Mecánica Celeste

La Elipse

Nuria Angulo Fuentes
Cristina Callejón Maleno
Verónica Guerrero Contreras
Ainoa Muros Quesada
Rafael Nogales Vaquero
María del Mar Ruiz Martín
Laura Prados Sáez
Grado de Matemáticas
Universidad de Granada - UGR
Spain

Curso 2017/2018

1 Introducción

2 La elipse

Definición: se define la elipse como el lugar geométrico de los puntos de $\mathbb{R}^2$ cuya suma de las distancias a dos puntos dados, llamados focos, es constante. Es decir:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - F_1\| + \|x - F_2\| = d\} \tag{1}$$

donde F_1, F_2 son los focos y d es una constante positiva.

Buscamos expresar la elipse como

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| + < x, e >= K\} \tag{2}$$

para determinados $e \in \mathbb{R}^2$, $K > 0$ constantes. Para ello nos centraremos en aquellas elipses que tienen el foco F_1 en el punto (0,0). El resto de elipses, al ser traslaciones de las anteriores, las podremos expresar como

$$\{x + (F_{1,1}, F_{1,2}) : x \in \mathbb{R}^2, |x| + < x, e >= K\}$$

donde $(F_{1,1}, F_{1,2})$ es la posición del foco F_1.

Sea $x \in E$, entonces podemos afirmar que se verifica:

$$\|x\| + \|F_2 - x\| = d \Leftrightarrow \|F_2 - x\| = d - \|x\| \Rightarrow (\|F_2 - x\|)^2 = (d - \|x\|)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \|x\|^2 + \|F_2\|^2 - 2 < F_2, x >= d^2 + \|x\|^2 - 2 < d, \|x\| > \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \|F_2\|^2 - 2 < F_2, x >= d^2 - 2 < d, \|x\| > \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\|F_2\|^2}{2d} - \frac{< F_2, x >}{d} = \frac{d}{2} - \|x\| \Leftrightarrow \|x\| + < -\frac{F_2}{d}, x >= \frac{d^2 - \|F_2\|^2}{2d}$$

Definiendo

$$e := -\frac{1}{d}F_2, K := \frac{d^2 - \|F_2\|^2}{2d} \tag{3}$$

obtenemos la expresión buscada.

A continuación vamos a ver que todo conjunto de la forma

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| + < x, e >= K\}, e \in \mathbb{R}^2, \|e\| < 1, K > 0$$

representa una elipse con el foco $F_1 = (0,0)$ para determinada distancia $d > 0$ y foco $F_2 \in \mathbb{R}^2$.

En virtud a las ecucaciones dadas en (3), buscamos F_2, d de la forma

$$F_2 = -ed \tag{4}$$

$$2dK - d^2 + \|F_2\|^2 = 0 \tag{5}$$

Sustituyendo (4) en (5) obtenemos:

$$2dK - d^2 + \|ed\|^2 = 0 \Leftrightarrow d(2K - d + d\|e\|^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ o \\ 2K - d + d\|e\|^2 = 0 \end{cases}$$

Desechamos la primera opción, puesto que sustituyendo en (4) obtendríamos que F_2 es el punto (0,0), coincidiendo con F_1, y por tanto, no tendríamos una elipse. Desarrollamos entonces la segunda posibilidad:

$$2K - d + d\|e\|^2 = 0 \Leftrightarrow d = \frac{2K}{1 - \|e\|^2} \tag{6}$$

Y sustituyendo finalmente en (4) obtenemos la siguiente expresión:

$$F_2 = \frac{2K}{\|e\|^2 - 1} e \tag{7}$$

Despejando e y K de (4) y (5) respectivamente, obtenemos las siguientes expresiones:

$$e = -\frac{1}{d} F_2, K = \frac{d^2 - \|F_2\|^2}{2d} \tag{8}$$

Pasamos ahora a sustituir en la expresión estos valores:

$$\|x\| + < x, e >= K \Leftrightarrow \|x\| + < x, -\frac{1}{d} F_2 >= \frac{d^2 - \|F_2\|^2}{2d} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2d\|x\| + < x, -2F_2 >= d^2 - \|F_2\|^2 \Leftrightarrow \|F_2\|^2 + -2 < x, F_2 >= d^2 + 2d\|x\| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|x\|^2 + \|F_2\|^2 + -2 < x, F_2 >= \|x\|^2 + d^2 + 2d\|x\| \Leftrightarrow (\|x - F_2\|)^2 = (\|x\| - d)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \|x - F_2\| = \|x\| - d \\ o \\ \|x - F_2\| = d - \|x\| \end{cases}$$

Veamos por reducción al absurdo que no es posible que se de la primera igualdad:

$$\|x\| - d < \|x\| - \|F_2\| \leq \|x - F_2\| = \|x\| - d$$

Por tanto, podemos asegurar que se da la igualdad $\|x - F_2\| = d - \|x\|$. Y entonces

$$\|x\| + \|x - F_2\| = d$$

Concluímos así que la expresión inicial define una elipse con foco $F_1 = (0, 0)$ y como parámetros d y F_2 los dados en (6) y (7).