Übungsblatt 1
Aufgabe A – Bool'sche Algebra

1. In der Schaltalgebra gelten die folgenden alternativen Absorptionsgesetze:

$$(x \vee \neg y) \wedge y = x \wedge y$$
$$(x \wedge \neg y) \vee y = x \vee y$$

   a) Beweisen sie die Behauptung, indem sie die nachstehenden Wahrheitstabellen ergänzen:

x	y	$\neg x$	$\neg y$	$x \vee \neg y$	$x \wedge \neg y$	$(x \vee \neg y) \wedge y$	$x \wedge y$	$(x \wedge \neg y) \vee y$	$x \vee y$
0	0								
0	1								
1	0								
1	1								

   b) Führen sie den Beweis erneut, diesmal aber auf algebraische Weise (d.h. durch Umformungen).

   c) Übertragen sie die Gesetze in die Sprache der Mengenalgebra. Sind sie dort auch gültig?

2. Zeigen Sie, dass die booleschen Ausdrücke

$$\Phi = x \wedge y \vee \neg((x \vee \neg y) \wedge y)$$
$$\Psi = \neg(x \wedge y) \vee x \vee y$$

   Tautologien sind, indem sie

   a) für beide Funktionen eine Wahrheitstafel aufstellen,

   b) den Beweis durch algebraische Umformung führen.

3. Bildet das Tripel $(\mathcal{V}, \cdot, +)$ mit

$$\mathcal{V} := \{1, 2, 3, 6\}$$
$$\cdot := kgV \text{ (kleinstes gemeinsames Vielfaches)}$$
$$+ := ggT \text{(größter gemeinsamer Teiler)}$$

   eine boolesche Algebra?

4. Vereinfachen sie die folgenden bool'schen Ausdrücke so weit wie möglich durch die Anwendung der algebraischen Umformungsregeln.

   a) $x_1\overline{x_2x_3x_4} \vee x_1x_2\overline{x_3x_4} \vee x_1x_2\overline{x_3}x_4 \vee x_1\overline{x_2x_3}x_4 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3x_4} \vee x_1x_2x_3\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$

5. Zeigen oder widerlegen sie die folgende Beziehung zwischen den Operatoren $\Leftrightarrow$ und $\not\Leftrightarrow$:

a) $x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z = x \not\Leftrightarrow y \not\Leftrightarrow z$

6. Zeigen sie, dass die folgenden Varianten des Distributivgesetzes für $\Leftrightarrow$ und $\neg \Leftrightarrow$ falsch sind:
   b) $(x \vee z) \neg \Leftrightarrow (y \vee z) = (x \neg \Leftrightarrow y) \vee z$
   c) $(x \wedge z) \Leftrightarrow (y \wedge z) = (x \Leftrightarrow y) \wedge z$

7. Nachstehend sind die erweiterten De Morgan'schen Regeln aufgeführt.
   a) $\overline{x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \ldots \vee \overline{x_n}$
   b) $\overline{x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \ldots \wedge \overline{x_n}$

8. Gegeben seien die folgenden drei bool'schen Funktionen:
   a) $\varphi_1 := (x \Rightarrow y) \Rightarrow z$
   b) $\varphi_2 := x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$
   c) $\varphi_3 := \overline{x \wedge y} \vee \overline{x \wedge \overline{z}}$

   Stellen sie φ_1 unter ausschließlicher Verwendung der NOR-Funktion, φ_2 unter ausschließlicher Verwendung der NAND-Funktion und φ_3 unter ausschließlicher Verwendung der Implikation dar.

9. Zeigen sie unter Anwendung der Regeln der bool'schen Algebra, dass mit einer Kombination von $\uparrow$ (= NAND) die folgende **einstelligen** Funktionen dargestellt werden können:
   a) $\neg$
   b) id()
   c) $\top$ (Tautologie)
   d) $\perp$ (Kontradiktion)

10. Zeigen sie, dass durch Kombination von $\uparrow$ die folgenden **zweistelligen** Wahrheitsfunktionen dargestellt werden können.
    a) & (AND)
    b) $\vee$
    c) $\downarrow$
    d) $\oplus$

11. Zeigen sie, dass
    a) & (AND)
    b) $\vee$
    c) $\oplus$

    nicht universell ist. D.h. es gibt wenigstens eine bool'sche Funktion, die durch keine Kombination allein der jeweiligen Operationen dargestellt werden kann.