特征值与二次型

何军华

电子科大数学学院

http://staff.uestc.edu.cn/hejunhua/?page_id=3

一. 特征值与特征向量的判定

特征值的判定.

给定n阶矩阵 A, 则

λ是A的特征值 $\Leftrightarrow \exists \alpha \neq 0,\ s.t.\ A\alpha = \lambda\alpha$

$\Uparrow$ $\Leftrightarrow \exists \alpha \neq 0,\ s.t.\ (\lambda I - A)\alpha = 0$

$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\ \vdots\\ \lambda\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow (\lambda I - A)X = 0$ 有非零解 α;

$\Leftrightarrow |\lambda I - A| = 0$;

$\Uparrow$ $\Leftrightarrow \lambda I - A$ 不可逆;

A各行元之和为λ $\Leftrightarrow R(\lambda I - A) < n$;

特征向量的判定.

给定n阶矩阵 A，α是非零列向量

α是A的特征向量 $\Leftrightarrow A\alpha=\lambda\alpha$ 对某个数λ

$\Uparrow$

$\Leftrightarrow \alpha, A\alpha$ 线性相关;

A各行元之和为 λ，

$$\alpha=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix};$$

$\Leftrightarrow \alpha$ 是 $(\lambda I-A)X=0$ 的非零解

特征值、特征向量的计算步骤.

λ是A的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda I - A| = 0$;

α是λ的特征向量 $\Leftrightarrow \alpha$是$(\lambda I - A)X = 0$的非零解

(1) 求$|\lambda I - A| = 0$的根: $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$

(2) 对每一λ_i, 求$(\lambda_i I - A)X = 0$的一组基础解系:

$$\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{ir_i}$$

则A的属于特征值λ_i的全部特征向量为:

$$k_1\alpha_{i1} + \cdots + k_{r_i}\alpha_{ir_i},\ k_1, \cdots, k_{r_i}\text{不全为}0.$$

特征值的计算技巧.

如何有效计算3阶数字型矩阵A的特征值?

目标: 不只是算出特征多项式, 需要求出3个根!

思路: 计算过程中尽可能提取关于λ的一次因式

手段: 观察$|\lambda I-A|$各行元之和, 两行元的和或者差

各列元之和, 两列元的和或者差

效果: 若第1行提取了λ的一次因式, 则新第1行全数字, 列的倍加使第1行仅有一个非零元, 按第1行展开!

检查: 特征值之和 = 对角元之和?

设 A 是 n 阶方阵, $f(x)$是一元多项式, 则

α 是特征值 λ 的特征向量 $\Rightarrow$

- α是A^{k+1}的特征值λ^{k+1}的特征向量.
- α是$f(A)$的特征值$f(\lambda)$的特征向量.
- $P^{-1}\alpha$ 是$P^{-1}AP$的特征值 λ 的特征向量.

A 可逆时:

- α 是 A^{-1}的特征值λ^{-1}的特征向量.
- α 是 A^{*} 的特征值$\dfrac{|A|}{\lambda}$的特征向量.

$f(A)=O$时:

- $f(A)=O \Rightarrow f(\lambda)=0$

例1. A满足的条件 $\Longrightarrow$ A 有特征值

◆ $2I+3A$ 不可逆	$-2/3$
◆ $\lvert 5I+4A \rvert = 0$	$-5/4$
◆ $R(4I+3A) < n$	$-4/3$
◆ $(5I+6A)X=0$ 有非零解	$-5/6$
◆ $(8I+7A)X=b$ 有两个互异解	$-8/7$
◆ 非零矩阵B使得$(7I+8A)B=0$	$-7/8$
◆ A 各行元之和为2	2

例1. A满足的条件 $\Longrightarrow$ A有特征值

◆ 相似于diag(…, 5, …)	5
◆ 4元二次型经正交变换为标准形 $3y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2$	3, −1, 2, 0
◆ 5阶实对称矩阵A的秩为3	$0(5-3=2$重特征值$)$
◆ A是非零列行矩阵$\alpha\beta^T$	$\beta^T\alpha$

$A\alpha = (\alpha\beta^T)\alpha = \alpha(\beta^T\alpha) = (\beta^T\alpha)\alpha$, 0是$A$的$n-1$重特征值

例2. 设4阶矩阵A满足：$|3I+A|=0,\ AA^T=2I,\ |A|<0$，

求A^*的一个特征值.

解： $|3I+A|=0 \Rightarrow |-3I-A|=0 \Rightarrow -3$是$A$的特征值

设非零向量α是A的特征值-3的一个特征向量，则

$$A\alpha=-3\alpha \Rightarrow A^*A\alpha=-3A^*\alpha \Rightarrow A^*\alpha=-\frac{1}{3}|A|\alpha=\frac{4}{3}\alpha$$

$$\left.\begin{array}{r} AA^T=2I \Rightarrow |A|^2=|2I|=2^4=16 \\ |A|<0 \end{array}\right\} \Rightarrow |A|=-4$$

$\Rightarrow A^*$有一个特征值$\frac{4}{3}$.

例3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=P^{-1}A^{*}P$

求 $B+2I$ 的特征值.　　**9, 9, 3**

分析： 设α是矩阵A的特征值λ的一个特征向量，则：

$$A\alpha=\lambda\alpha \Rightarrow A^{*}\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha$$

$$\Rightarrow\left(P^{-1}A^{*}P\right)\left(P^{-1}\alpha\right)=\frac{|A|}{\lambda}\left(P^{-1}\alpha\right)$$

$$\Rightarrow\left(P^{-1}A^{*}P+2I\right)\left(P^{-1}\alpha\right)=\left(\frac{|A|}{\lambda}+2\right)\left(P^{-1}\alpha\right)$$

$$|\lambda I-A|=(\lambda-7)(\lambda-1)^{2}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=7,|A|=7$$

例4. 已知A是3阶矩阵, 列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 满足

$A\alpha_1=-\alpha_1-3\alpha_2-3\alpha_3,\ A\alpha_2=4\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_3=-2\alpha_1+3\alpha_3.$

求 (1) 矩阵A的特征值和特征向量; (2) 秩 $R\left(A^*-6I\right)$.

分析: 将已知向量等式写成矩阵形式:

$$A\underbrace{\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)}_{P}=\underbrace{\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 4 & -2\\ -3 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 3\end{pmatrix}}_{B}$$

$$\Rightarrow A=PBP^{-1}\Rightarrow\ A,B\text{具有相同的特征值.}$$

$$B\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow A\left(P\alpha\right)=\left(PBP^{-1}\right)P\alpha$$

$$=PB\alpha=P\left(\lambda\alpha\right)=\lambda\left(P\alpha\right)$$

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 & 2 \\ \boxed{3} & \lambda-4 & 0 \\ \boxed{3} & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 & 2 \\ 3 & \lambda-4 & 0 \\ \boxed{0 \quad -1 \quad 1} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & 2 \\ 3 & \lambda-4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

计算可得:

$$\lambda_1 = 1 : \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \lambda_2 = 2 : \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix};\ \lambda_3 = 2 : \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$A=PBP^{-1}$与B有相同的特征值：

$$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$$

相应的全部特征向量:

$$\lambda_1=1:\ k\left(P\beta_1\right)=k\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right),k\neq 0;$$

$$\lambda_2=2:k\left(P\beta_2\right)=k\left(2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3\right),k\neq 0;$$

$$\lambda_3=3:k\left(P\beta_3\right)=k\left(\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3\right),k\neq 0;$$

例4. 已知A是3阶矩阵, 列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 满足

$$A\alpha_1=-\alpha_1-3\alpha_2-3\alpha_3,\ A\alpha_2=4\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_3=-2\alpha_1+3\alpha_3.$$

求 (1) 矩阵A的特征值和特征向量； (2) 秩 $R\left(A^*-6I\right)$.

---

(2) 前面的推导表明A的特征值为1, 2, 3 $\Rightarrow |A|=6$

$$\Rightarrow A^* \text{有3个不同特征值为} 6, 3, 2 \quad \left(\lambda \mapsto |A|/\lambda\right)$$

$\Rightarrow A^*-6I$ 相似于对角矩阵

$$\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&2\end{pmatrix}-6I=\begin{pmatrix}0&&\\&-3&\\&&-4\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow R\left(A^*-6I\right)=2$$

例5. 已知$\alpha=(1,3,2)^T$，$\beta=(1,-1,2)^T$，$A=I+\alpha\beta^T$，

矩阵A的最大特征值所对应的一个特征向量为(　　)

(A) $(1,1,0)^T$；　　(B) $(1,-1,2)^T$；

(C) $(1,3,2)^T$；　　(D) $(1,5,1)^T$；

分析： $A\alpha=\left(I+\alpha\beta^T\right)\alpha=\alpha+\left(\alpha\beta^T\right)\alpha$

$$=\alpha+\alpha\left(\beta^T\alpha\right)=\alpha+2\alpha=3\alpha$$

取两个与β正交的向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\beta^T\alpha_1=\beta^T\alpha_2=0$$

$$\Rightarrow\left(I+\alpha\beta^T\right)\alpha_i=\alpha_i\left(i=1,2\right)$$

例5. 已知$\alpha=(1,3,2)^T$，$\beta=(1,-1,2)^T$，$A=I+\alpha\beta^T$，

矩阵A的最大特征值所对应的一个特征向量为(　　)

法2:

$$A=I+\alpha\beta^T=I+\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}(1,-1,2)=\begin{pmatrix}2&-1&2\\3&-2&6\\2&-2&5\end{pmatrix}$$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-3&\lambda+2&-6\\-2&2&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&1&-2\\1&\lambda+2&-6\\0&2&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$$

$$3I-A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-3&5&-6\\-2&2&-2\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&-3/2\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\alpha=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

例6(2015). 设3阶矩阵A的特征值为 $2, -2, 1,$

$B = A^2 + A + I$, 则行列式 $|B| =$ ________.

法1: A 的特征值$\lambda \Rightarrow B$ 的特征值$\lambda^2 + \lambda + 1$

A 的特征值$2, -2, 1 \Rightarrow B$ 的特征值$7, 3, 3$

$$\Rightarrow |B| = 7 \bullet 3 \bullet 3 = 63$$

法2:

$$\text{令} A = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 7 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 7 \bullet 3 \bullet 3 = 63$$

特征值的代数重数与几何重数

设λ是n阶矩阵A的特征值，则

(1) λ作为A特征多项式根的重数

称为λ的代数重数.

(2) λ相应方程组$(\lambda I-A)X=0$解空间的维数

$$n-R(\lambda I-A)$$

即线性无关特征向量的最大个数

称为λ的几何重数.

$$1\le 几何重数 \le 代数重数$$

二、相似与对角化

设A是n阶矩阵，则：

A可相似对角化 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量

$\Uparrow$

$\Leftrightarrow$ A的k重特征值恰有

A有n个互异的特征值

k个无关的特征向量

$\Leftrightarrow$ λ_i是A的$k_i(>1)$重特征值，则

$$R(\lambda_i I - A) = n - k_i$$

即：任一特征值的代数重数 = 几何重数

3阶矩阵的相似对角化

◆ 3阶矩阵A有一个1重特征值a，一个2重特征值b.

$$A\text{可以相似对角化} \Leftrightarrow R(bI - A) = 3 - 2 = 1$$

◆ 3阶矩阵A有3个互异特征值，必可相似对角化

◆ 3阶矩阵A有1个3重特征值a，

$$A\text{可以相似对角化} \Leftrightarrow R(aI - A) = 3 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow A = aI$$

定理. $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,\cdots,A\alpha_m=\lambda_m\alpha_m,\ \alpha_i\neq 0\left(i=1,\cdots,m\right),$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 互异 $\Rightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

不同特征值的特征向量线性无关.

证: 设 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0,$ 左乘 $A^i\left(i=1,\cdots,m-1\right)$

$$A\alpha_j=\lambda_j\alpha_j\Rightarrow A^i\alpha_j=\lambda_j^i\alpha_j\left(j=1,\cdots,m\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0=k_1A^i\alpha_1+\cdots+k_mA^i\alpha_m=k_1\lambda_1^i\alpha_1+\cdots+k_m\lambda_m^i\alpha_m$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0\\ k_1\lambda_1\alpha_1+\cdots+k_m\lambda_m\alpha_m=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ k_1\lambda_1^{m-1}\alpha_1+\cdots+k_m\lambda_m^{m-1}\alpha_m=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m = 0 \\ k_1\lambda_1\alpha_1 + \cdots + k_m\lambda_m\alpha_m = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ k_1\lambda_1^{m-1}\alpha_1 + \cdots + k_m\lambda_m^{m-1}\alpha_m = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow (k_1\alpha_1,\cdots,k_m\alpha_m)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix}_{m\times m}}_{T} = (0,\cdots,0) \\ \lambda_1,\cdots,\lambda_m\text{互异} \Rightarrow T\text{可逆} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow (k_1\alpha_1,\cdots,k_m\alpha_m) = (0,\cdots,0) \\ \alpha_i \neq 0 (i = 1,\cdots,m) \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 = \cdots = k_m = 0$$

例1. 设α_1,α_2分别是n阶矩阵A互异特征值λ_1,λ_2的特征向量

证明$\alpha_1+\alpha_2$不是A的特征向量.

分析: $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2, \alpha_1\neq 0, \alpha_2\neq 0$

反证 设$A(\alpha_1+\alpha_2)=k(\alpha_1+\alpha_2)$

$$\Rightarrow k(\alpha_1+\alpha_2)=A(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$=A\alpha_1+A\alpha_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow (k-\lambda_1)\alpha_1+(k-\lambda_2)\alpha_2=0\\ \lambda_1\neq\lambda_2\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2 \text{ 线性相关,}$$

$\boxed{\text{矛盾!}}$

例2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{pmatrix}$，当$k$为何值时，存在可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵？

分析：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&2\\\boxed{k}&\lambda+1&\boxed{-k}\\-4&-2&\lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&2\\0&\lambda+1&-k\\\lambda-1&-2&\lambda+3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$$

A与对角阵相似 $\Leftrightarrow R(-I-A)=1$

$$I-A=\begin{pmatrix}-4&-2&2\\k&0&k\\-4&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&-1\\k&0&-k\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow k=0$

例3. 下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是(　　)

$$\boxed{(A)\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}};\quad (B)\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix};\quad (C)\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix};\quad (D)\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}.$$

分析: 分别计算各矩阵的特征值:

$$(A)\ 1(2\text{重})\quad (B)\ 1,2\quad (C)\ \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\quad (D)\ 0,3$$

选项(B)(C)(D)中,对应2阶矩阵A有两个不同的特征值,

都可对角化

选项(A)中,对2重特征值1: $R(1I-A)=1\neq 2-2$

不能对角化.

例4. 已知$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & a-2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$有3个线性无关的特征向量，

求 a 的值并计算 A^n.

分析： A有3个线性无关的特征向量

$\Rightarrow A$可以相似对角化

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -2 \\ -a & \lambda-1 & 2-a \\ 3 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1(2重), \lambda_2 = 1$

对A的2重特征值1有：　$R(1I - A) = 3 - 2 = 1$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1(2重), \lambda_2 = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & a-2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$R(1I - A) = 1$$

$$I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -a & 0 & 2-a \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-2a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 : \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 : \alpha_3 = (-2, 1, -3)^T$$

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&1&-1\\-3&0&4\end{pmatrix}\qquad \lambda_1=1:\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=2:\alpha_3=(-2,1,-3)$$

$$令P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\1&0&-3\end{pmatrix}\Rightarrow A=P\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^n=\begin{pmatrix}3-2^{n+1}&0&2^{n+1}-2\\2^n-1&1&1-2^n\\3-3\cdot 2^n&0&3\cdot 2^n-2\end{pmatrix}$$

例5(2014). 证明n阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\text{与}B=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}\text{相似.}$$

分析: A实对称,必与对角阵相似,

证明A,B与同一对角阵相似即可!

$$\left.\begin{array}{r}\left|\lambda I-A\right|=\lambda^{n-1}(\lambda-n)\\ A\text{实对称}\end{array}\right\}\Rightarrow A\sim\operatorname{diag}(n,0,\cdots,0)$$

$$\left.\begin{array}{r}\left|\lambda I-B\right|=\lambda^{n-1}(\lambda-n)\\ R(0I-B)=1\end{array}\right\}\Rightarrow B\sim\operatorname{diag}(n,0,\cdots,0)$$

$$\Rightarrow A\sim B$$

例6(2015). 设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$相似于$B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

(1) 求a,b的值; (2) 求可逆矩阵P, 使$P^{-1}AP$为对角矩阵.

法1: 相似的矩阵有相同的特征多项式

$$|\lambda I-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&0\\0&\boxed{\lambda-b}&0\\0&-3&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-b)(\lambda-1)^2$$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&3\\1&\lambda-3&3\\-1&2&\lambda-a\end{vmatrix}=\cdots=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&\lambda-2&3\\0&1&\lambda-a\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\left[\lambda^2-(a+2)\lambda+2a-3\right]$$

例6(2015). 设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$相似于$B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

(1) 求a,b的值; (2) 求可逆矩阵P, 使$P^{-1}AP$为对角矩阵.

法1: 相似的矩阵有相同的特征多项式

$$|\lambda I-B|=(\lambda-b)(\lambda-1)^2=(\lambda-1)\left[\lambda^2-(b+1)\lambda+b\right]$$

$$|\lambda I-A|=(\lambda-1)\left[\lambda^2-(a+2)\lambda+2a-3\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+2=b+1,\\2a-3=b.\end{cases}\qquad \Rightarrow a=4,b=5$$

例6(2015). 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$相似于$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求a, b的值; (2) 求可逆矩阵P, 使$P^{-1}AP$为对角矩阵.

法2: 相似的矩阵有相同的迹(对角元和)与行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & a-3 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix}=2a-3$$

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=b \qquad \Rightarrow \begin{cases} a+3=b+2, \\ 2a-3=b. \end{cases} \qquad \boxed{\Rightarrow a=4, b=5}$$

$$A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&4\end{pmatrix},\lambda_1=1(2重),\lambda_2=5(1重)$$

$$\lambda_1=1:1I-A\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=5:\ 5I-A\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$令P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}$$

例7. 设$A=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}, \alpha=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$是$A$的特征值-2的特征向量.

(1) 求a, b; (2) 求可逆矩阵P和对角矩阵Q, 使得 $P^{-1}AP=Q$.

分析: α是A的特征值-2的特征向量

$$\Rightarrow A\alpha=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a+2 \\ 2 \\ -1-b \end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a+2=2, \\ -1-b=-2. \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow a=0, b=1}$$

$$\boxed{\Rightarrow a=0, b=1}$$

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&\lambda&-1\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda+2)\quad\Rightarrow\lambda=1,1,-2$$

$$\lambda=1:\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad\lambda=-2:\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}AP=Q$$

四、实对称矩阵

实矩阵A:

- $AA^T = O \Rightarrow A = O$;
- $R(A) = R(AA^T) = R(A^T A)$.

实对称矩阵A:

- 特征值都是实的;
- 必可正交对角化;
- 不同特征值的特征向量彼此正交
- 秩为k的n阶矩阵 $\Rightarrow$ 0是$n-k$重特征值
- l重特征值 $\mu \Rightarrow R(\mu I - A) = n - l$

实对称矩阵特征值的判定.

给定n阶实对称矩阵 A:

$\mathrm{R}(A)=k<n \Rightarrow 0$是$A$的$n-k$重特征值

证明: A实对称 $\Rightarrow A$可相似对角化

$\Rightarrow$任一特征值的代数重数$=$几何重数

特征值0的几何重数$=n-R(0I-A)=n-k$

$\Rightarrow$特征值0的代数重数$=n-k$

实对称矩阵特征向量的判定.

(1) 实二次型 $X^T AX$ 经正交变换 $X = CY$ 化为标准形

$$c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \cdots + c_n y_n^2$$

其中 $C = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \Rightarrow$

$c_1, \cdots, c_n$ 是 A 所有的特征值, $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 是对应特征向量.

(2) 设 $A_{3\times3}$ 实对称, 其特征值

[1] $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 互异, α_1, α_2 分别是 λ_1, λ_2 的特征向量, 则

与 α_1, α_2 正交的非零向量一定是 λ_3 的特征向量

[2] λ_1 (1重), λ_3 (2重), α_1 是 λ_1 的特征向量, 则

与 α_1 正交的非零向量一定是 λ_3 的特征向量

例1. 设3阶实对称矩阵的秩为2, 且满足$A^2=3A$,

则$|A-2I|=$ ________.

分析:

3 阶实对称矩阵A的秩为 2

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 0\text{是}A\text{的 }3-2=1\text{ 重特征值} \\ \\ A^2=3A\Rightarrow A\text{的特征值}\lambda\text{满足}\lambda^2=3\lambda \\ \\ \Rightarrow \lambda=0\text{ 或 }3 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ A的特征值为$0,3,3\Rightarrow A-2I$的特征值为$-2,1,1$

$$\Rightarrow |A-2I|=(-2)\bullet 1\bullet 1=-2$$

例1. 设3阶实对称矩阵的秩为2, 且满足$A^2=3A$,

则$\left|A-2I\right|=$ ________.

法2:

$$令A=\begin{pmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left|A-2I\right|=1\bullet 1\bullet(-2)=-2$$

例2. 设4阶实对称矩阵A满足:

$$A^4 + A^3 - A^2 + A - 2I = O,$$

若秩 $R(A-I)=1$, 则矩阵 A 的特征值为 1, 1, 1, −2.

分析: $A^4 + A^3 - A^2 + A - 2I = O \Rightarrow$

$$0 = \lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda^2+1)$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \lambda = 1, -2, \pm i \\ A\text{实对称} \Rightarrow \text{特征值都是实的} \\ \left.\begin{array}{r} 1 = R(A-I) = R(1I-A) \\ A\text{实对称} \end{array}\right\} \Rightarrow 1\text{是 } 4-1=3 \text{ 重特征值} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

实对称矩阵相似、合同和等价的关系:

(1) A, B 相似(合同) $\Rightarrow$ A, B 等价 反之不然.

(2) A, B 相似 $\Leftrightarrow$ A, B 的特征值完全相同

(3) A, B 合同 $\Leftrightarrow$ A, B 的正负特征值个数完全相同

$\Leftrightarrow$ X^TAX, X^TBX 的规范形相同

(4) A, B 相似 $\Rightarrow$ A, B 合同 反之不然.

例3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -2\end{pmatrix}$

(1) 证明A和B合同, 并求可逆矩阵C使得 $C^TAC=B$.

(2) 如果$A+kI$ 和 $B+kI$ 合同, 求k的取值范围.

分析: (1) 欲证实对称矩阵合同， 只需说明二者有

相同个数的正特征值 以及 **相同个数的负特征值**.

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)\ \Rightarrow$$

A的特征值为 1, 1, －1, 与B的特征值同为两正一负, 合同.

A的特征值为 1, 1, −1,

$$\lambda_1=\lambda_2=1:\ \alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad \lambda_3=-1:\ \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \gamma_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\gamma_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\gamma_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

令 $D=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}\Rightarrow D^TAD=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$

令 $C=D\begin{pmatrix}\sqrt{2} & & \\ & 1 & \\ & & \sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{2}/2 & -1\\ \sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2}/2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow C^TAC=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix}=B$

(2) 如果$A+kI$ 和 $B+kI$ 合同, 求k的取值范围.

A的特征值为 1, 1, -1,

$\Rightarrow$ $A+kI$ 的特征值自大到小为：$1+k,1+k,-1+k$

$B+kI$ 的特征值自大到小为：$2+k,1+k,-2+k$

$A+kI$ 与$B+kI$ 合同 $\Leftrightarrow$ $A+kI$ 与$B+kI$ 正(负)特征值个数相同

$k>2$： 两个矩阵的特征值均为正, 彼此合同;

$k=2$： $A+kI$ 的特征值为3,3,-1, $B+kI$ 的特征值为4,3,0

不合同.

类似可得： $2>k\geq 1$ or $-1\geq k\geq -2$： 不合同.

$-1<k<1$ or $k<-2$： 合同

综上：

$A+kI$ 与$B+kI$ 合同 $\Leftrightarrow k>2$ or $-1<k<1$ or $k<-2$.

例4(2013). $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2&&\\&b&\\&&0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件是(　　)

(A) $a=0, b=2$;

(B) $a=0$, b为任意常数;

(C) $a=2, b=0$;

(D) $a=2$, b为任意常数.

法1: $a=0$时: $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&b&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-b&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-b)\Rightarrow\lambda=2,b,0$$

A实对称 $\Rightarrow A\sim diag(2,b,0)=B$

例4(2013). $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&&\\&b&\\&&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件是(　　)

法2: 实对称矩阵A与对角阵B相似.

$\Leftrightarrow A,B$有相同的特征值 $\Leftrightarrow A,B$有相同的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-a&-1\\-a&\lambda-b&-a\\-1&-a&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}1&-a&-1\\0&\lambda-b&-a\\-1&-a&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix}1&-a&-1\\0&\lambda-b&-a\\0&-2a&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda\left[\lambda^2-(b+2)\lambda+2b-2a^2\right]$$

$$\|\qquad\qquad \Rightarrow a=0$$

$$|\lambda I-B|=\lambda(\lambda-b)(\lambda-2)=\lambda\left[\lambda^2-(b+2)\lambda+2b\right]$$

五、特征值特征向量反解矩阵

(1) $A_{3\times3}$ 有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \Rightarrow$

$$A\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{P}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}P^{-1}$$

(2) 实对称矩阵不同特征值的特征向量两两正交.

例1. 设3阶实对称矩阵A的特征值为1, 2, 3. 矩阵A的属于特征值1, 2 的特征向量分别是$\alpha_1=(-1,-1,1)^T$, $\alpha_2=(1,-2,-1)^T$.

(1) 求A的属于特征值3的特征向量； (2) 求矩阵A.

解： (1) 设A属于特征值3的特征向量为 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T$

因为实对称矩阵不同特征值的特征向量彼此正交

$$\Rightarrow(\alpha_1,\alpha)=(\alpha_2,\alpha)=0 \quad \Rightarrow\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=0,\\ x_1-2x_2-x_3=0.\end{cases}$$

解得基础解系为$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ A的属于特征值3的全部特征向量为$k(1,0,1)^T, k\neq0$

例1. 设3阶实对称矩阵A的特征值为1, 2, 3. 矩阵A的属于特征值1, 2 的特征向量分别是$\alpha_1=(-1,-1,1)^T$, $\alpha_2=(1,-2,-1)^T$.

(1) 求A的属于特征值3的特征向量； (2) 求矩阵A.

A 属于特征值3的一个特征向量为 $\alpha_3=(1,0,1)^T$

令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\Rightarrow$

$$\Rightarrow P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}$$

计算可知 $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3&-1/3&1/3\\1/6&-1/3&-1/6\\1/2&0&1/2\end{pmatrix}\Rightarrow A=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}13&-2&5\\-2&10&2\\5&2&13\end{pmatrix}$

六、二次型

- 实二次型$f(X)$对应的矩阵：实对称矩阵A
- $f(X)$的秩 = $R(A)$ = 标准形中非零平方项数

  = A 的非零特征值个数

  = 正特征值个数 + 负特征值个数
- 可逆变换所得**标准形不唯一**；
- **正交变换 $X=CY$** 得**唯一标准形**：

  平方项<u>系数</u>恰为A的<u>特征值</u>，

  C的<u>列向量</u>恰为对应<u>特征向量</u>.

一般，可逆与正交变换都不唯一

实对称矩阵正定性判定:

- **定义法**: 对非零X都有 $X^T AX > 0$;
- **特征值法**: 特征值均为正;
- **合同法**: A与I合同, $A = C^T C$, C可逆;
- **顺序主子式法**: A的所有顺序主子式均为正.

例1. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 的秩为1, A中各行元素之和为3, 则 f 在正交变换 $X=QY$ 下的标准形为____________.

分析:

二次型的秩为1 $\Rightarrow$ 实对称矩阵 $A_{3\times3}$ 的秩为1

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\ 0\text{是}A\text{的2重特征值}\\ A\text{中各行元之和为3}\Rightarrow\ 3\text{是}A\text{的特征值}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f在正交变换 $X=QY$ 下的标准形为: $3y_3^2$

例2. 设$X^T AX = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_1x_3 + 2cx_2x_3$,

矩阵A满足 $AB=O$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

求正交变换 $X = CY$ 将二次型 $X^T AX$ 化为标准形.

分析: $O = AB = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 4 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+b & 2-a & * \\ a+c & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow a = 2, b = -1, c = -2$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 4 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -2\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}, AB=O, B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

$AB=O\Rightarrow$ B的列向量都是A的特征值0的特征向量.

显然$\beta_1=(1,0,1)^T$, $\beta_2=(2,-1,0)^T$ 线性无关,

$\Rightarrow$ 0至少是 A 的 2 重特征值.

A的特征值之和 = 对角元之和 $\Rightarrow$ 6是 A 的 1 重特征值.

设$\gamma=(x,y,z)^T$ 是 A 的特征值 6 的特征向量, 则:

$$\Rightarrow(\gamma,\alpha_1)=(\gamma,\alpha_2)=0$$

$\Rightarrow\beta_3=(1,2,-1)^T$ 是 A 的特征值 6 的特征向量

正交化, 单位化, ……

例3(2012). 已知$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型$f(X)=X^TA^TAX$的秩为2.

(1) 求实数 $a=2$ 的值; (2) 求正交变换 $X=QY$将f化为标准形.

分析： 二次型$X^T(A^TA)X$的秩为2 $\Leftrightarrow R(A^TA)=2$

$\Leftrightarrow R(A)=2$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&-1-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow a=-1$$

例3(2012). 已知$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型$f(X)=X^TA^TAX$的秩为2.

(1) 求实数$a=2$的值； (2) 求正交变换$X=QY$将f化为标准形.

$$\Rightarrow a=-1\Rightarrow A^TA=\cdots=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\left|\lambda I-A^TA\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&0&-2\\-1&\lambda-2&-2\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)\qquad\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$$

$$\Rightarrow a=-1 \quad A^TA=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}\ \lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$$

$$\lambda_1=0:\ \left(0I-A^TA\right)\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=2:\cdots\Rightarrow\alpha_2=\left(-1,1,0\right)^T,\quad \lambda_3=6:\cdots\Rightarrow\alpha_2=\left(1,1,2\right)^T$$

$$\gamma_i=\frac{1}{\|\alpha_i\|}\alpha_i\left(i=1,2,3\right)$$

$$Q=\left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\right)=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}&-\sqrt{3}&1\\-\sqrt{2}&\sqrt{3}&1\\\sqrt{2}&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow f\left(X\right)=2y_2^2+6y_3^2$$

例4(2015). 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $X=PY$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中$P=(e_1,e_2,e_3)$，若 $Q=(e_1,-e_3,e_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $X=QY$ 下的标准形为(   )

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$　　(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　(D) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$

法1:

$$\text{令}P=I\Rightarrow\begin{cases}Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow X=QY:\begin{cases}x_1=y_1,\\x_2=y_3,\\x_3=-y_2.\end{cases}\\ f=2x_1^2+x_2^2-x_3^2\quad=2y_1^2-y_2^2+y_3^2\end{cases}$$

例4(2015). 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $X=PY$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $P=(e_1,e_2,e_3)$，若 $Q=(e_1,-e_3,e_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $X=QY$ 下的标准形为( )

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$　　(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　(D) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$

法2: 正交变换 $X=PY$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

$P=(e_1,e_2,e_3)\Rightarrow e_1,e_2,e_3$分别是特征值$2,1,-1$的特征向量

$\Rightarrow e_1,-e_3,e_2$分别是特征值$2,-1,1$的特征向量

例5. 设 $a_i \in \mathrm{R}(i=1,2,3)$,

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+(x_3+a_3x_1)^2$$

问：当a_1,a_2,a_3满足什么条件时，二次型f正定？

分析： (1) 平方和形式的二次型未必正定：

$$f(x_1,x_2)=(x_1+x_2)^2$$

(2) 正定二次型定义：

$$\text{二次型} f \text{正定} \Leftrightarrow \forall 0 \neq X \in \mathbb{R}^n, f(X)>0$$

f 显然满足 $f(X)\geq 0, \forall 0 \neq X \in \mathbb{R}^n$

为了保证二次型正定，只需保证：$f(X)=0 \Rightarrow X=0$

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+(x_3+a_3x_1)^2$$

问：当a_1,a_2,a_3满足什么条件时，二次型f正定？

为保证二次型正定，只需保证：$f(X)=0 \Rightarrow X=0$

$$f(X)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+a_1x_2=0, \\ x_2+a_2x_3=0, \\ x_3+a_3x_1=0. \end{cases} \quad (*)$$

二次型f正定 $\Leftrightarrow$ 线性方程组(*)只有零解

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 \\ a_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow a_1a_2a_3 \neq -1$$

例6. 设A, B都是n阶正定矩阵，证明：

$$AB\text{正定} \Leftrightarrow AB = BA.$$

分析： (1) 先证明：AB与某个正定矩阵相似，

于是其特征值都是正实数：

A正定 $\Rightarrow \exists$可逆矩阵P使得：$A = PP^T$

B正定 $\Rightarrow \exists$可逆矩阵Q使得：$B = Q^TQ$

$$\Rightarrow AB = PP^TQ^TQ = P\left(P^TQ^T\right)QPP^{-1}$$

$$= P\left[(QP)^T(QP)\right]P^{-1}$$

P, Q可逆 $\Rightarrow QP$可逆

$\Rightarrow$ AB与正定阵$(QP)^T(QP)$相似，

特征值均为正实数！

例6. 设A, B都是n阶正定矩阵, 证明:

$$AB\text{正定} \Leftrightarrow AB = BA.$$

分析: (2) 再证明: AB对称 $\Leftrightarrow AB = BA$.

$$A, B\text{正定} \Rightarrow A^T = A, B^T = B$$

$$AB\text{对称} \Leftrightarrow (AB)^T = AB \Leftrightarrow B^T A^T = AB$$

$$\Leftrightarrow BA = AB$$

(3) 若AB正定, 则AB对称, 由(2)知$AB=BA$.

若$AB=BA$, 由(2)知AB实对称,

由(1)知AB特征值均为正实数, 因此AB正定!

谢 谢！