学工部系列讲座之一

矩阵与行列式

何军华

电子科大数学学院

一、n阶方阵可逆的等价条件

设 A 为 n 阶方阵, 则如下条件彼此等价:

- A 可逆; (即: 存在方阵 B 使得 $AB=I=BA$);
- 存在方阵 B 使得 $AB=I$ (或 $BA=I$);
- $\det A \neq 0$;
- A^* 可逆;
- $Ax=0$ 只有零解;
- $Ax=b$ 有惟一解;

◆ A可经由初等变换化成I (A与I等价), 即:

存在n阶可逆矩阵P, Q使得 $PAQ=I$.

◆ A可经由初等行(列)变换化成I;

◆ A可以写成一些初等矩阵的乘积;

◆ A的行(列)向量组线性无关;

◆ 任一n维行(列)向量均可以表示成A的行(列)向量组的线性组合;

◆ 秩$R(A)=n$;

二、错误、技巧与方法

1. 矩阵书写, 初等行变换注意事项:

- 矩阵符号: ( )或[ ];
- 初等变换符号: →;
- 全零的行不能省略: 变换前的矩阵与变换后的矩阵同型.
- 做完一次变换马上检查.
- 行变换总是对的, 列变换则有较大的出错风险.
- 行变换可以: 解方程组, 求逆、秩、坐标计算线性表出(组合), 最大无关组

2. 矩阵变形技巧:

- 矩阵等式两端同时左乘(右乘)某矩阵;
- 矩阵等式两端同时取转置, 求逆, 行列式;
- 求逆前判断可逆性, 方阵才可取行列式;
- 矩阵方程求解: 先化简后计算;
- 初等变换与初等矩阵的关系: "左行右列";
- 看到A^*: $AA^*=|A|I$,

$$|A^*|=|A|^{n-1},\quad R(A^*)=\begin{cases} n, \text{ if } R(A)=n \\ 1, \text{ if } R(A)=n-1 \\ 0, \text{ if } R(A)<n \end{cases}$$

$$(kA)^*=k^{n-1}A^*$$

3. 常用行列式计算方法(1):

◆ 低阶数字型?	行变换化为三角形.
◆ 0元多的双平行线型?	按第一行(列)展开
◆ 爪型(箭头型)?	用中间“爪”消另一“爪”
◆ 三条平行线?	按行展开得递推关系式
◆ 每列有共同字母?	“加边法”(升阶法)
◆ 范德蒙行列式?	
◆ 两条交叉线?	Laplace展开

3. 常用行列式计算方法(2):

- 各行元之和相同?　　每列加到第1列提公因子.

- (代数)余子式的线性组合?　　构造新行列式

- 特殊形状?

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ D & C \end{vmatrix} = |A| \bullet |C|$$

$$\begin{vmatrix} A & B_{r\times r} \\ D_{s\times s} & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & B_{r\times r} \\ D_{s\times s} & C \end{vmatrix} = (-1)^{rs} |B| \bullet |D|$$

- 随时观察,灵活运用行列式性质!

三、典型例题：选择填空

例1. 设 $|A|=3, |B|=2, \boxed{|A^{-1}+B|}=2$，则 $\boxed{|A+B^{-1}|}=$ ________.

分析： $A+B^{-1}=A\left(I+A^{-1}B^{-1}\right)$

$$=A\left(B+A^{-1}\right)B^{-1}=A\left(A^{-1}+B\right)B^{-1}$$

$$\Rightarrow |A^{-1}+B|=\left|A\left(A^{-1}+B\right)B^{-1}\right|$$

$$=|A|\bullet|A^{-1}+B|\bullet|B^{-1}|$$

$$=3\bullet 2\bullet\frac{1}{2}=3$$

评注： 此题用特殊值法不好做.

$\boxed{|A+B^{-1}|=\underline{3}.}$

例2. 3阶矩阵, 将A的第2列加到第1列得矩阵B,

再交换B的第2行与第3行得单位矩阵, 记

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则$A = (\quad)$

(A) P_1P_2 (B) $P_1^{-1}P_2$ (C) P_2P_1 $\boxed{(D)\ P_2P_1^{-1}}$

分析:

$$\left.\begin{aligned} B &= AP_1 \\ I &= P_2B \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = BP_1^{-1} = P_2^{-1}P_1^{-1} = P_2P_1^{-1}$$

$\boxed{B = P_2^{-1}}$ $\boxed{P_2^{-1} = P_2}$

例3. 设A为3阶矩阵，P为3阶可逆矩阵，且$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则$Q^{-1}AQ=(\quad)$

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (B) $\boxed{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}}$ (C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

标准方法：

$$Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\1&1&\\&&2\end{pmatrix}$$

例3. 设A为3阶矩阵，P为3阶可逆矩阵，且$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则$Q^{-1}AQ=(\quad)$

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

特殊值法：

令$P=I\Rightarrow Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例4. 设X为3维单位列向量，则矩阵$I-XX^T$的秩为______.

解1: 令 $X=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow I-XX^T=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow R\left(I-XX^T\right)=2$$

解2:

$$\left(I-XX^T\right)X=X-X\left(X^TX\right)=0$$

$$\Rightarrow R\left(I-XX^T\right)+R\left(X\right)\le 3$$

$$R\left(I-XX^T\right)+R\left(X\right)=R\left(I-XX^T\right)+R\left(XX^T\right)$$

$$\ge R\left[\left(I-XX^T\right)+\left(XX^T\right)\right]=3$$

例5. 设A为3阶矩阵，$|A| = 3.$

若$\boxed{\text{交换 } A \text{ 的第1行与第2行得矩阵} B,}$

则 $|BA^*| =$ ________.

解: 交换 A的第1行与第2行得矩阵B:

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \Rightarrow BA^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} |A| I = 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |BA^*| = 3^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -27$$

例5. 设A为3阶矩阵,$|A|=3$.

若交换A的第1行与第2行得矩阵B,

则$|BA^*|=$________.

特殊值法:

$$\text{令 } A=\begin{pmatrix}3&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}0&1&0\\3&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ A^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |BA^*|=\begin{vmatrix}0&3&0\\3&0&0\\0&0&3\end{vmatrix}=-27$$

例6. 设A是3阶非零实矩阵, 若 $a_{ij}+A_{ij}=0\left(i,j=1,2,3\right)$,

则 $|A|=$ ________.

解: $a_{ij}+A_{ij}=0\left(i,j=1,2,3\right)\Rightarrow A_{ij}=-a_{ij}\quad\Rightarrow A^{*}=-A^{T}$

$$\Rightarrow |A|I=AA^{*}=-AA^{T}\quad\Rightarrow |A|^{3}=-|A|^{2}$$

$$\Rightarrow |A|^{2}\left(|A|+1\right)=0$$

$$\Rightarrow |A|=0\ \ or\ \ -1$$

$|A|=0\Rightarrow\ AA^{T}=O\ \Rightarrow A=O$ 矛盾!

$$\boxed{\Rightarrow |A|=-1}$$

例7. 行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ ______________.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -ad(ad-bc) + cb(ad-bc)$$

$$= -(ad-bc)^2$$

例7. 行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ ________.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = (-1)^{2+4+1+4} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\boxed{= -(ad-bc)^2}$$

例8. 已知$\alpha=(1,2,3)$, $\beta=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$, 设$A=\alpha^T\beta$, 则

$A^n=$__________.

分析:

$$A^n=\underbrace{\left(\alpha^T\beta\right)\cdot\left(\alpha^T\beta\right)\cdot\cdots\cdot\left(\alpha^T\beta\right)}_{n个}$$

$$=\alpha^T\underbrace{\left(\beta\alpha^T\right)\cdot\left(\beta\alpha^T\right)\cdot\cdots\cdot\left(\beta\alpha^T\right)}_{n-1个}\beta$$

$\beta\alpha^T$是数!

$$=\left(\beta\alpha^T\right)^{n-1}\alpha^T\beta=3^{n-1}A=\boxed{3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 2 & 1 & 2/3\\ 3 & 3/2 & 1\end{pmatrix}}$$

例9. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$, 3阶非零矩阵 B 满足 $AB=O$,

则 $t=$________.

分析:

$$\left.\begin{aligned}&A_{3\times\boxed{3}}B_{\boxed{3}\times3}=O\Rightarrow R(A)+R(B)\le\boxed{3}\\&B\ne O\Rightarrow R(B)>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow R(A)<3$$

$$\Rightarrow 0=|A|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-2\\0&t-8&11\\0&-7&7\end{vmatrix}=7t+21$$

$$\Rightarrow \boxed{t=-3}$$

例10. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ 的秩为3,则 $k=$________.

分析： 4阶矩阵秩为3, 则:

(1) 行阶梯型恰有3个非零行;　　(2) 行列式为0.

$$|A|=(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix}$$

$$=(k+3)(k-1)^3=0 \Rightarrow\ k=1\ or\ -3\ \Rightarrow k=-3$$

例11. 设α是3维列向量. 若 $\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

则$\alpha^T\alpha=$____.

分析: 令 $A=\alpha\alpha^T$

$$\Rightarrow A^2=(\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T)=\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=(\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T=(\alpha^T\alpha)A$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}3&*&*\\ *&*&*\\ *&*&*\end{pmatrix}\quad\Rightarrow A^2=3A$$

法2: 令 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\alpha^T\alpha=3$

例12. 设 $A, B, A+B, A^{-1}+B^{-1}$ 都是n阶可逆矩阵, 则

$$\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}=(\quad)$$

(A) $A^{-1}+B^{-1}$ (B) $A+B$

(C) $A(A+B)^{-1}B$ (D) $(A+B)^{-1}$

特殊值法: 令 $A=I,\ \ B=2I$:

$$\Rightarrow\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}=\frac{2}{3}I$$

(A) $\frac{3}{2}I$ (B) $3I$ (C) $\frac{2}{3}I$ (B) $\frac{1}{3}I$

例12. 设 $A, B, A+B, A^{-1}+B^{-1}$ 都是n阶可逆矩阵, 则

$$\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}=(\quad)$$

(A) $A^{-1}+B^{-1}$　　(B) $A+B$

(C) $A(A+B)^{-1}B$　　(D) $(A+B)^{-1}$

标准方法: $A\left(A^{-1}+B^{-1}\right)=I+AB^{-1}$

$$\Rightarrow A\left(A^{-1}+B^{-1}\right)B=B+A\Rightarrow\left[A\left(A^{-1}+B^{-1}\right)B\right]^{-1}=(A+B)^{-1}$$

$$\Rightarrow B^{-1}\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}A^{-1}=(A+B)^{-1}$$

$$\Rightarrow\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}=B(A+B)^{-1}A$$

例12. 设 $A, B, A+B, A^{-1}+B^{-1}$ 都是n阶可逆矩阵, 则

$$\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}=(\quad)$$

(A) $A^{-1}+B^{-1}$　　(B) $A+B$

(C) $A(A+B)^{-1}B$　　(D) $(A+B)^{-1}$

标准方法: $B\left(A^{-1}+B^{-1}\right)=BA^{-1}+I$

$$\Rightarrow B\left(A^{-1}+B^{-1}\right)A=B+A\Rightarrow\left[B\left(A^{-1}+B^{-1}\right)A\right]^{-1}=(A+B)^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1}\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}B^{-1}=(A+B)^{-1}$$

$$\Rightarrow\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}=A(A+B)^{-1}B$$

四、典型例题：计算与证明

例1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\2&3&a\\3&5&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\2&a&3\\a-1&5&1\end{pmatrix}$

等价, 试确定 a 的取值范围.

分析： A与B**等价** $\Leftrightarrow$ A 可经**初等变换**变为 B

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P,Q 使得 $PAQ=B$

$\Leftrightarrow$ A,B **同型** 且 **同秩**

$\Leftrightarrow$ A,B具有相同的**标准形**

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\2&3&a\\3&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&1&a-2\\0&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&a-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\2&a&3\\a-1&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&a-2&1\\0&6-a&2-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

A与B等价 $\Leftrightarrow$ A, B 同型且同秩 $\Leftrightarrow$ $R(A)=3$

$R(B)=3$ $\Leftrightarrow$ $a\neq 1$

例2. 设 $B=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

若 $\left(2I-C^{-1}B\right)A^T=C^{-1}$，求$A$.

解: $\left(2I-C^{-1}B\right)A^T=C^{-1} \Rightarrow C\left(2I-C^{-1}B\right)A^T=I$

$$\Rightarrow \left(2C-B\right)A^T=I$$

$$\Rightarrow A^T=\left(2C-B\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow A=\left[\left(2C-B\right)^{-1}\right]^T \quad =\left[\left(2C-B\right)^T\right]^{-1}$$

$$A=\left[\left(2C-B\right)^{T}\right]^{-1}$$

$$\left(\left(2C-B\right)^{T}\middle| I\right)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\2&1&0&0&0&1&0&0\\3&2&1&0&0&0&1&0\\4&3&2&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\cdots\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-2&1&0&0\\0&0&1&0&1&-2&1&0\\0&0&0&1&0&1&-2&1\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$$

例3. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

矩阵X满足$A^{*}X=A^{-1}+2X$，求矩阵X.

解: $A^{*}X=A^{-1}+2X \Rightarrow AA^{*}X=AA^{-1}+2AX$

$$\Rightarrow |A|X=I+2AX$$

$$\Rightarrow \left(|A|I-2A\right)X=I$$

$$\Rightarrow X=\left(|A|I-2A\right)^{-1}$$

例4. 设A是n $(n>2)$阶非零实矩阵, 其元素满足

$$a_{ij}=A_{ij}\left(i,j=1,\cdots,n\right)$$

求行列式$|A|$.

解:

$$\left.\begin{array}{r} a_{ij}=A_{ij}\left(i,j=1,\cdots,n\right)\Rightarrow A^*=A^T \\ AA^*=|A|I \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AA^T=|A|I \qquad \Rightarrow\left|AA^T\right|=\left||A|I\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow|A|^2=|A|^n\Rightarrow|A|^2\left(|A|^{n-2}-1\right)=0 \\ \text{将}|A|\text{按任一非零行展开} \\ \Rightarrow|A|=a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{in}A_{in}=a_{i1}^2+\cdots+a_{in}^2>0 \end{array}\right\}\Rightarrow|A|=1$$

例5. 设 n 阶矩阵A的元素全为1, 证明 $I-A$可逆, 且

$$(I-A)^{-1}=I-\frac{1}{n-1}A.$$

证: $A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\Rightarrow A^2=nA$

$$\Rightarrow O=A^2-nA=(-A+I)\big(-A+(n-1)I\big)+\boxed{(1-n)}\,I$$

$$\Rightarrow (I-A)\big[(n-1)I-A\big]=(n-1)I$$

$\Rightarrow I-A$ 可逆, 且 $(I-A)^{-1}=I-\dfrac{1}{n-1}A.$

例6. 设 n 阶方阵A, B满足：$A^2 = B^2 = I, |A| + |B| = 0$

证明：$A + B$ 不可逆.

分析： $A + B$ 不可逆 $\Leftrightarrow |A + B| = 0$

证：

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} A^2 = B^2 = I \Rightarrow |A| = \pm 1, |B| = \pm 1 \\ |A| + |B| = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow |A| \bullet |B| = -1 \\ |A| \bullet |A + B| \bullet |B| = |A^2 B + AB^2| = |B + A| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A + B| = -|B + A| \Rightarrow |A + B| = 0 \Rightarrow A + B \text{ 不可逆}$$

例7. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & a+b & a+b & \cdots & a+b \\ a-b & a & a+b & \cdots & a+b \\ a-b & a-b & a & \cdots & a+b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-b & a-b & a-b & \cdots & a \end{vmatrix}$

解1:

第1列减去第2列　　第2行减去第1行

$$D_n=\begin{vmatrix} -b & a+b & a+b & \cdots & a+b \\ -b & a & a+b & \cdots & a+b \\ 0 & a-b & a & \cdots & a+b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a-b & a-b & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -b & a+b & a+b & \cdots & a+b \\ 0 & -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-b & a & \cdots & a+b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a-b & a-b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} \boxed{-b} & a+b & a+b & \cdots & a+b \\ 0 & -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-b & a & \cdots & a+b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a-b & a-b & \cdots & a \end{vmatrix}_n
$$

$$
= -b \begin{vmatrix} \boxed{-b} & 0 & \cdots & 0 \\ a-b & a & \cdots & a+b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a-b & a-b & \cdots & a \end{vmatrix}_{n-1}
$$

$$
= b^2 D_{n-2}
$$

$$
D_1 = a,
$$

$$
D_2 = \begin{vmatrix} a & a+b \\ a-b & a \end{vmatrix} = b^2
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} D_{2n} = b^{2n} \\ D_{2n+1} = ab^{2n} \end{cases}
$$

$$D_n=\begin{vmatrix} x & z & \cdots & z \\ y & x & \cdots & z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & \cdots & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y+(x-y) & z+0 & \cdots & z+0 \\ y & x & \cdots & z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y & z & \cdots & z \\ y & x & \cdots & z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & \cdots & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x-y & 0 & \cdots & 0 \\ y & x & \cdots & z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y & z & \cdots & z \\ 0 & x-z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & y-z & \cdots & x-z \end{vmatrix}+(x-y)D_{n-1}$$

$$=y(x-z)^{n-1}+(x-y)D_{n-1}$$

$$D_n = y(x-z)^{n-1} + (x-y)D_{n-1} \qquad (1)$$

同理可得：

$$D_n = z(x-y)^{n-1} + (x-z)D_{n-1} \qquad (2)$$

若$y=z$, 显然有 $D_n = [x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$

若 $y \neq z$： $(1)\times(x-z)-(2)\times(x-y)$

$$\Rightarrow D_n = \frac{y(x-z)^n - z(x-y)^n}{y-z}$$

例8. 设直线l与如下两平面平行:

$$\pi_1: 2x+3y-5=0, \qquad \pi_2: y+z=0.$$

且与如下两直线相交:

$$l_1: \frac{x-6}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1} \qquad l_2: \frac{x}{3}=\frac{y-8}{2}=\frac{z+4}{-2}$$

试求直线l的方程.

解: 待求直线的方向向量可取为:

$$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$$

直线l与下两直线相交:

$$l_1: \frac{x-6}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1} \qquad l_2: \frac{x}{3} = \frac{y-8}{2} = \frac{z+4}{-2}$$

$$\boxed{\vec{s} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}$$

设直线l与两直线的交点分别为:

$$P_1: (6+3u, 2u, 1+u), \quad P_2: (3v, 8+2v, -4-2v),$$

则两点连线所得向量也是直线l的方向向量: $\overrightarrow{P_1P_2} \parallel \vec{s}$

$$\frac{3v-6-3u}{3} = \frac{8+2v-2u}{-2} = \frac{-5-2v-u}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3(8+2v-2u) = -2(3v-6-3u) \\ 8+2v-2u = -(-5-2v-u) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P_1: (9, 2, 2)}$$

例9. 求过点 $M(0,0,-2)$ 并且与平面 $\pi: 3x-y+2z-1=0$ 平行, 与直线 $l: \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 相交的直线方程.

解: 设待求直线与已知直线的交点为

$$P:(1+4t, 3-2t, t)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MP}=(1+4t, 3-2t, t+2)$$

$$\overrightarrow{MP} \perp \vec{n}=(3,-1,2)$$

$$\Rightarrow 0=\overrightarrow{MP} \bullet \vec{n}=3(1+4t)-(3-2t)+2(t+2)=4+16t$$

$$\Rightarrow t=-\frac{1}{4} \Rightarrow \overrightarrow{MP}=\left(0, \frac{7}{2}, \frac{7}{4}\right) \Rightarrow l_1: \frac{x}{0}=\frac{y}{14}=\frac{z+2}{7}$$

例10. 设A,B都是n阶方阵，证明：$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| \bullet |A-B|$

证：

$$\begin{pmatrix} I & O \\ I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I & O \\ I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & O \\ -I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & O \\ -I & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A-B & B \\ O & A+B \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} I & O \\ I & I \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} I & O \\ -I & I \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A-B & B \\ O & A+B \end{vmatrix} = |A+B| \bullet |A-B|$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| \bullet |A-B|$$

谢 谢！