

# Bool'sche Algebra

# Fahrplan

Recap

Einleitung

Bool'sche Algebra

Schaltalgebra

Mengenalgebra

Notation und Operatorenbindung

# Analoge/Digitale Signale

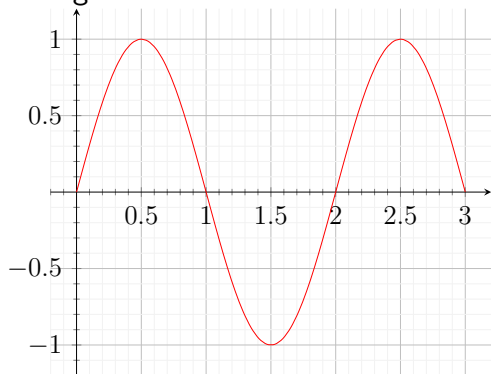
## Definition (Signal)

Informationstragende, physikalische Größe, die sich über der Zeit, über dem Ort oder über einer anderen Variablen ändert.

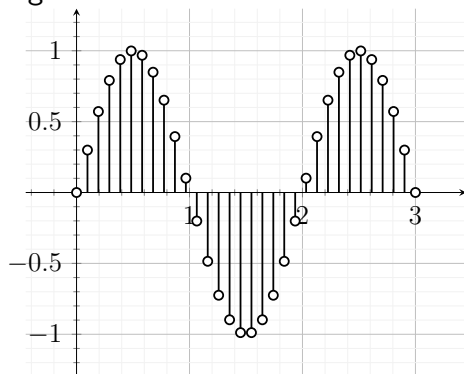
- ▶ Analoge Signale sind wert- & zeitkontinuierlich
  - ▶ Werte kontinuierlich (stetig)
  - ▶ I.A. alle natürlichen physikalischen Signale & Prozesse
- ▶ Digitale Signale sind wert- & zeitdiskret
  - ▶ Diskrete Werte
  - ▶ Variablen-Diskretisierung (Abtastung, führt zu diskreten Signalen)
  - ▶ Amplituden- bzw. Wert-Diskretisierung (Quantisierung)

# Digital vs. Analog

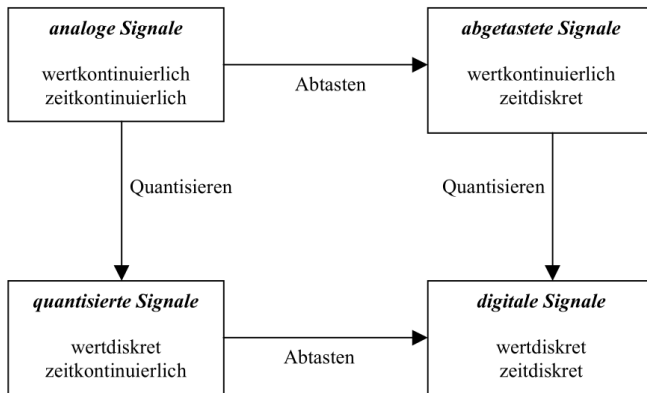
► Analog:



► Digital:

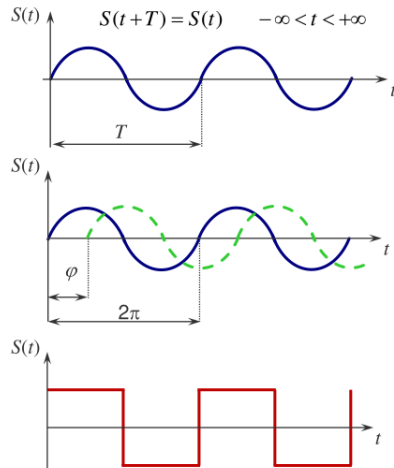


# Analog $\rightarrow$ Digital



# Grundlegende Signalverarbeitung: Deterministische Signale

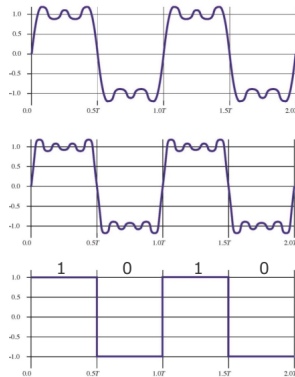
- ▶ Periodische Signale  $\rightarrow$  deterministisch, Periode gibt fixen Bereich vor
- ▶ Parameter periodische Signale:
  - ▶ Periode  $T$
  - ▶ Frequenz  $f = \frac{1}{T}$ ,
  - ▶ Amplitude  $S(t)$
  - ▶ Phase  $\varphi$
- ▶ Beispiele:
  - ▶ Sinus: Periode  $2\pi$
  - ▶ Phase shift  $\varphi$  ( $\sin \rightarrow \cos : \varphi = \frac{3}{2}\pi$ )



# Bit-Rate vs. Bandbreite: Signalfrequenz

- ▶ Ziel: Komposition der Rechteckschwingung durch periodische Funktion
- ▶ Signal besteht aus  $f$ ,  $3f$  und  $5f$ 
  - ▶  $\sin(2\pi ft) + \frac{1}{3}\sin(2\pi 3ft) + \frac{1}{5}\sin(2\pi 5ft)$
- ▶ Signal besteht aus  $f$ ,  $3f$ ,  $5f$  und  $7f$ 
  - ▶  $\sin(2\pi ft) + \frac{1}{3}\sin(2\pi 3ft) + \frac{1}{5}\sin(2\pi 5ft) + \frac{1}{7}\sin(2\pi 7ft)$
- ▶ Rechteckschwingung:

$$s(t) = A \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1, k \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2\pi kft)$$



# Einleitung

- ▶ Letzte Vorlesung: Wie kommen die Bits in den Rechner
- ▶ **Heute: Formale Beschreibung**
  - ▶ **Logik,**
  - ▶ **Aussagenlogik**
  - ▶ **Bool'sche Algebra**
  - ▶ Formal: Was ist eine Aussage
  - ▶ Aussagenlogik Axiomatisierung nach Peano/Huntington/Lattice
  - ▶ Basisoperatoren, sekundäre Operatoren



# Elementare Logik

## Definition (Logik)

Eine **Aussage** (proposition) ist ein Satz, von dem man eindeutig entscheiden kann, ob er wahr oder falsch ist.

- ▶ Handelt es sich um eine Aussage?
  - ▶ Wien ist die Hauptstadt von Österreich.
  - ▶  $1 + 5 = 6$ .
  - ▶ 5 ist kleiner als 3.
  - ▶ Guten Abend!
  - ▶  $x + 3 = 5$

[TT13]

# Aussagenlogik

## Definition (Aussagenlogik)

**Aussagenlogik**, als Teilgebiet der Logik, befasst sich mit Aussagen und der Verknüpfung von Aussagen mittels *Junktoren*.

- ▶ Junktoren sind logische Verknüpfungen
- ▶ Klassische Junktoren:
  - ▶ Negation  $\neg P$
  - ▶ Implikation/Subjunktion/Konditional  $P \Rightarrow Q$
  - ▶ Äquivalenz/Bikonditional/Bisubjunktion  $P \Leftrightarrow Q$
  - ▶ Konjunktion  $P \wedge Q$
  - ▶ Disjunktion  $P \vee Q$

[Rau08]

# Negation

## Definition (Negation)

Sei  $a$  beliebige Aussage, so ist die Verneinung oder Negation einer Aussage  $a$  genau dann wahr, wenn  $a$  falsch ist. Die Verneinung von  $a$  wird symbolisch mit  $a$  oder  $\neg a$  (auch  $\bar{a}$ ,  $!a$ ) bezeichnet (gelesen "nicht  $a$ ").

$a$	$\neg a$
0	1
1	0

# Implikation

## Definition (Aussagenlogik)

Seien  $a$  und  $b$  beliebige Aussagen, so ist die WENN-DANN-Verknüpfung oder Implikation  $a \Rightarrow b$  (gelesen "Wenn  $a$ , dann  $b$ ") wie folgt definiert:

$a$	$b$	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

# Äquivalenz

## Definition (Äquivalenz)

Seien  $a$  und  $b$  beliebige Aussagen, so ist die GENAU-DANN-Verknüpfung oder Bijunktion  $a \Leftrightarrow b$  (gelesen "a genau dann, wenn b") von zwei Aussagen  $a$  bzw.  $b$  sind durch ihre Wahrheitstabellen folgendermaßen definiert:

$a$	$b$	$a \Leftrightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

# Konjunktion

## Definition (Konjunktion)

Seien  $a$  und  $b$  beliebige Aussagen, so ist die UND-Verknüpfung oder Konjunktion von  $a$  und  $b$  symbolisch mit  $a \wedge b$  bezeichnet (gelesen: "a und b"). Die neue Aussage  $a \wedge b$  ist genau dann wahr, wenn sowohl  $a$  als auch  $b$  wahr ist. Ansonsten ist  $a \wedge b$  falsch.

$a$	$b$	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

# Return to Äquivalenz

Die Äquivalenz kann auch als Kombination zweier Implikationen betrachtet werden:

$$a \Rightarrow b \wedge a \Leftarrow b$$

## Return to Äquivalenz

Die Äquivalenz kann auch als Kombination zweier Implikationen betrachtet werden:

$$a \Rightarrow b \wedge a \Leftarrow b$$

$a$	$b$	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$b$	$a$	$b \Rightarrow a$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$A : a \Rightarrow b$	$B : a \Leftarrow b$	$A \wedge B$
$0,0 \rightarrow 1$	$0,0 \rightarrow 1$	1
$0,1 \rightarrow 1$	$1,0 \rightarrow 0$	0
$1,0 \rightarrow 0$	$1,0 \rightarrow 0$	0
$1,1 \rightarrow 1$	$1,1 \rightarrow 1$	1



# Disjunktion

## Definition (Disjunktion)

Seien  $a$  und  $b$  beliebige Aussagen, so ist ODER-Verknüpfung oder Disjunktion von  $a$  und  $b$  symbolisch mit  $a \vee b$  bezeichnet (gelesen: "a oder b"). Die neue Aussage  $a \vee b$  ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen  $a$  bzw.  $b$  wahr ist; sonst ist  $a \vee b$  falsch. Die Verknüpfung  $a \vee b$  entspricht dem nicht-ausschließenden "oder" der Umgangssprache (denn  $a \vee b$  ist auch wahr, wenn sowohl  $a$  als auch  $b$  wahr ist)!

$a$	$b$	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

# Algebra

## Definition (Algebra)

Als Teilgebiete der Mathematik befasst sich die Algebra mit den Eigenschaften von Rechenoperationen.

Verkürzt aus [Bew07]

# Bool'sche Algebra

## Definition (BA nach Peano)

Die bool'sche Algebra nach Peano ist als Menge  $\mathcal{V}$  mit Nullelement 0 und Einselement 1 und den zweistelligen Verknüpfungen  $\wedge(\cdot)$ ,  $\vee(+)$ , sowie der einstelligen Verknüpfung  $\neg$  definiert.

- ▶ Definitionsmenge  $\mathcal{D} : \{0, 1\}^*$ , Zielmenge  $\mathcal{Z} : \{0, 1\}$
- ▶ Einstellige Verknüpfung:  $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$
- ▶ Zweistellige Verknüpfung:  $f : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$
- ▶  $n$ -stelligen Verknüpfung  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$
- ▶ Gesamtheit wird mit  $B_n$  bezeichnet, daraus ergeben sich  $2^n$  Funktionen
- ▶  $B_0$  sind die Konstanten 0 und 1

# Bool'sche Algebra nach Peano

1. Kommutativgesetz (K)  $a \wedge b = b \wedge a$  bzw.  $a \vee b = b \vee a$
2. Assoziativgesetz (A)  $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$  bzw.  $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
3. Idempotenzgesetz (I)  $a \wedge a = a$  bzw.  $a \vee a = a$
4. Distributivgesetz (D)  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$  bzw.  
 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
5. Neutralitätsgesetz (N)  $a \wedge 1 = a$  bzw.  $a \vee 0 = a$
6. Extremalgesetz (Ex)  $a \wedge 0 = 0$  bzw.  $a \vee 1 = 1$
7. Involution (In)  $\neg(\neg a) = a$
8. De Morgansche Gesetz  $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$  bzw.  $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$
9. Komplementärgesetz/Inverse Element (I)  $a \wedge \neg a = 0$  bzw.  $a \vee \neg a = 1$
10. Dualitätsgesetz  $\neg 0 = 1$  bzw.  $\neg 1 = 0$
11. Absorptionsgesetz  $a \vee (a \wedge b) = a$  bzw.  $a \wedge (a \vee b) = a$

# Bool'sche Algebra nach Huntington (Wichtig!)

## Definition

Die bool'sche Algebra nach Huntington ist definiert als Menge  $\mathcal{V} : \{0, 1\}$  mit den Verknüpfungen  $\cdot (\wedge), + (\vee)$ , sodass  $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ , also  $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ .

- ▶ Kommutativgesetze (K):  $a \cdot b = b \cdot a$  bzw.  $a + b = b + a$
- ▶ Distributivgesetze (D):  $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$  bzw.  
 $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
- ▶ Neutrale Elemente (N):  $\exists e, n \in \mathcal{V}$  mit  $a \cdot e = a$  und  $a + n = a$
- ▶ Inverse Elemente (I):  $\forall a \in \mathcal{V}$  existiert ein  $a'$  mit  $a \cdot a' = n$  und  $a + a' = e$

Übernommen von [Bar13] bzw. [Hof20]

# $\mathbb{R}$ als bool'sche Algebra nach Huntington?

- Gelten die Kommutativgesetze in  $\mathbb{R}$  bzgl.  $\cdot, +$ ?

# $\mathbb{R}$ als bool'sche Algebra nach Huntington?

- ▶ Gelten die Kommutativgesetze in  $\mathbb{R}$  bzgl.  $\cdot, +$ ?
  - ▶  $a \cdot b = b \cdot a$  bzw.  $a + b = b + a$

# $\mathbb{R}$ als bool'sche Algebra nach Huntington?

- ▶ Gelten die Kommutativgesetze in  $\mathbb{R}$  bzgl.  $\cdot, +$ ?
  - ▶  $a \cdot b = b \cdot a$  bzw.  $a + b = b + a$
- ▶ Gibt es ein neutrales Element bzgl.  $\cdot, +$ ?



# $\mathbb{R}$ als bool'sche Algebra nach Huntington?

- ▶ Gelten die Kommutativgesetze in  $\mathbb{R}$  bzgl.  $\cdot, +$ ?
  - ▶  $a \cdot b = b \cdot a$  bzw.  $a + b = b + a$
- ▶ Gibt es ein neutrales Element bzgl.  $\cdot, +$ ?
  - ▶  $\exists e, n \in \mathcal{V}$  mit  $a \cdot e = a$  und  $a + n = a$

# $\mathbb{R}$ als bool'sche Algebra nach Huntington?

- ▶ Gelten die Kommutativgesetze in  $\mathbb{R}$  bzgl.  $\cdot, +$ ?
  - ▶  $a \cdot b = b \cdot a$  bzw.  $a + b = b + a$
- ▶ Gibt es ein neutrales Element bzgl.  $\cdot, +$ ?
  - ▶  $\exists e, n \in \mathcal{V}$  mit  $a \cdot e = a$  und  $a + n = a$
- ▶ Gibt es zu jedem Element  $e \in \mathbb{R}$  ein inverses Element  $i \in \mathbb{R}$

# $\mathbb{R}$ als bool'sche Algebra nach Huntington?

- ▶ Gelten die Kommutativgesetze in  $\mathbb{R}$  bzgl.  $\cdot, +$ ?
  - ▶  $a \cdot b = b \cdot a$  bzw.  $a + b = b + a$
- ▶ Gibt es ein neutrales Element bzgl.  $\cdot, +$ ?
  - ▶  $\exists e, n \in \mathcal{V}$  mit  $a \cdot e = a$  und  $a + n = a$
- ▶ Gibt es zu jedem Element  $e \in \mathbb{R}$  ein inverses Element  $i \in \mathbb{R}$ ?
  - ▶  $\forall a \in \mathcal{V}$  existiert ein  $a'$  mit  $a \cdot a' = n$  und  $a + a' = e$

# $\mathbb{R}$ als bool'sche Algebra nach Huntington?

- ▶ Gelten die Kommutativgesetze in  $\mathbb{R}$  bzgl.  $\cdot, +$ ?
  - ▶  $a \cdot b = b \cdot a$  bzw.  $a + b = b + a$
- ▶ Gibt es ein neutrales Element bzgl.  $\cdot, +$ ?
  - ▶  $\exists e, n \in \mathcal{V}$  mit  $a \cdot e = a$  und  $a + n = a$
- ▶ Gibt es zu jedem Element  $e \in \mathbb{R}$  ein inverses Element  $i \in \mathbb{R}$ ?
  - ▶  $\forall a \in \mathcal{V}$  existiert ein  $a'$  mit  $a \cdot a' = n$  und  $a + a' = e$
- ▶ Gelten die Distributivgesetze in  $\mathbb{R}$  bzgl.  $\cdot, +$ ?

# $\mathbb{R}$ als bool'sche Algebra nach Huntington?

- ▶ Gelten die Kommutativgesetze in  $\mathbb{R}$  bzgl.  $\cdot, +$ ?
  - ▶  $a \cdot b = b \cdot a$  bzw.  $a + b = b + a$
- ▶ Gibt es ein neutrales Element bzgl.  $\cdot, +$ ?
  - ▶  $\exists e, n \in \mathcal{V}$  mit  $a \cdot e = a$  und  $a + n = a$
- ▶ Gibt es zu jedem Element  $e \in \mathbb{R}$  ein inverses Element  $i \in \mathbb{R}$ ?
  - ▶  $\forall a \in \mathcal{V}$  existiert ein  $a'$  mit  $a \cdot a' = n$  und  $a + a' = e$
- ▶ Gelten die Distributivgesetze in  $\mathbb{R}$  bzgl.  $\cdot, +$ ?
  - ▶  $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

# $\mathbb{R}$ als bool'sche Algebra nach Huntington?

- ▶ Gelten die Kommutativgesetze in  $\mathbb{R}$  bzgl.  $\cdot, +$ ?
  - ▶  $a \cdot b = b \cdot a$  bzw.  $a + b = b + a$
- ▶ Gibt es ein neutrales Element bzgl.  $\cdot, +$ ?
  - ▶  $\exists e, n \in \mathcal{V}$  mit  $a \cdot e = a$  und  $a + n = a$
- ▶ Gibt es zu jedem Element  $e \in \mathbb{R}$  ein inverses Element  $i \in \mathbb{R}$ 
  - ▶  $\forall a \in \mathcal{V}$  existiert ein  $a'$  mit  $a \cdot a' = n$  und  $a + a' = e$
- ▶ Gelten die Distributivgesetze in  $\mathbb{R}$  bzgl.  $\cdot, +$ ?
  - ▶  $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
  - ▶  $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \nmid$

# Bool'sche Algebra als Verband (Lattice)

## Definition

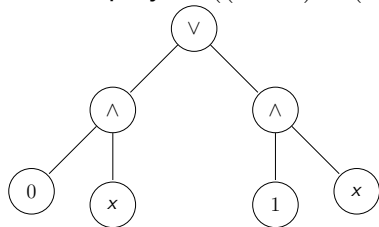
Es kann eine bool'sche Algebra mit den Verknüpfungen  $\wedge, \vee, \neg$  und den Elementen  $0, 1$  als distributiver, komplementärer Verband definiert werden. Zusätzlich ist eine partielle Halbordnung  $a \leq b \Leftarrow a = a \wedge b$  definiert. So haben zwei Elemente ein Supremum und ein Infimum.

- ▶ Kommutativgesetze (K):  $a \wedge b = b \wedge a$  bzw.  $a \vee b = b \vee a$
- ▶ Assoziativgesetz (A)  $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$  bzw.  $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
- ▶ Absorptionsgesetz  $a \vee (a \wedge b) = a$  bzw.  $a \wedge (a \vee b) = a$
- ▶ Komplementärgesetz/Inverse Element (I)  $a \wedge \neg a = 0$  bzw.  $a \vee \neg a = 1$
- ▶ Distributivgesetz (D)  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

[Sas99]

# Darstellungen & Bool'sche Funktionen

- ▶ Wahrheitstabelle (s.o.)
- ▶ Via Graph  $y = ((0 \wedge x) \vee (1 \vee x))$



- ▶ Formeldarstellung – algebraische Darstellung (s.o)



# Schaltalgebra als bool'sche Algebra

- $\neg, \wedge$  und  $\vee$  sind Operatoren über der Menge  $\{0, 1\}$

$a$	$b$	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$a$	$b$	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$a$	$\neg a$
0	1
1	0

- Kommutativgesetze, Distributivgesetze, neutrales Element, inverses Element

$\mathcal{V}$   $\{0, 1\}$  Wahrheitswerte (TRUE, FALSE)

$\cdot$   $\wedge$  Konjunktion (UND-Operator)

$+$   $\vee$  Disjunktion (ODER-Operator)

$n$  0 Falsch (FALSE)

$e$  1 Wahr (TRUE)

$a'$   $\neg a$  Negation (Verneinung)

# Mengenalgebra

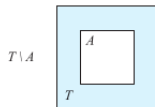
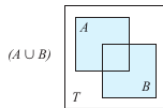
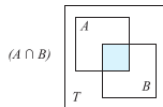
## Definition (Trägermenge)

Eine Trägermenge  $\mathcal{T}$  bezeichnet die Menge, die mithilfe einer Menge von Verknüpfungen eine algebraische Struktur bildet.

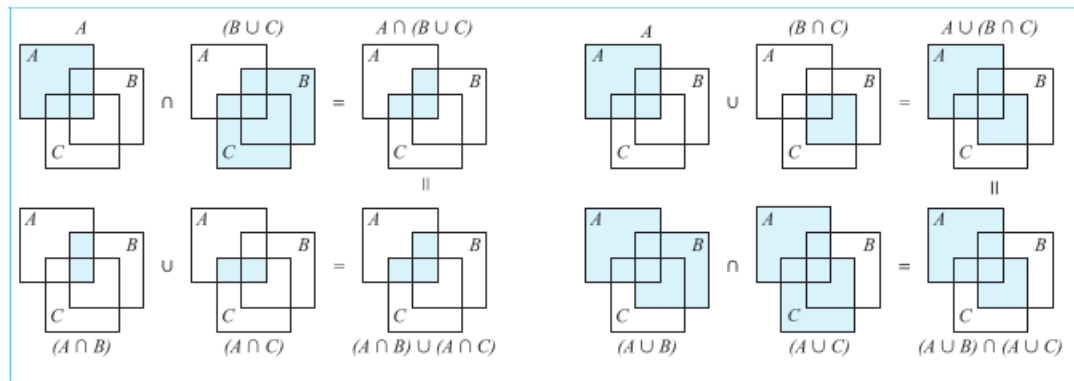
► Mengenalgebra über einer Trägermenge  $\mathcal{T}$

$\mathcal{V}$	$\mathcal{P}(T)$	Potenzmenge der Trägermenge $T$
$\cdot$	$\cap$	Durchschnitt
$+$	$\cup$	Vereinigung
$n$	$\emptyset$	leere Menge
$e$	$\mathcal{T}$	Trägermenge
$a'$	$\mathcal{T} \setminus$	Komplementärmenge

# Mengenalgebra



# Mengenalgebra



# Notation und Operatorenbindung

- ▶ Syntactic Sugar (Ableitungen aus Basisverknüpfungen)
  - ▶  $(a \Rightarrow b)$  für  $(\neg a \vee b)$  – Implikation
  - ▶  $(a \Leftarrow b)$  für  $(b \Rightarrow a)$  – Inversion der Implikation
  - ▶  $(a \Leftrightarrow b)$  für  $(a \Rightarrow b) \wedge (a \Leftarrow b)$  – Äquivalenz
  - ▶  $(a \oplus b)$  für  $\neg(a \Leftrightarrow b)$  – Antivalenz oder Exklusiv-ODER/XOR
  - ▶  $\neg(a \vee b)$  – NOR
  - ▶  $\neg(a \wedge b)$  – NAND
- ▶ Bindung der Operatoren
  - ▶  $\wedge$  bindet stärker als  $\vee$
  - ▶  $\neg$  bindet stärker als  $\wedge$
- ▶ Klammerung
  - ▶ Gleiche Verknüpfungen: linksassoziativ zusammengefasst

# Weitere Verknüpfungen

Kommutativgesetze	$a \wedge b = b \wedge a$ $a \vee b = b \vee a$	(K)
Distributivgesetze	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	(D)
Neutrale Elemente	$a \wedge 1 = a$ $a \vee 0 = a$	(N)
Inverse Elemente	$a \wedge \neg a = 0$ $a \vee \neg a = 1$	(I)
Assoziativgesetze	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge b \wedge c$ $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = a \vee b \vee c$	(A)

[Hof20]

# Weitere Verknüpfungen

Idempotenzgesetze	$a \wedge a = a$ $a \vee a = a$	(ID)
Absorptionsgesetze	$a \vee (a \wedge b) = a$ $a \wedge (a \vee b) = a$	(AB)
Gesetze von DeMorgan	$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$ $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$	(M)
Auslöschungsgesetze	$a \wedge 0 = 0$ $a \vee 1 = 1$	(L)
Gesetz der Doppelnegation	$\neg\neg a = a$	(DN)

[Hof20]

# Wie viele Funktionen gibt es denn?

- ▶ Prinzipiell: Kreuzprodukt der Eingangswerte, da  $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \dots \mathcal{V}$  gilt
- ▶ Somit ist der Eingangsvektor die Kombination aller möglichen Eingangswerte
- ▶ Einstellige Funktion:  $2^2 = 4$ , da  $\{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$  abbilden
- ▶ Zweistellige Funktionen:  $2^4$ , da  $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$  die Eingangswerte darstellen
- ▶ Dreistellige Funktionen:  $2^8$ , da  $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}$  die Eingangswerte darstellen
- ▶ Allgemein:  $\mathcal{V}^n \rightarrow \mathcal{V}^m$  Anzahl:  $(2^m)^{2^n}$



# Beispiel






$$Y = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$

$$Y = (\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b)$$


# Ausblick nächste Vorlesung

- ▶ Erfüllbarkeit & Äquivalenz
- ▶ De Morgan Regeln
- ▶ Universelle Operatoren
- ▶ Beweisstrategien & Induktion – Strukturelle Induktion
- ▶ Dualitätsprinzip
- ▶ Normalformen
- ▶ Bitweise logische Operationen, Bit-Maskierung
- ▶ Einführung Logikgatter

# Quellen I

-  Barnett, Janet Heine (2013). "Boolean algebra as an abstract structure: Edward V. Huntington and axiomatization". In: *Convergence*.
-  Bewersdorff, Jörg (2007). "Algebra für Einsteiger: Von der Gleichungsauflösung zur Galois-Theorie, 3". In: *Aufl. Vieweg+ Teubner, Wiesbaden (2007, Juli)*.
-  Hoffmann, Dirk W (2020). *Grundlagen der technischen Informatik*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG.
-  Rautenberg, Wolfgang (2008). *Einführung in die mathematische Logik*. Springer.
-  Sasao, Tsutomu (1999). "Lattice and Boolean Algebra". In: *Switching Theory for Logic Synthesis*. Springer, S. 17–34.

## Quellen II

 Teschl, Gerald und Susanne Teschl (2013). *Mathematik für Informatiker: Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra*. Springer-Verlag.