Zahlendarstellung

Ziffern & Zahlensystem, $\mathbb{N}$, Euklid, Horner-Schema

Benjamin Tröster

Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin

24. November 2021

Fahrplan

Heute

- Coronabedingt: Sprung von Schaltkreisen und Transistoren zur Zahlendarstellung
- Ziel: Wir bauen ein Rechenwerk (ALU) aus Schaltkreisen mithilfe von Gattern
- Zwischenziel: Wie können wir die Zahlen im Rechner darstellen?

Die natürlichen Zahlen (anschaulich)

$$0,1,2,3,\ldots$$

- kennt jedes Kind
- beginnen mit 0 oder 1
- jede Zahl hat einen Nachfolger
- gut geeignet zum Abzählen
- keine Schulden, keine Tortenstücke

Die natürlichen Zahlen (axiomatisch)

Definition

$\mathbb{N}$ ist eine Menge von Zahlen mit den folgenden Eigenschaften:

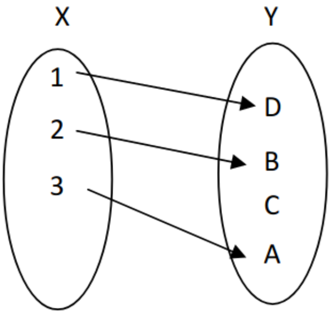
- Es gibt ein ausgezeichnetes Element $0 \in \mathbb{N}$
- Es gibt eine Abbildung $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

  (S1) S ist injektiv (d.h. $S(n) \neq S(m)$ falls $n \neq m$).
  (S1) $0 \notin S(\mathbb{N}) = \{S(n) | n \in \mathbb{N}\}$
  (S3) Ist $M \subset \mathbb{N}$ und $0 \in M$ sowie $S(M) \subset (M)$, dann gilt $M = N$

Anschaulich: Jede Zahl hat genau einen Nachfolger. Wenn wir bei 0 anfangen und immer weiter zum Nachfolger gehen, treffen wir jede Zahl genau einmal.

Einschub: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

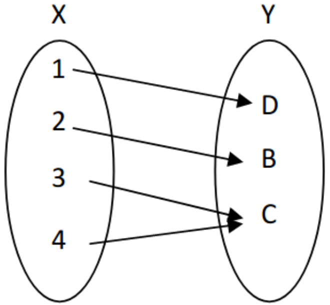
- Injektiv (linkseindeutig): ist eine Eigenschaft einer mathematischen Funktion
- Jedes Element der Zielmenge höchstens einmal als Funktionswert angenommen
- Keine zwei verschiedenen Elemente der Definitionsmenge auf ein und dasselbe Element der Zielmenge abgebildet



Eine injektive Funktion;
X ist die Definitionsmenge und
Y die Zielmenge.

Einschub: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

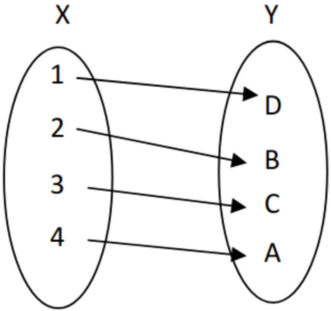
- Surjektivität (rechtstotal): Ist eine Eigenschaft einer mathematischen Funktion
- Jedes Element der Zielmenge mindestens einmal als Funktionswert angenommen
  - Jedes Bild hat mindestens ein Urbild
- Eine surjektive Funktion wird auch als Surjektion bezeichnet



Eine surjektive Funktion;
X ist die Definitionsmenge und
Y die Zielmenge.

Einschub: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

- Bijektivität (bijektiv oder umkehrbar eindeutig auf oder eineindeutig auf) ist eine Eigenschaft einer mathematischen Funktion
- Verschiedene Elemente ihres Definitionsbereichs auf verschiedene Elemente der Zielmenge abbildet (injektiv) **und**
- Zusätzlich jedes Element der Zielmenge als Funktionswert auftritt (surjektiv)
- Eine bijektive Funktion hat daher immer eine Umkehrfunktion, ist also invertierbar



Eine bijektive Funktion;
X ist die Definitionsmenge und
Y die Zielmenge.

Rechnen mit natürlichen Zahlen

Definition (Addition)

(A1) $n + 0 = n$

(A2) $n + S(m) = S(n + m)$

Somit ist durch $(S3)$ die Addition $n + m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ definiert

Nachweis der Rechenregeln

- Assoziativität: $k + (n + m) = (k + n) + m$
- Kommutativität: $n + m = m + n$

Folgerung: Wir können mit natürlichen Zahlen rechnen
Aber: Bevor wir die Summen zweier konkreter natürlicher Zahlen ausrechnen können, muss jede natürliche Zahl genau einen Namen haben!

Ziffernketten

Problem: Unendlich viele natürliche Zahlen erfordern unendlich viele Namen.

Lösung

- Verwende Ziffernketten: $z_1 z_2 z_3 \ldots z_k \qquad z_i \in \mathcal{Z}, i = 1, \ldots, k$
- Endliche Ziffernmenge $\mathcal{Z}$

Interpretation

- Systematische Konstruktion unterschiedlicher Symbole
- Bilden von Worten aus einem Alphabet

Ziffernsysteme

Theorem

Sei $\mathcal{Z}$ eine endliche Ziffernmenge und

$$\mathcal{D}\{z_1 z_2 \dots z_k | k \in \mathbb{N}, z_i \in \mathcal{Z}, i = 1, \dots, k\}$$

die Menge aller endlichen Ziffernketten. Dann existiert eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{D}(\mathcal{Z})$

Definition

Die Ziffernmenge $\mathcal{Z}$ und die Zuordnung φ erzeugen eine Ziffernsystem zur Darstellung von $\mathbb{N}$

Definition

Eine Menge $\mathcal{M}$, für die eine bijektive Abbildung $\varphi \mathbb{N} \to \mathcal{M}$ existiert, heißt abzählbar.

Beispiele für Ziffernsysteme

- Römische Zahlen
  - $\mathcal{Z} = \{I, V, X, L, C, D, M\}$
  - Kein Ziffernsystem!
- Unärsystem
  - Nur eine Ziffer: $\mathcal{Z} = \{|\}$
  - Ziffernketten: $\mathcal{D}(\mathcal{Z}) = \{|, ||, |||, \ldots\}$
  - Zuordnung: $\varphi(0) =, \varphi(1) = |, \varphi(S(n)) = \varphi(n)$
  - Beispiel: $\varphi(4) = ||||$

Praktische Anwendung

... vor 15000 - 20000 Jahren im Kongo:

... heute

Potenzzerlegung zur Basis q

Theorem

Sei $q \in \mathbb{N}, q > 1$ fest gewählt.
Dann lässt sich jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ als Potenzzerlegung

$$n = \sum_{i=0}^{k} r_i q^i$$

darstellen. Die Koeffizienten $r_i \in \{0, \ldots, q-1\} \subset \mathbb{N}$ sind eindeutig.

Positionssystem zur Basis q

Definition

- Ziffernmenge: $\mathcal{Z} = \{z_0, \ldots, z_{q-1}\}$
- Zuordnung:

$$n \mapsto \varphi(n) = z_n, \qquad n = 0, \ldots, q-1$$

und für $n > q - 1$

$$n \mapsto \varphi(n) = z_{r_k} z_{r_{k-1}} \ldots z_{r_0} \qquad \text{mit } n = \sum_{i=0}^{k} r_i q^i, \qquad 0 \leq r_i \leq q - 1$$

Diese Zifferndarstellung heißt q-adische Darstellung.

Beispiele

- Dezimalsystem
  - $q = 10$ und $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Hexadezimalsystem
  - $q = 16$ und $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$
- q-adische Systeme mit $q \leq 36$
  - Erweiterung mit $\{A, B, C, ..., Z\}$
- Konvention:
  - Keine Unterscheidung zwischen Darstellung und Zahl:

$$(z_k z_{k-1} \dots z_0)_q = \sum_{i=0}^{k} z_i q^i, \qquad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, 1, \dots q-1\}$$

  - Kein Index q, falls $q = 10$
  - Den Index i von z_i nennt man Stelle
  - $(z_k z_{k-1} \dots z_0)$ nennt man eine k-stellige Zahl

Positionssystem zur Basis $q = 2$: Dualsystem

- Dualsystem (auch Binärsystem)
  - Ziffernmenge: $\mathcal{Z} = \{0, 1\}$
- Ideal für technische Umsetzung
  - 1 Binärstelle $\Leftrightarrow$ 1 Bit $\Leftrightarrow$ 1 „Schalter“
  - Alle modernen Rechenmaschinen arbeiten mit dem Dualsystem
- Zahlenbereich
  - Im Dualsystem lassen sich mit N Stellen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit:

$$0 \leq n \leq 2^N - 1$$

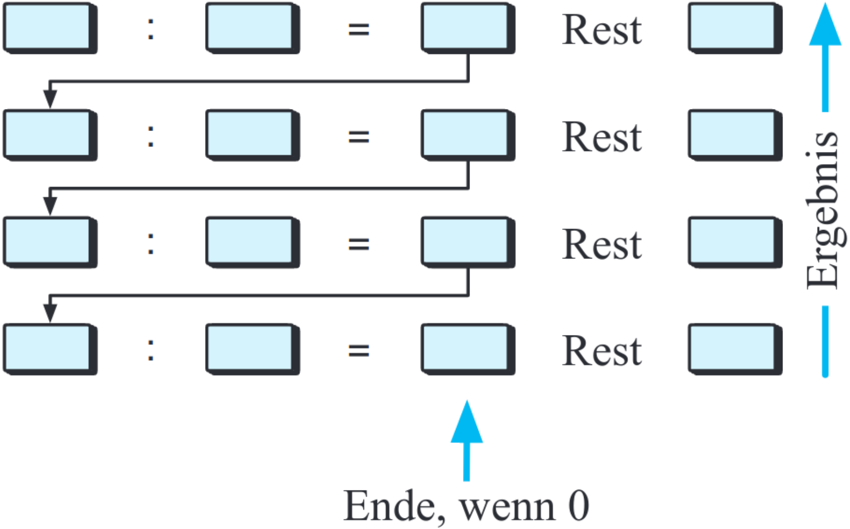
    darstellen.

Technische Realisierung

- Kleinste Einheit (0 oder 1): Bit
- Bits werden in festen Längen zusammengefaßt
- 8 Bits = 1 Byte mit $2^8 = 256$ verschiedenen Zuständen
- Feste Anzahl Bytes für Zahlendarstellung
- Bezeichnungen: BYTE, WORD, DWORD, ... (Architekturabhängig)
  - Üblich: x_86/IA32 WORD = 2 Bytes, DWORD = 4 Bytes, QWORD = 8 Bytes
  - Machineword: Datentyp den die CPU Architektur verarbeiten kann
- Bereich von 64-Bit Zahlen

$$0 \leq n \leq 2^{64} - 1 > 18 \cdot 10^{18} = 18 \text{ Trillionen}$$

Kochrezept Umrechnung ganzer Zahlen



Beispiel Dualzahlen

- Umrechnung von 741_{10} in dual

Euklidische Algorithmus

Umwandlung vom Dezimalsystem in ein Zahlensystem zur Basis q

1. Methode: Euklidischer Algorithmus:

$$
\begin{aligned}
Z &= z_n 10^n + z_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + z_1 10^1 + z_0 10^0 + z_{-1} 10^{-1} + \ldots + z_{-m} 10^{-m} \\
&= y_s q^s + y_{s-1} q^{s-1} + \ldots + y_1 q^1 + y_0 q^0 + y_{-1} q^{-1} + \ldots + y_{-t} q^{-t}
\end{aligned}
$$

Die Ziffern werden sukzessive, beginnend mit der höchstwertigen Ziffer, berechnet:

1. Schritt: Berechne p gemäß der Ungleichung $qp \leq Z < q^{p+1}$
   setze $i = p$ und $Z_i = Z$
2. Schritt: Ermittle y_i und den Rest R_i durch Division von Z_i durch q_i
   $y_i = Z_i \div q^i$
   $R_i = Z_i \mod q^i$
3. Schritt: Wiederhole 2. Schritt für $i = p - 1, \ldots$ und ersetze dabei nach jedem Schritt Z_i durch R_i, bis $R_i = 0$ oder bis q^i gering genug ist (und damit auch der Umrechnungsfehler).

Beispiel

Umwandlung von $15741,233_{10}$ ins Hexadezimalsystem

1. Schritt $16^3 \leq 15741,233 < 16^4 \Rightarrow$ höchste Potenz 16^3

2.Schritt:	15741,233	:	16^3	$=$	3	Rest	$3453,233$
3.Schritt:	3453,233	:	16^2	$=$	D	Rest	$125,233$
4.Schritt	125,233	:	16^1	$=$	7	Rest	$13,233$
5.Schritt:	13,233	:	$16^0 = 1$	$=$	D	Rest	$0,233$
6.Schritt:	0,233	:	16^{-1}	$=$	3	Rest	$0,0455$
7.Schritt:	0,0455	:	16^{-2}	$=$	B	Rest	$0,00253$
8.Schritt:	0,00253	:	16^{-3}	$=$	A	Rest	$0,000088593$
9. Schritt:	0,000088593	:	16^{-4}	$=$	5	Rest	$0,000012299$

$$\Rightarrow 15741,233_{10} \approx 3D7D,3BA5_{16}$$

Horner Schema

Umwandlung vom Dezimalsystem in ein Zahlensystem zur Basis q

2. Methode: Abwandlung des Horner-Schemas
   2.1 Hierbei müssen der ganzzahlige und der gebrochene Anteil getrennt betrachtet werden.
   2.2 Umwandlung des ganzzahligen Anteils:

$$\text{Eine ganze Zahl } X_q = \sum_{i=0}^{n} z_i q^i \text{ kann durch fortgesetztes}$$

Ausklammern auch in folgender Form geschrieben werden:

$$X_q = ((\ldots(((z_n q + z_{n-1})q + z_{n-2})q + z_{n-3})q \ldots)q + z_1)q + z_0$$

Beispiel

Die gegebene Dezimalzahl wird sukzessive durch die Basis q **dividiert**.
Die jeweiligen ganzzahligen Reste ergeben die Ziffern der Zahl X_q in der Reihenfolge von der niedrigstwertigen zur höchstwertigen Stelle.
Wandle 15741_{10} ins Hexadezimalsystem

Beispiel

Die gegebene Dezimalzahl wird sukzessive durch die Basis q **dividiert**.
Die jeweiligen ganzzahligen Reste ergeben die Ziffern der Zahl X_q in der Reihenfolge von der niedrigstwertigen zur höchstwertigen Stelle.
Wandle 15741_{10} ins Hexadezimalsystem

$$
\begin{array}{rcclcc}
15741_{10} : 16 & = & 983 & \text{Rest} & 13 & D_{16} \\
983_{10} : 16 & = & 61 & \text{Rest} & 7 & (7_{16}) \\
61_{10} : 16 & = & 3 & \text{Rest} & 13 & (D_{16}) \\
3_{10} : 16 & = & 0 & \text{Rest} & 3 & (3_{16})
\end{array}
$$

$$\Rightarrow 15741_{10} = 3D7D_{16}$$

Umwandlung des Nachkommateils

Auch der gebrochene Anteil einer Zahl

$$Y_q = \sum_{i=-m}^{-1} y_i q^i$$

lässt sich entsprechend schreiben:

$$Y_q = ((\ldots((y_{-m}q^{-1} + y_{-m+1})q^{-1} + y_{-m+2})b^{-1} + \ldots + y_{-2})q^{-1} + y_{-1})b^{-1}$$

Verfahren:
Eine sukzessive **Multiplikation** des Nachkommateils der Dezimalzahl mit der Basis q des Zielsystems ergibt nacheinander die y_{-i} in der Reihenfolge der höchstwertigen zur niedrigstwertigen Nachkommaziffer.

Beispiel

Umwandlung von $0,233_{10}$ ins Hexadezimalsystem:

$0{,}233 * 16 = 3,\underbrace{728}$

$z_{-1} = 3$

$0{,}728 * 16 = 11,\underbrace{648}$

$z_{-2} = B$

$0{,}648 * 16 = 10,368$

$z_{-3} = A$

$0{,}368 * 16 = 5,888$

$z_{-4} = 5$

Abbruch bei genügend hoher Genauigkeit

➡ **$0{,}233_{10} \approx 0{,}3BA5_{16}$**

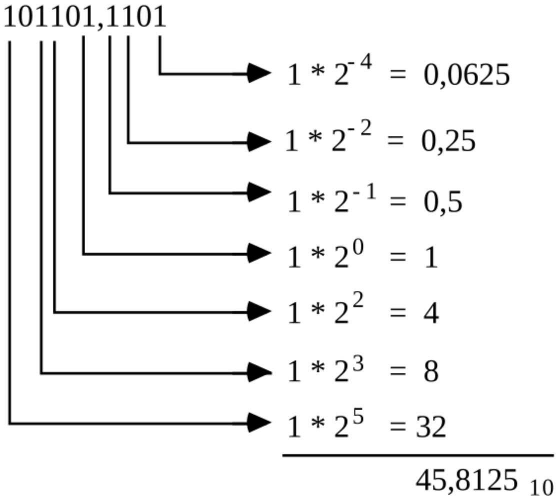
Umwandlung: Basis $q \rightarrow$ Dezimalsystem

Die Werte der einzelnen Stellen der umzuwandelnden Zahl werden in dem Zahlensystem, in das umgewandelt werden soll, dargestellt und nach der Stellenwertgleichung aufsummiert.
Der Wert X_q der Zahl ergibt sich dann als Summe der Werte aller Einzelstellen $z_i q^i$:

$$
\begin{aligned}
X &= z_n q^n + z_{n-1} q^{n-1} + \ldots + z_1 q^1 + z_0 q^0 + z_{-1} q^{-1} + \ldots + z_{-m} q^{-m} \\
&= \sum_{i=-m}^{n} z_i q^i
\end{aligned}
$$

Beispiel

Konvertierung $101101,1101_2$ ins Dezimalsystem



Umwandlung beliebiger Stellenwertsysteme

Man wandelt die Zahl ins Dezimalsystem um und führt danach mit Methode 1 oder 2 die Wandlung ins Zielsystem durch.

Spezialfall:

- Ist eine Basis eine Potenz der anderen Basis, können einfach mehrere Stellen zu einer Ziffer zusammengefasst werden oder eine Stelle kann durch eine Folge von Ziffern ersetzt werden.

Wandlung von $0110100,110101_2$ ins Hexadezimalsystem als BYTE dargestellt

$2^4 = 16 \Rightarrow 4$ Dualstellen $\rightarrow$ 1 Hexadezimalstellen

$$\begin{array}{ll} \text{dual} & 0110100,110101 \\ & \downarrow \\ & \underbrace{0011}\,\underbrace{0100},\underbrace{1101}\,\underbrace{0100} \\ \text{hex} & \quad 3 \quad\;\; 4 \quad , \; D \quad\;\; 4 \end{array}$$

Ergänzen von Nullen zum Auffüllen auf Vierergruppen

Quellen I