Übungsblatt 1
Aufgabe A – Bool'sche Algebra

1. In der Schaltalgebra gelten die folgenden alternativen Absorptionsgesetze:

$$(1)(x \vee \neg y) \wedge y = x \wedge y$$
$$(2)(x \wedge \neg y) \vee y = x \vee y$$

a) Beweisen sie die Behauptung, indem sie die nachstehenden Wahrheitstabellen ergänzen:

x	y	$\neg x$	$\neg y$	$x \vee \neg y$	$x \wedge \neg y$	$(x \vee \neg y) \wedge y$	$x \wedge y$	$(x \wedge \neg y) \vee y$	$x \vee y$
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1	1

b) Führen sie den Beweis erneut, diesmal aber auf algebraische Weise (d.h. durch Umformungen).

Lösung:

$$
\begin{aligned}
(1)(x \vee \neg y) \wedge y & \\
&= (x \wedge y) \vee (negy \wedge y) \\
&= (x \wedge y) \vee 0 \\
&= x \wedge y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)(x \wedge \neg y) \vee y & \\
&= (x \vee y) \wedge (y \vee \neg y) \\
&= (x \vee y) \wedge 1 \\
&= x \vee y
\end{aligned}
$$

c) Übertragen sie die Gesetze in die Sprache der Mengenalgebra. Sind sie dort auch gültig?

Lösung:

$$(1)(M \cup \overline{N}) \cap N = M \cap N$$
$$(2)(M \cap \overline{N} \cup N = M \cup N$$

2. Zeigen Sie, dass die booleschen Ausdrücke

$$\Phi = x \wedge y \vee \neg((x \vee \neg y) \wedge y)$$
$$\Psi = \neg(x \wedge y) \vee x \vee y$$

Tautologien sind, indem sie

a) für beide Funktionen eine Wahrheitstafel aufstellen,

Lösung:

x	y	$x \wedge y$	$x \vee \neg y$	$(x \wedge \neg y) \wedge y$	$\neg(x \wedge \neg y) \wedge y$	φ
0	0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	1

x	y	$x \wedge y$	$\neg(x \wedge y)$	$x \vee y$	ψ
0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

b) den Beweis durch algebraische Umformung führen.

Lösung:

$$\begin{aligned} & x \wedge y \vee \neg((x \vee \neg y) \wedge y) \\ & \qquad = (x \wedge y) \vee \neg(x \wedge y) \\ & \qquad = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \neg(x \wedge y) \vee x \vee y \\ & \qquad = \neg x \neg y \vee x \vee y \\ & \qquad = (\neg x \vee x) \vee (\neg y \vee y) \\ & \qquad = 1 \vee 1 = 1 \end{aligned}$$

3. Bildet das Tripel $(\mathcal{V}, \cdot, +)$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &:= \{1, 2, 3, 6\} \\ \cdot &:= kgV \text{ (kleinstes gemeinsames Vielfaches)} \\ + &:= ggT \text{(größter gemeinsamer Teiler)} \end{aligned}$$

eine boolesche Algebra?

Lösung:

a) Kommutativegesetz:

$$kgV(a,b) = kgV(b,a)$$
$$ggT(a,b) = ggT(b,a)$$

b) Distributivgesetz:

$$kgV(a, ggT(b,c)) = ggT(kgV(a,b), kgV(a,c))$$
$$ggT(a, kgV(b,c)) = kgV(ggT(a,b), ggT(a,c))$$

c) Neutrale Elemente:

$$kgV(a,1) = a$$
$$ggT(a,6) = a$$

d) Inverse Elemente: Das inverse Element von 1 ist 6 und das inverse Element von 2 ist 3.

$$kgV(1,6) = 6$$
$$kgV(2,3) = 6$$
$$ggT(1,6) = 1$$
$$ggT(2,3) = 1$$

4. Vereinfachen sie die folgenden bool'schen Ausdrücke so weit wie möglich durch die Anwendung der algebraischen Umformungsregeln.

   a) $x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} \vee x_1x_2\overline{x_3}\overline{x_4} \vee x_1x_2\overline{x_3}x_4 \vee x_1\overline{x_2}\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\overline{x_4} \vee x_1x_2x_3\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$

   Lösung:

$$\begin{aligned}
&x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} \vee x_1x_2\overline{x_3}\overline{x_4} \vee x_1x_2\overline{x_3}x_4 \vee x_1\overline{x_2}\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\overline{x_4} \vee x_1x_2x_3\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}\\
&= x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} \vee x_1x_2\overline{x_3}\overline{x_4} \vee x_1x_2\overline{x_3}x_4 \vee x_1\overline{x_2}\overline{x_3}x_4\\
&= x_1\overline{x_3} \vee x_2\overline{x_4}
\end{aligned}$$

5. Zeigen oder widerlegen sie die folgende Beziehung zwischen den Operatoren $\Leftrightarrow$ und $\not\Leftrightarrow$:

   a) $x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z = x \not\Leftrightarrow y \not\Leftrightarrow z$

   Lösung:

Die Beziehung ist gültig!

$$\begin{aligned}
&x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z \\
&= (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z \\
&= (\overline{\overline{x \Leftrightarrow y}}) \Leftrightarrow z \\
&= (\overline{x \Leftrightarrow y}) \not\Leftrightarrow z \\
&= (x \not\Leftrightarrow y) \not\Leftrightarrow z \\
&= x \not\Leftrightarrow y \not\Leftrightarrow z
\end{aligned}$$

Die Äquivalenz gilt nur, wenn die Anzahl der Operanden ungerade ist

6. Zeigen sie, dass die folgenden Varianten des Distributivgesetzes für $\Leftrightarrow$ und $\neg \Leftrightarrow$ falsch sind:
   b) $(x \vee z) \neg \Leftrightarrow (y \vee z) = (x \neg \Leftrightarrow y) \vee z$

   Lösung:

   Gegenbeispiel: $x = 0, y = 0, z = 1$

   $$\begin{aligned}
   (x \vee y) \not\Leftrightarrow (y \vee z) &= (0 \vee 1) \not\Leftrightarrow (0 \vee 1) \\
   &= 1 \not\Leftrightarrow 1 \\
   (x \not\Leftrightarrow y) \vee z &= (0 \not\Leftrightarrow 0) \wedge 1 \\
   &= 1
   \end{aligned}$$

   c) $(x \wedge z) \Leftrightarrow (y \wedge z) = (x \Leftrightarrow y) \wedge z$

   Lösung:

   Gegenbeispiel: $x = 0, y = 0, z = 0$

   $$\begin{aligned}
   (x \wedge z) \Leftrightarrow (y \wedge z) &= (0 \wedge 0) \Leftrightarrow (0 \wedge 0) \\
   &= 0 \Leftrightarrow 0 \\
   &= 1 \\
   (x \Leftrightarrow y) \wedge z &= (0 \not\Leftrightarrow 0) \wedge 0 \\
   &= 0
   \end{aligned}$$

7. Nachstehend sind die erweiterten De Morgan'schen Regeln aufgeführt.
   a) $\overline{x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \ldots \vee \overline{x_n}$

b) $\overline{x_1 \lor x_2 \lor \ldots \lor x_n} = \overline{x_1} \land \overline{x_2} \land \ldots \land \overline{x_n}$

Lösung:

Induktionsanfang (IA): Für den Basisfall n_2 fallen die traditionelle und die erweiterte De Morgansche Regel zusammen. Die Aussage ist damit für den Fall $n = 2$ gültig.
Induktionsvoraussetzung (IV): Für ein gewisses n gelte:

$$(\overline{x_1 \land x_2 \land \ldots \land x_n}) = \overline{x_1} \lor \ldots \overline{x_n}$$

Induktionsschritt (IS):

$$\begin{aligned}(\overline{x_1 \land x_2 \land \ldots \land x_n}) &= ((\overline{x_1 \land x_2 \land \ldots \land x_n) \land x_{n+1}}) \\ &= ((\overline{x_1 \land x_2 \land \ldots \land x_n)} \lor \overline{x_{n+1}} \\ &= ((\overline{x_1} \lor \overline{x_2} \lor \ldots \lor \overline{x_n}) \lor \overline{x_{n+1}}) \\ &= \overline{x_1} \lor \overline{x_2} \lor \ldots \lor \overline{x_n}\end{aligned}$$

8. Gegeben seien die folgenden drei bool'schen Funktionen:

a) $\varphi_1 := (x \Rightarrow y) \Rightarrow z$ **Lösung:**

$$\begin{aligned}&(x \Rightarrow y) \Rightarrow z \\ &= \overline{x \Rightarrow y} \lor z \\ &= \overline{\overline{x} \lor y} \lor z \\ &= (x \land \overline{y}) \lor z \\ &= (x \lor z) \land (\overline{y} \lor z) \\ &= \overline{\overline{(x \lor z) \land (\overline{y} \lor z)}} \\ &= \overline{\overline{(x \lor z)} \lor \overline{(\overline{y} \lor z)}} \\ &= \overline{\overline{(x \lor z)} \lor \overline{(\overline{y \lor y} \lor z)}}\end{aligned}$$

b) $\varphi_2 := x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
& x \Rightarrow (y \Rightarrow z) \\
& = \overline{x} \lor (y \Rightarrow z) \\
& = \overline{x} \lor (\overline{y} \lor z) \\
& = (\overline{x} \lor \overline{y}) \lor z \\
& = \overline{\overline{(\overline{x} \lor \overline{y}) \lor z}} \\
& = \overline{(\overline{x \lor \overline{y})}) \land \overline{z}} \\
& = \overline{(\overline{\overline{(x \land y)}} \land \overline{z}} \\
& = \overline{\overline{\overline{(x \land y)} \land \overline{(x \land y)}} \land \overline{z \land z}}
\end{aligned}
$$

c) $\varphi_3 := \overline{x \land y} \lor \overline{x \land \overline{z}}$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
& \overline{x \land y} \lor \overline{x \land \overline{z}} \\
& = \overline{x} \lor \overline{y} \lor \overline{x} \lor z \\
& = \overline{x} \lor \overline{y} \lor z \\
& = \overline{x} \lor (\overline{y} \lor z) \\
& = \overline{x} \lor (y \Rightarrow z) \\
& = x \Rightarrow (y \Rightarrow z)
\end{aligned}
$$

Stellen sie φ_1 unter ausschließlicher Verwendung der NOR-Funktion, φ_2 unter ausschließlicher Verwendung der NAND-Funktion und φ_3 unter ausschließlicher Verwendung der Implikation dar.

9. Zeigen sie unter Anwendung der Regeln der bool'schen Algebra, dass mit einer Kombination von $\uparrow$ (= NAND) die folgende **einstelligen** Funktionen dargestellt werden können:

   a) $\neg$

   b) id()

   c) $\top$ (Tautologie)

   d) $\bot$ (Kontradiktion)

   Lösung:

   a) $\neg$

   Beweis. $\neg$ kann durch kombiniertes Anwenden von $\uparrow$ dargestellt werden
   $\neg A \Leftrightarrow \neg(A + A) \Leftrightarrow A \uparrow A$,da $A + A \Leftrightarrow \mathrm{id}(A)$ $\square$

b) *id*

Beweis. id kann durch kombiniertes Anwenden von $\uparrow$ dargestellt werden
id $\Leftrightarrow \neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
aus a) folgt $\neg(A + A) \Leftrightarrow (A \uparrow A) \Leftrightarrow \neg A$, daraus ergibt $(A \uparrow A) \uparrow (A \uparrow A) \Leftrightarrow \neg(\neg(A)) \Leftrightarrow A$ □

c) $\top$

Beweis. $\top$ kann durch kombiniertes Anwenden von $\uparrow$ dargestellt werden
aus a) folgt: $(A \uparrow A) \Leftrightarrow \neg A$ daraus folgert: $(A \uparrow A) \uparrow A \Leftrightarrow \neg(A) \uparrow A \Leftrightarrow \top$ da A und seine Negation mittels NAND immer TRUE liefert. □

d) $\bot$

Beweis. $\bot$ kann durch kombiniertes Anwenden von $\uparrow$ dargestellt werden
Idee: Kontradiktion als Negation der Tautologie, die Tautologie wird mittels $\neg$ invertiert. $\Leftrightarrow \neg\top \Leftrightarrow \bot$ da die Kontradiktion die Inversion der Tautologie ist - also unsere Voraussetzung
$\Leftrightarrow (A \uparrow A) \uparrow \top$ die Negation aus a) als NAND
$\Leftrightarrow (A \uparrow A) \uparrow (A \uparrow \neg A)$ die Tautologie aus c) in NAND
$\Leftrightarrow (A \uparrow A) \uparrow (A \uparrow (A \uparrow A))$ die zweite Negation in der Tautologie als NAND.
□

10. Zeigen sie, dass durch Kombination von $\uparrow$ die folgenden **zweistelligen** Wahrheitsfunktionen dargestellt werden können.

 a) & (AND)
 b) $\vee$
 c) $\downarrow$
 d) $\oplus$

Lösung:

a) &

Beweis. & kann durch kombiniertes Anwenden von $\uparrow$ dargestellt werden
Idee: $\neg(A\&B) \Leftrightarrow A \uparrow B$ eine doppelte Negation hebt sich auf!
$\neg(\neg(A\&B)\&\neg(A\&B))$
$\Leftrightarrow \neg(A\&B) \uparrow \neg(A\&B)$
$\Leftrightarrow (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$ □

b) $\vee$

Beweis. $\vee$ kann durch kombiniertes Anwenden von $\uparrow$ dargestellt werden
Idee: das logische OR ist assoziativ $(a+(b+c) = (a+b)+c)$ und *kommunikativ* $(a + b = b + a)$
nach de Morgan gilt: $\neg(A\&B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ bzw. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(A)\&\neg(B)$

$A \lor B \Leftrightarrow \neg(\neg A \& \neg B)$,wobei $\neg A \Leftrightarrow A \uparrow A$ ist (s. o)
$\Leftrightarrow \neg((A \uparrow A)\&(B \uparrow B))$ umformen
$\Leftrightarrow (A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)$ □

c) $\downarrow$

Beweis. $\downarrow$ kann durch kombiniertes Anwenden von $\uparrow$ dargestellt werden
Idee: nach anwenden von de Morgan: $A \downarrow B \Leftrightarrow \neg(A \lor B) \Leftrightarrow \neg A \& \neg B$
Da wir schon den binären Operator $\lor$ bewiesen haben wenden wir nun noch den unären Operator $\neg$ darauf an. Somit ergibt sich:
$((A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)) \uparrow ((A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B))$ □

d) $\oplus$

Beweis. $\oplus$ kann durch kombiniertes Anwenden von $\uparrow$ dargestellt werden
Idee: Wir brauchen einen ausschließendes Oder, M.a.W nur die Tupel TRUE FALSE, FALSE TRUE ergeben wahr. Demnach suchen wir eine Operation, die nur bei der Verknüpfung von A und B wahr liefert, wenn ein Eingang wahr ist und der zweite falsch. Die kann durch $(\alpha \& \neg \beta)$ realisiert werden. Verknüpfen wir so unsere beiden Eingaben mittels $\lor$ werden nur die Eingaben TRUE liefern, die mindestens ein TRUE-Wert haben.
$(A \oplus B) \Leftrightarrow (A \& \neg B) \lor (\neg A \& B)$
$\Leftrightarrow (A \& (B \uparrow B)) \lor ((A \uparrow A) \& B)$ Negation von B, wie oben
$\Leftrightarrow [(A \uparrow (B \uparrow B)) \uparrow (A \uparrow (B \uparrow B))] \lor [((A \uparrow A) \uparrow B) \uparrow ((A \uparrow A) \uparrow B)]$
$\Leftrightarrow [(A \uparrow (B \uparrow B)) \uparrow (A \uparrow (B \uparrow B)) \uparrow (A \uparrow (B \uparrow B)) \uparrow (A \uparrow (B \uparrow B))]$
$\uparrow [((A \uparrow A) \uparrow B) \uparrow ((A \uparrow A) \uparrow B) \uparrow ((A \uparrow A) \uparrow B) \uparrow ((A \uparrow A) \uparrow B)]$
$\Leftrightarrow ((A \uparrow B) \uparrow B) \uparrow ((B \uparrow A) \uparrow A)$ □

11. Zeigen sie, dass

a) & (AND)

b) $\lor$

c) $\oplus$

nicht universell ist. D.h. es gibt wenigstens eine bool'sche Funktion, die durch keine Kombination allein der jeweiligen Operationen dargestellt werden kann.

Lösung:

a) &

Beweis. Annahme: Der Operator $\uparrow$ sei mittels & darstellbar.
$(A \uparrow B) \Leftrightarrow A \& B \Leftrightarrow (A \& B) \& (A \& B) \Leftrightarrow (A \& A) \& (B \& B) \Leftrightarrow A \& B \lightning$
Da sich der & Operator neutral verhält ist es nicht möglich zum $\uparrow$ zu kommen. M.a.W. es gibt keinen Weg zum NAND unter ausschließlicher Verwendung von &.
$(A \uparrow B) \not\Leftrightarrow (A \& B)$ □

b) $\vee$

Beweis. Annahme: Wir können den NOR Operator durch $\vee$ darstellen.
$(A \downarrow B) \Leftrightarrow (A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)$
$A \uparrow A \Leftrightarrow \neg A$ Da sich die Negation nicht aus einer auf sich selbt neutralen Operation herleitbar, ist auch das NOR nicht ableitbar aus OR und somit nicht universell.

□

c) $\oplus$

Beweis. Es wird versucht das $\neg$ zu bilden.
$\neg A \Leftrightarrow A \oplus A = \bot \lightning$ ergibt die Kontradiktion.
$\neg A \Leftrightarrow \bot \oplus \bot = \bot \lightning$ verhält also sich neutral.
$\neg A \Leftrightarrow \bot \oplus A = A \lightning$ verhält sich ebenfalls neutral.
$\neg A \Leftrightarrow A \oplus \bot = A \lightning$ verhält sich ebenfalls neutral.
Da wir keine Negation als unären Operator aus XOR erzeugen können, ist dieser nicht universell. □