可以分解为各节点的定位误差下界之和为:

$$\text{SPEB} = \sum_{i=1}^{N_a} \mathbf{e}_i^T (\mathbf{I}(\mathbf{P}))^{-1} \mathbf{e}_i \quad (4-12)$$

$\mathbf{e}_i^T (\mathbf{I}(\mathbf{P}))^{-1} \mathbf{e}_i$ 是 $(\mathbf{I}(\mathbf{P}))^{-1} \mathbf{e}_i$ 第 i 个 2 乘 2 的分块矩阵, 我们先考虑 $i = N_a$ 即 \mathbf{e}_{N_a} 中只有最后一个块矩阵是 2 乘 2 的单位阵, 其余位置都是零元。 $\mathbf{e}_{N_a}^T (\mathbf{I}(\mathbf{P}))^{-1} \mathbf{e}_{N_a}$ 表示终点位置的位置误差下界。为记号简便, 记 $\mathbf{u}_{N_a} = \mathbf{0}, \mathbf{B}_i = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T + \mathbf{u}_{i+1} \mathbf{u}_{i+1}^T, \mathbf{A}_{i+1} = -\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$ 则 $\mathbf{I}(\mathbf{P})$ 可以写为:

$$\mathbf{I}(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_3 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{N_a} & \mathbf{B}_{N_a} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{I}(\mathbf{P})$ 可以做 LU 分解如下:

$$\mathbf{I}(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{N_a} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_2 & \mathbf{A}_3 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U}_{N_a} \end{pmatrix} \quad (4-13)$$

\mathbf{U}_i 满足如下递推关系:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_1 = \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{U}_i = \mathbf{B}_i - \mathbf{A}_i \mathbf{B}_{i-1}^{-1} \mathbf{A}_i, i \geq 2 \end{cases} \quad (4-14)$$

进一步可以求出

$$\mathbf{e}_{N_a}^T (\mathbf{I}(\mathbf{P}))^{-1} \mathbf{e}_{N_a} = U_{N_a}^{-1} \quad (4-15)$$

关于 U_{N_a} 的结构我们有如下定理:

定理 4.3: U_{N_a} 一个特征值是 λ , 另一个特征值 T_1 可以用下面的递归方法得到

$$\underbrace{T_{i-1} - \lambda}_M = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 \theta_i}{\lambda} + \frac{\cos^2 \theta_i}{T_i}}, 2 \leq i \leq N_a - 1 \quad (4-16)$$

$$T_{N_a-1} = \lambda + \frac{1}{1 + 1/\lambda}$$

其中 $\theta_i = \angle(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1})$ 。

具体推导过程详见附录 [A.2.2]

注释 4.2: 终点的定位误差

$$\text{SPEB} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{T_1} \quad (4-17)$$

强度量 λ 确定后, 研究 N_a 增大对 SPEB 的影响归结为研究 $T_1(N_a)$ 的性质, 下面我们将采用连分式的数学方法研究 $T_1(N_a)$ 关于 $N_a \rightarrow \infty$ 的收敛性和收敛速度的问题, 本文中用到的关于连分式的结论在附录 [A.3] 中列出^[5]:

注释 4.3: 上述求解是针对目标节点的记时终点而言, 记时起点完全类似。如果针对其时间中点, 则其可分别看成两段轨迹的起点和终点, 可以推出其费舍尔信息矩阵为:

$$\mathbf{I}(\mathbf{p}_i) = \lambda \mathbf{I} + M_1 \mathbf{u} \mathbf{u}^T + M_2 \mathbf{v} \mathbf{v}^T$$

其中 $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}}{\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}\|}$, $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}}{\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}\|}$, $\phi = \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, M_1, M_2 分别作为各段轨迹的记时终点满足递推公式 (4-16), \mathbf{I}_p 的两个特征值为可由式 (3-5) 得出:

$$\lambda_{1,2} = \lambda + \frac{M_1 + M_2 \pm \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2M_1M_2 \cos 2\phi}}{2} \quad (4-18)$$

注意到时间中点时两个特征值均比 λ 大。

为解析地求出 $\lim_{N_a \rightarrow \infty} T_1(N_a)$, 我们先考虑所有 $\mathbf{u}_i = (1, 0)^T$ 的特殊情形, 此时

$$\begin{aligned} \lim_{N_a \rightarrow \infty} T_1(N_a) &= \lambda + \frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda + \frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda + \dots}}}} \\ &= [\lambda, 1, \lambda, 1, \dots] \end{aligned} \quad (4-19)$$

根据定理 (A.2) 我们可以求出误差下界为

$$M^* := \lim_{N_a \rightarrow \infty} T_1(N_a) = \frac{\lambda + \sqrt{4\lambda + \lambda^2}}{2}$$

对于时间中点的情形, 由式 (4-18) 可知其一个特征值为 λ , 另一个特征值:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \lambda + \frac{2}{[1, \lambda, 1, \lambda, \dots]} \\ &= \lambda + \frac{2}{1 + \frac{1}{\lambda + \frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda + \dots}}}} \end{aligned} \quad (4-20)$$

同样求出 $\lambda_2 = \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda}$, 这个结果与式 (4-11) 相一致。

从时间间隔终点位置误差下界的一般表达式可以看出:

1. 根据式 (4-17) SPEB 在一个方向上始终为 $\frac{1}{\lambda}$, 减小时间间隔也无法改善;
2. 另一个方向上随 N_a 的增大 $T_1(N_a)$ 会增大, 但有一个上界, 粗略的讲不可能超过 $\lambda + 1$
3. 若某两次时间间隔夹角正交, 则 $\cos \theta_i = 0$, 即 t_i 时刻之前的所有位置均不能对终点位置的定位有贡献。

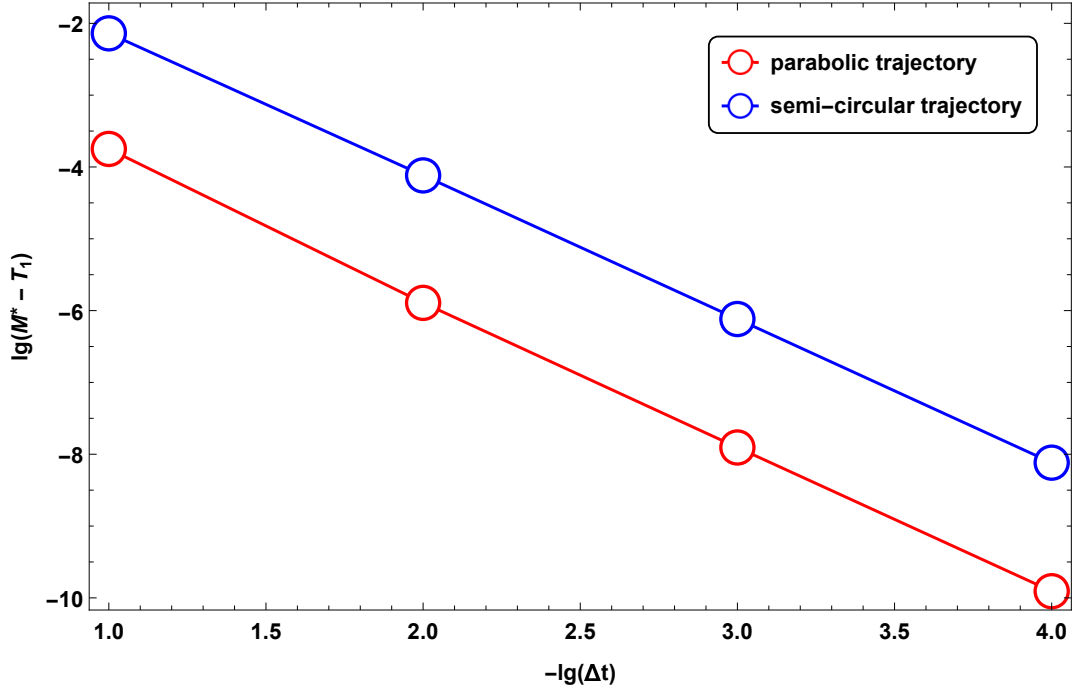


图 4.1 $\lambda = 2$ 时不同曲线随采样点加密 $T_1(N_a)$ 趋近极限值 M^* 的情况; 其中抛物轨迹对应的曲线是 (t, t^2) , 半圆轨迹是 $(\cos(\pi t), \sin(\pi t))$

对于一般的情形, 当时间间隔比较小时, 有理由假设角度不会有大的突变, 且若轨迹的切向量如果是连续变化的, 那么时间间隔充分小, 前后两次测量间角度可认为不变, 那么有理由认为之前求的 M^* 是对一般的曲线轨迹在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时成立。因此我们有如下定理, 证明可参考附录 [A.2.3]

定理 4.4: 若平面轨迹曲线参数化形式为 $t \in [0, 1] \rightarrow \mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))$, 满足

- $\mathbf{p}(t_1) \neq \mathbf{p}(t_2), \forall t_1 \neq t_2$
- $\mathbf{p}'(t)$ 存在且连续

对 $[0, 1]$ 区间有分割 $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{N_a-1} < t_{N_a} = 1$, 记 $\Delta t = \max_{1 \leq i \leq N_a-1} |t_{i+1} - t_i|$ 则式 (4-16) 给出的 $T_1(N_a)$ 满足:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} T_1(N_a) = M^* \quad (4-21)$$

下面我们对不同的轨迹做数值计算, 结果如图4.1所示

由图4.1可见,

- 随着 Δt 的减小, 各种曲线均二次收敛于极限值, 二次收敛的结果可以从 $\log\text{-}\log$ 图的斜率是 2 印证, 而从定理4.4的证明过程的式 (A-9) 中出现 Δt

的平方可见证明过程的合理性。

- 对于不同的曲线，虽然收敛速度的量阶一致，但由于角度变化上有快有慢，所以体现在图中还是有高有低，平均来说，半圆弧在一个时间单位中角度变化了 180 度，而抛物线只有不到 60 度，角度变化越小相对更接近直线状态，因而收敛地更快些。

虽然 $\sqrt{\lambda^2 + 4\lambda}$ 是一个最大的信息量，但下面的定理指出，较远的时间间隔的位置的贡献实际上是幂指数衰减的，证明见附录 [A.2.4]：

定理 4.5： 若相邻时间间隔最大的角度变化量小于 $\Delta\theta$ ，考虑在 t_1 时刻前的 t_0 时刻引入节点位置 p_0 与 p_1 有协作，这时由式 (4-16) 可计算出 $T'_1(N_a)$ 大于原来的 $T_1(N_a)$ ，记增量 $\Delta_+T_1(N_a) := T'_1(N_a) - T_1(N_a)$ ， $N_a = 1$ 时有 $\Delta_+T_1 = \frac{\lambda}{\lambda+1}$ ， $N_a \geq 2$ 时满足：

$$\frac{(\cos \Delta\theta)^{2(N_a-1)}}{(1 + 1/\lambda)^2(\lambda^2 + 2\lambda)(2 + \lambda)^{2(N_a-2)}} \leq \Delta_+T_1(N_a) \leq \frac{1}{(\lambda^2 + 2\lambda)(1 + \lambda)^{2(N_a-2)}}$$

注释 4.4： $T_1(N_a)$ 可看作终点位置沿信息椭圆长轴的费舍尔信息量，定理 (4.5) 指出在距离终点由于费舍尔信息随链路是幂指数的衰减的，由于

$$\begin{aligned} \Delta\text{SPEB} &= \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{T_1(N_a)}\right) - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{T_1(N_a)}\right) \\ &= \frac{\Delta_+T_1(N_a)}{T_1(N_a)T'_1(N_a)} \\ &\Rightarrow \frac{\Delta_+T_1(N_a)}{(\lambda + 1)^2} \leq \Delta\text{SPEB} \leq \frac{\Delta_+T_1(N_a)}{\lambda^2} \end{aligned}$$

所以误差下界的误差规律与 Δ_+T_1 的规律一致，即我们得出了在时间协作的场景中的 N_a 条链路之外增加一层协作链路使目标节点定位误差的下降的数量是随 N_a 指数衰减的，因此在对某时刻的节点进行定位时，只需考虑其前后几个时刻的位置即可，较远的时刻基本没有信息量，利用上只会增加计算上的开销而对定位性能不会有多大的提升。

为说明此结论，我们对式4-16取不同的 λ 进行简单的数值计算，其中 θ_i 按照 2.3 小节中 $[0, 2\pi]$ 均匀分布的假设求不同的 N_a 时 T_i 的性能平均，结果图 4.2 所示：根据图 4.2 可以看出：

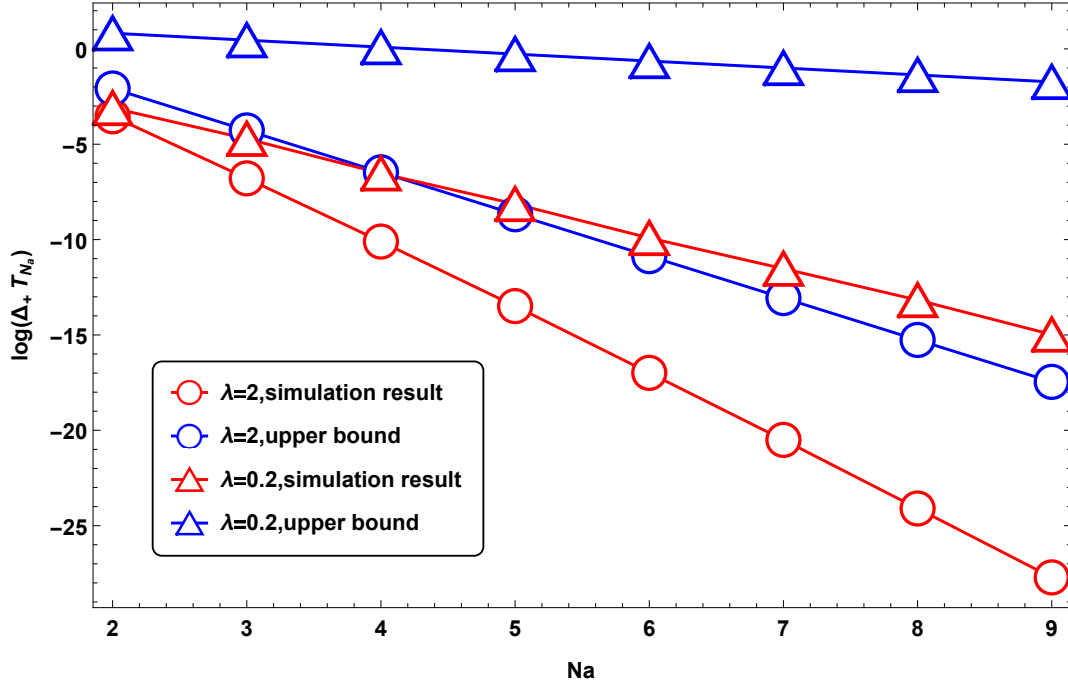


图 4.2 连分式指数收敛性图示

- 通过蒙特卡罗仿真进一步验证了定理 4.5 的正确性。
- $\lambda = \frac{a}{b}$, 表示锚点定位强度与目标节点协作强度之比, 当 λ 较大即锚点定位更强时, 图中协作信息量下降得更快, 表明更远的协作链路所能提供的信息更少。
- 实际随机模拟中的信息衰减速度要快于定理 4.5 给出的上界, 这主要是因为随机模拟中出现角度正交的情况时会阻断信息量从较远链路的传播。为了讨论信息衰减下界, 我们取 $\lambda = 1$, 并假设链路的夹角 θ_i 服从零均值的正态分布, 对于给定的 $\Delta\theta$ 标准差 σ 满足 $3\sigma = \Delta\theta$, 由 $3 - \sigma$ 原则可近似认为角度变化不会超过 Δ , 数值结果如图 4.3 所示

分析图 4.3 可知, 对于同等定位强度, 如果目标节点角度变化得比较快, 则信息衰减得也更快, 多条链路后的位置将提供更少的信息量。

注释 4.5: 在 2.3 小节中, 推导得出两个节点时间一次协作的模型问题可以转化为单节点的模型, 但存在一个区别在于这里各时刻速度方向 θ_i 是随机变量, 因此求得的 $\text{SPEB} \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\tau_1}$ 是关于 θ_i 的随机变量, 要对其求数学期望才能得到平均性能。

式 (4-16) 的推导过程具有一般性, 如果我们不对未知节点测距方差作出相等的

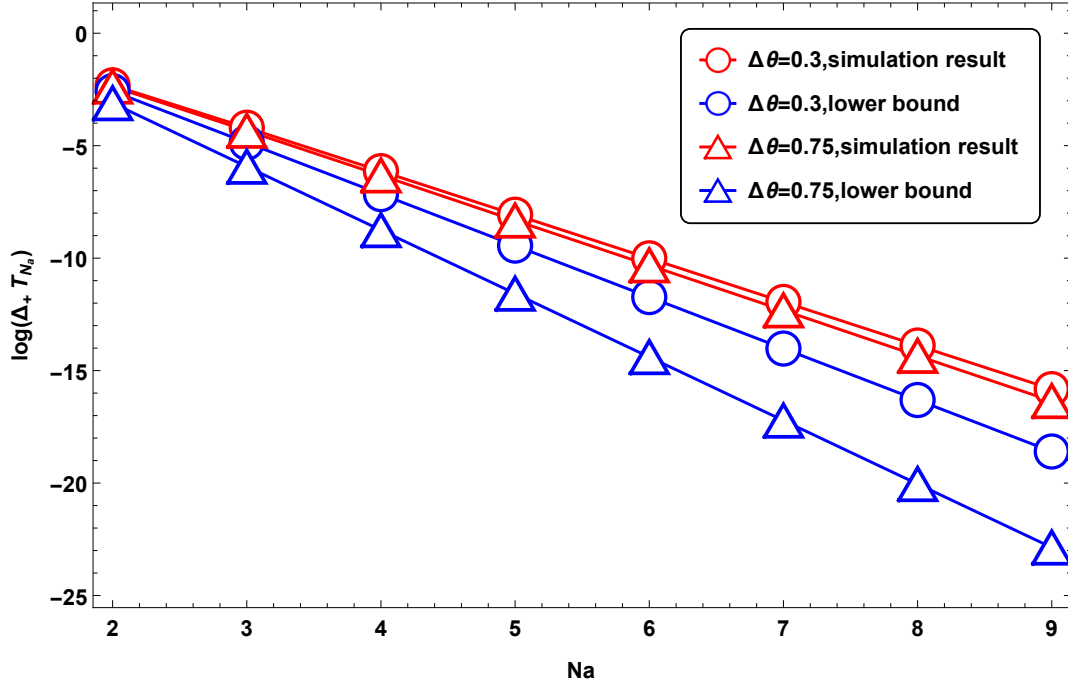


图 4.3 连分式指数衰减下界图示

假设，也可以得到终点 SPEB 的连分式表表示形式, 简述如下:

在 $a\mathbf{I} + b\mathbf{J}$ 中提取 a , 并设 $\lambda_{ij} = \frac{b}{a\sigma_{ij}^2}$ 于是我们只需考虑 $\mathbf{I} + \mathbf{J}$, 其中

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_{12}\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T & -\lambda_{12}\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -\lambda_{12}\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T & \lambda_{12}\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + \lambda_{23}\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T & -\lambda_{23}\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T & \dots & \mathbf{0} \\ & \lambda_{23}\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\lambda_{N_a-1,N_a}\mathbf{u}_{N_a-1}\mathbf{u}_{N_a-1}^T & \lambda_{N_a-1,N_a}\mathbf{u}_{N_a-1}\mathbf{u}_{N_a-1}^T \end{pmatrix}$$

类似式 (4-16), 我们可以导出终点节点的 $\text{SPEB} = 1 + \frac{1}{T_1}, T_1$ 满足下面的递推关系式:

$$T_i = \frac{1}{\lambda_{i,i+1}^{-1} + \sin^2 \theta_i + \frac{\cos^2 \theta_i}{T_{i+1}}} \quad (4-22)$$

其基本形式和 (4-16) 相同, 计算算到 $T_{N_a} = 1$, 具体推导过程可参考 [A.2.5]

并且我们可以证明, 减小诸 θ 可以提高 T_1 即增大信息量, 因此在线性网络

中，当目标节点作直线运动时，确定其各个时刻的位置获得的信息量最大，因而精度最高。

4.3 正方形网络与正六边形网络

在协作定位网络的问题模型下，我们利用 Schur 补的数学工具，考虑大规模空间协作两种特殊的情形：正方形网络和正六边形网络。正六边形网络的每个内部节点周围有 3 个节点与之协作，且该内部节点位于周围三个节点构成的正三角形的重心上。为研究正六边形网络对定位性能的影响，我们考虑以一个节点 p 为网络中心，我们称网络中某节点 p_n 位于第 n 层链路上如果 p_n 到 p 的最短路径为 n ，图4.4就是一个只考虑前两层链路的正六边形网络。

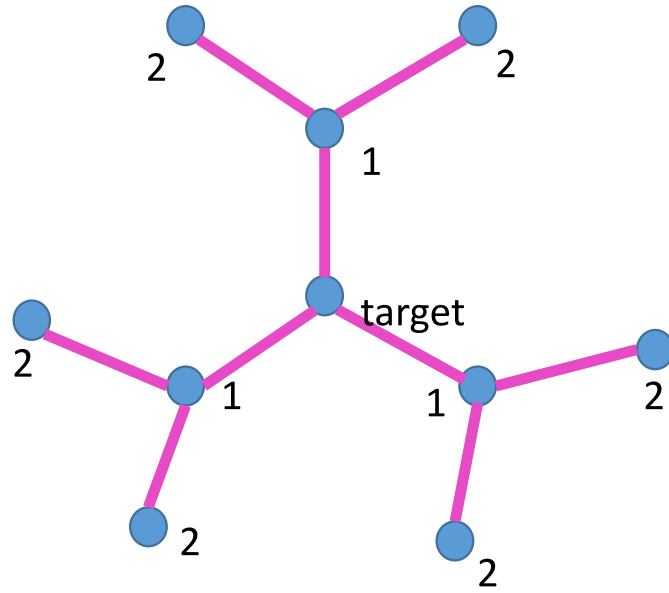


图 4.4 只考虑前两层链路的正六边形网络

正方形网络的描述同正六边形网络，如果以目标节点作为坐标原点，含其他未知位置的节点的两条直线作为坐标轴建立平面直角坐标系，根据前面的正交性的结论，非坐标轴上的点不会对目标节点提供定位信息，而两条坐标轴提供的信息又彼此独立，因此其定位信息量是 2 个完全相同的部分相加，每部分由式 (4-19) 描述，在网络规模很大时近似于极限值 $\sqrt{\lambda^2 + 4\lambda}$ 。

该结论可以推广至一般矩形网络，且各节点相互测距的方差 $\sigma_{i,j}^2$ 不相等，由式 (4-22) 可以看出正交性的结论仍然成立，因此非坐标轴上的点不会对目标节

点提供定位信息，在实际定位系统的设计中，非坐标轴上的点的信息无需传到目标节点或中央处理器进行解算。

下面我们给出大规模正六边形网络目标节点定位误差界的解析表达式，首先需要下面的引理，推导过程见附录 [A.2.6]

引理 4.3: 设 u 是模长为 1 的平面向量，那么有:

$$u^T((\lambda + \frac{3}{2})I_2 - \frac{1}{\lambda + \frac{3}{2}}(\frac{3}{2}I_2 - uu^T))^{-1}u = ((\lambda + \frac{3}{2}) - \frac{1/2}{\lambda + \frac{3}{2}})^{-1} \quad (4-23)$$

上面的引理能够把连分式中与 u 相关的项化为与 u 无关的项，由此推出度为 3 的协作网络中心节点 SPEB 满足:

$$\frac{1}{\text{SPEB}} = \lambda + \frac{3}{2} - \frac{\frac{3/2}{1/2}}{\lambda + \frac{3}{2} - \frac{1/2}{\lambda + 3/2 - \dots}}$$

注意到除了第一层的协作外，后面每层协作由于前一层的削弱系数由 3/2 变为 1/2. 用同样的方法可求出极限值为:

$$\lambda + \frac{3}{2} - \frac{\frac{3/2}{1/2}}{\lambda + \frac{3}{2} - \frac{1/2}{\lambda + 3/2 - \dots}} = \sqrt{\lambda^2 + 3\lambda + \frac{1}{4}} - \frac{1}{\lambda + \frac{3}{2} + \sqrt{\lambda^2 + 3\lambda + \frac{1}{4}}}$$

取倒数即为某方向的误差下界，由于网络的各向同性，x 方向和 y 方向的误差下界都是这个数。该误差下界总是比正方形网格 x 或 y 方向的误差大。

4.4 本章小节

本章中的主要结果除引用连分式的基本结论外，大都是原创性的，而且不乏有一些很强的结果。

- 数学方法方面
 - 本章给出了两类特殊矩阵的全部特值值的求解的详细推导过程。
 - 本章对给定的连分式的收敛特性有比较严谨的数学证明。

- 工程启示方面
 - 协作链路信息指数衰减的特性为分布式定位算法提供理论上的指导。
 - 协作链路正交会使信息传播中断对节点的路径规划有指导意义。

第 5 章 结论

5.1 已取得的成果

本文的推导首先要处理对称正定的矩阵，因此本文会应用已有的结果如求一个矩阵的逆阵的某个子式的公式、关于矩阵逆的恒等式等结论来对要研究的矩阵进行预处理；其次由于很多时候直接推导存在很大的困难，需要先归纳后证明，本文充分利用了数学归纳法完成这一任务；最后推导得出的表达式往往比较复杂，表达式的化简需要特殊的数学方法，本文根据问题的特征分别采用了瑞利商、黎曼积分以及连分式等思路。在数学方法方面，本文主要的成果如下：

- 使用复数表示法推导得出非协作定位场景下费舍尔信息矩阵的特征值和特征向量的表达式。
- 推导得出秩一矩阵的克罗内克积对 N 维对称正定矩阵扰动后行列式的表达式
- 推导得出二维场景下特殊完全图的邻接矩阵所有特征值，其中使用瑞利商给出了最大特征值的表达式
- 推导得出二维场景下特殊度为 2 的图的邻接矩阵的所有特征值；当网络规模趋向无穷大时，求出了所有特征值的倒数和的平均值的极限
- 使用连分式推导得出形如式 (4-9) 的对称正定矩阵 A 确定的 $A_{1 \times 2, 1 \times 2}^{-1}$ 的两个特征值；分析得出了决定特征值的连分式的序列指数收敛的特性，并做出适当的推广。

5.2 未来展望

本文着重于对网络中信息耦合机理与网络中角度这个几何参量的分析，所研究的模型比较简单，可能与实际问题有一定的出入。今后的工作可以结合计算机仿真工具对复杂网络拓扑下的定位误差作深入的探讨。

插图索引

图 2.1	非协作静态场景下的定位	3
图 2.2	协作静态场景下的定位	4
图 2.3	协作动态场景下的定位	6
图 3.1	SPEB 与信息椭圆离心率的关系	10
图 4.1	$\lambda = 2$ 时不同曲线随采样点加密 $T_1(N_a)$ 趋近极限值 M^* 的情况; 其中抛物轨迹对应的曲线是 (t, t^2) , 半圆轨迹是 $(\cos(\pi t), \sin(\pi t))$	25
图 4.2	连分式指数收敛性图示	27
图 4.3	连分式指数衰减下界图示	28
图 4.4	只考虑前两层链路的正六边形网络	29

参考文献

- [1] Kegen Yu I S, Guo Y J. Ground-Based Wireless Positioning. John Wiley and Sons, Ltd, 2009
- [2] Shen Y, Win M Z, Wymeersch H. Fundamental limits of wideband localization—part i: A general framework. IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY, 2010, 56(10):4956–4980
- [3] Shen Y, Win M Z, Wymeersch H. Fundamental limits of wideband localization—part ii: Cooperative networks. IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY, 2010, 56(10):4981–5000
- [4] 关治, 陆金甫. 数值分析基础. 北京: 高等教育出版社, 2010: 52–56
- [5] Hammond W F. Continued fractions and the euclidean algorithm. Lecture notes, University at Albany, 1997

致 谢

衷心感谢导师沈渊副教授和数学系梁恒副教授对本人的精心指导。他们的言传身教将使我终生受益;感谢黄忠忆教授,本文中关于瑞利商以及部分特殊矩阵特征值的结论即来源于黄老师在课上的讲解。同时,我也非常感谢实验室的王云龙师兄、蔡杨师兄,他们在我的毕设期间提供给了我很多宝贵的意见,使我受益匪浅;感谢实验室的刘言师兄,他在我的论文写作过程中就格式规范问题给予了我很多有益的指导;感谢远在千里之外的父母亲时常通过电话给我的鼓励。最后感谢 THUTHESIS,它的存在让我的论文写作轻松自在了许多,让我的论文格式规整漂亮了。许多。

声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名：_____ 日 期：_____

附录 A 公式的推导

A.1 建模过程的一些推导过程

A.1.1 定位问题中费舍尔信息矩阵一般结构推导

在非协作单节点定位中，测量量的联合概率分布由式 (2-1) 给出，费舍尔信息矩阵是费舍尔信息量的自然推广，在满足一定正则性的条件下，费舍尔信息矩阵可以写成：

$$I(\mathbf{p}) = -\mathbb{E}_{\mathbf{x}}(\nabla_{\mathbf{p}} \log f(\vec{x}|\mathbf{p}))^T (\nabla_{\mathbf{p}} \log f(\vec{x}|\mathbf{p})) \quad (\text{A-1})$$

其中 f 是随机向量 \vec{x} 的密度函数，利用上面的公式，首先对式 (2-1) 取对数并求梯度得：

$$\nabla_{\mathbf{p}} \ln f = - \sum_{i=1}^{N_b} \frac{\|\mathbf{p}_i^b - \mathbf{p}\| - x_i}{\sigma_i^2} \frac{\mathbf{p}_i^b - \mathbf{p}}{\|\mathbf{p}_i^b - \mathbf{p}\|} \quad (\text{A-2})$$

注意到 $\frac{\|\mathbf{p}_i^b - \mathbf{p}\| - x_i}{\sigma_i} \approx N(0, 1)$ ，所以按照费舍尔信息矩阵的定义可得到式 (2-3) 的结果。

A.2 研究成果的一些推导过程

A.2.1 两个未知节点协作最小误差界的一个充分条件

由式 (3-20)，SPEB 为其所有根的倒数和，因此具有如下形式

$$\frac{\sum \frac{1}{\lambda_i} + \epsilon \left(\frac{\cos^2(\theta)}{\lambda_1} \left(\sum_{i \neq 1} \frac{1}{\lambda_i} \right) + \frac{\sin^2(\theta)}{\lambda_2} \left(\sum_{i \neq 2} \frac{1}{\lambda_i} \right) + \frac{\cos^2(\phi)}{\lambda_3} \left(\sum_{i \neq 3} \frac{1}{\lambda_i} \right) + \frac{\sin^2(\phi)}{\lambda_4} \left(\sum_{i \neq 4} \frac{1}{\lambda_i} \right) \right)}{1 + \epsilon \left(\frac{\cos^2(\theta)}{\lambda_1} + \frac{\sin^2(\theta)}{\lambda_2} + \frac{\cos^2(\phi)}{\lambda_3} + \frac{\sin^2(\phi)}{\lambda_4} \right)} \quad (\text{A-3})$$

对固定的 ϕ , 我们证明 SPEB 关于 θ 是单调递减的。记 $k = \frac{\cos^2 \theta}{a_1} + \frac{\sin^2 \theta}{a_2}, u = (\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}), v = (\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2})$. (A-3) 可以化为:

$$\text{SPEB} = u \frac{1 + (\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2})/u + \epsilon(\frac{1}{a_1 a_2 u} + \frac{1}{a_3 a_4 u} + k + (\frac{\cos^2 \phi}{a_3} + \frac{\sin^2 \phi}{a_4})\frac{v}{u})}{1 + \epsilon(k + (\frac{\cos^2 \phi}{a_3} + \frac{\sin^2 \phi}{a_4}))} \quad (\text{A-4})$$

SPEB 可以写成关于 k 的反比例函数 $u \frac{A+k}{B+k}$ 的形式, 其中

$$A = (1 + (\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2})/u)/\epsilon + \frac{1}{a_1 a_2 u} + \frac{1}{a_3 a_4 u} + (\frac{\cos^2 \phi}{a_3} + \frac{\sin^2 \phi}{a_4})\frac{v}{u}$$

$$B = 1/\epsilon + (\frac{\cos^2 \phi}{a_3} + \frac{\sin^2 \phi}{a_4})$$

如果能证明 $A \geq B$, 那么该反比例函数关于 k 是单调递减的。

$$A - B = (\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2})/u\epsilon + \frac{1}{a_1 a_2 u} + \frac{1}{a_3 a_4 u} + (\frac{\cos^2 \phi}{a_3} + \frac{\sin^2 \phi}{a_4})(\frac{v}{u} - 1)$$

$$\geq \frac{1}{a_3 a_4 u} + (\frac{\cos^2 \phi}{a_3} + \frac{\sin^2 \phi}{a_4})(\frac{v}{u} - 1)$$

$$= \frac{1}{u}((\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2})(\frac{\cos^2 \phi}{a_3} + \frac{\sin^2 \phi}{a_4}) - (\frac{\cos^2 \phi}{a_3^2} + \frac{\sin^2 \phi}{a_4^2}))$$

由假设: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \geq \max\{\frac{1}{a_4}, \frac{1}{a_3}\}$ 所以 $A - B \geq 0$ 。下面再证明 k 关于 $\sin^2(\theta)$ 是单调递增的, 那么由复合函数的单调性的性质, 结论成立。

$$k = \frac{1}{a_1} + \sin^2 \theta (\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1})$$

因为 $a_1 \geq a_2$ 所以在 $\sin^2(\theta) \in [0, 1]$ 的区间内结论成立。同理可证明条件 $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} \geq \max\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}\}$ 是保证固定 θ 的情况下 SPEB 关于 $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 是单调递减的。

A.2.2 单节点动态定位问题等效费舍尔信息矩阵推导

为简化符号，记 $\mathbf{u} := \mathbf{u}_{N_a-1}$, 2 阶单位阵记为 \mathbf{I}_2 , 由等效费舍尔信息矩阵的定义，有

$$\begin{aligned} U_{N_a} &= \lambda \mathbf{I}_2 + \mathbf{u} \mathbf{u}^T - \mathbf{u} \mathbf{u}^T U_{N_a-1}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{u}^T \\ &= \lambda \mathbf{I}_2 + (1 - \mathbf{u}^T U_{N_a-1}^{-1} \mathbf{u}) \mathbf{u} \mathbf{u}^T \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

因为 $\mathbf{u} \mathbf{u}^T = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^{-1}$, 其中 U 是由 \mathbf{u} 的方向角确定的二维旋转矩阵，所以 U_{N_a} 相似于下面的矩阵

$$U_{N_a} \sim \begin{pmatrix} \lambda + 1 - \mathbf{u}^T U_{N_a-1}^{-1} \mathbf{u} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

我们定义 $T_i = \lambda + 1 - \mathbf{u}^T U_{N_a-i}^{-1} \mathbf{u}$ 并设 $U_{N_a-1} = \mathbf{u} \mathbf{u}^T + J_2$ 由式 (3-9) 可得

$$\begin{aligned} T_1 &= \lambda + 1 - \mathbf{u}^T (\mathbf{u} \mathbf{u}^T + J_2)^{-1} \mathbf{u} \\ &= \lambda + (1 + \mathbf{u}^T J_2^{-1} \mathbf{u})^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

进一步设 $\mathbf{v} := \mathbf{u}_{N_a-2}$, 则 $J_2 = \lambda \mathbf{I}_2 + (1 - \mathbf{v}^T U_{N_a-2}^{-1} \mathbf{v}) \mathbf{v} \mathbf{v}^T = V \begin{pmatrix} \lambda + 1 - \mathbf{v}^T U_{N_a-2}^{-1} \mathbf{v} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} V^{-1}$ 设 $\mathbf{u} = (\cos \phi_1, \sin \phi_1)^T$, $\mathbf{v} = (\cos \phi_2, \sin \phi_2)^T$, 则

$$V^{-1} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos \phi_2 & \sin \phi_2 \\ -\sin \phi_2 & \cos \phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi_1 \\ \sin \phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1 - \phi_2) \\ \sin(\phi_1 - \phi_2) \end{pmatrix} =: \mathbf{w}$$

所以

$$\begin{aligned} T_1 &= \lambda + (1 + \mathbf{w}^T \begin{pmatrix} \lambda + 1 - \mathbf{v}^T U_{N_a-2}^{-1} \mathbf{v} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{w})^{-1} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\cos^2(\phi_1 - \phi_2)}{T_2} + \frac{\sin^2(\phi_1 - \phi_2)}{\lambda}} \end{aligned}$$

递推可得一般形式。终止条件：

$$\begin{aligned} T_{N_a-1} &= \lambda + 1 - \mathbf{u}_1^T (\lambda \mathbf{I} + \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T)^{-1} \mathbf{u}_1 \\ &= \lambda + \frac{1}{\lambda + \frac{1}{\lambda}} \end{aligned}$$

A.2.3 定理4.4的证明

式 (4-20) 给出了式 (4-21) 右端是 $\mathbf{p}(t)$ 为直线的情形。由于对于任意的平面曲线和角度序列 $\{\theta_i\}$, $T_1(N_a)$ 是关于 N_a 的增函数且小于 $\lambda + 1$ ，因此式 (4-21) 左端的极限总是存在的。考虑由 $\mathbf{p}(t)$ 确定的角度序列 $\{\theta_i\}$ 以如下的方式趋近于直线对应的直线序列：

$$\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots\} \rightarrow \{0, \theta_2, \theta_3, \dots\} \rightarrow \{0, 0, \theta_3, \dots\} \rightarrow \dots$$

记将前 n 个角度置零后由式 (4-16) 确定的连分式为 K_n ，我们首先给出：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \frac{\lambda + \sqrt{4\lambda + \lambda^2}}{2} \quad (\text{A-7})$$

为证式 (A-7)，记角度序列 $\{0, 0, \dots, \theta_{n+1}, \dots\}$ 去掉前 r 项后对应的连分式为 K_n^r

$$|K_n - M^*| = \frac{|\frac{1}{M^*} - \frac{1}{K_n^2}|}{(1 + \frac{1}{M^*})(1 + \frac{1}{K_n^2})} \leq |\frac{1}{M^*} - \frac{1}{K_n^2}|$$

$$|\frac{1}{M^*} - \frac{1}{K_n^2}| = \frac{|\frac{1}{M^*} - \frac{1}{K_n^3}|}{K_n^2(M^* + 1)(1 + \frac{1}{K_n^3})} = \frac{|\frac{1}{M^*} - \frac{1}{K_n^3}|}{(M^* + 1)(\lambda + 1 + \frac{1}{K_n^3+1})} \leq \frac{|\frac{1}{M^*} - \frac{1}{K_n^3}|}{(\lambda + 1)^2}$$

当 $r < n$ 时，

$$|\frac{1}{M^*} - \frac{1}{K_n^r}| \leq \frac{|\frac{1}{M^*} - \frac{1}{K_n^{r+1}}|}{(\lambda + 1)^2}$$

因此:

$$|K_n - M^*| \leq \frac{|\frac{1}{M^*} - \frac{1}{K_n^n}|}{(\lambda + 1)^{2(n-2)}}$$

故式 (A-7) 成立。补充 $K_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} T_1(N_a)$ 这样式 (4-21) 即等价于

$$\sum_{i=1}^{\infty} (K_{i-1} - K_i) = 0 \quad (\text{A-8})$$

先考虑 $K_0 - K_1$ ，二者的差别是 θ_1 是否为 0，

$$K_0 - K_1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_1^1}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{K_1^1} + \sin^2 \theta_1 (\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{K_1^1})} \leq \sin^2 \theta_1 (\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{K_1^1})$$

类似式 (A-7) 的推导:

$$K_r - K_{r+1} \leq \sin^2 \theta_{r+1} (\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{K_{r+1}^{r+1}}) \frac{1}{(\lambda + 1)^{2r}}$$

由条件 $\mathbf{p}'(t)$ 存在且连续可得切向量是连续变化的，由微分中值定理在闭区间内存在常数 c 使得角度变化量 $\theta_i \leq c\Delta t$ 由正弦函数的单调性推出:

$$K_r - K_{r+1} \leq \sin^2(c\Delta t) \frac{1}{\lambda} \frac{1}{(\lambda + 1)^{2r}}$$

因此

$$0 \leq \sum_{i=1}^{N_a} (K_{i-1} - K_i) \leq \sin^2(c\Delta t) \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda + 1)^{2i}} \quad (\text{A-9})$$

无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda+1)^{2i}}$ 收敛，所以当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时 $N_a \rightarrow \infty$ ，式 (A-8) 成立。

A.2.4 单节点动态定位问题等效费舍尔信息衰减上下界

为记号简便记 $T'_1 = T_1(N_a + 1)$, $T_1 = T_1(N_a)$ 为便于比较，我们在 T_1 中引入虚拟节点将其层数也拓展为 N_a ，它只有锚点的定位信息，这样它们的区别是连分

式的末端 $T_{N_a} = \lambda, T'_{N_a} = \lambda + \frac{1}{1+1/\lambda}$ 对 $|T_1 - T'_1|$ 从外向里通分得:

$$|T_1 - T'_1| = \frac{\cos^2 \theta_1 |\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T'_2}|}{(1 + \frac{\sin^2 \theta_1}{\lambda} + \frac{\cos^2 \theta_1}{T_2})(1 + \frac{\sin^2 \theta_1}{\lambda} + \frac{\cos^2 \theta_1}{T'_2})} \leq |\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T'_2}|$$

继续放缩 $|\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T'_2}|$ 有:

$$|\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T'_2}| = \frac{\cos^2 \theta_2 |\frac{1}{T_3} - \frac{1}{T'_3}|}{(1 + \lambda(1 + \frac{\sin^2 \theta_2}{\lambda} + \frac{\cos^2 \theta_2}{T_3}))(1 + \lambda(1 + \frac{\sin^2 \theta_2}{\lambda} + \frac{\cos^2 \theta_2}{T'_3}))} \leq |\frac{1}{T_3} - \frac{1}{T'_3}| \frac{1}{(1 + \lambda)^2}$$

逐次递推得

$$|T_1 - T'_1| \leq \frac{1}{(1 + \lambda)^{2(N_a-2)}} |\frac{1}{T_{N_a}} - \frac{1}{T'_{N_a}}|$$

而:

$$|\frac{1}{T_{N_a}} - \frac{1}{T'_{N_a}}| = \frac{1}{\lambda^2 + 2\lambda}$$

另一方面, 因为 $T_2, T'_2 \geq \lambda$

$$|T_1 - T'_1| \geq \frac{\cos^2 \Delta\theta |\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T'_2}|}{(1 + 1/\lambda)^2}$$

$$|\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T'_2}| \geq \frac{\cos^2 \Delta\theta |\frac{1}{T_3} - \frac{1}{T'_3}|}{(2 + \lambda)^2}$$

逐次递推得下界。

A.2.5 单节点非均一测距误差等效费舍尔信息矩阵推导

类似式 (A-5) 有:

$$U_{N_a} = \mathbf{I} + (\lambda_1 - \lambda_1^2 \mathbf{u}^T U_{N_a-1}^{-1} \mathbf{u}) \mathbf{u} \mathbf{u}^T$$

而

$$T_1 = 1 + \lambda_1 - \lambda_1^2 \mathbf{u}^T U_{N_a-1}^{-1} \mathbf{u} = 1 + (\lambda_1^{-1} + \mathbf{u}^T \mathbf{J}_2^{-1} \mathbf{u})^{-1}$$

对 $J_2 = \mathbf{I}_2 + (\lambda_2 - \lambda_2^2 \mathbf{v}^T U_{N_a-2}^{-1} \mathbf{v}) \mathbf{v} \mathbf{v}^T$ 提取关于 \mathbf{v} 的旋转矩阵即得到式 (4-22)。另外从式 (4-22) 出发, 设 $\theta'_1 \leq \theta_1$, 作差:

$$\text{denominator}(T_1(\theta'_1) - T_1(\theta_1)) = (\cos^2 \theta'_1 - \cos^2 \theta_1) \left(1 - \frac{1}{T_2}\right) \geq 0$$

即角度 θ_1 越小 T_1 越大, 同理 θ_i 越小 T_i 越大, 而由连分式的表达式可以看出 T_1 关于 T_2 递增, 而连分式本身具有自相似性, 因此诸 θ_i 减小可以增大信息量 T_1 。

A.2.6 引理 4.3的推导

设式 (4-23) 左边为 $B, A = \lambda + \frac{3}{2}$, 那么由 Woodbury 矩阵求逆公式有

$$\left(A + \frac{1}{\lambda + 3/2 - \frac{3/2}{\lambda + 3/2}}\right)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B A^{-1}$$

整理得:

$$B = A - \frac{A^2}{A + \frac{1}{\lambda + 3/2 - \frac{3/2}{\lambda + 3/2}}}$$

通分化简得证。

A.3 本文中用到的关于连分式的结论

定义 A.1: 有限序列 t_1, t_2, \dots, t_r 满足 $t_j \geq 1$ 对于 $j \geq 2$ 可以递推地定义有限连分式

$$[t_1, t_2, \dots, t_r] := t_1 + \frac{1}{[t_2, \dots, t_r]}$$

定理 A.1: 设 $p_j = t_j p_{j-1} + p_{j-2}$, $q_j = t_j q_{j-1} + q_{j-2}$, $M_j = \begin{pmatrix} p_j & p_{j-1} \\ q_j & q_{j-1} \end{pmatrix} p_0, p_1, q_0, q_1$ 由

$M_0 = I_2$ 给出, 且 $T_j = \begin{pmatrix} t_j & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 则有以下三个恒等式:

1. $M_j = M_{j-1} T_j$
2. $\begin{pmatrix} p_j \\ q_j \end{pmatrix} = (\prod_{i=1}^j T_i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $[t_1, t_2, \dots, t_r] = \frac{p_r}{q_r}$

定理 A.2: 若 $\lim_{r \rightarrow \infty} [t_1, t_2, \dots, t_r]$ 存在, 该极限是形如 $\frac{a+b\sqrt{m}}{c}$ 的二次根式当且仅当序列 t_i 从某项开始是周期的, 即 $\exists c, r, s.t. t_i = t_{i+r}, \forall i \geq c$ 。

注释 A.1: 对于定理 A.2, 设 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\prod_{i=1}^{r_c} T_{i+c})$, 称 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 对应着分式线性变换 K , 如果 $K(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ 。可以证明系数为实数的分式线性变换以函数复合作为群运算与行列式为 1 的 2 阶方阵以矩阵乘积作为群运算是同构的。 c 之前的 t_i 对应着矩阵 T_i 的乘积矩阵看作分式线性变换 F 。可以进一步说明二次根式和 T 和 F 的有如下的关系:

1. 首先求解 K 的不动点即解二次方程 $x = \frac{ax+b}{cx+d}$ 得 x
2. $F(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} [t_1, t_2, \dots, t_r]$, $F(x)$ 即为极限 $\lim_{r \rightarrow \infty} [t_1, t_2, \dots, t_r]$

一般二次方程有两个根, 而有限连分式的极限值是唯一的, 这时可根据极限值介于序列的前两个数之间剔除一个不合理的不动点。

综合论文训练记录表

学生姓名		学号		班级	
论文题目					
主要内容以及进度安排	<div>指导教师签字：_____</div> <div>考核组组长签字：_____</div> <div>年 月 日</div>				
中期考核意见	<div>考核组组长签字：_____</div> <div>年 月 日</div>				

指导教师评语	<div>指导教师签字：_____</div> <div>年 月 日</div>
评阅教师评语	<div>评阅教师签字：_____</div> <div>年 月 日</div>
答辩小组评语	<div>答辩小组组长签字：_____</div> <div>年 月 日</div>

总成绩：_____

教学负责人签字：_____

年 月 日