

Technische und logische Grundlagen der Informatik Wintersemester 2021/22

Signale im Zeit und Frequenzbereich

Benjamin.Troester@HTW-Berlin.de

PGP: ADE1 3997 3D5D B25D 3F8F 0A51 A03A 3A24 978D D673

Benjamin Tröster

Road-Map

- 1 Signal
 - Illustratives Beispiel
 - Analoge/Digitale Signale
- 2 Digital vs. Analog
- 3 Anwendungsbeispiel: Netzwerke
- 4 Grundlegende Signalverarbeitung: Deterministische Signale
- 5 Fourier-Reihen
- 6 Bit-Rate des Übertragungskanals

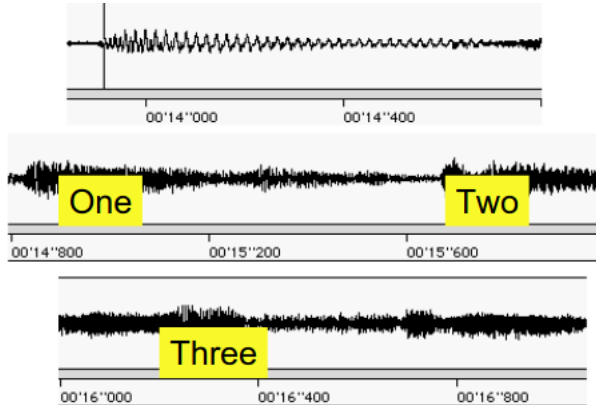
Signal

Definition (Signal)

Informationstragende, physikalische Größe, die sich über der Zeit, über dem Ort oder über einer anderen Variablen ändert.

- Mathematisch: Funktion einer oder mehrerer Variablen, z.B.
$$y(t) = m \cdot x + n, r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$
- Beispiele: Temperatur über der Zeit $x(t)$, Helligkeit eines Bildes $I(x, y)$, Schalldruck $\rho(x, y, z, t)$ etc.
- Unterscheidung in deterministische (periodische) oder stochastische Signale

- Zeitkontinuierlich Luftdruckschwankungen:
Musik und Sprache

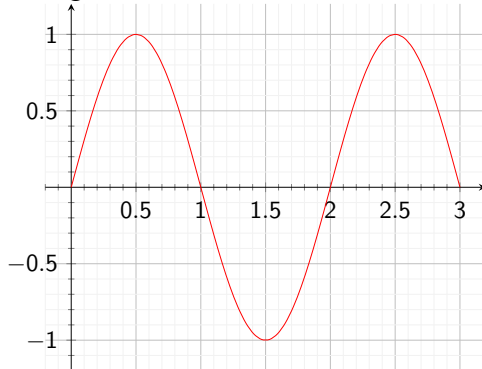


Analoge/Digitale Signale

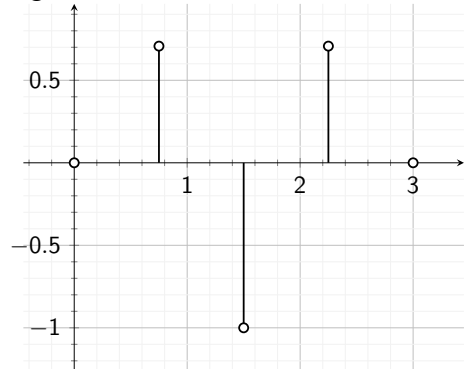
- Analoge Signale sind wert- & zeitkontinuierlich
 - Werte kontinuierlich (stetig)
 - I.A. alle natürlichen physikalischen Signale & Prozesse
- Digitale Signale sind wert- & zeitdiskret
 - Diskrete Werte
 - Variablen-Diskretisierung (Abtastung, führt zu diskreten Signalen)
 - Amplituden- bzw. Wert-Diskretisierung (Quantisierung)

Digital vs. Analog

■ Analog:

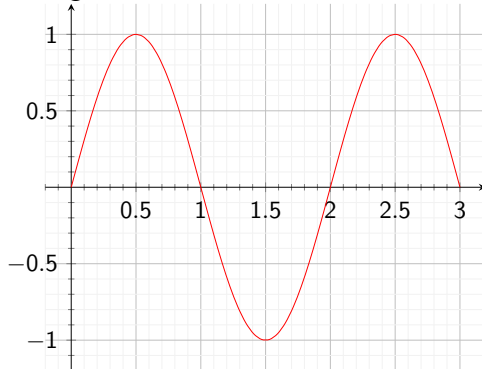


■ Digital:

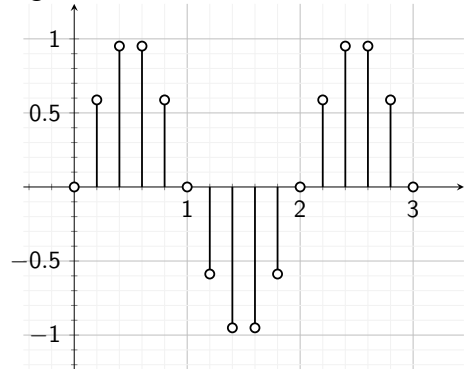


Digital vs. Analog

■ Analog:

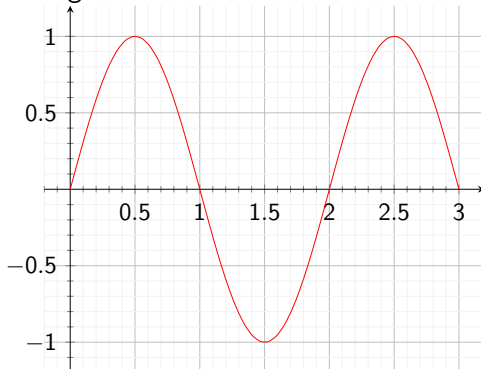


■ Digital:

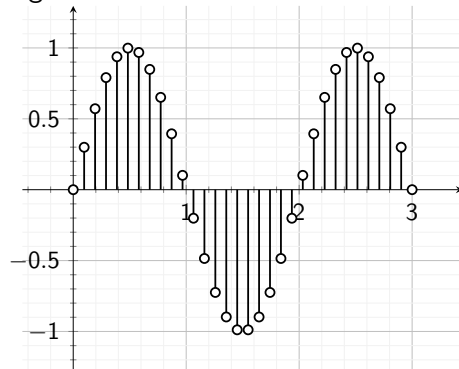


Digital vs. Analog

■ Analog:



■ Digital:

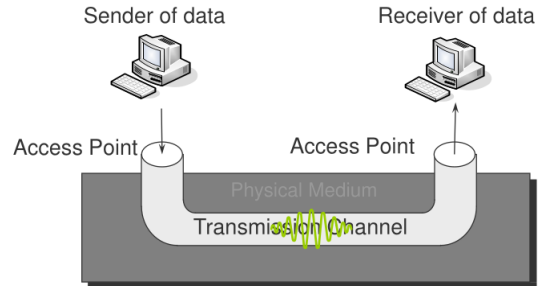


Bits

- Digitale Signale: diskret
- Einfachste Diskretisierung: binäres Alphabet $\mathbb{B} = \{0, 1\}$
 - Bit Kunstwort von Binary Digit
- Darstellung in „An, Aus; Strom, kein Strom; Licht, kein Licht“

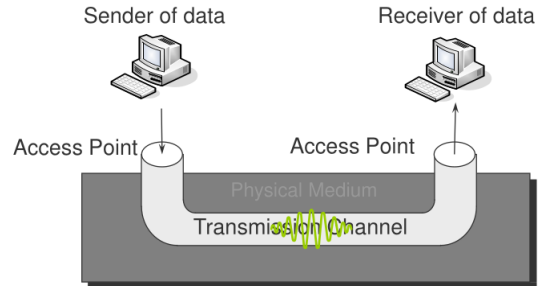
Anwendungsbeispiel: Netzwerke

- Daten werden konvertiert über einen Kanal gesendet
- Übertragungskanal: Access Point + Übertragungsmedium des physikalischen Mediums
 - Kupferkabel, Glasfaser, Radiowelle, etc.



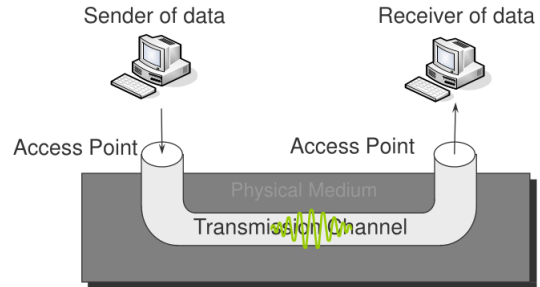
Computers deal with digital signals

- Quantisierung – The need to convert
 - Computer arbeiten ausschließlich mit digitalen Daten *to* diskreten Signalen
 - Physikalische Medien sind aber immer analoge *to* kontinuierliche Signale
 - Also muss eine Konvertierung von digital zu analog erfolgen (*vice versa*)



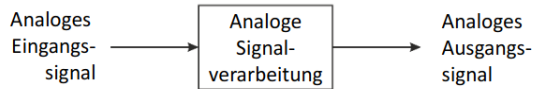
Computers deal with digital signals

- **Abtastung – The need to measure**
 - Computer haben nur eine diskrete Auflösung der Zeit (Quarz)
 - Zustand des physikalische Mediums variiert stetig

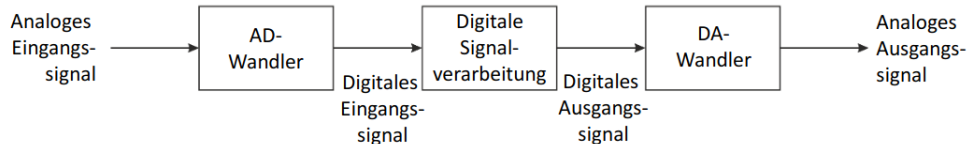


Signalverarbeitungsarchitekturen

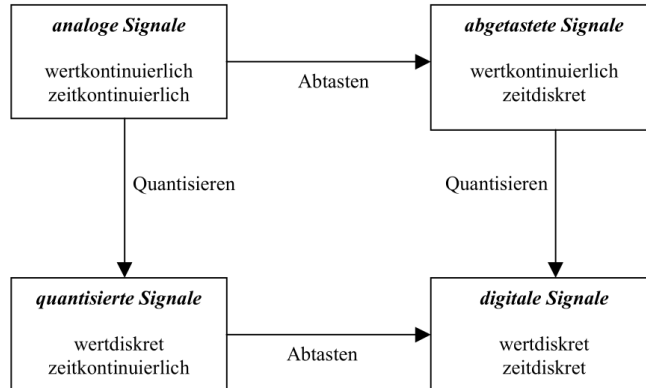
■ Analoge Signalverarbeitung:



■ Digitale Signalverarbeitung:

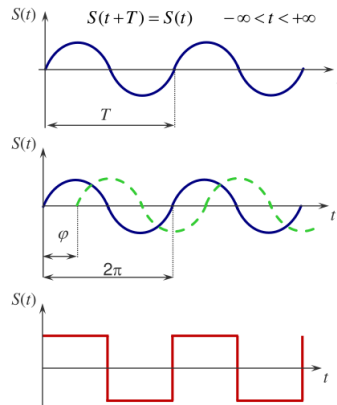


Analog → Digital



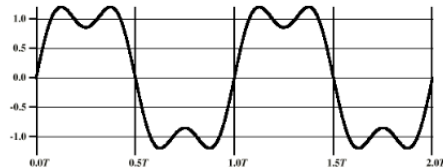
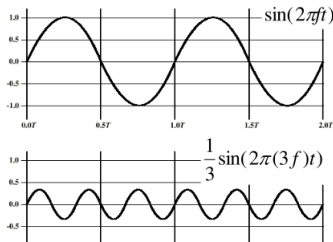
Grundlegende Signalverarbeitung: Deterministische Signale

- Periodische Signale \rightarrow deterministisch, Periode gibt fixen Bereich vor
- Parameter periodische Signale:
 - Periode T
 - Frequenz $f = \frac{1}{T}$,
 - Amplitude $S(t)$
 - Phase φ
- Beispiele:
 - Sinus: Periode 2π
 - Phase shift φ ($\sin \rightarrow \cos : \varphi = \frac{3}{2}\pi$)



Komposition periodischer Signale

- Periodische Funktionen als Kompositionen
 - Beispiel: $s(t) = \sin(2\pi ft) + \frac{1}{3} \sin(2\pi(3f)t)$
- Signal: Sin mit Frequenz f und $3f$

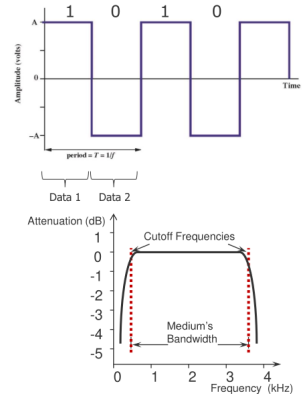


Einschub Fourier-Reihen

- Jede periodische Funktion kann als Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen dargestellt werden \Leftarrow Fourier-Reihe
- Reihenentwicklung: Darstellung (komplizierten) Funktion durch die Summe (einfachen) Ersatzfunktionen
 - Lineare mathematische Umformungen (Addition, Differentiation, Integration usw.) als Ersatzfunktionen statt Originalfunktion
 - Reihendarstellung: Approximation, bei unendlich vielen Reihengliedern exakt (sofern Konvergent)
- Stetiges periodisches Signal $x(t)$ kann durch Fourier-Reihe approximiert werden
- Wie viele Reihenglieder und somit Koeffizienten notwendig sind, hängt von den Eigenschaften von $x(t)$

Bit-Rate des Übertragungskanal

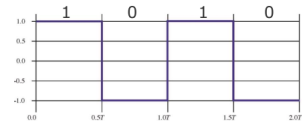
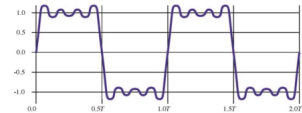
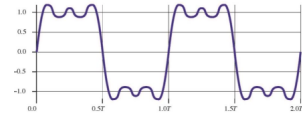
- Beispiel: Rechteckschwingung
 - Positiver Puls 1-Bit
 - Negativer Puls 0-Bit
 - Dauer des Pulses $\frac{1}{2}f$
 - Datenrate ist $2f$ Bits pro Sekunde
- Bandbreite ist physikalisch begrenzt (Eigenschaft des Mediums)
 - Berechnung: $\delta = f_{max} - f_{min}$



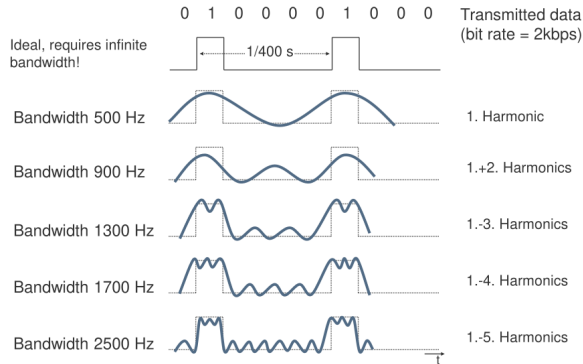
Bit-Rate vs. Bandbreite: Signalfrequenz

- Ziel: Komposition der Rechteckschwingung durch periodische Funktion
- Signal besteht aus f , $3f$ und $5f$
 - $\sin(2\pi ft) + \frac{1}{3}\sin(2\pi 3ft) + \frac{1}{5}\sin(2\pi 5ft)$
- Signal besteht aus f , $3f$, $5f$ und $7f$
 - $\sin(2\pi ft) + \frac{1}{3}\sin(2\pi 3ft) + \frac{1}{5}\sin(2\pi 5ft) + \frac{1}{7}\sin(2\pi 7ft)$
- Rechteckschwingung:

$$s(t) = A \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1, k \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2\pi kft)$$

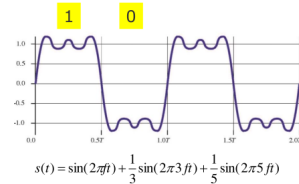


Bit-Rate vs. Bandbreite: Medium limiting harmonics



Bit-Rate vs. Bandbreite: Numerisches Beispiel

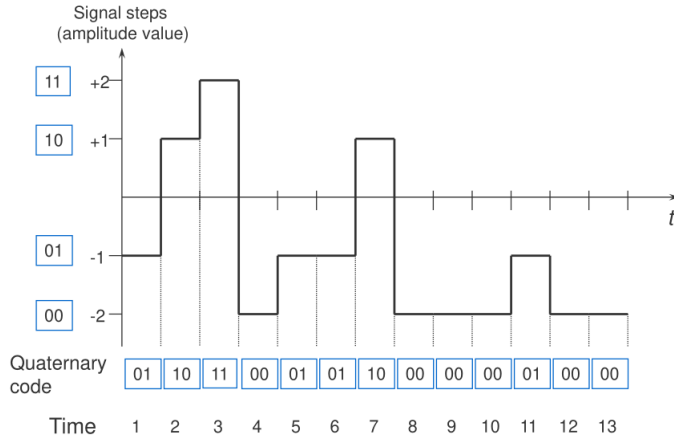
- Beispiel Frequenz: $f = 1\text{MHz}$
 - Bandbreite des Signals:
 $s(t) = 5 \cdot 10^6\text{Hz} - (1 \cdot 10^6\text{Hz}) = 4\text{MHz}$
 - Periode: $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{10^6}\text{s} = 10^{-6}\text{s} = 1\mu\text{s}$
 - 1 Bit alle $0.5\mu\text{s}$
 - Datenrate: $r = 2\text{Bit} \cdot 10^6\text{Hz} = 2\frac{\text{MBit}}{\text{s}}$
- Beispiel: $f = 2\text{MHz}$?



Bit-Rate vs. Bandbreite: Multilevel Digital Signals

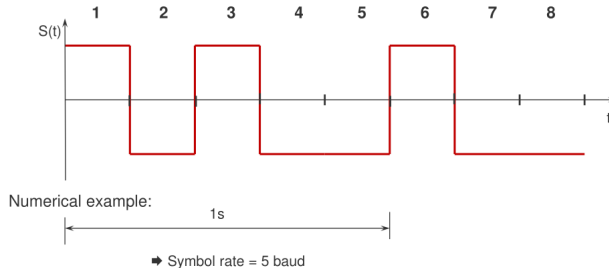
- Binäres Signal: Signal mit zwei Werten
- Multilevel digital Signal:
 - Digitales Signal mit mehr als nur zwei Werten, DIBIT = zwei Bit pro Wert (quartär Signal)
 - Anzahl der diskreten Werte eines Signals können wie folgt beschrieben werden:
 - $n = 2$ binary (binär)
 - $n = 3$ ternary (trinär)
 - $n = 4$ quaternary (quartär)
 - ...
 - $n = 8$ octonary
 - $n = 10$ denary

Bit-Rate vs. Bandbreite: Multilevel Digital Signals



Bit-Rate vs. Bandbreite: Datenrate

Symbolrate = Anz. der physikalischen Ereignisse pro Zeiteinheit auf dem Medium
Einheit: Symbole/s = Baud (bd)



Bit-Rate vs. Bandbreite: Datenrate

- Datenrate = Anzahl der dekodierten Bits der Symbolrate pro Zeiteinheit
Einheit: Bits/s (bps)
- Binäre Signale mit Frequenz ν : Data rate = ν
Jedes Signal dekodiert 1 Bit
- Multilevel-Signale – n mögliche Werte: Data rate = $\nu \cdot \log_2(n)$
- Beispiel:
 - DIBIT \Leftarrow 1 baud = 2 bps (quaternary signal)
 - TRIBIT \Leftarrow 1 baud = 3 bps (octonary signal)

Bits & Bytes

Name of bit rate	Symbol	Multiple	Explicit
Bit per second	bps	10^0	1
Kilobit per second	kbps	10^3	1,000
Megabit per second	Mbps	10^6	1,000,000
Gigabit per second	Gbps	10^9	1,000,000,000
Terabit per second	Tbps	10^{12}	1,000,000,000,000
Petabit per second	Pbps	10^{15}	1,000,000,000,000,000
Exabit per second	Ebps	10^{18}	way too many zeroes...