Zahlendarstellung

Benjamin Tröster

Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin

21. November 2021

Fahrplan

Einleitung

Ganzen Zahlen

Heute

- Coronabedingt: Sprung von Schaltkreisen und Transistoren zur Zahlendarstellung
- Ziel: Wir bauen ein Rechenwerk (ALU) aus Schaltkreisen mithilfe von Gattern
- Zwischenziel: Wie können wir die Zahlen im Rechner darstellen?
- Darstellung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ $\quad\surd$

Die ganzen Zahlen (anschaulich)

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

- kennt (fast) jedes Kind
- beginnen nirgends
- Es gibt positive und negative Zahlen
- Schulden, aber keine Tortenstücke

Die ganzen Zahlen (konstruktiv)

- Problem
  - Ist $n > m$, so hat $x + n = m$ keine Lösung $x \in \mathbb{N}$
- Ausweg
  - Erweitere $\mathbb{N}$ zu $\{x = (n, m)\}$. Wir schreiben $(n, m) = m - n$.
- Neues Problem
  - Nicht eindeutig: $x + 2 = 1$ und $x + 1 = 0$ hätten verschiedene Lösungen!
- Neuer Ausweg
  - Äquivalenzklassen

Anzahl der ganzen Zahlen

Gibt es mehr ganze Zahlen als natürliche Zahlen?

Anzahl der ganzen Zahlen

Gibt es mehr ganze Zahlen als natürliche Zahlen?

- Ja! – denn $-1 \in \mathbb{Z}$ aber $-1 \notin \mathbb{N}$

Anzahl der ganzen Zahlen

Gibt es mehr ganze Zahlen als natürliche Zahlen?

- ~~Ja! – denn~~ $\cancel{-1 \in \mathbb{Z}}$ ~~aber~~ $\cancel{-1 \notin \mathbb{N}}$
- Nein! – denn $\mathbb{Z}$ ist abzählbar.

Es gibt eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

Zifferndarstellung mit Vorzeichenbit

- Darstellung positiver Zahlen

$$(z_k z_{k-1} \dots z_0)q = \sum_{i=0}^{k} z_i q^i \qquad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, 1, \dots q-1\}$$

- Zusätzliches Symbol: „−“
- Darstellung negativer Zahlen

$$(z_k z_{k-1} \dots z_0)q = \sum_{i=0}^{k} z_i q^i \qquad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, 1, \dots q-1\}$$

- Technische Realisierung: Vorzeichenbit

Dualdarstellung ganzer Zahlen mit Vorzeichenbit

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, 111_2, 110_2, 101_2, 000_2, 001_2, 010_2, 011_2, ...\}$$

- Darstellung
  - Eindeutigkeit bei endlich vielen Stellen: 1.Stelle = Vorzeichenbit
- Keine eindeutige Darstellung von $0 : 0 = 000_2 = 100_2$
- Addition natürlicher und ganzer Zahlen grundsätzlich verschieden

Dualdarstellung ganzer Zahlen mit Einerkomplement

- Negative Zahlen werden durch das Invertieren aller Bits gebildet
  - Null ist eindeutig darstellbar
  - Nachteil: Woher weiß ich, ob die Zahl negativ oder positiv ist?

Dualdarstellung ganzer Zahlen mit Zweierkomplement

- Grundannahme: Feste Anzahl Stellen N
- Kochrezept: Das Zweierkomplement von $n < 0$ erhält man durch:
  - Dualdarstellung von $-n$, umklappen aller Bits, 1 addieren
- Beispiel:
  - Bei $N = 4$ Bits soll $n = -3$ dargestellt werden:
  - $-3 \quad \rightarrow \quad -(0011_2) \quad \rightarrow \quad 1100_2 \quad \rightarrow \quad 1101_2$

- Feste Anzahl Stellen N
- Größte darstellbare natürliche Zahl wäre $2^N - 1 = 111\dots111_2$
- Umklappen aller Bits von $n \leq 0$ entspricht: $(2^N - 1) - n = 1\dots1_2 - n$
- Addieren von eins führt zu: $(2^N - 1) - n + 1 = 1\dots1 - n + 1$

Beispiel Dualzahlen

- Umrechnung von -741_{10} in dual mithilfe des Zweierkomplements

Quellen I

Hoffmann, Dirk W (2020). *Grundlagen der technischen Informatik*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG.