Schalttechnik & Logikgatter

Fahrplan

Bool'sche Algebra nach Huntington (Wichtig!)

Definition

Die bool'sche Algebra nach Huntington ist definiert als Menge $\mathcal{V} : \{0, 1\}$ mit den Verknüpfungen $\cdot(\wedge), +(\vee)$, sodass $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, also $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$.

- Kommutativgesetze (K): $a \cdot b = b \cdot a$ bzw. $a + b = b + a$
- Distributivgesetze (D): $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ bzw. $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
- Neutrale Elemente (N): $\exists e, n \in \mathcal{V}$ mit $a \cdot e = a$ und $a + n = a$
- Inverse Elemente (I): $\forall a \in \mathcal{V}$ existiert ein a' mit $a \cdot a' = n$ und $a + a' = e$

Übernommen von [Bar13] bzw. [Hof20]

Notation und Operatorenbindung

- Syntactic Sugar (Ableitungen aus Basisverknüpfungen)
  - $(a \Rightarrow b)$ für $(\neg a \vee b)$ – Implikation
  - $(a \Leftarrow b)$ für $(b \Rightarrow a)$ – Inversion der Implikation
  - $(a \Leftrightarrow b)$ für $(a \Rightarrow b) \wedge (a \Leftarrow b)$ – Äquivalenz
  - $(a \oplus b)$ für $\neg(a \Leftrightarrow b)$ – Antivalenz oder Exklusiv-ODER/XOR
  - $\neg(a \vee b)$ – NOR
  - $\neg(a \wedge b)$ – NAND
- Bindung der Operatoren
  - $\wedge$ bindet stärker als $\vee$
  - $\neg$ bindet stärker als $\wedge$
- Klammerung
  - Gleiche Verknüpfungen: linksassoziativ zusammengefasst

Erfüllbarkeit

Definition (Erfüllbarkeit)

Sei φ ein beliebiger boolescher Ausdruck. φ heißt

- erfüllbar, wenn es Werte $x_1, \ldots, x_n$ gibt, mit $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 1$.
- widerlegbar, wenn es Werte $x_1, \ldots, x_n$ gibt, mit $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
- unerfüllbar, wenn $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ immer gleich 0 ist.
- allgemeingültig, wenn wenn $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ immer gleich 1 ist.

Einen allgemeingültigen Ausdruck bezeichnen wir auch als **Tautologie**.

Negationstheorem

Theorem (Negationstheorem)

Sei $f(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg)$ ein boolescher Ausdruck, in dem neben den Konstanten 1 und 0 und den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ die booleschen Operatoren $\wedge, \vee$ und $\neg$ vorkommen. Dann gilt:

$$\overline{f(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg)} = f(1, 0, \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}, \vee, \wedge, \neg)$$

Dualitätsprinzip

Theorem

Sei

$$\varphi(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg) = \psi(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg)$$

ein Gesetz der booleschen Algebra, in der neben Variablen und den Konstanten 0 *und* 1 *ausschließlich die Elementarverknüpfungen* $\neg, \wedge$ *und* $\vee$ *vorkommen. Dann ist auch die duale Gleichung*

$$\varphi(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg) = \psi(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg)$$

ein Gesetz der booleschen Algebra.

Vollständige Operatorensysteme

Definition (Vollständige Operatorensystem)

$\mathcal{M}$ sei eine beliebige Menge von Operatoren. $\mathcal{M}$ ist ein vollständiges Operatorensystem, wenn sich jede boolesche Funktion durch einen Ausdruck beschreiben lässt, in dem neben den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ausschließlich Operatoren aus $\mathcal{M}$ vorkommen.

- Die Elementaroperatoren $\wedge, \vee$ und $\neg$ bilden zusammen ein vollständiges Operatorensystem
- Die Operatoren NAND und NOR bilden jeder für sich bereits ein vollständiges Operatorensystem
- Die Implikation und die 0 bilden zusammen ebenfalls ein vollständiges Operatorensystem

Normalformdarstellungen

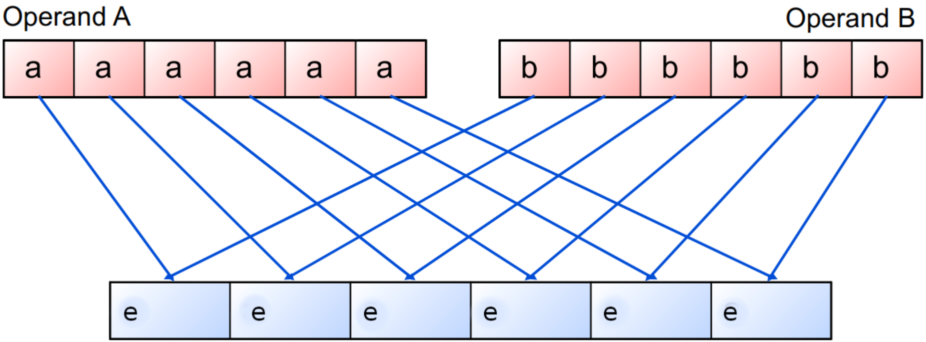
- Normalform beschreibt eine eindeutige Darstellung
- Vollform: Ausdruck, in dem jede Variable genau einmal vorkommt
- Literal: Teilausdruck, der entweder negierte oder unnegierte Variable darstellt
- Wahrheitstafeldarstellung ist eine Art der Normalformdarstellungen
- Bool'sche Ausdrücke hingegen sind keine Normalformdarstellung
  - Jede bool'sche Funktion durch unendlich viele Ausdrücke beschrieben werden

Disjunktive Normalform

- Die disjunktive Normalform (DNF) ist jene Darstellungsart, bei der eine Reihe von Vollkonjunktionen disjunktiv verknüpft wird. Negationen treten nur in atomarer Form auf.
  - $(A \land \neg B \land C) \lor (A \land B \land C) \lor (\neg A \land \neg B \land C)$
-
- Die konjunktive Normalform (KNF) ist jene Darstellungsart, bei der eine Reihe von Volldisjunktionen konjunktiv verknüpft wird. Negationen treten nur in atomarer Form auf.
  - $(\neg A \lor \neg B \lor \neg C) \land (A \lor B \lor C) \land (A \lor \neg B \lor \neg C)$
- Andere Bezeichnungen:
  - Kanonische disjunktive/konjunktive Normalform (KDNF/KKNF)
  - Vollständige disjunktive/konjunktive Normalform

Bitweise logische Operationen

A, B seien Bitvektoren, $\circ$ eine beliebige Verknüpfung



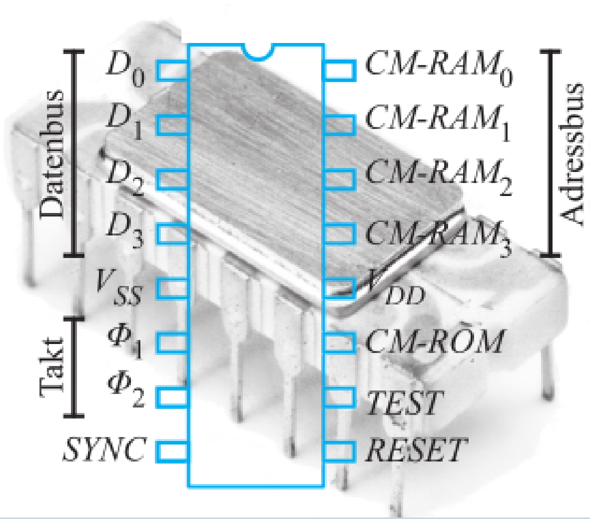
Dann erhalten wir als Ergebnis: $E = A \circ B$

Heute:

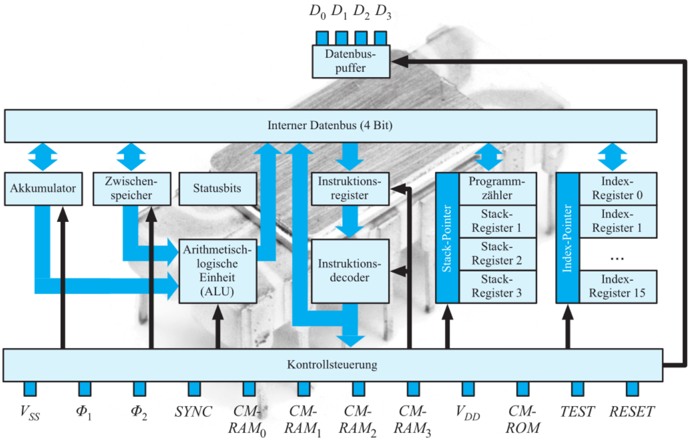
- Von der Bool'schen Algebra zu Logikgattern
- Logische Schaltung auf Mikroprozessoren
- Idee der Arithmetic Logic Unit (also Co-Prozessor oder integriert)
- Grundlegende Logikgatter
- Grundlagen Leiter und Halbleiter
- Aufbau Transistor
- Transistortypen: Biopolar- und Feldeffekttransistor
- Vom Transistor zur logischen Schaltung

- Status: Wir wissen, wie ein Signal von Analog auf Digital gewandelt wird
  - Gist: wie kommen die Bits in den Rechner
- Wir wissen, wie logische Aussagen verarbeitet werden können
- Noch offen: Wie werden hieraus komplexe Recheneinheiten?
  - Erster Schritt wie können Elementarschaltungen realisiert werden

Intel 4004 Prozessor

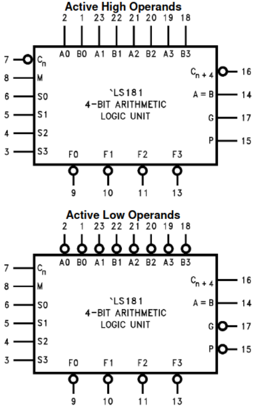


Intel 4004 Prozessor



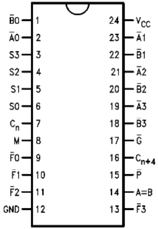
4 Bit ALU Package Layout

Logic Symbols



V_{CC} = Pin 24
GND = Pin 12

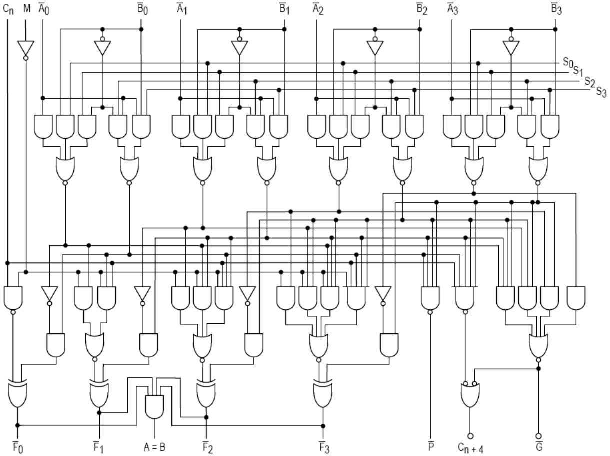
Connection Diagram

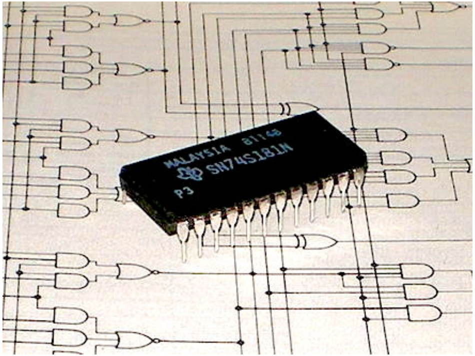


Pin Descriptions

Pin Names	Description
$\overline{A0}$–$\overline{A3}$	Operand Inputs (Active LOW)
$\overline{B0}$–$\overline{B3}$	Operand Inputs (Active LOW)
S0–S3	Function Select Inputs
M	Mode Control Input
C_n	Carry Input
$\overline{F0}$–$\overline{F3}$	Function Outputs (Active LOW)
A = B	Comparator Output
$\overline{G}$	Carry Generate Output (Active LOW)
$\overline{P}$	Carry Propagate Output (Active LOW)
C_{n+4}	Carry Output

4 Bit ALU – Logikgatter

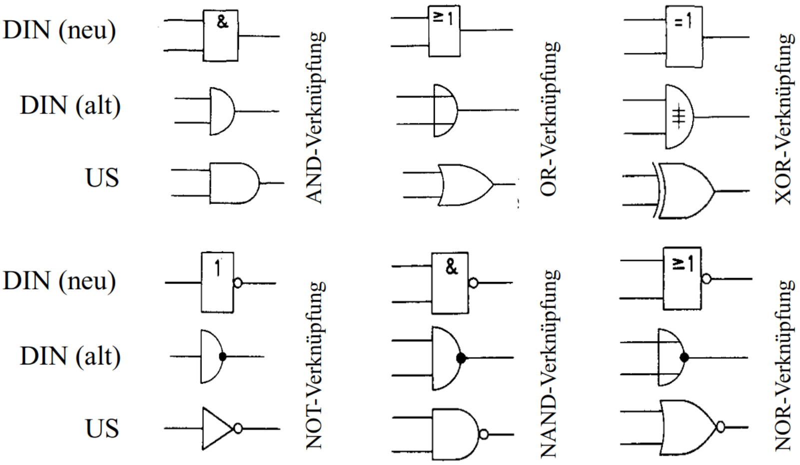




Bool'sche Algebra $\rightarrow$ Logikgatter

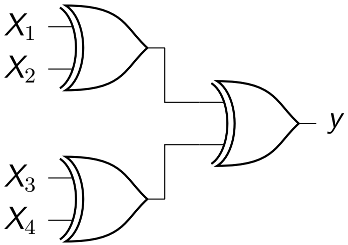
- Bis jetzt abstrakt – mathematische Definition der logischen Aussage
- D.h. Zuordnung von Werten auf binärer Ebene
- Umsetzung der bool'schen Funktionen mithilfe von Logikgattern (Gatter)
- Physikalische Umsetzung beispielsweise mithilfe von Transistoren

Darstellung Logikgatter



Beispiel: Paritätsfunktion

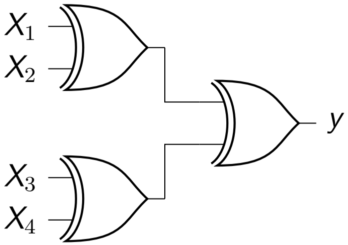
- Eingänge: x_1, x_2, x_3, x_4
- Ausgänge: y
- Gatter: XOR
- Stufen: 2



Beispiel: Paritätsfunktion

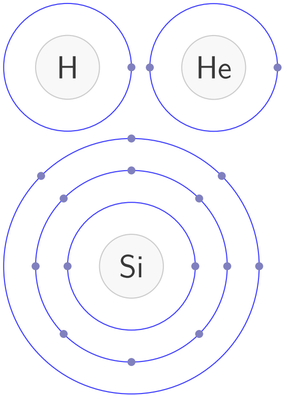
- Eingänge: x_1, x_2, x_3, x_4
- Ausgänge: y
- Gatter: XOR
- Stufen: 2

x_1	x_2	x_3	x_4	y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
...				

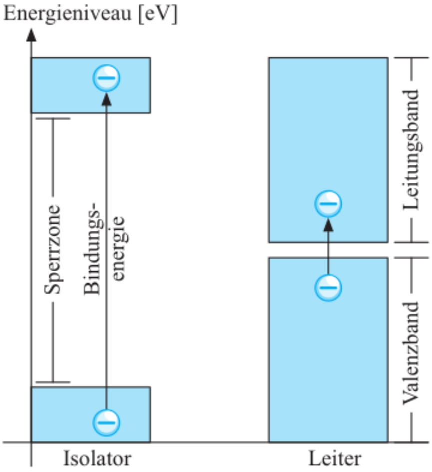


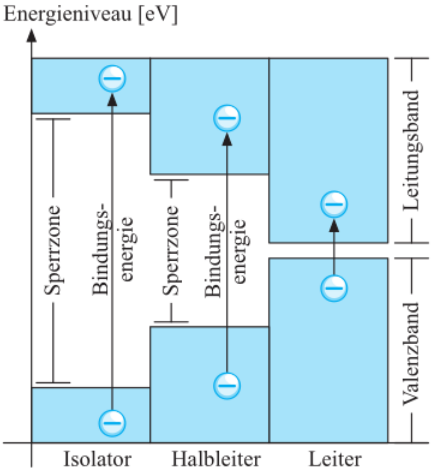
Atommodell nach Bohr

- Grundsätzlich: Kern – Neutronen, Protonen
- Elektronen außerhalb des Kerns, frei beweglich in Orbitalräumen
- Äußerste Schale: Valenzelektronen
- Zusammenschluss von Atomen über die Valenzelektronen



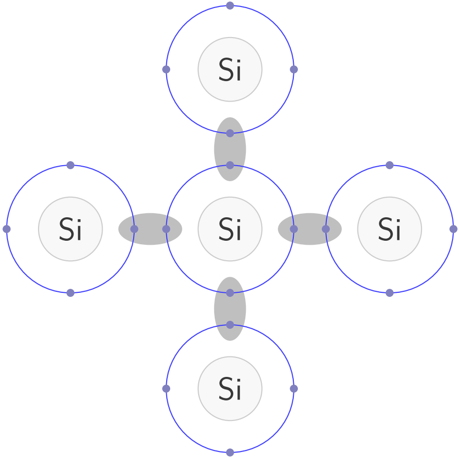
Leiter & Bändermodell





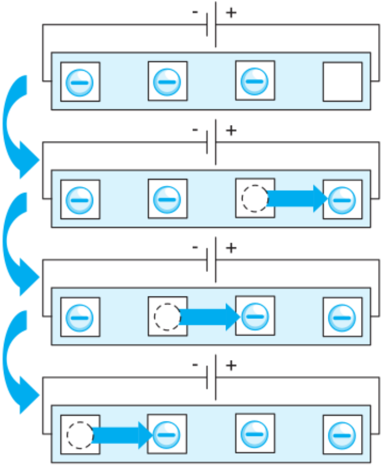
Siliziumgitter

- Struktur des Siliziumkristalls
- Jedes Atom ist von 4 weiteren Atomen umgeben
- Jeweils zwei gemeinsam genutzte Valenzelektronen eine stabile Verbindung



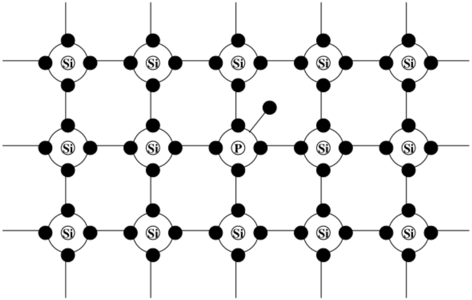
Eigenleitung im Halbleiterkristall

- Freigesetzten Leitungselektronen richten sich im elektrischen Feld aus
- Freie Elektronen wandern in Richtung der positiven Spannungsquelle
- Gleichzeitig entstehenden Elektronenlöcher bewegen sich in entgegengesetzter Richtung auf den Minuspol zu



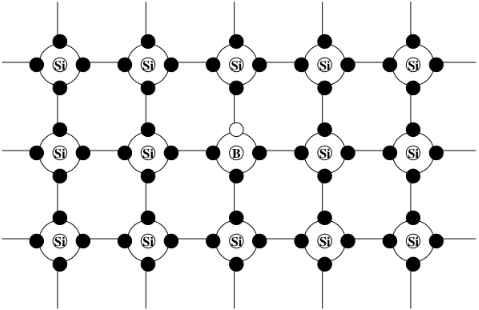
Elektronenüberschussleiter: *n*-Leiter

- Struktur eines Elektronenüberschussleiters (*n*-Leiter)
- Einbau von Phosphoratomen zusätzliche Valenzelektronen im Gitter
- Zusätzliche Elektronen können sich nahezu ungehindert durch die Kristallstruktur bewegen



Elektronenmangelleiter: *p*-Leiter

- Struktur eines Elektronenmangelleiters (*p*-Leiter)
- Einbau von Aluminiumatomen/Bohr entstehen künstliche Elektronenlöcher
- Elektronenlöcher wirken, wie positive Ladungsträger

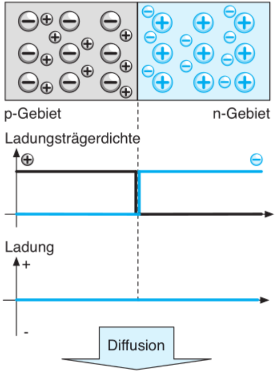


Leiter/Halbleiter

- Halbleiter sind Stoffe, deren elektrische Leitfähigkeit geringer als von Leitern und größer als von Nichtleitern sind
- Halbleiter wie Silizium und Germanium verfügen über eine Kristallstruktur
- Die Kristallstruktur wird mit hoher Reinheit hergestellt
- Auf ca. 1010 Atome kommt ein Fremdatom
- Die Eigenleitfähigkeit von Halbleitern basiert auf:
  - Verunreinigung
  - Aufbrechen von Kristallbindungen
  - Oberflächen-Leitfähigkeit

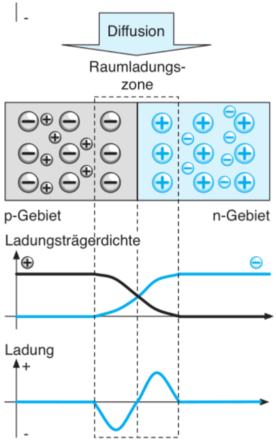
Halbleiterdioden

- Dioden: spezielle Schaltelemente
- Begrenzung des Stromfluss richtungsabhängig
- In Durchlassrichtung neutral
- In Sperrrichtung als Isolator



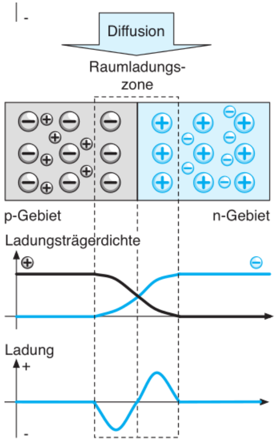
Halbleiterdioden – *pn*-Übergang

- Dioden: spezielle Schaltelemente
- Begrenzung des Stromfluss richtungsabhängig
- In Durchlassrichtung neutral
- In Sperrrichtung als Isolator



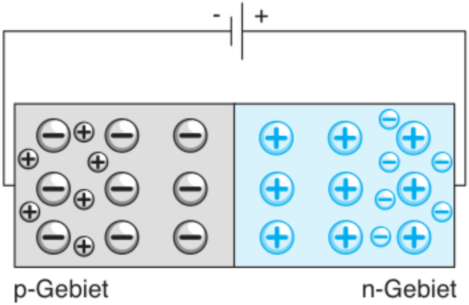
Halbleiterdioden – *pn*-Übergang

- Dioden: spezielle Schaltelemente
- Begrenzung des Stromfluss richtungsabhängig
- In Durchlassrichtung neutral
- In Sperrrichtung als Isolator



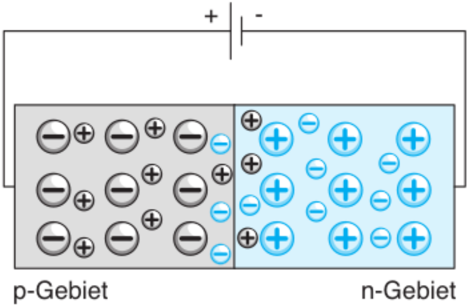
Halbleiterdioden – *pn*-Übergang

- Dioden: spezielle Schaltelemente
- Begrenzung des Stromfluss richtungsabhängig
- In Durchlassrichtung neutral
- In Sperrrichtung als Isolator
  - Anlegen einer Spannung in Sperrrichtung
  - Minuspol: *p*-Schicht, Pluspol *n*-Schicht
  - Ladungsträger Richtung Spannungspole weggezogen
  - D.h. Vergrößerung Sperrschicht $\rightarrow$ Isolator



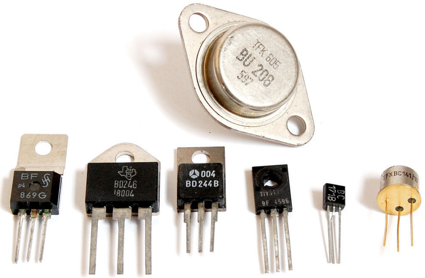
Halbleiterdioden – *pn*-Übergang

- Dioden: spezielle Schaltelemente
- Begrenzung des Stromfluss richtungsabhängig
- In Durchlassrichtung neutral
  - Anlegen einer Spannung in Durchlassrichtung
  - Minuspol: *n*-Schicht, Pluspol *p*-Schicht
  - Freie Ladungsträger bewegen sich aufeinander zu
  - D.h. Rekombination i.d. Sperrschicht $\rightarrow$ Leiter
- In Sperrrichtung als Isolator



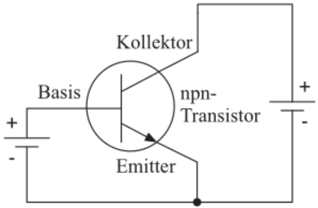
Transistor – Transfer Resistor

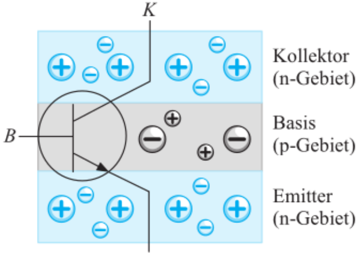
- Gist: steuerbarer Widerstand
- Kann elektrisches Signal verstärken
- Digital ansteuerbar zum Ein- oder Ausschalten
- Bipolare Transistoren
  - *npn*-Transistor
  - *pnp*-Transistor
- Unipolare Transistoren – Feldeffekttransistor
  - J-FET
  - MOS-FET



npn-Transistor

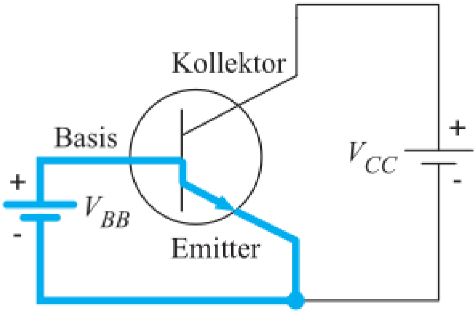
- Emitter & Kollektor dienen Zufluss bzw. Abfluss der Elektronen
- Basis: Steueranschluss regelt den Stromfluss zwischen Emitter und Kollektor
- Steueranschluss verstärkende Wirkung:
  - Geringe Änderung Stromfluss auf Emitter-Basis-Strecke
  - $\rightarrow$ große Änderung des Stromflusses auf Emitter-Kollektor





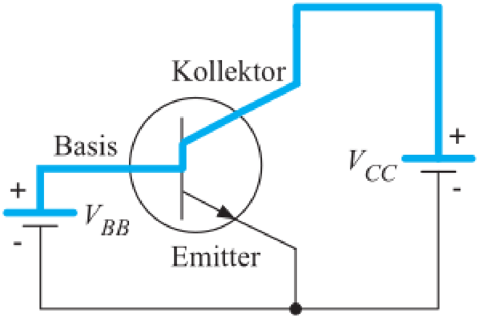
npn-Transistor: Basis-Emitter-Strecke

- *pn*-Übergang ist in Durchlassrichtung gepolt
- Ermöglicht in Abhängigkeit zur angelegten Spannung einen Stromfluss im Basisstromkreis



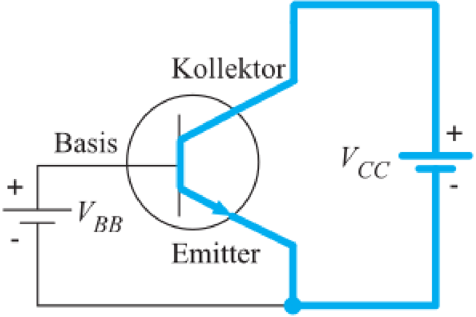
npn-Transistor: Basis-Kollektor-Strecke

- Basis besitzt gegenüber Kollektor negatives elektrisches Potenzial
- Stromfluss wird durch den in Sperrichtung gepolten *pn*-Übergang unterbunden



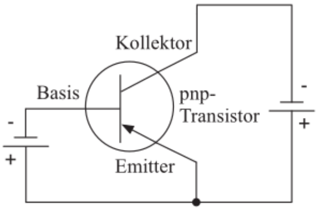
npn-Transistor: Emitter-Kollektor-Strecke

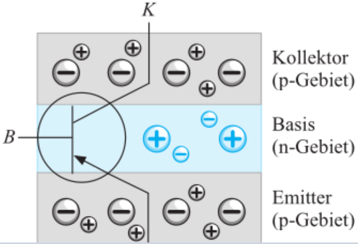
- Zwischen Emitter und Kollektor stellt sich ein Stromfluss ein
- Stärke proportional mit der Stärke des Basisstroms zunimmt



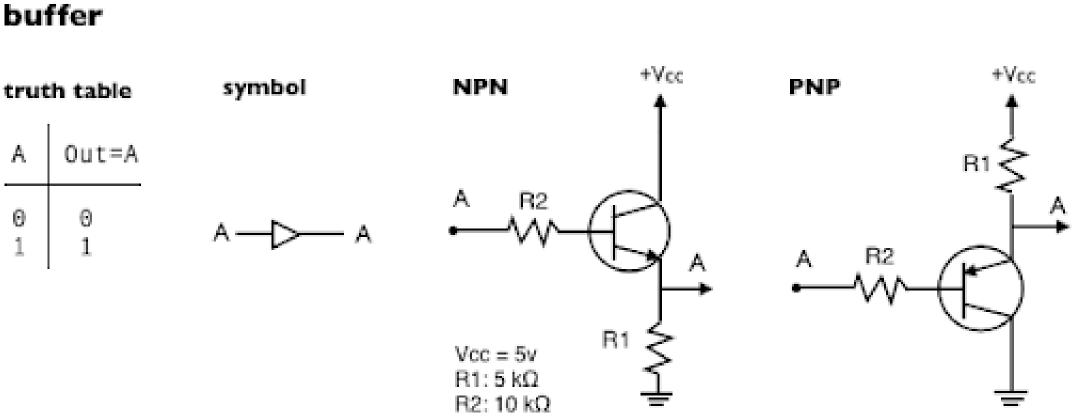
pnp-Transistor: Emitter-Kollektor-Strecke

- Zusammensetzung der Halbleiter „invers“ zu *pnp*
- Basis *n*-Gebiet
- Emitter und Kollektor dagegen *p*-Gebiet
- Positive Spannung am Emitter eine Flut von Elektronenlöchern aus dem *p*-Leiter in das *n*-Gebie
- Negative Spannung : fließt geringer Teil der Defektelektronen über Basis ab
- Großteil der Elektronenlöcher wird durch die starke negative Kollektorspannung in die obere *p*-Schicht gezogen

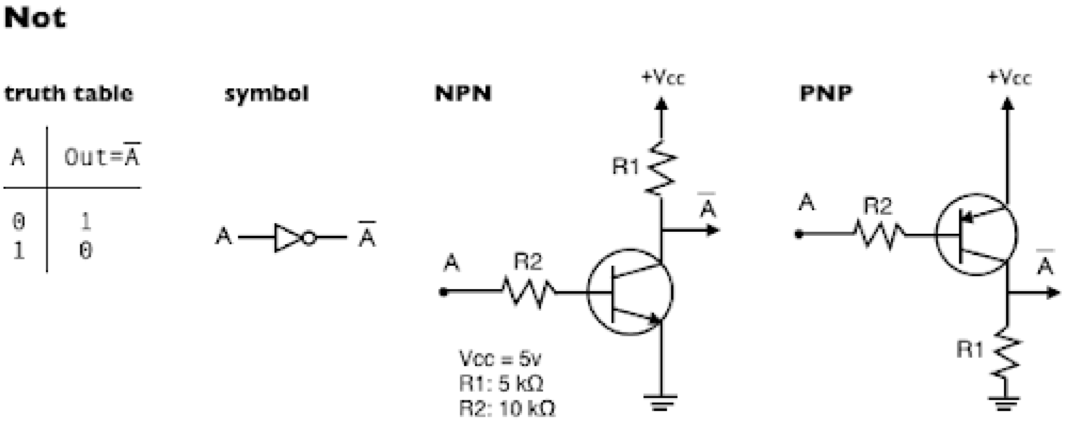




Buffer-Schaltungen mit *npn*-Transistor



Not-Schaltungen mit *npn*-Transistor

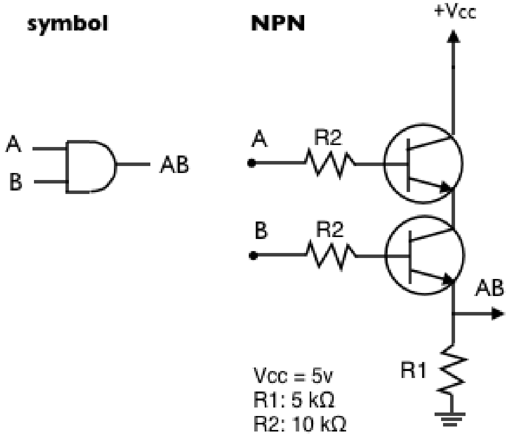


AND-Schaltungen mit *npn*-Transistor

NPN And

truth table

A	B	$AB=\overline{\overline{A}+\overline{B}}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



NAND-Schaltungen mit *npn*-Transistor

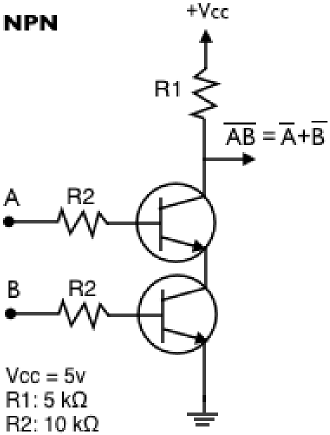
NPN Nand

truth table

A	B	$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

symbol

NPN



OR-Schaltungen mit *npn*-Transistor

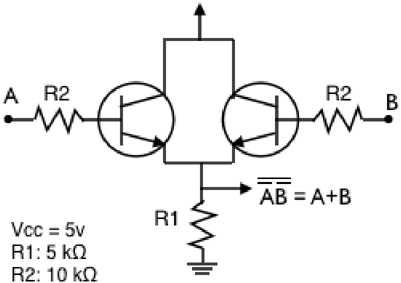
NPN Or

truth table

A	B	$\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

symbol

NPN

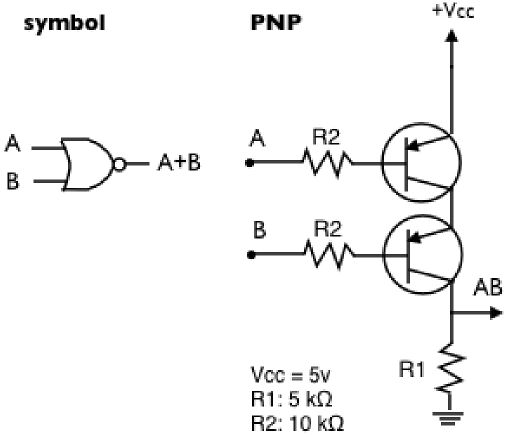


NOR-Schaltungen mit *npn*-Transistor

PNP Nor

truth table

A	B	$\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



Quellen I

- Barnett, Janet Heine (2013). „Boolean algebra as an abstract structure: Edward V. Huntington and axiomatization“. In: *Convergence*.
- Hoffmann, Dirk W (2020). *Grundlagen der technischen Informatik*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG.