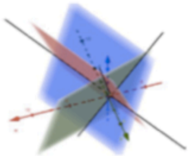
5. ค่าเจาะจง และเวกเตอร์เจาะจง



5.1	ค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงของการแปลงเชิงเส้น	165
5.2	ค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงของเมทริกซ์	168
5.3	การแปลงเมทริกซ์ให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม (Diagonalization)	178
5.4	รูปแบบบัญญัติจอร์แดน (Jordan Canonical Form)	187
5.5	รูปแบบกำลังสอง (Quadratic Form)	199

ในบทนี้เราจะศึกษาเกี่ยวกับเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า ภายใต้การแปลงเชิงเส้นจะมีทิศทางในแนวเดียวกันกับเวกเตอร์เดิม และศึกษาการแปลงเมทริกซ์ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ทแยงมุม หรือรูปแบบบัญญัติของจอร์แดน ซึ่งสามารถนำไปคำนวณเอกซ์โพเนนเชียลของเมทริกซ์ รวมถึงการประยุกต์ในการอธิบายพฤติกรรมของผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ หรือการกระจายตัวของข้อมูลโดยใช้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Covariance Matrix)

5.1 ค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงของการแปลงเชิงเส้น

ในบทนนี้เราจะสนใจศึกษาการแปลงเชิงเส้นที่ส่งจากปริภูมิเวกเตอร์ V ไปยังปริภูมิเดิม กล่าวคือ $T : V \to V$

บทนิยาม 5.1 ให้ $T : V \to V$ เป็นการแปลงเชิงเส้นบนปริภูมิเวกเตอร์ V เราจะเรียกสเกลาร์ $\lambda \in \mathbb{F}$ ว่า **ค่าเจาะจง (eigenvalue)** ของ T ถ้ามีเวกเตอร์ $v \in V$ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ซึ่ง

$$T(v) = \lambda v$$

และเราเรียก v ว่า **เวกเตอร์เจาะจง (eigenvector)** ที่สมนัยกับ (corresponding to) λ

ตัวอย่าง 5.1 ให้ $T : \mathbb{M}_{3\times1} \to \mathbb{M}_{3\times1}$ กำหนดโดย

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} \qquad \text{สำหรับทุก} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times1}$$

จะได้ว่า $\lambda = 1$ เป็นค่าเจาะจงของ T และมีเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = 1$ คือ $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
เนื่องจาก

$$T(v) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1v$$

และได้ว่า $\lambda = 2$ เป็นค่าเจาะจงของ T และมีเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = 2$ คือ $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
เนื่องจาก

$$T(w) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2w$$

ตัวอย่าง 5.2 ให้ $T : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ เป็นการแปลงเชิงเส้น ที่กำหนดโดย

$$T(ax+b) = 3ax - 2b \qquad \text{สำหรับทุก } ax+b \in \mathbb{P}_1$$

จะได้ว่า $\lambda = 3$ เป็นค่าเจาะจงของ T และมีเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = 3$ คือ $p(x) = 2x$

ตัวอย่าง 5.3 ให้ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ กำหนดโดย

$$T((x,y)) = (x+y, 3y) \qquad \text{สำหรับทุก } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

จงหาค่าเจาะจงทั้งหมดของ T และเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจง
วิธีทำ สมมติให้ λ เป็นค่าเจาะจงของ T โดยมีเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกัน คือ $(x,y) \neq (0,0) \in \mathbb{R}^2$
ดังนั้น

$$T((x,y)) = (x+y, 3y) = \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

จะได้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + y &= \lambda x \\ 3y &= \lambda y \end{aligned}$$

ซึ่งจัดรูปสมการได้เป็น

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x + y &= 0 \\ (3-\lambda)y &= 0 \end{aligned}$$

และเขียนในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \end{array}\right]$$

ระบบสมการนี้จะมีผลเฉลยที่ไม่ใช่ $x = y = 0$ ก็ต่อเมื่อ เป็นระบบที่มีจำนวนผลเฉลยเป็นอนันต์ ซึ่งจะได้ว่า

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

ดังนั้น $\lambda = 1, 3$

เนื่องจากเราสามารถเขียนการแปลงเชิงเส้นบนปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติจำกัดให้อยู่ในรูปการแปลงเชิงเมทริกซ์ผ่านการพิจารณาการแปลงเชิงเส้นของพิกัด เช่น ในตัวอย่าง 5.3 เราสามารถพิจารณาการแปลงเชิงเส้นของพิกัดได้เป็น $S : \mathbb{M}_{2\times1} \to M_{2\times1}$ ที่กำหนดโดย

$$S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{สำหรับทุก } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times1}$$

เราจึงเน้นศึกษาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงของเมทริกซ์

5.2 ค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงของเมทริกซ์

บทนิยาม 5.2 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติ $n \times n$ เราจะเรียกสเกลาร์ λ ว่า **ค่าเจาะจง (eigenvalue)** ของเมทริกซ์ A ถ้ามีเมทริกซ์ $X \in \mathbb{M}_{n\times 1}$ ที่ไม่ใช่เมทริกซ์ศูนย์ ซึ่ง

$$AX = \lambda X$$

และเราเรียก X ว่า **เวกเตอร์เจาะจง (eigenvector)** ที่สมนัยกับ (corresponding to) λ

ตัวอย่าง 5.4 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $X = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจง $\lambda = 4$

เนื่องจาก

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 4X$$

จากนิยามข้างต้น เราจะเห็นว่า ถ้า X เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจง λ

$$(A - \lambda I_n)X = \overline{0}_{n\times 1}$$

ถ้า $A - \lambda I_n$ สามารถหาอินเวอร์สได้ จะได้ว่า มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ

$$X = (A - \lambda I_n)^{-1}\overline{0}_{n\times 1} = \overline{0}_{n\times 1}$$

ซึ่งทำให้เกิดข้อขัดแย้งที่ว่า เวกเตอร์เจาะจง X ไม่เป็นเมทริกซ์ศูนย์
จึงสรุปได้ว่า $A - \lambda I_n$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน และไม่สามารถหาอินเวอร์สได้ นั่นคือ

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

และได้ว่าระบบสมการเชิงเส้น $(A - \lambda I_n)X = \overline{0}_{n\times 1}$ มีจำนวนผลเฉลยเป็นอนันต์

จากการพิจารณาข้างต้น เราสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติ $n \times n$ และ λ เป็นสเกลาร์ แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) λ เป็นค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A

(ii) มี $X \in \mathbb{M}_{n\times 1}$ ที่ไม่ใช่เมทริกซ์ศูนย์ ซึ่ง $AX = \lambda X$

(iii) ระบบสมการเชิงเส้น $(A - \lambda I_n)X = \bar{0}_{n\times 1}$ มีจำนวนผลเฉลยเป็นอนันต์

(iv) $\det(A - \lambda I_n) = 0$

ดังนั้นในการหาค่าเจาะจง และเวกเตอร์เจาะจง เราจะเริ่มพิจารณาหาค่าเจาะจง λ จาก

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

หลังจากนั้นจะแก้ระบบสมการ $(A - \lambda I_n)X = \bar{0}_{n\times 1}$ เพื่อหาเวกเตอร์เจาะจง X ที่ไม่ใช่ผลเฉลยชัดแจ้ง

บทนิยาม 5.3 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติ $n \times n$ เราเรียกสมการ

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) ของเมทริกซ์ A และเรียก

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

ซึ่งเป็นพหุนามดีกรี n ในพจน์ λ และสัมประสิทธิ์ $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ว่า **พหุนามลักษณะเฉพาะ (characteristic polynomial)** ของเมทริกซ์ A

เมื่อ λ เป็นค่าเจาะจง ระบบสมการเชิงเส้น $(A - \lambda I_n)X = \bar{0}_{n\times 1}$ จะมีจำนวนผลเฉลยเป็นอนันต์ ซึ่งคือปริภูมิสู่ศูนย์ (kernel) ของเมทริกซ์ $A - \lambda I_n$ และได้ว่าเป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{M}_{n\times 1}$ เราจะเรียกเซตของผลเฉลยของสมการดังกล่าวดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 5.4 ให้ λ เป็นค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A เราเรียกเซตของผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น $(A - \lambda I_n)X = \bar{0}_{n\times 1}$ นั่นคือ $\ker(A - \lambda I_n)$ ว่า **ปริภูมิเจาะจง (eigenspace)** ของเมทริกซ์ A สำหรับค่าเจาะจง λ เขียนแทนด้วย $C_A(\lambda)$ นั่นคือ

$$C_A(\lambda) = \left\{X \in \mathbb{M}_{n\times 1} \middle| (A - \lambda I_n)X = \bar{0}_{n\times 1}\right\}$$

ตัวอย่าง 5.5 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา

1. สมการลักษณะเฉพาะของ A

2. ค่าเจาะจงของ A

3. ปริภูมิเจาะจงของ A สำหรับแต่ละค่าเจาะจง

ตัวอย่าง 5.6 ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา

1. สมการลักษณะเฉพาะของ A

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (3-\lambda)(1-\lambda) - (-1)(1) \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 4 \\ &= (\lambda - 2)^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะของ A คือ

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

2. ค่าเจาะจงของ A

วิธีทำ ค่าเจาะจงของ A คือ $\lambda = 2$ ซึ่งเป็นรากที่ซ้ำกัน 2 ครั้ง

3. ปริภูมิเจาะจงของ A สำหรับแต่ละค่าเจาะจง

วิธีทำ ให้ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 1}$ ที่ทำให้

$$(A - \lambda I_2)X = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 0$ สามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการดำเนินการตามแถว ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2:=R_2+R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ให้ $y = t$ จะได้ $x = -t$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ ดังนั้น ปริภูมิเจาะจงของ A สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 2$ คือ

$$\begin{aligned} C_A(2) &= \left\{\begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.7 ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ จงหา

1. สมการลักษณะเฉพาะของ A

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 5 \\ -2 & -3-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (3-\lambda)(-3-\lambda) - (-2)(5) \\ &= \lambda^2 + 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะของ A คือ

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

2. ค่าเจาะจงของ A

วิธีทำ ค่าเจาะจงของ A คือ $\lambda = -i$ และ $\lambda = i$ ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อน หากเราพิจารณาฟีลด์ $\mathbb{F}$ เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน

3. ปริภูมิเจาะจงของ A สำหรับแต่ละค่าเจาะจง

วิธีทำ ให้ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 1}$ ที่ทำให้

$$(A-\lambda I_2)X = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 5 \\ -2 & -3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = -i$ สามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการดำเนินการตามแถว ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3+i & 5 & 0 \\ -2 & -3+i & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 := \frac{1}{10}(3-i)R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3-i}{2} & 0 \\ -2 & -3+i & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 := R_2 + 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3-i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ให้ $y = t$ จะได้ $x = \left(\frac{-3+i}{2}\right)t$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ ดังนั้น ปริภูมิเจาะจงของ A สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = -i$ คือ

$$\begin{aligned} C_A(-i) &= \left\{\begin{bmatrix} \left(\frac{-3+i}{2}\right)t \\ t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{t\begin{bmatrix} \frac{-3+i}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} \frac{-3+i}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \end{aligned}$$

สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = i$ สามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการดำเนินการตามแถว ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3-i & 5 & 0 \\ -2 & -3-i & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 := \frac{1}{10}(3+i)R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3+i}{2} & 0 \\ -2 & -3-i & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 := R_2 + 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3+i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ให้ $y = t$ จะได้ $x = \left(\frac{-3-i}{2}\right)t$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ ดังนั้น ปริภูมิเจาะจงของ A สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = i$ คือ

$$\begin{aligned} C_A(i) &= \left\{\begin{bmatrix} \left(\frac{-3-i}{2}\right)t \\ t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{t\begin{bmatrix} \frac{-3-i}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} \frac{-3-i}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \end{aligned}$$

ข้อสังเกต เนื่องจากสมการลักษณะเฉพาะเป็นสมการพหุนามในตัวแปร λ ดีกรี n ซึ่งโดยทั่วไปจะมีรากทั้งหมด n ราก สามารถแบ่งเป็นกรณีต่างๆ ได้ดังนี้

- มีรากเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันทั้งหมด
- มีรากเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน
- มีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน

อย่างไรก็ตาม เราจะเน้นศึกษาเฉพาะในกรณีที่มีรากเป็นจำนวนจริง เนื่องจากเราสนใจฟีลด์ที่เป็นเซตของจำนวนจริง

ตัวอย่าง 5.8 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา

1. สมการลักษณะเฉพาะของ A

2. ค่าเจาะจงของ A

3. ปริภูมิเจาะจงของ A สำหรับแต่ละค่าเจาะจง

ตัวอย่าง 5.9 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา

1. สมการลักษณะเฉพาะของ A

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_3) &= \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (1-\lambda)^2(3-\lambda)\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะของ A คือ

$$(1-\lambda)^2(3-\lambda)=0$$

2. ค่าเจาะจงของ A

วิธีทำ ค่าเจาะจงของ A คือ $\lambda = 1$ ซึ่งเป็นรากที่ซ้ำกัน 2 ครั้ง และ $\lambda = 3$

3. ปริภูมิเจาะจงของ A สำหรับแต่ละค่าเจาะจง

วิธีทำ ให้ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 1}$ ที่ทำให้

$$(A-\lambda I_3)X = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 1$ สามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการดำเนินการตามแถว ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] &\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ &\xrightarrow{R_1 := \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ &\xrightarrow{R_2 := R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\end{aligned}$$

ให้ $y = s$ และ $z = t$ จะได้ $x = -t$ เมื่อ $s, t \in \mathbb{R}$ ดังนั้น ปริภูมิเจาะจงของ A สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 1$

คือ

$$C_A(1) = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ s \\ t \end{bmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 3$ สามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการดำเนินการตามแถว ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 := -\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 := R_3 - 2R_1]{R_2 := R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 := -\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ให้ $z = t$ จะได้ $y = \frac{1}{2}t$ และ $x = 0$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ ดังนั้น ปริภูมิเจาะจงของ A สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 3$ คือ

$$C_A(3) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ทฤษฎีบท 5.2 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ และ $X_1, X_2, \ldots, X_k \in \mathbb{M}_{n\times 1}$ เป็นเวกเตอร์เจาะจงของ A ที่สมนับกับค่าเจาะจง $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ที่แตกต่างกัน จะได้ว่า เซต $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

พิสูจน์ ให้ p เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุด ซึ่ง $\{X_1, X_2, \ldots, X_p\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น ถ้า $p = k$ แล้วจะได้ว่าทฤษฎีบทเป็นจริง
สมมติให้ $p < k$ เราจะได้ว่า จะมี $c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{R}$ ซึ่ง X_{p+1} สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้น

$$X_{p+1} = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_pX_p$$

เนื่องจาก X_{p+1} เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจง λ_{p+1} จะได้

$$\begin{aligned} AX_{p+1} &= \lambda_{p+1}v_{p+1} \\ &= \lambda_{p+1}(c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_pX_p) \\ &= \lambda_{p+1}c_1X_1 + \lambda_{p+1}c_2X_2 + \cdots + \lambda_{p+1}c_pX_p \end{aligned}$$

ในอีกทางหนึ่ง เราสามารถคำนวณ

$$\begin{aligned} AX_{p+1} &= A(c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_pX_p) \\ &= c_1AX_1 + c_2AX_2 + \cdots + c_pAX_p \\ &= \lambda_1c_1X_1 + \lambda_2c_2X_2 + \cdots + \lambda_nc_nX_p \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\lambda_{p+1}c_1X_1 + \lambda_{p+1}c_2X_2 + \cdots + \lambda_{p+1}c_pX_p = \lambda_1c_1X_1 + \lambda_2c_2X_2 + \cdots + \lambda_nc_nX_p$$

นั่นคือ

$$(\lambda_{p+1} - \lambda_1)c_1X_1 + (\lambda_{p+1} - \lambda_2)c_2X_2 + \cdots + (\lambda_{p+1} - \lambda_p)c_pX_p = \overline{0}_{n\times 1}$$

เนื่องจาก $X_1, X_2, \ldots, X_p$ เป็นอิสระเชิงเส้น และค่าเจาะจง $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1}$ แตกต่างกัน จึงได้ว่า

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_p = 0$$

ดังนั้น $X_{p+1} = \overline{0}_{n\times 1}$ ซึ่งขัดแย้งกับ X_{p+1} เป็นเวกเตอร์เจาะจง
จึงสรุปได้ว่า $p = k$ และ $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

5.3 การแปลงเมทริกซ์ให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม (Diagonalization)

เมทริกซ์ทแยงมุมเป็นเมทริกซ์จัตุรัส ซึ่งมีสมาชิกที่ไม่ได้อยู่บนแนวเส้นทแยงมุมหลักทุกตัวเป็นศูนย์ ให้

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า

$$D^k = \begin{bmatrix} d_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^k \end{bmatrix}$$

เช่น $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ จะได้

$$D^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad D^4 = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จึงเห็นได้ว่า เราสามารถคำนวณการยกกำลังของเมทริกซ์ทแยงมุมได้สะดวก เราจะศึกษาว่าสำหรับเมทริกซ์จัตุรัส จะสามารถแปลงให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้หรือไม่ ซึ่งจะช่วยให้สะดวกในการคำนวณการยกกำลังของเมทริกซ์

บทนิยาม 5.5 ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ เรากล่าวว่า เมทริกซ์ A **คล้าย (similar) กับ** เมทริกซ์ B ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P มิติ $n \times n$ ที่ทำให้

$$B = P^{-1}AP$$

ตัวอย่าง 5.10 เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ คล้ายกับเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

พิจารณา $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งจะได้ $P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ และ

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= B \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 5.3 ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ และเป็นเมทริกซ์ที่คล้ายกัน แล้วจะได้ว่า A และ B มีค่าเจาะจงชุดเดียวกัน

พิสูจน์ จะมีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P ซึ่งทำให้ $P^{-1}AP = B$ พิจารณา

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I_n) &= \det(P^{-1}AP - \lambda I_n) \\ &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}I_nP) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) \\ &= \det(P^{-1})\det(A - \lambda I_n)\det(P) \\ &= \det(A - \lambda I_n) \end{aligned}$$

ดังนั้นเมทริกซ์ A และ B มีสมการลักษณะเฉพาะเหมือนกัน จึงทำให้ A และ B มีค่าเจาะจงชุดเดียวกัน

บทนิยาม 5.6 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ เราจะกล่าวว่า A **สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ (diagonalizable)** ก็ต่อเมื่อ A คล้ายกับเมทริกซ์ทแยงมุม นั่นคือ มีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P ที่มีมิติ $n \times n$ ซึ่ง $P^{-1}AP = D$ เมื่อ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

ทฤษฎีบท 5.4 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$
A สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม ก็ต่อเมื่อ A มีเวกเตอร์เจาะจง $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ที่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน n เวกเตอร์
นอกจากนี้ ถ้า $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ เป็นค่าเจาะจงที่สมนัยกับเวกเตอร์เจาะจง $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ตามลำดับ แล้วจะได้ว่า

$$P^{-1}AP = D := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

เมื่อ $P = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีเมทริกซ์หลักเป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจงในแต่ละหลัก

พิสูจน์ เมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์ที่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ ก็ต่อเมื่อ มีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน $P = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix}$ ซึ่ง $P^{-1}AP = D$ เมื่อ $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม
จาก

$$AP = PD$$

จะได้

$$A\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} AX_1 & AX_2 & \cdots & AX_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 X_1 & \lambda_2 X_2 & \cdots & \lambda_n X_n \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$AX_i = \lambda_1 X_i \qquad \text{สำหรับ } i = 1, 2, \ldots n$$

นั่นคือ X_i เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจง λ_i
และเนื่องจาก P เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน จึงได้ว่า ถ้า $c_1, c_2, \ldots, c_n$ เป็นสเกลาร์ซึ่ง

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n = \overline{0}_{n\times 1}$$

และเขียนในรูประบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \overline{0}_{n\times 1}$$

จะมีผลเฉลยเพียงคำตอบเดียวคือ

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = P^{-1}\overline{0}_{n\times 1} = \overline{0}_{n\times 1}$$

นั่นคือ $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ จึงได้ว่า เวกเตอร์เจาะจง $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นอิสระเชิงเส้น

ตัวอย่าง 5.11 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ จงพิจารณาว่า A สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้หรือไม่ ถ้าสามารถแปลงได้ จงหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P และเมทริกซ์ทแยงมุม D ซึ่ง $P^{-1}AP = D$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 5.5 เราทราบว่า A มีค่าเจาะจงคือ $\lambda = 0$ และ $\lambda = 5$ และมีเวกเตอร์เจาะจง $X_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ที่สมนัยกับ $\lambda = 0$ และ $X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ที่สมนัยกับ $\lambda = 5$ จึงได้ว่า A สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม โดยมี

$$P = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{และ } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า $P^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ และ

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.12 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ จงพิจารณาว่า A สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้หรือไม่ ถ้าสามารถแปลงได้ จงหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P และเมทริกซ์ทแยงมุม D ซึ่ง $P^{-1}AP = D$

ทฤษฎีบท 5.5 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ ซึ่งสามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม โดย $P^{-1}AP = D$ เมื่อ $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม แล้วจะได้ว่า

$$A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}P^{-1}$$

พิสูจน์ จาก $P^{-1}AP = D$ จะได้ $A = PDP^{-1}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} A^k &= (PDP^{-1})^k \\ &= (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) \\ &= PD^kP^{-1} \\ &= P\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}P^{-1} \end{aligned}$$

จากทฤษฎีบท 5.4 ในการแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม เราจะพิจารณาว่าเมทริกซ์ A มีเวกเตอร์เจาะจงที่เป็นอิสระเชิงเส้นจำนวน n เวกเตอร์หรือไม่ อย่างไรก็ตาม เราสามารถพิจารณาจากค่าเจาะจง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.6 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติ $n \times n$ ถ้า A มีค่าเจาะจงที่เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ จำนวน n ค่า แล้ว A สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

พิสูจน์ ให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีค่าเจาะจงเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน n ค่า คือ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ และให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจงแต่ละค่า โดยทฤษฎีบท 5.2 จะได้ว่า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นอิสระเชิงเส้น ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 5.4 จะได้ว่า A สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

ในกรณีที่ค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A มีค่าไม่แตกต่างกันทั้งหมด เราจะพิจารณาภาวะรากซ้ำ ดังนี้

บทนิยาม 5.7 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติ $n \times n$ และให้ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ เป็นรากที่แตกต่างกันของสมการลักษณะเฉพาะของ A จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก $s_1, s_2, \ldots, s_k$ ซึ่งทำให้สามารถเขียนพหุ

นามลักษณะเฉพาะ

$$P_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{s_1}(\lambda-\lambda_2)^{s_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{s_k}$$

โดยที่ $s_1+s_2+\cdots+s_k = n$
เราเรียก $s_1, s_2, \ldots, s_k$ ว่า **ภาวะรากซ้ำ (multiplicity)** ของค่าเจาะจง $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 5.7 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติ $n\times n$ และให้ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ เป็นค่าเจาะจงทั้งหมดของ A ที่แตกต่างกัน ซึ่งมีภาวะรากซ้ำของแต่ละค่าเจาะจงเป็น $s_1, s_2, \ldots, s_k$ ตามลำดับ โดยที่ $s_1+s_2+\cdots+s_k = n$ แล้วจะได้ว่า A สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละปริภูมิเจาะจง $C_A(\lambda_i)$ สำหรับค่าเจาะจง λ_i

$$\dim(C_A(\lambda_i)) = s_i, \quad \text{สำหรับทุก } i = 1, 2, \ldots, k$$

พิสูจน์ สมมติว่า A สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม จะได้ว่า A มีเวกเตอร์เจาะจงที่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน n เวกเตอร์ นั่นคือ แต่ละปริภูมิเจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจงแต่ละค่าจะมีมิติเท่ากับภาวะรากซ้ำ

ในทางกลับกัน สมมติว่า $\dim(C_A(\lambda_i)) = s_i$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \ldots, k$ จะได้ว่า แต่ละปริภูมิเจาะจง $C_A(\lambda_i)$ จะมีเวกเตอร์เจาะจง s_i เวกเตอร์ ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นกัน ซึ่งทำให้ได้เวกเตอร์เจาะจงทั้งหมด $s_1+s_2+\cdots+s_k = n$ เวกเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้น โดยทฤษฎีบท 5.4 จึงสรุปได้ว่า A สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

ตัวอย่าง 5.13 ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P ที่ทำให้ $P^{-1}AP$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม และหา A^6
วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I_2) &= \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) \\
&= (3-\lambda)(3-\lambda)-(2)(2) \\
&= \lambda^2 - 6\lambda + 5 \\
&= (\lambda-1)(\lambda-5)
\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะของ A คือ

$$(\lambda-1)(\lambda-5) = 0$$

และได้ว่า ค่าเจาะจงของ A คือ $\lambda = 1$ และ $\lambda = 5$ ซึ่งเป็นรากจำนวนจริงที่แตกต่างกัน ดังนั้น A สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

ให้ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 1}$ ที่ทำให้

$$(A - \lambda I_2)X = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 1$ สามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการดำเนินการตามแถว ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1:=\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2:=R_2-2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ให้ $y = t$ จะได้ $x = -t$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ ดังนั้น ปริภูมิเจาะจงของ A สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 1$ คือ

$$C_A(1) = \left\{\begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

ซึ่งมีเวกเตอร์เจาะจง $X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ที่สมนัยกับ $\lambda = 1$

สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 5$ สามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการดำเนินการตามแถว ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1:=-\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2:=R_2-2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ให้ $y = t$ จะได้ $x = t$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ ดังนั้น ปริภูมิเจาะจงของ A สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 5$ คือ

$$C_A(5) = \left\{\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

ซึ่งมีเวกเตอร์เจาะจง $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ที่สมนัยกับ $\lambda = 5$

ให้ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ จะมี $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ซึ่งทำให้ $P^{-1}AP = D$ และได้

ว่า

$$\begin{aligned} A^6 = PD^6P^{-1} &= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5^6 & -5^6 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1-5^6 & 1-5^6 \\ 1-5^6 & -1-5^6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.14 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

จงตรวจสอบว่า A สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมหรือไม่ ถ้าสามารถแปลงได้ จงหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P และเมทริกซ์ทแยงมุม D ซึ่ง $P^{-1}AP = D$

ตัวอย่าง 5.15 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

จงตรวจสอบว่า A สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมหรือไม่ ถ้าสามารถแปลงได้ จงหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P และเมทริกซ์ทแยงมุม D ซึ่ง $P^{-1}AP = D$

5.4 รูปแบบบัญญัติจอร์แดน (Jordan Canonical Form)

ในกรณีที่เมทริกซ์จัตุรัส A ไม่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม เนื่องจากมิติของปริภูมิเจาะจงน้อยกว่าภาวะรากซ้ำของค่าเจาะจงที่สมนัยกัน ทำให้ไม่สามารถหาเวกเตอร์เจาะจงที่เป็นอิสระเชิงเส้นได้ครบตามจำนวนภาวะรากซ้ำ อย่างไรก็ตาม หากเราพิจารณาบนฟีลด์ของจำนวนวนเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ เราสามารถแปลงเมทริกซ์ให้อยู่ในรูปสามเหลี่ยมบนได้

บทนิยาม 5.8 เราเรียกเมทริกซ์จัตุรัส มิติ $k \times k$ ในรูป

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

ว่า **บล็อคของจอร์แดน (Jordan Block)** ขนาด k

ตัวอย่าง 5.16 เมทริกซ์ต่อไปนี้เป็นตัวอย่าง บล็อคของจอร์แดน เช่น

- บล็อคของจอร์แดน ขนาด 1 เช่น $[2], [-1]$
- บล็อคของจอร์แดน ขนาด 2 เช่น $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
- บล็อคของจอร์แดน ขนาด 3 เช่น $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- บล็อคของจอร์แดน ขนาด 4 เช่น $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

บทนิยาม 5.9 เราเรียกเมทริกซจัตุรัส มิติ $n \times n$ ที่อยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_m \end{bmatrix}$$

เมื่อ $J_1, J_2, \ldots, J_m$ เป็นบล็อคของจอร์แดน ขนาด $k_1, k_2, \ldots, k_m$ โดยที่ $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$ ว่าอยู่ใน **รูปแบบบัญญัติของจอร์แดน (Jordan canonical form)**

ตัวอย่าง 5.17 เมทริกซ์ต่อไปนี้อยู่ในรูปแบบบัญญัติของจอร์แดน

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นบล็อคของจอร์แดน 1 บล็อค
2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ประกอบด้วยบล็อคของจอร์แดน $J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $J_2 = [1]$
3. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ประกอบด้วยบล็อคของจอร์แดน $J_1 = [2]$, $J_2 = [2]$ และ $J_3 = [3]$
   และเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม
4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ประกอบด้วยบล็อคของจอร์แดน $J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $J_2 = [2]$ และ $J_3 = [2]$

ต่อไปเราจะศึกษาสมบัติของบล็อคของจอร์แดน

ทฤษฎีบท 5.8 ให้

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

เป็นบล็อคของจอร์แดน ขนาด k จะได้ว่า

(i) เมทริกซ์ J มีค่าเจาะจงเพียงค่าเดียว คือ λ_0

(ii) ปริภูมิเจาะจงของ J สำหรับค่าเจาะจง λ_0 มีมิติเป็น 1 นั่นคือ $\dim(C_J(\lambda_0)) = 1$

(iii) จำนวนเต็มบวก p ที่น้อยที่สุด ซึ่ง

$$(J - \lambda_0 I_k)^p = \overline{0}$$

มีค่าเท่ากับ k

พิสูจน์ (i) เนื่องจาก $J - \lambda I_k$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน จะได้สมการลักษณะเฉพาะของ J

$$(-1)^k(\lambda - \lambda_0)^k = 0$$

ดังนั้นค่าเจาะจงคือ λ_0 เพียงค่าเดียว

(ii) สำหรับค่าเจาะจง λ_0 พิจารณาระบบสมการเชิงเส้น $(J - \lambda_0 I_k)X = \overline{0}$ จะได้เมทริกซ์แต่งเติม

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ซึ่งมีผลเฉลย คือ $x_1 = t$ และ $x_2 = x_3 = \cdots = x_k = 0$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ ดังนั้นปริภูมิเจาะจงของ J สำหรับ λ_0 คือ

$$C_J(\lambda_0) = \left\{ t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{k\times 1} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

ดังนั้น $\dim(C_J(\lambda_0)) = 1$

(iii) จะสังเกตเห็นว่า

$$J - \lambda_0 I_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อยกกำลังจะเห็นว่าเลข 1 ในแนวทแยงจะอยู่เหนือแนวทแยงมุมขึ้นไปเรื่อยๆ จนกระทั่ง $(J - \lambda_0 I_k)^k =$

$\overline{0}$ ซึ่งจะสามารถพิสูจน์อย่างละเอียดโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เช่น ในกรณี $k = 3$ จะเห็นว่า

$$J - \lambda_0 I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (J - \lambda_0 I_3)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (J - \lambda_0 I_3)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

บทนิยาม 5.10 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ และ λ เป็นค่าเจาะจงของ A เราเรียก $X \in \mathbb{M}_{n\times 1}$ ว่า **เวกเตอร์เจาะจงวางนัยทั่วไป (generalized eigenvector)** ของ A ที่สมนัยกับค่าเจาะจง λ ก็ต่อเมื่อ $X \neq \overline{0}_{n\times 1}$ และ

$$(A - \lambda I_n)^k X = \overline{0}_{n\times 1}$$

สำหรับบางจำนวนเต็มบวก k

ตัวอย่าง 5.18 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จะเห็นว่า A มีค่าเจาะจง $\lambda = 1$ เพียงค่าเดียว และมีเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = 1$ คือ $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

ให้ $X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(A - \lambda I_2)^2 X_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ดังนั้น X_2 เป็นเวกเตอร์เจาะจงวางนัยทั่วไปของ A ที่สมนัยกับค่าเจาะจง $\lambda = 1$

จากตัวอย่างข้างต้น จะสังเกตเห็นว่า

$$(A - \lambda I_2) X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = X_1$$

โดยทั่วไป ถ้า X_k เป็นเวกเตอร์เจาะจงวางนัยทั่วไปของ A ที่สมนัยกับค่าเจาะจง λ โดยที่

$$(A - \lambda I_n)^k X_k = \overline{0}_{n\times 1}$$

ให้ X_{k+1} เป็นผลเฉลยของระบบสมการ

$$(A - \lambda I_n)X_{k+1} = X_k$$

จะได้ว่า

$$(A - \lambda I_n)^{k+1} X_{k+1} = (A - \lambda I_n)^k (A - \lambda I_n) X_{k+1} = (A - \lambda I_n)^k X_k = \overline{0}_{n\times 1}$$

นั่นคือ X_{k+1} เป็นเวกเตอร์เจาะจงวางนัยทั่วไปของ A ที่สมนัยกับค่าเจาะจง λ

บทนิยาม 5.11 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n\times n$ และ λ เป็นค่าเจาะจงของ A เราเรียกเซตของผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น $(A - \lambda I_n)^k X = \overline{0}_{n\times 1}$ นั่นคือ $\ker((A - \lambda I_n)^k)$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก ว่า **ปริภูมิเจาะจงวางนัยทั่วไป (generalized eigenspace)** ของเมทริกซ์ A สำหรับค่าเจาะจง λ เขียนแทนด้วย $K_A(\lambda)$ นั่นคือ

$$K_A(\lambda) = \left\{X \in \mathbb{M}_{n\times 1} \mid (A - \lambda I_n)^k X = \overline{0}_{n\times 1} \text{ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก } k\right\}$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะกล่าวโดยไม่แสดงบทพิสูจน์

ทฤษฎีบท 5.9 **(Jordan Decomposition Theorem)** ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ และให้ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ เป็นค่าเจาะจงของ A ที่มีภาวะรากซ้ำ $s_1, s_2, \ldots, s_k$ ตามลำดับ จะได้ว่า

(i) $\dim(K_A(\lambda_i)) = s_i$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$

(ii) $K_A(\lambda_1) \cup K_A(\lambda_2) \cup \cdots \cup K_A(\lambda_n) = \mathbb{C}^n$

ทฤษฎีบท 5.10 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ จะได้ว่า A คล้ายกับเมทริกซ์ในรูปแบบบัญญัติของจอร์แดน กล่าวคือ มีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน $Q \in \mathbb{M}_{n\times n}$ ซึ่งทำให้

$$Q^{-1}AQ = J$$

เมื่อ J เป็นเมทริกซ์ในรูปแบบบัญญัติของจอร์แดน

เมทริกซ์ Q สามารถหาได้จากเมทริกซ์ซึ่งมีเมทริกซ์หลักเป็นเวกเตอร์เจาะจงวางนัยทั่วไปซึ่งเป็นฐานหลักของปริภูมิเจาะจงวางนัยทั่วไปสำหรับแต่ละบล็อคของจอร์แดน

ตัวอย่าง 5.19 จงแปลงเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ให้อยู่ในรูปแบบบัญญัติของจอร์แดน

วิธีทำ สมการลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A คือ

$$\det(A - \lambda I_3) = (1 - \lambda)^3 = 0$$

จะได้ค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A คือ $\lambda = 1$ ที่มีภาวะรากซ้ำเป็น 3

ให้ $X_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 1}$ ที่ทำให้

$$(A - \lambda I_3)X_1 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 1$ สามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการดำเนินการตามแถว ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 := \frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 : R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ให้ $z = t$ จะได้ $y = 0$ และ $x = -2t$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ ดังนั้น ปริภูมิเจาะจงของ A สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 1$ คือ

$$C_A(1) = \left\{ \begin{bmatrix} -2t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ซึ่งมีเวกเตอร์เจาะจง $X_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ที่สมนัยกับ $\lambda = 1$

ซึ่งจะเห็นว่า A ไม่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

ต่อไปเราจะพิจารณาเวกเตอร์เจาะจงวางนัยทั่วไปของ A ที่สมนัยกับ $\lambda = 1$

ให้ $X_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 1}$ ที่ทำให้

$$(A - \lambda I_3)X_2 = X_1$$

สามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการดำเนินการตามแถว ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 := \frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 : R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ให้ $z = t$ จะได้ $y = -1$ และ $x = -2t$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ ดังนั้น เวกเตอร์เจาะจงวางนัยทั่วไป ของ A คือ

$$\begin{bmatrix} -2t \\ -1 \\ t \end{bmatrix} \qquad \text{เมื่อ } t \in \mathbb{R}$$

เลือก $t = 0$ จะได้

$$X_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นกับ X_1

ให้ $X_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 1}$ ที่ทำให้

$$(A - \lambda I_3)X_3 = X_2$$

สามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการดำเนินการตามแถว ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 := \frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 : R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ให้ $z = t$ จะได้ $y = 0$ และ $x = -1 - 2t$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ ดังนั้น เวกเตอร์เจาะจงวางนัยทั่วไป ของ A คือ

$$\begin{bmatrix} -1-2t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \qquad \text{เมื่อ } t \in \mathbb{R}$$

เลือก $t = 0$ จะได้

$$X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นกับ X_1 และ X_2
ดังนั้น ปริภูมิเจาะจงวางนัยทั่วไปของ A สำหรับ $\lambda = 1$ คือ

$$K_A(1) = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

ให้ $Q = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ และ

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = J \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.20 จงแปลงเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ ให้อยู่ในรูปแบบบัญญัติของจอร์แดน

วิธีทำ สมการลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A คือ

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_3) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)+(2-\lambda) &= 0\\ (2-\lambda)(3-4\lambda+\lambda^2+1) &= 0\\ (2-\lambda)^3 &= 0\end{aligned}$$

จะได้ค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A คือ $\lambda = 2$ ที่มีภาวะรากซ้ำเป็น 3

ให้ $X_1 = \begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 1}$ ที่ทำให้

$$(A-\lambda I_3)X_1 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 1 & -2 & 3-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 2$ สามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการดำเนินการตามแถว ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3:=R_3+R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

ให้ $y = s$ และ $z = t$ จะได้ $x = 2s - t$ เมื่อ $s,t \in \mathbb{R}$ ดังนั้น ปริภูมิเจาะจงของ A สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 2$ คือ

$$C_A(2) = \left\{\begin{bmatrix} 2s-t\\ s\\ t\end{bmatrix} \middle|\, s,t\in\mathbb{R}\right\} = \left\{s\begin{bmatrix} 2\\ 1\\ 0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \middle|\, s,t\in\mathbb{R}\right\} = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$$

ซึ่งมีเวกเตอร์เจาะจง $X_1 = \begin{bmatrix} 2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$ และ $X_2 = \begin{bmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ ที่สมนัยกับ $\lambda = 2$

ซึ่งจะเห็นว่า A ไม่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม เนื่องจาก $\dim(C_A(2))$ น้อยกว่าภาวะรากซ้ำ

ต่อไปเราจะพิจารณาเวกเตอร์เจาะจงวางนัยทั่วไปของ A ที่สมนัยกับ $\lambda = 2$

ให้ $X_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 1}$ ที่ทำให้

$$(A - \lambda I_3)X_3 = X_2$$

สามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการดำเนินการตามแถว ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 := R_3 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ให้ $y = s$ และ $z = t$ จะได้ $x = 1 + 2s - t$ เมื่อ $s, t \in \mathbb{R}$ ดังนั้น เวกเตอร์เจาะจงวางนัยทั่วไป ของ A สำหรับ $\lambda = 2$ คือ

$$\begin{bmatrix} 1 + 2s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} \qquad \text{เมื่อ } s, t \in \mathbb{R}$$

เลือก $s = t = 0$ จะได้

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ปริภูมิเจาะจงวางนัยทั่วไปของ A สำหรับ $\lambda = 1$ คือ

$$K_A(1) = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

ให้ $Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ และ

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = J \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.21 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งมีค่าเจาะจง $\lambda = 1$ ที่มีภาวะรากซ้ำเป็น 2 และ $\lambda = 2$ ที่มีภาวะรากซ้ำเป็น 1 โดยมีปริภูมิเจาะจง

$$C_A(1) = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

และ

$$C_A(2) = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

จงหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน Q ซึ่งทำให้ $Q^{-1}AQ = J$ อยู่ในรูปแบบบัญญัติของจอร์แดน

วิธีทำ เนื่องจากค่าเจาะจง $\lambda = 1$ มีภาวะรากซ้ำเป็น 2 แต่ปริภูมิเจาะจงของ A ที่สมนัยกับ $\lambda = 1$ มีมิติเพียง 1 จึงต้องพิจารณาเวกเตอร์เจาะจงวางนัยทั่วไป สำหรับ $\lambda = 1$

ให้ $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ พิจารณา $X_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 1}$ ที่ทำให้

$$(A - \lambda I_3)X_2 = X_1$$

ซึ่งสามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการดำเนินการตามแถว ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3:=R_3+2R_1]{R_2:=R_2+2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2:=\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ให้ $x = t$ จะได้ $y = 0$ และ $z = \frac{1}{3}$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ ดังนั้น เวกเตอร์เจาะจงวางนัยทั่วไป ของ A สำหรับ $\lambda = 1$ คือ

$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad \text{เมื่อ } t \in \mathbb{R}$$

เลือก $t = 0$ จะได้

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ปริภูมิเจาะจงวางนัยทั่วไปของ A สำหรับ $\lambda = 1$ คือ

$$K_A(1) = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\}$$

ดังนั้น $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}$ และ $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ซึ่งทำให้

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{1}{3} & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = J \end{aligned}$$

5.5 รูปแบบกำลังสอง (Quadratic Form)

การทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมของเมทริกซ์สมมาตร

บทนิยาม 5.12 เราเรียกเมทริกซ์ A ว่า **เมทริกซ์สมมาตร (symmetric matrix)** ก็ต่อเมื่อ $A^T = A$

ตัวอย่าง 5.22 เมทริกซ์ต่อไปนี้ เป็นเมทริกซ์สมมาตร

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

พิจารณาปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{M}_{n\times 1}$ ซึ่งสามารถนิยามผลคูณภายใน $\langle\cdot,\cdot\rangle$ โดย

$$\langle X, Y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

เมื่อ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n\times 1}$

จะสังเกตว่าเราสามารถเขียน

$$\langle X, Y\rangle = X^TY$$

ทฤษฎีบท 5.11 ให้ A เป็นเมทริกซ์สมมาตร และ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ เป็นค่าเจาะจงของ A ที่แตกต่างกัน ถ้า X_1 และ X_2 เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ λ_1 และ λ_2 ตามลำดับ แล้ว X_1 และ X_2 จะตั้งฉากกัน

พิสูจน์ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lambda_1\langle X_1, X_2\rangle &= \langle \lambda_1 X_1, X_2\rangle \\
&= (\lambda_1 X_1)^T X_2 \\
&= (AX_1)^T X_2 \\
&= (X_1^T A^T) X_2 \\
&= X_1^T (A^T X_2) \\
&= X_1^T (AX_2) \\
&= X_1^T (\lambda_2 X_2) \\
&= \lambda_2 X_1^T X_2 \\
&= \lambda_2 \langle X_1, X_2\rangle
\end{aligned}$$

ดังนั้น $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle X_1, X_2\rangle = 0$ เนื่องจาก $\lambda_1 \neq \lambda_2$ จึงได้ว่า $\langle X_1, X_2\rangle = 0$ นั่นคือ X_1 และ X_2 ตั้งฉากกัน

บทนิยาม 5.13 ให้ P เป็นเมทริกซ์จัตุรัส เราเรียก P ว่า **เมทริกซ์เชิงตั้งฉาก (orthogonal matrix)** ถ้า

$$P^{-1} = P^T$$

เมทริกซ์เชิงตั้งฉาก P จะมีเมทริกซ์หลักเป็นเวกเตอร์ตั้งฉากปกติ (orthonormal vector)

ตัวอย่าง 5.23 ให้ $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ จะเห็นว่า $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = P^T$ ดังนั้น P เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก

บทนิยาม 5.14 เราจะกล่าวว่า เมทริกซ์จัตุรัส A **สามารถแปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้ (orthogonally diagonalizable)** ถ้ามีเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก P และเมทริกซ์ทแยงมุม D ซึ่ง

$$A = PDP^{-1} = PDP^T$$

ตัวอย่าง 5.24 ให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ แล้ว A สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้

เนื่องจาก มีเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ซึ่ง

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = PDP^T$$

ทฤษฎีบท 5.12 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้ แล้ว A เป็นเมทริกซ์สมมาตร

พิสูจน์ ให้ A เป็นเมทริกซ์ที่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้ จะมีเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก P และเมทริกซ์ทแยงมุม D ซึ่ง $A = PDP^T$ ดังนั้น

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A$$

นั่นคือ A เป็นเมทริกซ์สมมาตร

บทกลับของทฤษฎีบทข้างต้นก็เป็นจริง อย่างไรก็ตามบทพิสูจน์ค่อนข้างซับซ้อน เราจึงละบทพิสูจน์ไว้ ซึ่งทำให้ได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.13 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส แล้ว A สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเมทริกซ์สมมาตร

ในการแปลงเมทริกซ์สมมาตร A เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเชิงตั้งฉาก เราจะหาค่าเจาะจง λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ (ซึ่งอาจเป็นค่าเจาะจงที่ซ้ำกัน) และพิจารณาเวกเตอร์ที่เป็นฐานหลักของปริภูมิเจาะจง สำหรับแต่ละค่าเจาะจงของ A หลังจากนั้นจะต้องแปลงฐานหลักดังกล่าวให้เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปกติ (orthonormal basis) โดยใช้กระบวนการกราม-ชมิดต์ ซึ่งจะทำให้ได้เมทริกซ์ P ที่มีเมทริกซ์หลักเป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปกติ ที่ทำให้ $A = PDP^T$ เมื่อ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมซึ่งมีสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักคือค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A ที่สมนัยกับเวกเตอร์เจาะจงในเมทริกซ์ P ในแต่ละหลัก

ตัวอย่าง 5.25 จงแปลงเมทริกซ์สมมาตร

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเชิงตั้งฉาก

วิธีทำ

สมการลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A คือ

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_3) &= (1-\lambda)^3-3(1-\lambda)+2\\ &= -\lambda^3+3\lambda^2\\ &= -\lambda^2(\lambda-3)\\ &= 0\end{aligned}$$

จะได้ค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A คือ $\lambda = 0$ ที่มีภาวะรากซ้ำเป็น 2 และ $\lambda = 3$ ที่มีภาวะรากซ้ำเป็น 1

พิจารณา $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 1}$ ที่ทำให้

$$(A-\lambda I_3)X = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 0$ สามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการดำเนินการตามแถว ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3:=R_3-R_1]{R_2:R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ให้ $y = s$ และ $z = t$ จะได้ $x = -s-t$ เมื่อ $s, t \in \mathbb{R}$ ดังนั้น ปริภูมิเจาะจงของ A สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 0$ ที่มีภาวะรากซ้ำเป็น 2 คือ

$$C_A(0) = \left\{\begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

ซึ่งมีเวกเตอร์เจาะจง $X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ที่สมนัยกับ $\lambda = 0$

โดยกระบวนการกราม-ชมิดต์ เราจะแปลงฐานหลักของปริภูมิเจาะจง $C_A(0)$ ให้เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปกติ ดังนี้

ให้ $\overline{X}_1 = X_1$ และ

$$\overline{X}_2 = X_2 - \frac{\langle X_2, X_1\rangle}{\langle X_1, X_1\rangle}X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

และเมื่อทำให้เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยจะได้

$$\overline{\overline{X}}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{และ} \qquad \overline{\overline{X}}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปกติของ $C_A(0)$

สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 3$ สามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการดำเนินการตามแถว ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3:=R_3-R_1]{R_2:=R_2+2R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2:=-\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3:=R_3-3R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ให้ $z = t$ จะได้ $y = t$ และ $x = t$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ ดังนั้น ปริภูมิเจาะจงของ A สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 3$ ที่มีภาวะรากซ้ำเป็น 1 คือ

$$C_A(3) = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ซึ่งมีเวกเตอร์เจาะจง $X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ที่สมนัยกับ $\lambda = 3$

เราสามารถแปลงเป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปกติ ของ $C_A(3)$ โดยแปลงเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยได้เป็น

$$\overline{X}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น A สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้ โดยที่

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ

$$A = PDP^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times n$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์สมมาตร แล้ว A เป็นเมทริกซ์ที่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้ ดังนั้น

$$A = PDP^T = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} P^T$$

โดยที่ $P = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก และ λ_i เป็นค่าเจาะจงที่สมนัยกับเวกเตอร์เจาะจง X_i ซึ่งเป็นเวกเตอร์ตั้งฉากปกติ (orthonormal vector)
เราสามารถเขียน A ในรูป

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \\ \vdots \\ X_n^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 X_1 & \lambda_2 X_2 & \cdots & \lambda_n X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \\ \vdots \\ X_n^T \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 X_1 X_1^T + \lambda_2 X_2 X_2^T + \cdots + \lambda_n X_n X_n^T \end{aligned}$$

ซึ่งเราเรียกว่า **การแยกเชิงสเปกตรัม (spectral decomposition)** ของเมทริกซ์ A

ตัวอย่าง 5.26 จากตัวอย่าง 5.25 เราสามารถเขียนการแยกเชิงสเปกตรัมของ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ได้เป็น

$$\begin{aligned} A &= 0\overline{\overline{X}}_1\overline{\overline{X}}_1^T + 0\overline{\overline{X}}_2\overline{\overline{X}}_2^T + 3\overline{X}_3\overline{X}_3^T \\ &= 3\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \\ &= 3\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

รูปแบบกำลังสอง (Quadratic Form)

บทนิยาม 5.15 ให้ $Q : \mathbb{M}_{n\times 1} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน เราเรียก Q ว่าเป็น **รูปแบบกำลังสอง (quadratic form)** ถ้า Q สามารถเขียนเป็น

$$Q(X) = X^TAX$$

โดยที่ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์สมมาตร และจะเรียก A ว่า **เมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสอง (matrix of the quadratic form)** ของ Q

โดยทั่วไป เรามักจะเขียนรูปแบบกำลังสองเป็นฟังก์ชัน $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ โดยพิจารณาว่าปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{M}_{n\times 1}$ และ $\mathbb{R}^n$ สมสัณฐานกัน กล่าวคือ เราจะพิจารณาว่า $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ สมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one correspondence) กับ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n\times 1}$

ตัวอย่าง 5.27 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร ให้ $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$\begin{aligned} Q\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1(x_1 + 3x_2) + x_2(3x_1 + 2x_2) \\ &= x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2 \end{aligned}$$

เป็นรูปแบบกำลังสอง

ตัวอย่าง 5.28 ให้ $Q:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$Q\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$$

จะได้ว่า Q เป็นรูปแบบกำลังสอง เนื่องจาก มีเมทริกซ์สมมาตร $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสอง เนื่องจาก

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$$

จากตัวอย่างข้างต้น ถ้าให้ $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ จะเห็นว่า

$$X^TBX = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$$

แต่ B ไม่เป็นเมทริกซ์สมมาตร จึงไม่ใช่เมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสอง

ตัวอย่าง 5.29 ให้ $Q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$Q\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 6x_2x_3$$

จงแสดงว่า Q เป็นรูปแบบกำลังสอง และหาเมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสอง

วิธีทำ สมมติให้ $A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสองของ Q ดังนั้น

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 6x_2x_3 &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2dx_1x_2 + 2ex_1x_3 + 2fx_2x_3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a = 1, b = 2, c = 3, d = 2, e = -4$ และ $f = -3$

นั่นคือ Q เป็นรูปแบบกำลังสอง และได้ว่า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -3 \\ -4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสองของ Q

โดยทั่วไป รูปแบบกำลังสองที่นิยามบน $\mathbb{R}^2$ และ $\mathbb{R}^3$ สามารถหาเมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสองจากการพิจารณา

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + bx_2^2 + 2cx_1x_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2dx_1x_2 + 2ex_1x_3 + 2fx_2x_3$$

ซึ่งจะสังเกตเห็นว่าสมาชิกในตำแหน่งบนแนวทแยงมุมหลักของเมทริกซ์เป็นสัมประสิทธิ์ของพจน์กำลังสอง เราเรียกพจน์ $\alpha x_i x_j$ เมื่อ $i \neq j$ ในรูปแบบกำลังสอง Q ว่า **พจน์ผลคูณไขว้** (cross-product term)

บทนิยาม 5.16 ให้ $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ เป็นรูปแบบกำลังสอง เราจะเรียก Q ว่า

- **เป็นบวกแน่นอน (positive definite)** ถ้า $Q(X) > 0$ สำหรับทุก $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$
- **เป็นลบแน่นอน (negtive definite)** ถ้า $Q(X) < 0$ สำหรับทุก $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$
- **ไม่แน่นอน (indefinite)** ถ้า $Q(X)$ สามารถเป็นค่าบวกหรือค่าลบได้ เมื่อ $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$

ตัวอย่าง 5.30 ให้ $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ เป็นรูปแบบกำลังสองที่กำหนดโดย

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 12x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 5x_2^2 + 12x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3 \\ &= (x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2) + (x_2^2 - 6x_2x_3 + 9x_3^2) + 3x_3^2 \\ &= (x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 - 3x_3)^2 + 3x_3^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น Q เป็นรูปแบบกำลังสองที่เป็นบวกแน่นอน

ตัวอย่าง 5.31 ให้ $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ เป็นรูปแบบกำลังสองที่กำหนดโดย

$$Q(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= -x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 \\ &= -(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - x_2^2 \\ &= -(x_1 + x_2)^2 - x_3^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น Q เป็นรูปแบบกำลังสองที่เป็นลบแน่นอน

ตัวอย่าง 5.32 ให้ $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ เป็นรูปแบบกำลังสองที่กำหนดโดย

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_2x_1 + 4x_1x_3$$

จะเห็นว่า

$$Q(1,0,1) = -1 + 0 - 2 + 0 + 4 = 1 > 0$$
$$Q(1,-1,0) = -1 + 1 - 0 - 2 + 0 = -2 < 0$$

ดังนั้น Q เป็นรูปแบบกำลังสองที่ไม่แน่นอน

ทฤษฎีบท 5.14 ให้ A เป็นเมทริกซ์สมมาตรมิติ $n \times n$ และ $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ เป็นรูปแบบกำลังสองที่กำหนดโดย

$$Q(X) = X^T AX$$

แล้วจะมีการเปลี่ยนตัวแปร $X = PY$ ซึ่งแปลงรูปแบบกำลังสอง Q ให้อยู่ในรูปแบบกำลังสอง $\overline{Q}$ ที่กำหนดโดย

$$\overline{Q}(Y) = Y^T DY$$

ซึ่งไม่มีพจน์ผลคูณไขว้
โดย P เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก และ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม ซึ่ง $A = PDP^T$

พิสูจน์ เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์สมมาตร จะสามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้ นั่นคือ จะมีเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก P และเมทริกซ์ทแยงมุม D ซึ่ง $A = PDP^T$

ให้ $X = PY$ จะได้

$$Q(X) = X^T AX = (PY)^T A(PY) = (Y^T P^T)A(PY) = Y^T (P^T AP)Y = Y^T DY$$

ดังนั้น $\overline{Q}(Y) = Y^T DY$ จะเป็นรูปแบบกำลังสองที่ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้ นั่นคือ ถ้า D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมโดยที่มีสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักเป็น $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ และ $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$Q(X) = \overline{Q}(Y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots \lambda_n y_n^2$$

จากทฤษฎีบทข้างต้น เนื่องจาก λ_i ในเมทริกซ์ทแยงมุม D เป็นค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A เราจึงสามารถตรวจสอบความเป็นบวกแน่นอน หรือความเป็นลบแน่นอนของรูปแบบกำลังสองได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.15 ให้ A เป็นเมทริกซ์สมมาตรไม่เอกฐานมิติ $n \times n$ และ $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ เป็นรูปแบบกำลังสองที่กำหนดโดย $Q(X) = X^T AX$ แล้วจะได้ว่า

- Q เป็นรูปแบบกำลังสองที่เป็นบวกแน่นอน ก็ต่อเมื่อ ทุกค่าเจาะจงของ A มีค่าเป็นบวก
- Q เป็นรูปแบบกำลังสองที่เป็นลบแน่นอน ก็ต่อเมื่อ ทุกค่าเจาะจงของ A มีค่าเป็นลบ
- Q เป็นรูปแบบกำลังสองที่ไม่แน่นอน ก็ต่อเมื่อ ค่าเจาะจงของ A มีทั้งที่เป็นค่าบวกและเป็นค่าเป็นลบ

ตัวอย่าง 5.33 จงตรวจสอบว่ารูปแบบกำลังสอง Q ที่กำหนดโดย

$$Q(x_1, x_2) = -x^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2$$

เป็นบวกแน่นอน เป็นลบแน่นอน หรือไม่แน่นอน

วิธีทำ จะเห็นว่าเมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสองของ Q คือ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ซึ่งมีสมการลักษณะเฉพาะ

$$(-1-\lambda)(-2-\lambda) - 1 = \lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

จะได้

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ซึ่งจะเห็นว่าค่าเจาะจงทั้งสองค่าเป็นลบ จึงสรุปได้ว่า Q เป็นรูปแบบกำลังสองที่เป็นลบแน่นอน

ตัวอย่าง 5.34 จงเปลี่ยนตัวแปร $X = PY$ ในรูปแบบกำลังสอง $Q(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2$ ที่ทำให้ Q ไม่มีพจน์ของผลคูณไขว้

วิธีทำ จะเห็นว่าเมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสองของ Q คือ $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ซึ่งมีสมการลักษณะเฉพาะ

$$(5-\lambda)(5-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 10\lambda + 21 = (\lambda - 3)(\lambda - 7) = 0$$

จะได้ค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A คือ $\lambda = 3$ และ $\lambda = 7$

พิจารณา $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 1}$ ที่ทำให้

$$(A - \lambda I_2)V = \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 3$ สามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการดำเนินการตามแถว ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1:=\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2:=R_2+2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ให้ $v_2 = t$ จะได้ $v_1 = t$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ ดังนั้น $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = 3$

สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 7$ สามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการดำเนินการตามแถว ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1:=-\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2:=R_2+2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ให้ $v_1 = t$ จะได้ $v_2 = -t$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ เลือก $t = -1$ ดังนั้น $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = 7$

เมื่อทำให้เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปกติ จะได้

$$\overline{V}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \overline{V}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ทำให้เราสามารถเขียน $A = PDP^T$ เมื่อ $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ ดังนั้น ให้ $X = PY$ จะได้ว่า

$$Q(X) = 5x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 = 3y_1^2 + 7y_2^2$$

เมื่อ $Y = P^{-1}X = P^TX$

หากพิจารณากราฟของความสัมพันธ์

$$5x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 = 21$$

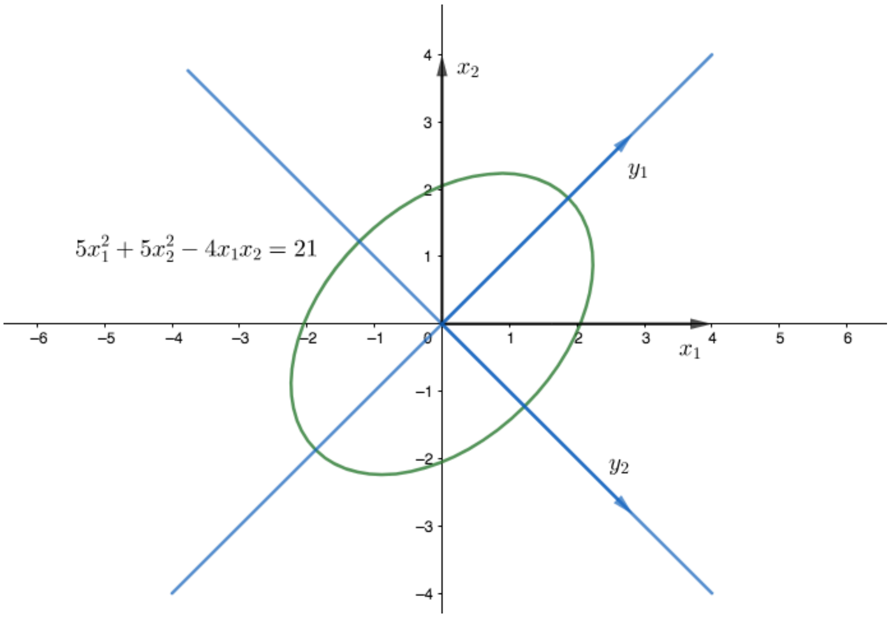
ภายใต้การเปลี่ยนตัวแปร

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$3y_1^2 + 7y_2^2 = 21$$

ซึ่งเป็นสมการของวงรีเทียบกับแกนพิกัด y_1 และ y_2 ดังรูป



ตัวอย่าง 5.35 จงเปลี่ยนตัวแปร $X = PY$ ในรูปแบบกำลังสอง $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 5x_2^2 - 8x_1x_2$ ที่ทำให้ Q ไม่มีพจน์ของผลคูณไขว้

วิธีทำ จะเห็นว่าเมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสองของ Q คือ $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$ ซึ่งมีสมการลักษณะเฉพาะ

$$(1-\lambda)(-5-\lambda) - 16 = \lambda^2 + 4\lambda - 21 = (\lambda+7)(\lambda-3) = 0$$

จะได้ค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A คือ $\lambda = -7$ และ $\lambda = 3$

พิจารณา $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 1}$ ที่ทำให้

$$(A - \lambda I_2)V = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -4 \\ -4 & -5-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = -7$ สามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการดำเนินการตามแถว ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 := \frac{1}{8}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 := R_2 + 4R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ให้ $v_2 = t$ จะได้ $v_1 = \frac{t}{2}$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ ดังนั้น $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = -7$

สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 3$ สามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการดำเนินการตามแถว ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 := -\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{R_2 := R_2 + 4R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ให้ $v_1 = t$ จะได้ $v_2 = -2t$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ เลือก $t = -1$ ดังนั้น $V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda = 3$

เมื่อทำให้เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปกติ จะได้

$$\overline{V}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \qquad \text{และ} \qquad \overline{V}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

ทำให้เราสามารถเขียน $A = PDP^T$ เมื่อ $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
ดังนั้น ให้ $X = PY$ จะได้ว่า

$$Q(X) = x_1^2 - 5x_2^2 - 8x_1x_2 = -7y_1^2 + 3y_2^2$$

เมื่อ $Y = P^{-1}X = P^TX$

หากพิจารณากราฟของความสัมพันธ์

$$x_1^2 - 5x_2^2 - 8x_1x_2 = 21$$

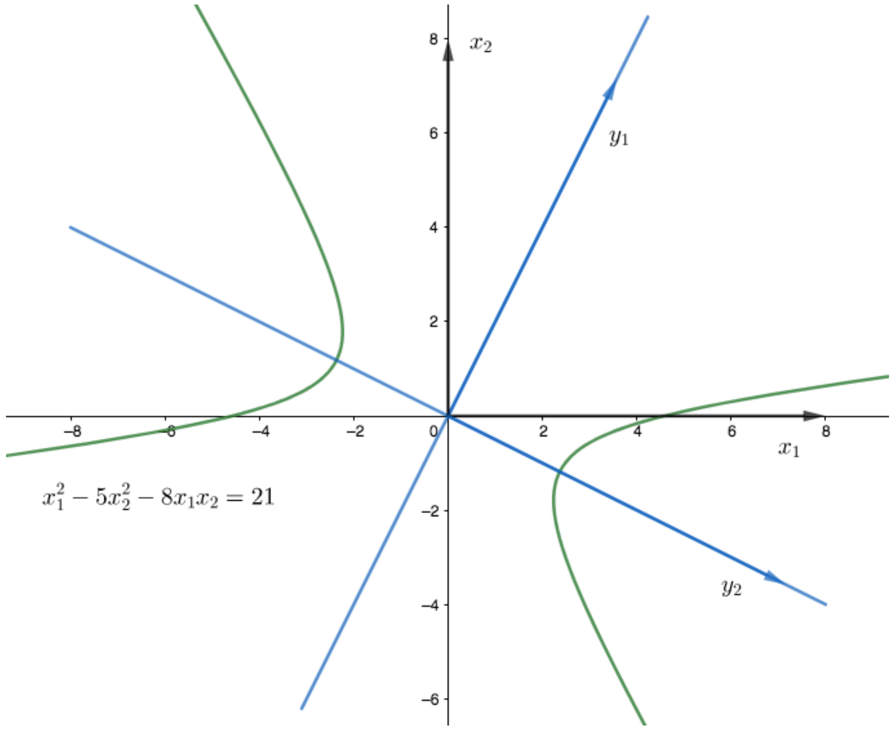
ภายใต้การเปลี่ยนตัวแปร

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$-7y_1^2 + 3y_2^2 = 21$$

ซึ่งเป็นสมการของไฮเพอร์โบลาเทียบกับแกนพิกัด y_1 และ y_2 ดังรูป


x_2
y_1
x_1
y_2
$x_1^2 - 5x_2^2 - 8x_1x_2 = 21$