线性代数系列讲座之一

矩阵和行列式

疑难分析

主讲　何军华

电子科技大学数学学院

第一讲 矩阵和行列式

讲座要点

借助一二章的知识，

阐述线性代数的学习方法和解题技巧.

(1) 伴随矩阵A^*;

(2) 行列式计算;

(3) 矩阵等式;

(4) 初等变换与初等矩阵;

(5) 矩阵的标准形;

(6) 典型例题选讲

知识点1: 伴随矩阵A^*

(1) 伴随矩阵的定义： $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n} \Rightarrow A^*=\left(A_{ij}\right)^T$

(2) 基本关系式： $A^*A=AA^*=|A|I$

(3) 衍生关系式： $|A^*|=|A|^{n-1}$ $\left(A^*\right)^*=|A|^{n-2}A$

$(kA)^*=k^{n-1}A^*$ $\left(A^*\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^*$ $\left(A^*\right)^T=\left(A^T\right)^*$

(4) 秩：

$$R\left(A^*\right)=\begin{cases} n, & R(A)=n, \\ 1, & R(A)=n-1, \\ 0, & R(A)<n-1. \end{cases}$$

例1. 设3阶方阵A的行列式值为 1/2, 求行列式

$$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|.$$

解: $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$

$$=\frac{|A|\cdot\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|}{|A|}=\frac{\left|A(3A)^{-1}-2AA^*\right|}{1/2}$$

$$=\frac{\left|\frac{1}{3}I-2|A|I\right|}{1/2}=\frac{\left|-\frac{2}{3}I\right|}{1/2}=-\frac{16}{27}$$

例1. 设3阶方阵A的行列式值为 1/2, 求行列式

$$\left|(3A)^{-1}-2A^{*}\right|.$$

填空题的解法: 令 $A=\begin{pmatrix}1/2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (3A)^{-1}-2A^{*}=\begin{pmatrix}2/3 & & \\ & 1/3 & \\ & & 1/3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1/2 & \\ & & 1/2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4/3 & & \\ & -2/3 & \\ & & -2/3\end{pmatrix}\Rightarrow\left|(3A)^{-1}-2A^{*}\right|=-\frac{16}{27}$$

例2. 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 3}$ 满足$A^*=A^T$，如果a_{11}, a_{12}, a_{13}是3个相等的正实数，则 $a_{11}=(\quad)$.

$\boxed{(A)\ \sqrt{3}/3}$ (B) 3 (C) 1/3 (D) $\sqrt{3}$

分析：

$$\left.\begin{aligned} AA^* &= |A|I \\ A^* &= A^T \end{aligned}\right\} \Rightarrow AA^T = |A|I \Rightarrow |A|^2 = |A|^3 \Rightarrow |A| = 0 \ \ or \ \ 1$$

$$\left.\begin{aligned} &|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &A^* = A^T \Rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow A_{11} = a_{11}, A_{12} = a_{12}, A_{13} = a_{13} \end{aligned}\right\} \Rightarrow |A| = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 3a_{11}^2 = 1$$

$$\boxed{\Rightarrow a_{11} = \sqrt{3}/3}$$

例3. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，α 为 n 维列向量，b 为常数，记

$$P=\begin{pmatrix} I & O \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}.$$

(1) 计算并化简 PQ.

(2) 证明矩阵 Q可逆 $\Leftrightarrow \alpha^T A^{-1}\alpha \neq b$.

分析:

$$PQ=\begin{pmatrix} I & O \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^T A^* A+|A|\alpha^T & -\alpha^T A^*\alpha+|A|b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ O & |A|\left(-\alpha^T A^{-1}\alpha+b\right) \end{pmatrix}$$

例3. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，α 为 n 维列向量，b 为常数，记

$$P=\begin{pmatrix} I & O \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}.$$

(2) 证明矩阵 Q 可逆 $\Leftrightarrow \alpha^T A^{-1}\alpha \neq b.$

$$PQ=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ O & |A|\left(-\alpha^T A^{-1}\alpha+b\right) \end{pmatrix} \Rightarrow |P|\cdot|Q|=|A|^2\left(-\alpha^T A^{-1}\alpha+b\right)$$

$$\left.\begin{aligned} |P|=\begin{vmatrix} I & O \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{vmatrix}=|A|\neq 0 \;\Rightarrow |Q|=|A|\left(-\alpha^T A^{-1}\alpha+b\right) \\ |A|\neq 0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

Q可逆 $\Leftrightarrow |Q|\neq 0 \Leftrightarrow -\alpha^T A^{-1}\alpha+b\neq 0 \Leftrightarrow \alpha^T A^{-1}\alpha\neq b$

例4. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 且 $|A| = 2, |B| = -3,$

求 $\left|A^{-1}B^* - A^*B^{-1}\right|.$

分析:

$$\left.\begin{aligned} &|A|\cdot\left|A^{-1}B^* - A^*B^{-1}\right|\cdot|B| \\ &= \left|A\left(A^{-1}B^* - A^*B^{-1}\right)B\right| \\ &= \left||B|I - |A|I\right| \\ &= |-5I| = (-5)^n \\ &|A| = 2, \quad |B| = -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \left|A^{-1}B^* - A^*B^{-1}\right| = \frac{(-5)^n}{-6}}$$

例5. 设 A, B 均为 2 阶矩阵, 若 $\boxed{|A| = 2, |B| = 3,}$

则 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$　$\boxed{\text{(B)} \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}}$　(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

分析:

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} I_4 = (-1)^{2\times 2} |A| \cdot |B| I = |A| \cdot |B| I$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = |A| \cdot |B| \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = |A| \cdot |B| \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & |A| B^* \\ |B| A^* & O \end{pmatrix}$$

$$AA^* = |A| I \Rightarrow A^* = |A| A^{-1}$$

$$BB^* = |B| I \Rightarrow B^* = |B| B^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$$

知识点2：行列式计算

看到行列式的计算，迅速做如下观察：

(1) 3阶，4阶数字型：化为三角形直接计算；

(2) 双线型：按第一行(列)展开，直接求得；

(3) 三线型：按第一行(列)或最后一行(列)展开，得递推关系式，解递推关系式；

(4) “爪”型(箭型)行列式：用中间的“爪”消去某条“爪”；

(5) 计算某行(列)元的(代数)余子式的线性组合：构造“新行列式”；

知识点2：行列式计算

(6) 抽象行列式 $|A|=|\alpha,\beta,\gamma|$ 的计算：

行列式乘积、性质或将A的列取成特殊向量；

(7) 范德蒙行列式?

(8) Laplace定理　　分块三角或斜三角.

(9) 各行(列)元之和有公因子?　逐列(行)相加提取公因子.

(10) 每列有一个共同的字母?　将第一行的倍数加到下面各行，

使行列式中出现大量零元；　或 加边法

(11) 相邻的两行非常“接近相同”：

让相邻的行相减，先变出大量相同的元.

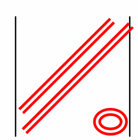
(2) 双线型: 直接按第一行(列)展开, 直接求得;

例1. 计算$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$ $= a^n + (-1)^{n+1} b^n$

分析: 0元多, “双线型”

直接按第一行 (列) 展开, 或者按最后一行(列)展开

按第一列展开!



(3) 三线型：直接按第一行(列)或者最后一行(列)展开，

得递推关系式.

例2. 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 4 & 3 & & & & \\ 2 & 5 & 3 & & O & \\ & 2 & 5 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 3 & \\ & O & & 2 & 5 & 3 \\ & & & & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

分析：

0元较多的“三线型”行列式，按最后一行展开：

$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$$

例2. 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 4 & 3 & & & & \\ 2 & 5 & 3 & & O & \\ & 2 & 5 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 3 & \\ & O & & 2 & 5 & 3 \\ & & & & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

分析: 0元较多的“三线型”行列式, 按最后一行展开:

$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow D_n - 2D_{n-1} = 3(D_{n-1} - 2D_{n-2}) = \cdots = 3^{n-2}(D_2 - 2D_1) = 2 \cdot 3^{n-1} \\ &\Rightarrow D_n - 3D_{n-1} = 2(D_{n-1} - 3D_{n-2}) = \cdots = 2^{n-2}(D_2 - 3D_1) = 2^{n-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$D_n = 2 \cdot 3^n - 2^n \ (n \geq 3)$ 　直接验证知 n=1,2 时结论也成立.

(4) “爪”型(箭型)行列式:

以中间的“爪”用倍加不变性消去另外某条“爪”;

(5) 计算某行元的余子式的线性组合: 构造新的行列式;

例3. 设$D_n = \begin{vmatrix} 1 & O & & 1 \\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$, 计算 $A_{n1} + 2A_{n2} \cdots + nA_{nn}$.

分析: 令 $F_n = \begin{vmatrix} 1 & O & & 1 \\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$

虽然两个行列式不相同(最后一行不同),

但是第n行同一个位置上元的代数余子式相同,

因此只需对F_n计算 $A_{n1} + 2A_{n2} \cdots + nA_{nn}$

例3. 设$D_n = \begin{vmatrix} 1 & O & & 1 \\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$，计算 $A_{n1} + 2A_{n2} \cdots + nA_{nn}$.

$$F_n = \begin{vmatrix} 1 & O & & 1 \\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$，只需对F_n 计算$1A_{n1} + 2A_{n2} \cdots + nA_{nn}$

$$\left.\begin{array}{l} F_n \xlongequal{\text{按最后一行展开}} a_1A_{n1} + a_2A_{n2} + \cdots + a_nA_{nn} \\ \text{令}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (1, 2, \ldots, n) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$1A_{n1} + 2A_{n2} \cdots + nA_{nn} = \begin{vmatrix} 1 & O & & 1 \\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$1A_{n1}+2A_{n2}\cdots+nA_{nn}=\begin{vmatrix}1 & O & & 1\\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{依次加到第}n\text{行}]{\text{倒数第}i\text{行}\times(-i)(i=2,\cdots,n)}\begin{vmatrix}1 & O & & 1\\ \vdots & & \iddots & \\ 1 & 1 & & O\\ 1-2-\cdots n & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left[2-\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

例4. 已知$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 9$, 则 $A_{21} + A_{22} = (\quad)$

(A) 3　　(B) 6　　(C) 9　　(D) 12

分析: 按第2行展开得:

$$2A_{21} + 2A_{22} + A_{23} + A_{24} = 9$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1A_{21} + 1A_{22} + 2A_{23} + 2A_{24} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow A_{21} + A_{22} = 6$$

例4. 已知$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 9$, 则 $A_{21} + A_{22} = (\quad)$

(A) 3　　(B) 6　　(C) 9　　(D) 12

特殊值法: 令 $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$$9 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \cdots = -3a_4 \quad \Rightarrow a_4 = -3$$

$$\Rightarrow A_{21} + A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

(6) 抽象行列式的计算:

用行列式的乘积，性质或将A的列取成特殊的向量

例5. 已知α_1,α_2是2维列向量, 矩阵 $A=\left(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2\right)$,

$B=\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$. 若行列式 $|A|=6$, 则 $|B|=$ ________.

分析:

$$A=\left(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ 6=|A|=|B|\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3|B|$$

$$\boxed{\Rightarrow |B|=-2}$$

例6. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)$, $B=(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)$都是4阶矩阵,

其中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$都是4维列向量. 若$|A|=1$, $|B|=2$,

则$|A-2B|=$ ________.

分析:

令 $A=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow |A-2B|=\begin{vmatrix}1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&-3\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&1&-2\\-2&0&1\end{vmatrix}$$

$$=-3(1-8)=21$$

例6. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)$, $B=(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)$都是4阶矩阵，其中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$都是4维列向量. 若$|A|=1$, $|B|=2$, 则$|A-2B|=$ ________.

标准方法: 利用行列式性质直接计算:

$$A-2B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)-2(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)$$

$$=(\alpha_1-2\alpha_3,\alpha_2-2\alpha_1,\alpha_3-2\alpha_2,\beta_1-2\beta_2)$$

$$\Rightarrow |A-2B|=|(\alpha_1-2\alpha_3,\alpha_2-2\alpha_1,\alpha_3-2\alpha_2,\beta_1)|$$

$$+|(\alpha_1-2\alpha_3,\alpha_2-2\alpha_1,\alpha_3-2\alpha_2,-2\beta_2)|$$

$$=\left|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right|+\left|(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)\begin{pmatrix}-2&0&1&0\\1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\right|$$

$$A-2B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)-2(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)=\cdots\cdots$$

$$=\left|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right|+\left|(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)\begin{pmatrix}-2&0&1&0\\1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix}1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2&0&1&0\\1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&-2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&1&-2\\-2&0&1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}-2&0&1\\1&-2&0\\0&1&-2\end{vmatrix}=(-7)-4\cdot(-7)=21$$

(7) 范德蒙行列式?

例7. 计算行列式$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.

分析:

令 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

$\Rightarrow a_3=(-1)^{4+5}D_4$

$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$

$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)\left[x^4-(a+b+c+d)x^3+\cdots\right]$

(8) Laplace定理 分块三角或斜三角矩阵

例8. 设A为m阶方阵, B为n阶方阵, 且$|A| = a$, $|B| = b$,

$$C = \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}, \text{则} |C| = \underline{(-1)^{mn} ab}.$$

(8) 各行元各行(列)元之和有公因子?

例9. 计算$D_4 = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$.

逐列(行)相加提取公因子.

解:

$$D_4 = (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ 1 & y & x & 0 \end{vmatrix} = (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & -x & z-y & y-z \\ 0 & z-x & -y & x-z \\ 0 & y-x & x-y & -z \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)\begin{vmatrix} -x & z-y & y-z \\ z-x & -y & x-z \\ y-x & x-y & -z \end{vmatrix} = (x+y+z)\begin{vmatrix} -x & z-x-y & y-x-z \\ z-x & z-x-y & 0 \\ y-x & 0 & y-x-z \end{vmatrix}$$

例9. 计算$D_4=\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$.

$$=(x+y+z)\begin{vmatrix} -x & z-x-y & y-x-z \\ z-x & z-x-y & 0 \\ y-x & 0 & y-x-z \end{vmatrix}$$

$$=(x+y+z)(z-x-y)(y-x-z)\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ z-x & 1 & 0 \\ y-x & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(x+y+z)(z-x-y)(y-x-z)\begin{vmatrix} -y & 1 & 0 \\ z-x & 1 & 0 \\ y-x & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(x+y+z)(z-x-y)(y-x-z)(x-y-z)$$

(9) 每一列有一个共同的字母?

将第一行的倍数加到下面的各行,

使得行列式中出现大量的零元;

加边法

例10. 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_1a_2 & 2+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & \cdots & n+a_n^2 \end{vmatrix}.$

例10. 计算
$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ a_1a_2 & 2+a_2^2 & \cdots & a_2a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1a_n & a_2a_n & \cdots & n+a_n^2\end{vmatrix}.$$

加边法:

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ 0 & a_1a_2 & 2+a_2^2 & \cdots & a_2a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & a_1a_n & a_2a_n & \cdots & n+a_n^2\end{vmatrix}_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -a_2 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}_{n+1}$$

$$=\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{i} & a_1 & \cdots & a_n\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & n\end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\boxed{=n!\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{i}\right)}$$

(10) 相邻的两行非常“接近相同”:

让相邻的行相减，先变出大量相同的元.

例11. 设$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, $a_{ij}=|i-j|, i, j=1,2,\cdots,n.$ 计算行列式$|A|$.

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&0&1&\cdots&n-3&n-2\\2&1&0&\cdots&n-4&n-3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ \boxed{n-2}&\boxed{n-3}&\boxed{n-4}&\boxed{\cdots}&\boxed{0}&\boxed{1}\\ \boxed{n-1}&\boxed{n-2}&\boxed{n-3}&\boxed{\cdots}&\boxed{1}&\boxed{0}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&0&1&\cdots&n-3&n-2\\2&1&0&\cdots&n-4&n-3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-2&n-3&n-4&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&-1&-1&\cdots&-1&-1\\1&1&-1&\cdots&-1&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&-1&-1\\1&1&1&\cdots&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&0&0&\cdots&0&0\\1&2&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&2&2&\cdots&0&0\\1&2&2&\cdots&2&0\end{vmatrix}$$

例11. 设$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，$a_{ij}=\left|i-j\right|, i, j=1,2,\cdots,n.$ 计算行列式$\left|A\right|$.

$$\left|A\right|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}=\cdots=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}(n-1)\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 2 & & & \\ 1 & 2 & 2 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \end{vmatrix}\boxed{=(-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}}$$

知识点3 (矩阵等式)

(1) 常见矩阵等式变形的方法

在矩阵等式两端同时:

左(右)乘一个矩阵;　　求逆(需先判断可逆性)

取转置　　取行列式(等式两端必需是方阵)

(2) 解矩阵方程: 已知矩阵方程, 求解某矩阵X.

基本原则: 先化简, 后计算

(3) 已知满足某矩阵等式, 证明某矩阵可逆, 进而求逆.

例1. 设$A, B, AB-I$都是n阶可逆矩阵，则

$$\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right]^{-1}=(\quad)$$

(A) $BAB-I$ (B) $ABA-I$

(C) $ABA-A$ (D) $BAB-B$

分析： 令$A=2I, B=3I$，则

$$\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right]^{-1}=\left[\left(2I-\frac{1}{3}I\right)^{-1}-\frac{1}{2}I\right]^{-1}=10I$$

(A) $17I$ (B) $11I$ (C) $10I$ (D) $15I$

选【C】

标准做法:

$$\boxed{A\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right]}=\left(A^{-1}\right)^{-1}\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-I$$

$$=\left[\left(A-B^{-1}\right)A^{-1}\right]^{-1}-I$$

$$\boxed{=\left(I-(AB)^{-1}\right)^{-1}-I}$$

左乘 $I-(AB)^{-1}$:

$$\left(I-(AB)^{-1}\right)A\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right]=I-\left(I-(AB)^{-1}\right)=(AB)^{-1}$$

左乘AB: $\Rightarrow AB\left(I-(AB)^{-1}\right)A\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right]=I$

$$\Rightarrow \boxed{(ABA-A)}\left[\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right]=I$$

选【C】

例2. 设A,B,C均为n阶矩阵，若$B=I+AB, C=A+CA$，

则$B-C=(\quad)$

$\boxed{(A)\ I}$　　(B) $-I$　　(C) A　　(D) $-A$

分析： 令$A=2I$

$$\left.\begin{aligned} &B=I+AB\Rightarrow B=I+2B\Rightarrow B=-I \\ &C=A+CA\Rightarrow C=2I+2C\Rightarrow C=-2I \end{aligned}\right\}\Rightarrow \boxed{B-C=I}$$

标准方法：

$$\left.\begin{aligned} &B=I+AB\Rightarrow B=(I-A)^{-1} \\ &C=A+CA\Rightarrow C=A(I-A)^{-1} \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$B-C=(I-A)^{-1}-A(I-A)^{-1}=(I-A)(I-A)^{-1}=I$$

$\boxed{令A=O\Rightarrow B=I, C=O, B-C=I}$

(2) 矩阵方程: 已知矩阵方程, 求解某矩阵X.

基本原则: 先化简, 后计算

例3. 设矩阵A的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$

且$ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$, 求矩阵 B.

分析: $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I \Rightarrow AB=B+3A$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow |A|B=A^*B+3|A|I \\ \left.\begin{array}{l}|A^*|=8\\ |A^*|=|A|^{n-1}=|A|^3\end{array}\right\}\Rightarrow |A|=2\end{array}\right\}\Rightarrow 2B=A^*B+6I$$

$$\Rightarrow B=6\left(2I-A^*\right)^{-1}$$

(3) 已知某矩阵等式, 证明某矩阵可逆, 进而求逆.

例4. 设 n 阶矩阵 A, B 满足条件 $A+B=AB$.

(1) 证明 $A-I$ 是可逆矩阵;　　(2) 证明 $AB=BA$.

分析: 对矩阵等式进行变形, 凑出

$$(\text{矩阵}1)\cdot(\text{矩阵}2)=kI,\ k\neq 0$$

$$\Rightarrow(\text{矩阵}\ 1)^{-1}=\frac{1}{k}(\text{矩阵}2)$$

$$A+B=AB\Rightarrow$$

$$O=A(B-I)-B$$

$$=(A-I)(B-I)+\boxed{(-1)}I$$

$$\Rightarrow(A-I)(B-I)=I\quad\Rightarrow(A-I)\text{可逆且}(A-I)^{-1}=B-I.$$

例4. 设 n 阶矩阵 A, B 满足条件 $A+B=AB$.

(1) 证明 $A-I$ 是可逆矩阵； (2) 证明 $AB=BA$.

$\Rightarrow (A-I)$ 可逆且 $(A-I)^{-1}=B-I$.

(2) $(A-I)^{-1}=B-I$

$$\Rightarrow (A-I)(B-I)=(B-I)(A-I)$$

$$\Rightarrow AB-A-B+I=BA-A-B+I$$

$$\Rightarrow AB=BA$$

例5. 设A为3阶非零矩阵，若$A^3=O$，则(　　)

(A) $I-A$不可逆，$I+A$不可逆；

(B) $I-A$不可逆，$I+A$可逆；

$\boxed{\text{(C) } I-A \text{ 可逆}, I+A \text{ 可逆};}$

(D) $I-A$可逆，$I+A$不可逆；

令$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

分析： $O=A^3=(A+I)(A^2-A+I)+(-1)I$

$$\Rightarrow (A+I)(A^2-A+I)=I \quad \Rightarrow A+I\text{可逆}$$

$$O=A^3=(-A+I)(-A^2-A-I)+1I$$

$$\Rightarrow (I-A)(-A^2-A-I)=-I \quad \Rightarrow A-I\text{可逆}$$

知识点4 (初等矩阵)

对矩阵A做一次<u>初等行变换</u>,

相当于 <u>左乘对应的初等矩阵</u>

对矩阵A做一次<u>初等列变换</u>,

相当于 <u>右乘对应的初等矩阵</u>

<u>初等矩阵</u>的<u>逆,转置,伴随矩阵</u>仍为<u>初等</u>矩阵.

例1. 设 A 为3阶矩阵, 将 A 的第2行加到第1行得 B, 再将 B 第1列的 -1 倍加到第2列得 C. 记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 $C=(\quad)$

(A) $P^{-1}AP$　　$\boxed{\text{(B) } PAP^{-1}}$　　(C) $P^{T}AP$　　(D) PAP^{T}

分析:

P 对应的行变换:　第2行加到第1行;

P 对应的列变换:　第1列加到第2列;

P^{-1} 对应的列变换:　第1列的-1倍加到第2列;

$$\left.\begin{array}{ll}\text{将}A\text{的第2行加到第1行得}B & \Rightarrow B=PA\\ \text{将}B\text{的第1列的}-1\text{倍加到第2列} & \Rightarrow C=BP^{-1}\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{C=PAP^{-1}}$$

例2. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix}$,

$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 其中$A$可逆, 则$B^{-1}$等于(　　)

(A) $A^{-1}P_1P_2$　　(B) $P_1A^{-1}P_2$　　$\boxed{\text{(C) } P_1P_2A^{-1}}$　　(D) $P_2A^{-1}P_1$

分析:　B是A经由列变换得到的：1, 4列互换, 再2,3列互换;

或者：　2,3列互换, 再1, 4列互换.

P_1: 1, 4列互换　P_2: 2, 3列互换 $\Rightarrow B = AP_1P_2 \text{ or } AP_2P_1$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow B^{-1} = P_2^{-1}P_1^{-1}A^{-1} \text{ or } P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1} \\ &P_1^{-1} = P_1,\ P_2^{-1} = P_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{B^{-1} = P_2P_1A^{-1} \text{ or } P_1P_2A^{-1}}$$

例3. 设A为$n(n\geq 2)$阶可逆矩阵，交换A的第1行与第2行得矩阵B，设A^*，B^*分别为A, B的伴随矩阵，则(　　)

(A) 交换A^*的第1列与第2列得B^*；

(B) 交换A^*的第1行与第2行得B^*；

(C) 交换A^*的第1列与第2列得$-B^*$；

(D) 交换A^*的第1行与第2行得$-B^*$；

分析： 令$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & I_{n-2} \end{pmatrix}$表1, 2行互换对应的初等矩阵

交换A的第1行与第2行得矩阵$B \Rightarrow B = PA$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow B^* = |B|B^{-1} = -|A|A^{-1}P^{-1} = -A^*P \\ P\text{对应的列变换：1, 2列互换} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

例4. 设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$可逆，且$A^{-1}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$，

若$B=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}$，则$B^{-1}=$ ________ .

分析： $$B=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Q}$$

$$\Rightarrow B=PAQ \Rightarrow B^{-1}=Q^{-1}A^{-1}P^{-1}=QA^{-1}P=\begin{pmatrix} b_{21} & b_{23} & b_{22} \\ b_{11} & b_{13} & b_{12} \\ b_{31} & b_{33} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$P^{-1}=P, Q^{-1}=Q$

知识点5（矩阵的标准形）

基本结论 $R(A_{m\times n})=k \Rightarrow$ 存在可逆矩阵$P_{m\times m}, Q_{n\times n}$使得

$$A=P\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}Q.\quad \text{称}\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}\text{为}A\text{的标准形}.$$

(1) $R(A_{m\times n})=k \Rightarrow \exists\, B_{m\times k}, C_{k\times n},\ s.t.\ A=BC$

且$R(B_{m\times k})=R(C_{k\times n})=k$

(2) $R(A_{m\times n})=m \Rightarrow \exists B_{n\times m}, s.t.\ AB=I_m$

(3) $A_{m\times n}B_{n\times P}=O \Rightarrow R(A)+R(B)\le n$

例1. **(矩阵的满秩分解)** 设 $R\left(A_{m\times n}\right)=k$，则存在秩为 k 的

$m\times k$ 矩阵 B 与秩为 k 的 $k\times n$ 矩阵 C 使得 $A=BC$.

分析:

$$\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}=\begin{pmatrix} I_k \\ O \end{pmatrix}_{m\times k}\left(I_k, O\right)_{k\times n}$$

$R\left(A_{m\times n}\right)=k\Rightarrow$ 存在m阶可逆矩阵P与n阶可逆矩阵Q使得:

$$A=P\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}Q=\underbrace{P\begin{pmatrix} I_k \\ O \end{pmatrix}_{m\times k}}_{B}\underbrace{\left(I_k, O\right)_{k\times n}Q}_{C}$$

$\boxed{P\text{ 可逆}}$

$$R(B)=R\left[P\begin{pmatrix} I_k \\ O \end{pmatrix}\right]=R\begin{pmatrix} I_k \\ O \end{pmatrix}=k \qquad \text{同理 } R(C)=k$$

特殊情形: 秩1矩阵可以写成非零列矩阵与非零行矩阵之乘积.

秩1矩阵 也称为 列行矩阵.

例2. 任一秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵都可以写成 r 个秩为1矩阵的和.

分析: $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = E_{11} + E_{22} + \cdots E_{rr}$

$E_{ii}\left(i=1,\cdots,r\right)$： i行i列元为1, 其它元为0的$m\times n$矩阵

A的秩为$r\Rightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q = P\left(E_{11} + E_{22} + \cdots E_{rr}\right)Q$$

$$= PE_{11}Q + PE_{22}Q + \cdots PE_{rr}Q$$

P, Q可逆 $\Rightarrow$ $R\left(PE_{ii}Q\right) = R\left(E_{ii}\right) = 1\left(i=1,\cdots,r\right)$

例3. $R\left(A_{m\times n}\right)=m \Rightarrow$ 存在 $n\times m$ 矩阵 C 使得 $AC=I_m$.

分析: $$\left(I_m,\ O\right)_{m\times n}\begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}_{n\times m}=I_m$$

$R\left(A_{m\times n}\right)=m \Rightarrow$

存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$PAQ=\left(I_m,\ O\right)_{m\times n} \Rightarrow PAQ\begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}_{n\times m}=\left(I_m,\ O\right)_{m\times n}\begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}_{n\times m}=I_m$$

$$\Rightarrow AQ\begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}_{n\times m}=P^{-1} \Rightarrow A\underbrace{Q\begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}_{n\times m}}_{C_{n\times m}}P=I_m$$

例4. $A_{m\times n}B_{n\times p}=O\Rightarrow R(A)+R(B)\le n.$

分析: 设 $\boxed{R(A)=k}(\le n)$

$\Rightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$A=P\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$$

$$\Rightarrow O=AB=P\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}QB \Rightarrow O=\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}QB$$

左乘 P^{-1}

令 $QB=\begin{pmatrix} C_{k\times p} \\ D_{(n-k)\times p} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow O=\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C \\ O \end{pmatrix}\Rightarrow C=O$$

$$\Rightarrow QB=\begin{pmatrix} O \\ D_{(n-k)\times p} \end{pmatrix}\Rightarrow n-k\ge R(QB)=R(B)\ \boxed{\Rightarrow R(A)+R(B)\le n}$$

Q可逆

例5.

设α是3维列向量.若$\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$,则$\alpha^T\alpha=$ <u>3</u>

分析:

令$A=\alpha\alpha^T\Rightarrow A^2=(\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T)=\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T$

$$=(\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T \quad =(\alpha^T\alpha)A$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}3&*&*\\ *&*&*\\ *&*&*\end{pmatrix}\Rightarrow A^2=3A$$

法2: 令$\alpha=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

典型例题选讲

例1. 设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，若 $R\left(A^*\right)=1$，则 a, b 应满足________.

分析:

$$\left.\begin{array}{l} R\left(A^*\right)=\begin{cases} 3, & R(A)=3, \\ 0, & R(A)<2. \end{cases} \\ R\left(A^*\right)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow R(A)=2 \Rightarrow |A|=0$$

$$0=\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}=(a+2b)\begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 1 & a & b \\ 1 & b & a \end{vmatrix}=(a+2b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-b & 0 \\ 1 & 0 & a-b \end{vmatrix}=(a+2b)(a-b)^2$$

$a+2b=0$ or $a=b$ 　 $a=b$ 时 $R(A)\le 1$, $R\left(A^*\right)=0$ 　不合题意!

$\boxed{a+2b=0 \text{ 且 } a\neq b}$

例2. n阶方阵A中的元均为整数, 则 $|A|$ 为整数.

证明: 对 n 用数学归纳法.

(1) $n=1,2$ 时结论显然成立.

(2) 设对$n-1$阶矩阵结论为真.

对n阶矩阵A:

$$\left.\begin{array}{l} |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \\ \text{由归纳假设}, A\text{的余子式都是整数} \\ \Rightarrow A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{1n} \text{ 都是整数} \end{array}\right\} \Rightarrow |A| \text{是整数.}$$

由数学归纳法知, 结论恒为真.

例3. 若n阶方阵A中的元均为整数, 证明:

$$A^{-1}\text{的元均为整数}\Leftrightarrow |A|=\pm 1.$$

证明: "$\Rightarrow$"

若 A^{-1} 的元均为整数, $AA^{-1}=I$ 的两端同取行列式:

$\Rightarrow |A|\cdot|A^{-1}|=1$, 由例3知$|A|$, $|A^{-1}|$都是整数 $\Rightarrow |A|=\pm 1.$

"$\Leftarrow$" 设$|A|=\pm 1$, 由 $AA^*=|A|I=\pm I$ 知 $A^{-1}=\pm A^*$.

A^* 的每一个元都是 A 中元的代数余子式,

即元为整数的$n-1$阶余子式带上符号, 都是整数.

因此 A^{-1} 中的元都是整数.

例4. 设$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,若存在某个正整数$m \geq 3$使得$A^m=O$,

证明:$A^2=O$.

分析: 若 $R(A)=0 \Rightarrow A=O \Rightarrow A^2=O$

若 $R(A)=2 \Rightarrow A$可逆 $\Rightarrow I=O$,矛盾!

在$A^m=O$两端同时左乘$\left(A^{-1}\right)^m$

若 $R(A)=1 \Rightarrow A=\alpha^T\beta$,其中$\alpha,\beta$都是行矩阵

$$O=A^m=\left(\alpha^T\beta\right)^m=\alpha^T\left(\beta\alpha^T\right)^{m-1}\beta=\left(\beta\alpha^T\right)^{m-1}\alpha^T\beta$$

$=\left(\beta\alpha^T\right)^{m-1}A \Rightarrow A=O$(与秩为1矛盾!)或$\left(\beta\alpha^T\right)^{m-1}=0$

$$\Rightarrow \beta\alpha^T=0 \Rightarrow A^2=\left(\beta\alpha^T\right)A=O$$

例4. 设$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，若存在某个正整数$m \geq 3$使得$A^m = O$，证明：$A^2 = O$.

分析： $A^m = O \Rightarrow |A|^m = 0 \Rightarrow 0 = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$$

$$= (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+d)A$$

$$\Rightarrow O = A^m = A^2A^{m-2} = (a+d)A^{m-1} = \cdots = (a+d)^{m-1}A$$

$$\Rightarrow a+d=0 \text{ or } A=O$$

$$\boxed{\Rightarrow A^2 = (a+d)A = O}$$

3阶行列式游戏

在行列式游戏 Tic-Tac-Toc 中,

游戏者1在一个空的3×3矩阵中填入一个1,

游戏者0在某一个空位置中填入一个0,

游戏如此继续, 直到 3×3 矩阵填入了5个1和4个0.

若行列式值为0, 则游戏者0获胜, 否则游戏者1获胜.

有没有一种策略保证某一个游戏者一定获胜?

谢 谢！