

Zahlendarstellung

Ziffern & Zahlensystem, \mathbb{N} , Euklid, Horner-Schema

Benjamin Tröster

Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin

21. November 2021

Fahrplan

Einleitung

Natürliche Zahlen

Umwandlung IN q -adische Zahlensysteme

Umwandlung ins Dezimalsystem

Heute

- ▶ Coronabedingt: Sprung von Schaltkreisen und Transistoren zur Zahlendarstellung
- ▶ Ziel: Wir bauen ein Rechenwerk (ALU) aus Schaltkreisen mithilfe von Gattern
- ▶ Zwischenziel: Wie können wir die Zahlen im Rechner darstellen?

Die natürlichen Zahlen (anschaulich)

$0, 1, 2, 3, \dots$

- ▶ kennt jedes Kind
- ▶ beginnen mit 0 oder 1
- ▶ jede Zahl hat einen Nachfolger
- ▶ gut geeignet zum Abzählen
- ▶ keine Schulden, keine Tortenstücke

Die natürlichen Zahlen (axiomatisch)

Definition

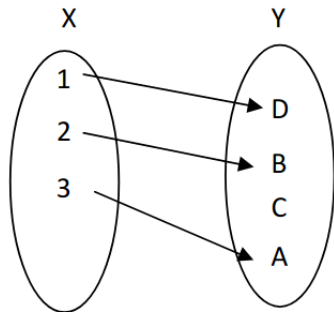
\mathbb{N} ist eine Menge von Zahlen mit den folgenden Eigenschaften:

- ▶ Es gibt ein ausgezeichnetes Element $0 \in \mathbb{N}$
- ▶ Es gibt eine Abbildung $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit
 - (S1) S ist injektiv (d.h. $S(n) \neq S(m)$ falls $n \neq m$).
 - (S1) $0 \notin S(\mathbb{N}) = \{S(n) | n \in \mathbb{N}\}$
 - (S3) Ist $M \subset \mathbb{N}$ und $0 \in M$ sowie $S(M) \subset (M)$, dann gilt $M = \mathbb{N}$

Anschaulich: Jede Zahl hat genau einen Nachfolger. Wenn wir bei 0 anfangen und immer weiter zum Nachfolger gehen, treffen wir jede Zahl genau einmal.

Einschub: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

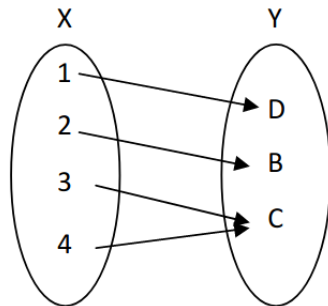
- ▶ Injektiv (linkseindeutig): ist eine Eigenschaft einer mathematischen Funktion
- ▶ Jedes Element der Zielmenge höchstens einmal als Funktionswert angenommen
- ▶ Keine zwei verschiedenen Elemente der Definitionsmenge auf ein und dasselbe Element der Zielmenge abgebildet



Eine injektive Funktion;
X ist die Definitionsmenge und
Y die Zielmenge.

Einschub: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

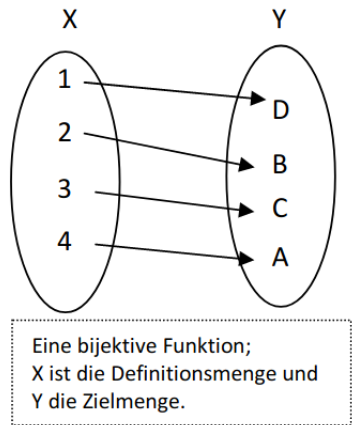
- ▶ Surjektivität (rechtstotal): Ist eine Eigenschaft einer mathematischen Funktion
- ▶ Jedes Element der Zielmenge mindestens einmal als Funktionswert angenommen
 - ▶ Jedes Bild hat mindestens ein Urbild
- ▶ Eine surjektive Funktion wird auch als Surjektion bezeichnet



Eine surjektive Funktion;
X ist die Definitionsmenge und
Y die Zielmenge.

Einschub: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

- ▶ Bijektivität (bijektiv oder umkehrbar eindeutig auf oder eineindeutig auf) ist eine Eigenschaft einer mathematischen Funktion
- ▶ Verschiedene Elemente ihres Definitionsbereichs auf verschiedene Elemente der Zielmenge abbildet (injektiv) **und**
- ▶ Zusätzlich jedes Element der Zielmenge als Funktionswert auftritt (surjektiv)
- ▶ Eine bijektive Funktion hat daher immer eine Umkehrfunktion, ist also invertierbar



Rechnen mit natürlichen Zahlen

Definition (Addition)

$$(A1) \quad n + 0 = n$$

$$(A2) \quad n + S(m) = S(n + m)$$

Somit ist durch (S3) die Addition $n + m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ definiert

Nachweis der Rechenregeln

- ▶ Assoziativität: $k + (n + m) = (k + n) + m$
- ▶ Kommutativität: $n + m = m + n$

Folgerung: Wir können mit natürlichen Zahlen rechnen

Aber: Bevor wir die Summen zweier konkreter natürlicher Zahlen ausrechnen können, muss jede natürliche Zahl genau einen Namen haben!

Ziffernketten

Problem: Unendlich viele natürliche Zahlen erfordern unendlich viele Namen.

Lösung

- ▶ Verwende Ziffernketten: $z_1 z_2 z_3 \dots z_k$ $z_i \in \mathcal{Z}, i = 1, \dots, k$
- ▶ Endliche Ziffernmenge \mathcal{Z}

Interpretation

- ▶ Systematische Konstruktion unterschiedlicher Symbole
- ▶ Bilden von Worten aus einem Alphabet

Ziffersysteme

Theorem

Sei \mathcal{Z} eine endliche Ziffernmenge und

$$\mathcal{D}\{z_1 z_2 \dots z_k \mid k \in \mathbb{N}, z_i \in \mathcal{Z}, i = 1, \dots, k\}$$

die Menge aller endlichen Ziffernketten. Dann existiert eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{Z})$

Definition

Die Ziffernmenge \mathcal{Z} und die Zuordnung φ erzeugen ein Ziffersystem zur Darstellung von \mathbb{N}

Definition

Eine Menge \mathcal{M} , für die eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{M}$ existiert, heißt abzählbar.

Beispiele für Ziffernsysteme

- ▶ Römische Zahlen
 - ▶ $\mathcal{Z} = \{I, V, X, L, C, D, M\}$
 - ▶ Kein Ziffernsystem!
- ▶ Unärsystem
 - ▶ Nur eine Ziffer: $\mathcal{Z} = \{| \}$
 - ▶ Ziffernketten: $\mathcal{D}(\mathcal{Z}) = \{ |, ||, |||, \dots \}$
 - ▶ Zuordnung: $\varphi(0) = , \varphi(1) = |, \varphi(S(n)) = \varphi(n)$
 - ▶ Beispiel: $\varphi(4) = ||||$

Praktische Anwendung

... vor 15000 - 20000 Jahren im Kongo:



... heute



Potenzzerlegung zur Basis q

Theorem

Sei $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$ fest gewählt.

Dann lässt sich jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ als Potenzzerlegung

$$n = \sum_{i=0}^k r_i q^i$$

darstellen. Die Koeffizienten $r_i \in \{0, \dots, q-1\} \subset \mathbb{N}$ sind eindeutig.

Positionssystem zur Basis q

Definition

► Ziffernmenge: $\mathcal{Z} = \{z_0, \dots, z_{q-1}\}$

► Zuordnung:

$$n \mapsto \varphi(n) = z_n, \quad n = 0, \dots, q-1$$

und für $n > q-1$

$$n \mapsto \varphi(n) = z_{r_k} z_{r_{k-1}} \dots z_{r_0} \quad \text{mit } n = \sum_{i=0}^k r_i q^i, \quad 0 \leq r_i \leq q-1$$

Diese Zifferndarstellung heißt **q-adische** Darstellung.

Beispiele

- ▶ Dezimalsystem
 - ▶ $q = 10$ und $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- ▶ Hexadezimalsystem
 - ▶ $q = 16$ und $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$
- ▶ q -adische Systeme mit $q \leq 36$
 - ▶ Erweiterung mit $\{A, B, C, \dots, Z\}$
- ▶ Konvention:
 - ▶ Keine Unterscheidung zwischen Darstellung und Zahl:

$$(z_k z_{k-1} \dots z_0)_q = \sum_{i=0}^k z_i q^i, \quad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, 1, \dots, q-1\}$$

- ▶ Kein Index q , falls $q = 10$
- ▶ Den Index i von z_i nennt man Stelle
- ▶ $(z_k z_{k-1} \dots z_0)$ nennt man eine k -stellige Zahl

Positionssystem zur Basis $q = 2$: Dualsystem

- ▶ Dualsystem (auch Binärsystem)
 - ▶ Ziffernmenge: $\mathcal{Z} = \{0, 1\}$
- ▶ Ideal für technische Umsetzung
 - ▶ 1 Binärstelle \Leftrightarrow 1 Bit \Leftrightarrow 1 „Schalter“
 - ▶ Alle modernen Rechenmaschinen arbeiten mit dem Dualsystem
- ▶ Zahlenbereich
 - ▶ Im Dualsystem lassen sich mit N Stellen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit:

$$0 \leq n \leq 2^N - 1$$

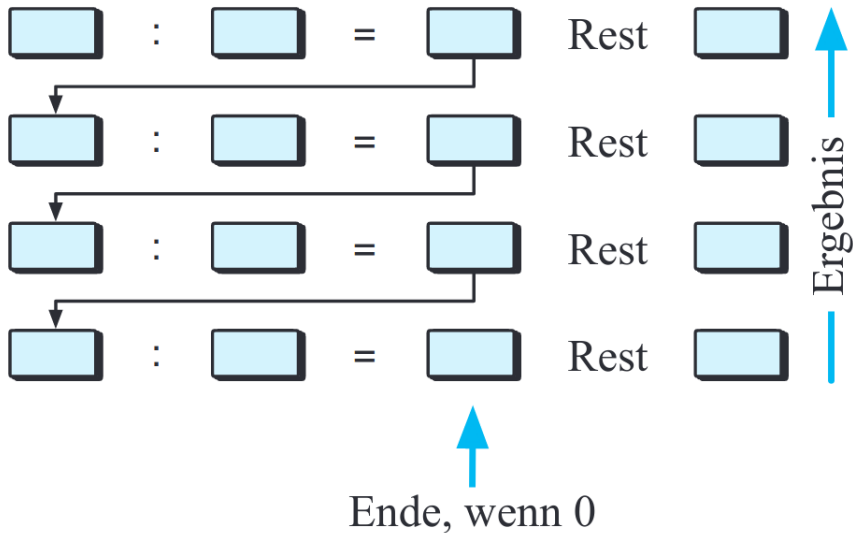
darstellen.

Technische Realisierung

- ▶ Kleinste Einheit (0 oder 1): Bit
- ▶ Bits werden in festen Längen zusammengefaßt
- ▶ 8 Bits = 1 Byte mit $2^8 = 256$ verschiedenen Zuständen
- ▶ Feste Anzahl Bytes für Zahlendarstellung
- ▶ Bezeichnungen: BYTE, WORD, DWORD, ... (Architekturabhängig)
 - ▶ Üblich: x_86/IA32 WORD = 2 Bytes, DWORD = 4 Bytes, QWORD = 8 Bytes
 - ▶ Machineword: Datentyp den die CPU Architektur verarbeiten kann
- ▶ Bereich von 64-Bit Zahlen

$$0 \leq n \leq 2^{64} - 1 > 18 \cdot 10^{18} = 18 \text{ Trillionen}$$

Kochrezept Umrechnung ganzer Zahlen



Beispiel Dualzahlen

- ▶ Umrechnung von 741_{10} in dual

Euklidische Algorithmus

Umwandlung vom Dezimalsystem in ein Zahlensystem zur Basis q

1. Methode: Euklidischer Algorithmus:

$$\begin{aligned} Z &= z_n 10^n + z_{n-1} 10^{n-1} + \dots + z_1 10^1 + z_0 10^0 + z_{-1} 10^{-1} + \dots + z_{-m} 10^{-m} \\ &= y_s q^s + y_{s-1} q^{s-1} + \dots + y_1 q^1 + y_0 q^0 + y_{-1} q^{-1} + \dots + y_{-t} q^{-t} \end{aligned}$$

Die Ziffern werden sukzessive, beginnend mit der höchstwertigen Ziffer, berechnet:

1. **Schritt:** Berechne p gemäß der Ungleichung $qp \leq Z < q^{p+1}$
setze $i = p$ und $Z_i = Z$
2. **Schritt:** Ermittle y_i und den Rest R_i durch Division von Z_i durch q_i
 $y_i = Z_i \div q^i$
 $R_i = Z_i \bmod q^i$
3. **Schritt:** Wiederhole 2. Schritt für $i = p - 1, \dots$ und ersetze dabei nach jedem Schritt Z_i durch R_i , bis $R_i = 0$ oder bis q^i gering genug ist (und damit auch der Umrechnungsfehler).

Beispiel

Umwandlung von $15741,233_{10}$ ins Hexadezimalsystem

1. Schritt $16^3 \leq 15741,233 < 16^4 \Rightarrow$ höchste Potenz 16^3

2.Schritt:	15741,233	:	16^3	=	3	Rest	3453,233
3.Schritt:	3453,233	:	16^2	=	D	Rest	125,233
4.Schritt	125,233	:	16^1	=	7	Rest	13,233
5.Schritt:	13,233	:	$16^0 = 1$	=	D	Rest	0,233
6.Schritt:	0,233	:	16^{-1}	=	3	Rest	0,0455
7.Schritt:	0,0455	:	16^{-2}	=	B	Rest	0,00253
8.Schritt:	0,00253	:	16^{-3}	=	A	Rest	0,000088593
9. Schritt:	0,000088593	:	16^{-4}	=	5	Rest	0,000012299

$$\Rightarrow 15741,233_{10} \approx 3D7D,3BA5_{16}$$

Horner Schema

Umwandlung vom Dezimalsystem in ein Zahlensystem zur Basis q

2. Methode: Abwandlung des Horner-Schemas

2.1 Hierbei müssen der ganzzahlige und der gebrochene Anteil getrennt betrachtet werden.

2.2 Umwandlung des ganzzahligen Anteils:

Eine ganze Zahl $X_q = \sum_{i=0}^n z_i q^i$ kann durch fortgesetztes

Ausklammern auch in folgender Form geschrieben werden:

$$X_q = (((\dots((z_n q + z_{n-1})q + z_{n-2})q + z_{n-3})q \dots)q + z_1)q + z_0$$

Beispiel

Die gegebene Dezimalzahl wird sukzessive durch die Basis q **dividiert**.
Die jeweiligen ganzzahligen Reste ergeben die Ziffern der Zahl X_q in der Reihenfolge von der niedrigstwertigen zur höchstwertigen Stelle.
Wandle 15741_{10} ins Hexadezimalsystem

Beispiel

Die gegebene Dezimalzahl wird sukzessive durch die Basis q **dividiert**.
Die jeweiligen ganzzahligen Reste ergeben die Ziffern der Zahl X_q in der Reihenfolge von der niedrigstwertigen zur höchstwertigen Stelle.

Wandle 15741_{10} ins Hexadezimalsystem

$$\begin{array}{rcllcl} 15741_{10} : 16 & = & 983 & \text{Rest } 13 & D_{16} \\ 983_{10} : 16 & = & 61 & \text{Rest } 7 & (7_{16}) \\ 61_{10} : 16 & = & 3 & \text{Rest } 13 & (D_{16}) \\ 3_{10} : 16 & = & 0 & \text{Rest } 3 & (3_{16}) \end{array}$$

$$\Rightarrow 15741_{10} = 3D7D_{16}$$

Umwandlung des Nachkommateils

Auch der gebrochene Anteil einer Zahl

$$Y_q = \sum_{i=-m}^{-1} y_i q^i$$

lässt sich entsprechend schreiben:

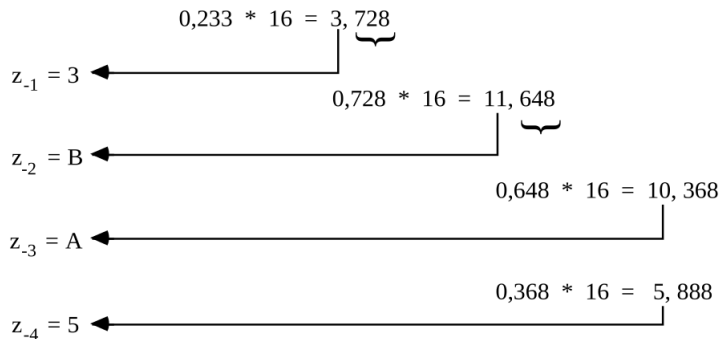
$$Y_q = (((\dots ((y_{-m}q^{-1} + y_{-m+1})q^{-1} + y_{-m+2})b^{-1} + \dots + y_{-2})q^{-1} + y_{-1})b^{-1}$$

Verfahren:

Eine sukzessive **Multiplikation** des Nachkommateils der Dezimalzahl mit der Basis q des Zielsystems ergibt nacheinander die y_{-i} in der Reihenfolge der höchstwertigen zur niedrigstwertigen Nachkommaziffer.

Beispiel

Umwandlung von $0,233_{10}$ ins Hexadezimalsystem:



➔ $0,233_{10} \approx 0,3BA5_{16}$

Abbruch bei
genügend hoher
Genauigkeit

Umwandlung: Basis $q \rightarrow$ Dezimalsystem

Die Werte der einzelnen Stellen der umzuwandelnden Zahl werden in dem Zahlensystem, in das umgewandelt werden soll, dargestellt und nach der Stellenwertgleichung aufsummiert.

Der Wert X_q der Zahl ergibt sich dann als Summe der Werte aller Einzelstellen $z_i q^i$:

$$\begin{aligned} X_q &= z_n q^n + z_{n-1} q^{n-1} + \dots + z_1 q^1 + z_0 q^0 + z_{-1} q^{-1} + \dots + z_{-m} q^{-m} \\ &= \sum_{i=-m}^n z_i q^i \end{aligned}$$

Beispiel

Konvertierung $101101,1101_2$ ins Dezimalsystem

101101,1101

1	2^4	=	16
0	2^3	=	0
1	2^2	=	4
1	2^1	=	2
0	2^0	=	0
1	2^{-1}	=	0,5
1	2^{-2}	=	0,25
0	2^{-3}	=	0
1	2^{-4}	=	0,0625
<hr/>			
			45,8125 ₁₀

Umwandlung beliebiger Stellenwertsysteme

Man wandelt die Zahl ins Dezimalsystem um und führt danach mit Methode 1 oder 2 die Wandlung ins Zielsystem durch.

Spezialfall:

- Ist eine Basis eine Potenz der anderen Basis, können einfach mehrere Stellen zu einer Ziffer zusammengefasst werden oder eine Stelle kann durch eine Folge von Ziffern ersetzt werden.

Wandlung von $0110100, 110101_2$ ins Hexadezimalsystem als BYTE dargestellt
 $2^4 = 16 \Rightarrow 4 \text{ Dualstellen} \rightarrow 1 \text{ Hexadezimalstellen}$

dual	0110100, 110101
	↓
	$\underbrace{0011}_3 \underbrace{0100}_4, \underbrace{1101}_D \underbrace{0100}_4$
hex	3 4 , D 4

Ergänzen von Nullen zum Auffüllen auf Vierergruppen

Quellen I