Bool'sche Algebra

Fahrplan

Analoge/Digitale Signale

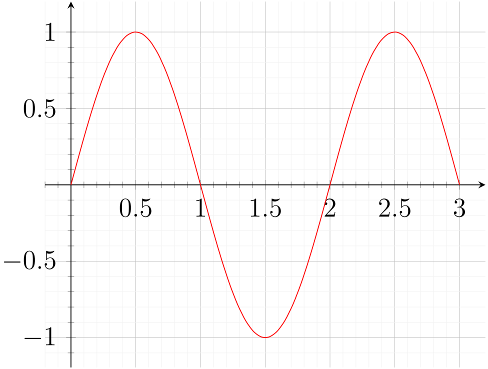
Definition (Signal)

Informationstragende, physikalische Größe, die sich über der Zeit, über dem Ort oder über einer anderen Variablen ändert.

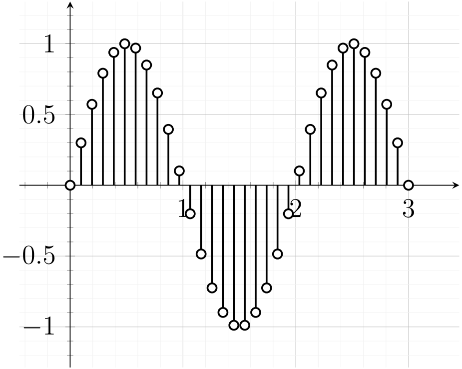
- Analoge Signale sind wert- & zeitkontinuierlich
  - Werte kontinuierlich (stetig)
  - I.A. alle natürlichen physikalischen Signale & Prozesse
- Digitale Signale sind wert- & zeitdiskret
  - Diskrete Werte
  - Variablen-Diskretisierung (Abtastung, führt zu diskreten Signalen)
  - Amplituden- bzw. Wert-Diskretisierung (Quantisierung)

Digital vs. Analog

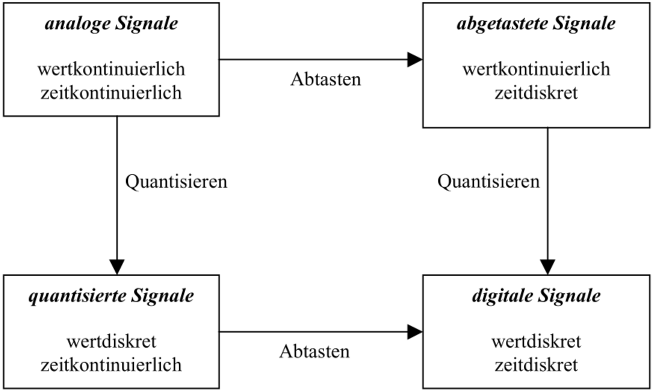
- Analog:



- Digital:

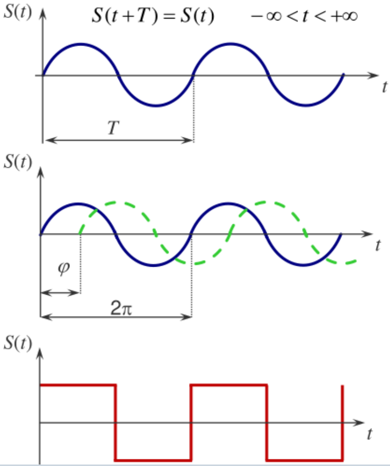


Analog → Digital



Grundlegende Signalverarbeitung: Deterministische Signale

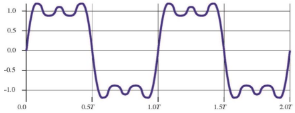
- Periodische Signale $\rightarrow$ deterministisch, Periode gibt fixen Bereich vor
- Parameter periodische Signale:
  - Periode T
  - Frequenz $f = \frac{1}{T}$,
  - Amplitude $S(t)$
  - Phase φ
- Beispiele:
  - Sinus: Periode 2π
  - Phase shift φ $(\sin \rightarrow \cos : \varphi = \frac{3}{2}\pi)$

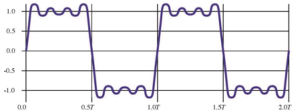


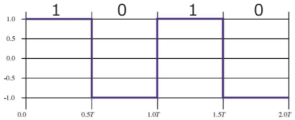
Bit-Rate vs. Bandbreite: Signalfrequenz

- Ziel: Komposition der Rechteckschwingung durch periodische Funktion
- Signal besteht aus $f, 3f$ und $5f$
  - $\sin(2\pi ft) + \frac{1}{3} sin(2\pi 3ft) + \frac{1}{5} sin(2\pi 5ft)$
- Signal besteht aus $f, 3f, 5f$ und $7f$
  - $\sin(2\pi ft) + \frac{1}{3} sin(2\pi 3ft) + \frac{1}{5} sin(2\pi 5ft) + \frac{1}{7} sin(2\pi 7ft)$
- Rechteckschwingung:

$$s(t) = A \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1,k \text{ ungearde}}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2\pi kft)$$







Einleitung

- Letzte Vorlesung: Wie kommen die Bits in den Rechner
- **Heute: Formale Beschreibung**
  - **Logik,**
  - **Aussagenlogik**
  - **Bool'sche Algebra**
  - Formal: Was ist eine Aussage
  - Aussagenlogik Axiomatisierung nach Peano/Huntington/Lattice
  - Basisoperatoren, sekundäre Operatoren

Elementare Logik

Definition (Logik)

Eine **Aussage** (proposition) ist ein Satz, von dem man eindeutig entscheiden kann, ob er wahr oder falsch ist.

- Handelt es sich um eine Aussage?
  - Wien ist die Hauptstadt von Österreich.
  - $1 + 5 = 6$.
  - 5 ist kleiner als 3.
  - Guten Abend!
  - $x + 3 = 5$

[TT13]

Aussagenlogik

Definition (Aussagenlogik)

Aussagenlogik, als Teilgebiet der Logik, befasst sich mit Aussagen und der Verknüpfung von Aussagen mittels *Junktoren*.

- Junktoren sind logische Verknüpfungen
- Klassische Junktoren:
  - Negation $\neg P$
  - Implikation/Subjunktion/Konditional $P \Rightarrow Q$
  - Äquivalenz/Bikonditional/Bisubjunktion $P \Leftrightarrow Q$
  - Konjunktion $P \wedge Q$
  - Disjunktion $P \vee Q$

[Rau08]

Negation

Definition (Negation)

Sei a beliebige Aussage, so ist die Verneinung oder Negation einer Aussage a genau dann wahr, wenn a falsch ist. Die Verneinung von a wird symbolisch mit a oder $\neg a$ (auch $\overline{a}, !a$) bezeichnet (gelesen "nicht a").

a	$\neg a$
0	1
1	0

Implikation

Definition (Aussagenlogik)

Seien a und b beliebige Aussagen, so ist die WENN-DANN-Verknüpfung oder Implikation $a \Rightarrow b$ (gelesen "Wenn a, dann b") wie folgt definiert:

a	b	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Äquivalenz

Definition (Äquivalenz)

Seien a und b beliebige Aussagen, so ist die GENAU-DANN-Verknüpfung oder Bijunktion $a \Leftrightarrow b$ (gelesen "a genau dann, wenn b") von zwei Aussagen a bzw. b sind durch ihre Wahrheitstabellen folgendermaßen definiert:

a	b	$a \Leftrightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Konjunktion

Definition (Konjunktion)

Seien a und b beliebige Aussagen, so ist die UND-Verknüpfung oder Konjunktion von a und b symbolisch mit $a \wedge b$ bezeichnet (gelesen: "a und b"). Die neue Aussage $a \wedge b$ ist genau dann wahr, wenn sowohl a als auch b wahr ist. Ansonsten ist $a \wedge b$ falsch.

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Return to Äquivalenz

Die Äquivalenz kann auch als Kombination zweier Implikationen betrachtet werden:

$$a \Rightarrow b \wedge a \Leftarrow b$$

Return to Äquivalenz

Die Äquivalenz kann auch als Kombination zweier Implikationen betrachtet werden:

$a \Rightarrow b \wedge a \Leftarrow b$

a	b	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

b	a	$b \Rightarrow a$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$A : a \Rightarrow b$	$B : a \Leftarrow b$	$A \wedge B$
$0{,}0 \rightarrow 1$	$0{,}0 \rightarrow 1$	1
$0{,}1 \rightarrow 1$	$1{,}0 \rightarrow 0$	0
$1{,}0 \rightarrow 0$	$1{,}0 \rightarrow 0$	0
$1{,}1 \rightarrow 1$	$1{,}1 \rightarrow 1$	1

Disjunktion

Definition (Disjunktion)

Seien a und b beliebige Aussagen, so ist ODER-Verknüpfung oder Disjunktion von a und b symbolisch mit $a \vee b$ bezeichnet (gelesen: "a oder b"). Die neue Aussage $a \vee b$ ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen a bzw. b wahr ist; sonst ist $a \vee b$ falsch. Die Verknüpfung $a \vee b$ entspricht dem nicht-ausschließenden "oder" der Umgangssprache (denn $a \vee b$ ist auch wahr, wenn sowohl a als auch b wahr ist)!

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Algebra

Definition (Algebra)

Als Teilgebiete der Mathematik befasst sich die Algebra mit den Eigenschaften von Rechenoperationen.

Verkürzt aus [Bew07]

Bool'sche Algebra

Definition (BA nach Peano)

Die bool'sche Algebra nach Peano ist als Menge $\mathcal{V}$ mit Nullelement 0 und Einselement 1 und den zweistelligen Verknüpfungen $\wedge(\cdot)$, $\vee(+)$, sowie der einstelligen Verknüpfung $\neg$ definiert.

- Definitionsmenge $\mathcal{D} : \{0,1\}^*$, Zielmenge $\mathcal{Z} : \{0,1\}$
- Einstellige Verknüpfung: $f : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$
- Zweistellige Verknüpfung: $f : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$
- n-stelligen Verknüpfung $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$
- Gesamtheit wird mit B_n bezeichnet, daraus ergeben sich 2^n Funktionen
- B_0 sind die Konstanten 0 und 1

Bool'sche Algebra nach Peano

1. Kommutativgesetz (K) $a \wedge b = b \wedge a$ bzw. $a \vee b = b \vee a$
2. Assoziativgesetz (A) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ bzw. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
3. Idempotenzgesetz (I) $a \wedge a = a$ bzw. $a \vee a = a$
4. Distributivgesetz (D) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ bzw. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
5. Neutralitätsgesetz (N) $a \wedge 1 = a$ bzw. $a \vee 0 = a$
6. Extremalgesetz (Ex) $a \wedge 0 = 0$ bzw. $a \vee 1 = 1$
7. Involution (In) $\neg(\neg a) = a$
8. De Morgansche Gesetz $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$ bzw. $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$
9. Komplementärgesetz/Inverse Element (I) $a \wedge \neg a = 0$ bzw. $a \vee \neg a = 1$
10. Dualitätsgesetz $\neg 0 = 1$ bzw. $\neg 1 = 0$
11. Absorptionsgesetz $a \vee (a \wedge b) = a$ bwz. $a \wedge (a \vee b) = a$

Bool'sche Algebra nach Huntington (Wichtig!)

Definition

Die bool'sche Algebra nach Huntington ist definiert als Menge $\mathcal{V} : \{0, 1\}$ mit den Verknüpfungen $\cdot(\wedge), +(\vee)$, sodass $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, also $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$.

- Kommutativgesetze (K): $a \cdot b = b \cdot a$ bzw. $a + b = b + a$
- Distributivgesetze (D): $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ bzw. $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
- Neutrale Elemente (N): $\exists e, n \in \mathcal{V}$ mit $a \cdot e = a$ und $a + n = a$
- Inverse Elemente (I): $\forall a \in \mathcal{V}$ existiert ein a' mit $a \cdot a' = n$ und $a + a' = e$

Übernommen von [Bar13] bzw. [Hof20]

$\mathbb{R}$ als bool'sche Algebra nach Huntington?

- Gelten die Kommutativgesetze in $\mathbb{R}$ bzgl. $\cdot, +$?

$\mathbb{R}$ als bool'sche Algebra nach Huntington?

- Gelten die Kommutativgesetze in $\mathbb{R}$ bzgl. $\cdot, +$?
  - $a \cdot b = b \cdot a$ bzw. $a + b = b + a$

$\mathbb{R}$ als bool’sche Algebra nach Huntington?

- Gelten die Kommutativgesetze in $\mathbb{R}$ bzgl. $\cdot, +$?
  - $a \cdot b = b \cdot a$ bzw. $a + b = b + a$
- Gibt es ein neutrales Element bzgl. $\cdot, +$?

$\mathbb{R}$ als bool'sche Algebra nach Huntington?

- Gelten die Kommutativgesetze in $\mathbb{R}$ bzgl. $\cdot, +$?
  - $a \cdot b = b \cdot a$ bzw. $a + b = b + a$
- Gibt es ein neutrales Element bzgl. $\cdot, +$?
  - $\exists e, n \in \mathcal{V}$ mit $a \cdot e = a$ und $a + n = a$

$\mathbb{R}$ als bool'sche Algebra nach Huntington?

- Gelten die Kommutativgesetze in $\mathbb{R}$ bzgl. $\cdot, +$?
  - $a \cdot b = b \cdot a$ bzw. $a + b = b + a$
- Gibt es ein neutrales Element bzgl. $\cdot, +$?
  - $\exists e, n \in \mathcal{V}$ mit $a \cdot e = a$ und $a + n = a$
- Gibt es zu jedem Element $e \in \mathbb{R}$ ein inverses Element $i \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ als bool'sche Algebra nach Huntington?

- Gelten die Kommutativgesetze in $\mathbb{R}$ bzgl. $\cdot, +$?
  - $a \cdot b = b \cdot a$ bzw. $a + b = b + a$
- Gibt es ein neutrales Element bzgl. $\cdot, +$?
  - $\exists e, n \in \mathcal{V}$ mit $a \cdot e = a$ und $a + n = a$
- Gibt es zu jedem Element $e \in \mathbb{R}$ ein inverses Element $i \in \mathbb{R}$
  - $\forall a \in \mathcal{V}$ existiert ein a' mit $a \cdot a' = n$ und $a + a' = e$

$\mathbb{R}$ als bool'sche Algebra nach Huntington?

- Gelten die Kommutativgesetze in $\mathbb{R}$ bzgl. $\cdot, +$?
  - $a \cdot b = b \cdot a$ bzw. $a + b = b + a$
- Gibt es ein neutrales Element bzgl. $\cdot, +$?
  - $\exists e, n \in \mathcal{V}$ mit $a \cdot e = a$ und $a + n = a$
- Gibt es zu jedem Element $e \in \mathbb{R}$ ein inverses Element $i \in \mathbb{R}$
  - $\forall a \in \mathcal{V}$ existiert ein a' mit $a \cdot a' = n$ und $a + a' = e$
- Gelten die Distributivgesetzein $\mathbb{R}$ bzgl. $\cdot, +$?

$\mathbb{R}$ als bool'sche Algebra nach Huntington?

- Gelten die Kommutativgesetze in $\mathbb{R}$ bzgl. $\cdot, +$?
  - $a \cdot b = b \cdot a$ bzw. $a + b = b + a$
- Gibt es ein neutrales Element bzgl. $\cdot, +$?
  - $\exists e, n \in \mathcal{V}$ mit $a \cdot e = a$ und $a + n = a$
- Gibt es zu jedem Element $e \in \mathbb{R}$ ein inverses Element $i \in \mathbb{R}$
  - $\forall a \in \mathcal{V}$ existiert ein a' mit $a \cdot a' = n$ und $a + a' = e$
- Gelten die Distributivgesetzein $\mathbb{R}$ bzgl. $\cdot, +$?
  - $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

$\mathbb{R}$ als bool'sche Algebra nach Huntington?

- Gelten die Kommutativgesetze in $\mathbb{R}$ bzgl. $\cdot, +$?
  - $a \cdot b = b \cdot a$ bzw. $a + b = b + a$
- Gibt es ein neutrales Element bzgl. $\cdot, +$?
  - $\exists e, n \in \mathcal{V}$ mit $a \cdot e = a$ und $a + n = a$
- Gibt es zu jedem Element $e \in \mathbb{R}$ ein inverses Element $i \in \mathbb{R}$
  - $\forall a \in \mathcal{V}$ existiert ein a' mit $a \cdot a' = n$ und $a + a' = e$
- Gelten die Distributivgesetzein $\mathbb{R}$ bzgl. $\cdot, +$?
  - $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
  - $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \lightning$

Bool'sche Algebra als Verband (Lattice)

Definition

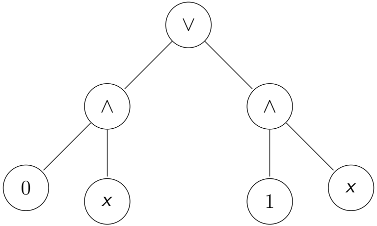
Es kann eine bool'sche Algebra mit den Verknüpfungen $\wedge, \vee, \neg$ und den Elementen $0, 1$ als distributiver, komplementärer Verband definiert werden. Zusätzlich ist eine partielle Halbordnung $a \leq b \Leftarrow a = a \wedge b$ definiert. So haben zwei Elemente ein Supremum und ein Infimum.

- Kommutativgesetze (K): $a \wedge b = b \wedge a$ bzw. $a \vee b = b \vee a$
- Assoziativgesetz (A) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ bzw. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
- Absorptionsgesetz $a \vee (a \wedge b) = a$ bwz. $a \wedge (a \vee b) = a$
- Komplementärgesetz/Inverse Element (I) $a \wedge \neg a = 0$ bzw. $a \vee \neg a = 1$
- Distributivgesetz (D) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

[Sas99]

Darstellungen & Bool'sche Funktionen

- Wahrheitstabelle (s.o.)
- Via Graph $y = ((0 \wedge x) \vee (1 \vee x))$



- Formeldarstellung – algebraische Darstellung (s.o)

Schaltalgebra als bool'sche Algebra

- $\neg, \wedge$ und $\vee$ sind Operatoren über der Menge $\{0, 1\}$

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	$\neg a$
0	1
1	0

- Kommutativgesetze, Distributivgesetze, neutrales Element, inverses Element

$\mathcal{V}$	$\{0, 1\}$	Wahrheitswerte (TRUE, FALSE)
$\cdot$	$\wedge$	Konjunktion (UND-Operator)
$+$	$\vee$	Disjunktion (ODER-Operator)
n	0	Falsch (FALSE)
e	1	Wahr (TRUE)
a'	$\neg a$	Negation (Verneinung)

Mengenalgebra

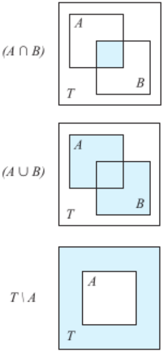
Definition (Trägermenge)

Eine Trägermenge $\mathcal{T}$ bezeichnet die Menge, die mithilfe einer Menge von Verknüpfungen eine algebraische Struktur bildet.

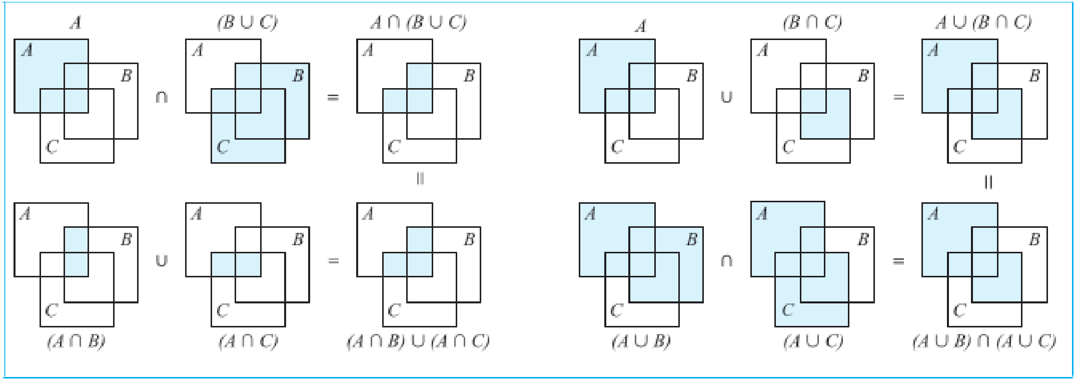
- Mengenalgebra über einer Trägermenge $\mathcal{T}$

$\mathcal{V}$	$\mathcal{P}(T)$	Potenzmenge der Trägermenge T
$\cdot$	$\cap$	Durchschnitt
$+$	$\cup$	Vereinigung
n	$\emptyset$	leere Menge
e	$\mathcal{T}$	Trägermenge
a'	$\mathcal{T}\backslash$	Komplementärmenge

Mengenalgebra



Mengenalgebra



Notation und Operatorenbindung

- Syntactic Sugar (Ableitungen aus Basisverknüpfungen)
  - $(a \Rightarrow b)$ für $(\neg a \vee b)$ – Implikation
  - $(a \Leftarrow b)$ für $(b \Rightarrow a)$ – Inversion der Implikation
  - $(a \Leftrightarrow b)$ für $(a \Rightarrow b) \wedge (a \Leftarrow b)$ – Äquivalenz
  - $(a \oplus b) f r \neg (a \Leftrightarrow b$ – Antivalenz oder Exklusiv-ODER/XOR
  - $\neg(a \vee b)$ – NOR
  - $\neg(a \wedge b)$ – NAND
- Bindung der Operatoren
  - $\wedge$ bindet stärker als $\vee$
  - $\neg$ bindet stärker als $\wedge$
- Klammerung
  - Gleiche Verknüpfungen: linksassoziativ zusammengefasst

Weitere Verknüpfungen

Kommutativgesetze	$a \wedge b = b \wedge a$ $a \vee b = b \vee a$	(K)
Distributivgesetze	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	(D)
Neutrale Elemente	$a \wedge 1 = a$ $a \vee 0 = a$	(N)
Inverse Elemente	$a \wedge \neg a = 0$ $a \vee \neg a = 1$	(I)
Assoziativgesetze	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge b \wedge c$ $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = a \vee b \vee c$	(A)

[Hof20]

Weitere Verknüpfungen

Idempotenzgesetze	$a \wedge a = a$ $a \vee a = a$	(ID)
Absorptionsgesetze	$a \vee (a \wedge b) = a$ $a \wedge (a \vee b) = a$	(AB)
Gesetze von DeMorgan	$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$ $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$	(M)
Auslöschungsgesetze	$a \wedge 0 = 0$ $a \vee 1 = 1$	(L)
Gesetz der Doppelnegation	$\neg\neg a = a$	(DN)

[Hof20]

Wie viele Funktionen gibt es denn?

- Prinzipiell: Kreuzprodukt der Eingangswerte, da $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \ldots \mathcal{V}$ gilt
- Somit ist der Eingangsvektor die Kombination aller möglichen Eingangswerte
- Einstellige Funktion: $2^2 = 4$, da $\{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ abbilden
- Zweistellige Funktionen: 2^4, da $\{0,1\} \times \{0,1\}$ die Eingangswerte darstellen
- Dreistellige Funktionen: 2^8, da $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$ die Eingangswerte darstellen
- Allgemein: $\mathcal{V}^n \rightarrow \mathcal{V}^m$ Anzahl: $(2^m)^{2^n}$

Beispiel

$$Y = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$
$$Y = (\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b)$$

Ausblick nächste Vorlesung

- Erfüllbarkeit & Äquivalenz
- De Morgan Regeln
- Universelle Operatoren
- Beweisstrategien & Induktion – Strukturelle Induktion
- Dualitätsprinzip
- Normalformen
- Bitweise logische Operationen, Bit-Maskierung
- Einführung Logikgatter

Quellen I

Barnett, Janet Heine (2013). "Boolean algebra as an abstract structure: Edward V. Huntington and axiomatization". In: *Convergence*.

Bewersdorff, Jörg (2007). "Algebra für Einsteiger: Von der Gleichungsauflösung zur Galois-Theorie, 3". In: *Aufl. Vieweg+ Teubner, Wiesbaden (2007, Juli)*.

Hoffmann, Dirk W (2020). *Grundlagen der technischen Informatik*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG.

Rautenberg, Wolfgang (2008). *Einführung in die mathematische Logik*. Springer.

Sasao, Tsutomu (1999). "Lattice and Boolean Algebra". In: *Switching Theory for Logic Synthesis*. Springer, S. 17–34.

Quellen II

Teschl, Gerald und Susanne Teschl (2013). *Mathematik für Informatiker: Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra*. Springer-Verlag.