Bool'sche Algebra

Fahrplan

Aussagenlogik

Definition (Aussagenlogik)

Aussagenlogik, als Teilgebiet der Logik, befasst sich mit Aussagen und der Verknüpfung von Aussagen mittels *Junktoren*.

- Junktoren sind logische Verknüpfungen
- Klassische Junktoren:
  - Negation $\neg P$
  - Implikation/Subjunktion/Konditional $P \Rightarrow Q$
  - Äquivalenz/Bikonditional/Bisubjunktion $P \Leftrightarrow Q$
  - Konjunktion $P \wedge Q$
  - Disjunktion $P \vee Q$

[Rau08]

Bool’sche Algebra nach Huntington (Wichtig!)

Definition

Die bool’sche Algebra nach Huntington ist definiert als Menge $\mathcal{V} : \{0,1\}$ mit den Verknüpfungen $\cdot(\wedge), +(\vee)$, sodass $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, also $\{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$.

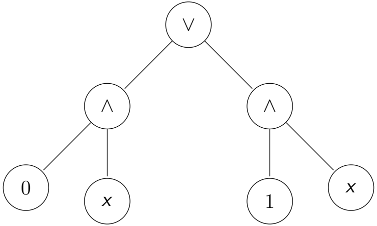
- Kommutativgesetze (K): $a \cdot b = b \cdot a$ bzw. $a + b = b + a$
- Distributivgesetze (D): $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ bzw. $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
- Neutrale Elemente (N): $\exists e, n \in \mathcal{V}$ mit $a \cdot e = a$ und $a + n = a$
- Inverse Elemente (I): $\forall a \in \mathcal{V}$ existiert ein a' mit $a \cdot a' = n$ und $a + a' = e$

Übernommen von [Bar13] bzw. [Hof20]

Darstellungen & Bool'sche Funktionen

- Wahrheitstabelle

a	b	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- 

- Algebraische Darstellung: $y = ((0 \wedge x) \vee (1 \vee x))$

Notation und Operatorenbindung

- Syntactic Sugar (Ableitungen aus Basisverknüpfungen)
  - $(a \Rightarrow b)$ für $(\neg a \vee b)$ – Implikation
  - $(a \Leftarrow b)$ für $(b \Rightarrow a)$ – Inversion der Implikation
  - $(a \Leftrightarrow b)$ für $(a \Rightarrow b) \wedge (a \Leftarrow b)$ – Äquivalenz
  - $(a \oplus b)$ für $\neg(a \Leftrightarrow b)$ – Antivalenz oder Exklusiv-ODER/XOR
  - $\neg(a \vee b)$ – NOR
  - $\neg(a \wedge b)$ – NAND
- Bindung der Operatoren
  - $\wedge$ bindet stärker als $\vee$
  - $\neg$ bindet stärker als $\wedge$
- Klammerung
  - Gleiche Verknüpfungen: linksassoziativ zusammengefasst

Beispiel

$$Y = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$

Beispiel

Umformulieren:

$$
\begin{aligned}
Y &= (A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \\
&= \big((A + B) \cdot (\overline{A} + B) \cdot (A + \overline{B})\big) \\
&= \big((A \cdot B \cdot B) + (B \cdot A \cdot A) + (A \cdot A \cdot \overline{A}) + (B \cdot B \cdot \overline{B}) \\
&+ (A \cdot B \cdot \overline{A}) + (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B})\big)
\end{aligned}
$$

Beispiel

Anwenden der Idempotenz: $X \cdot X = X$ für $X = B$

$$
\begin{aligned}
&= (A \cdot {\color{red}(B \cdot B)}) + (B \cdot A \cdot A) + (A \cdot A \cdot \overline{A}) + (B \cdot B \cdot \overline{B}) \\
&+ (A \cdot B \cdot \overline{A}) + (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) \\
&= (A \cdot {\color{red}(B)}) + (B \cdot A \cdot A) + (A \cdot A \cdot \overline{A}) + (B \cdot B \cdot \overline{B}) \\
&+ (A \cdot B \cdot \overline{A}) + (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B})
\end{aligned}
$$

Beispiel

Anwenden der Idempotenz: $X \cdot X = X$ für $X = A$

$$
\begin{aligned}
&= (A \cdot B) + (B \cdot (A \cdot A)) + (A \cdot A \cdot \overline{A}) + (B \cdot B \cdot \overline{B}) \\
&+ (A \cdot B \cdot \overline{A}) + (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) \\
&= (A \cdot B) + (B \cdot (A)) + (A \cdot A \cdot \overline{A}) + (B \cdot B \cdot \overline{B}) \\
&+ (A \cdot B \cdot \overline{A}) + (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B})
\end{aligned}
$$

Beispiel

Anwenden des Kommutativgesetz:

$$
\begin{aligned}
&= (A \cdot B) + \color{red}{(B \cdot A)} + (A \cdot A \cdot \overline{A}) + (B \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot B \cdot \overline{A}) \\
&+ (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) \\
&= (A \cdot B) + \color{red}{(A \cdot B)} + (A \cdot A \cdot \overline{A}) + (B \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot B \cdot \overline{A}) \\
&+ (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B})
\end{aligned}
$$

Beispiel

Anwenden der Idempotenz: $X \cdot X = X$ für $X = A \cdot B$

$$
\begin{aligned}
&= ((A \cdot B) + (B \cdot A)) + (A \cdot A \cdot \overline{A}) + (B \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot B \cdot \overline{A}) \\
&+ (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) \\
&= (A \cdot B) + (A \cdot A \cdot \overline{A}) + (B \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot B \cdot \overline{A}) \\
&+ (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B})
\end{aligned}
$$

Beispiel

Anwenden der Idempotenz: $X \cdot X = X$ für $X = A$ und $X = B$ (Nicht dargestellt)
Anwenden des Komplements

$$= (A \cdot B) + (A \cdot \overline{A}) + (B \cdot \overline{B}) + (A \cdot B \cdot \overline{A}) + (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B})$$
$$= (A \cdot B) + (0) + (B \cdot \overline{B}) + (A \cdot B \cdot \overline{A}) + (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B})$$

Beispiel

Anwenden der Identität:

$$
\begin{aligned}
&= (((A \cdot B) + 0) + (B \cdot \overline{B}) + (A \cdot B \cdot \overline{A}) + (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) \\
&= (A \cdot B) + (B \cdot \overline{B}) + (A \cdot B \cdot \overline{A}) + (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) \\
&= (A \cdot B) + (B \cdot \overline{B}) + (A \cdot B \cdot \overline{A}) + (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) \\
&= (A \cdot B) + (0) + (A \cdot B \cdot \overline{A}) + (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B})
\end{aligned}
$$

Beispiel

Anwenden des Komplements und Identität:

$$
\begin{aligned}
&= (A \cdot B) + (B \cdot \overline{B}) + (A \cdot B \cdot \overline{A}) + (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) \\
&= (A \cdot B) + (0) + (A \cdot B \cdot \overline{A}) + (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) \\
&= ((A \cdot B) + 0) + (A \cdot B \cdot \overline{A}) + (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) \\
&= (A \cdot B) + (A \cdot B \cdot \overline{A}) + (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B})
\end{aligned}
$$

Beispiel

Anwenden des Kommutativgesetz und Komplements:

$$= (A \cdot B) + (A \cdot B \cdot \overline{A}) + (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B})$$
$$= (A \cdot B) + (A \cdot \overline{A} \cdot B) + (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B})$$
$$= (A \cdot B) + (0 \cdot B) + (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B})$$
$$= (A \cdot B) + (B \cdot 0) + (A \cdot B \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) + (B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B})$$

Beispiel

Anwenden der Dominanz und Identität:

$$
\begin{aligned}
&= (A \cdot B) + (B \cdot 0) + \left(A \cdot B \cdot \overline{B}\right) + \left(A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}\right) + \left(B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}\right) \\
&= (A \cdot B) + (0) + \left(A \cdot B \cdot \overline{B}\right) + \left(A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}\right) + \left(B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}\right) \\
&= ((A \cdot B) + 0) + \left(A \cdot B \cdot \overline{B}\right) + \left(A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}\right) + \left(B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}\right) \\
&= (A \cdot B) + \left(A \cdot B \cdot \overline{B}\right) + \left(A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}\right) + \left(B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}\right)
\end{aligned}
$$

Beispiel

... Wiederholung Identität und Dominanz durch 0 und Anwenden der Identität

$$= (A \cdot B) + \left(\overline{A} \cdot 0\right) = (A \cdot B) + (0)$$
$$= ((A \cdot B) + 0) = (A \cdot B)$$

Beispiel

$$Y = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$
$$Y = (\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b)$$

Heute: Einleitung

- Erfüllbarkeit & Äquivalenz
- Beweisstrategien & Induktion – Strukturelle Induktion
- Negationstheorem
- De Morgan Regeln & Dualitätsprinzip
- Universelle Operatoren
- Normalformen
- Bitweise logische Operationen, Bit-Maskierung
- Einführung Logikgatter

Erfüllbarkeit

Definition (Erfüllbarkeit)

Sei φ ein beliebiger boolescher Ausdruck. φ heißt

- erfüllbar, wenn es Werte $x_1, \ldots, x_n$ gibt, mit $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 1$.
- widerlegbar, wenn es Werte $x_1, \ldots, x_n$ gibt, mit $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
- unerfüllbar, wenn $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ immer gleich 0 ist.
- allgemeingültig, wenn wenn $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ immer gleich 1 ist.

Einen allgemeingültigen Ausdruck bezeichnen wir auch als **Tautologie**.

Erfüllbarkeit/Unerfüllbar/Allgemeingültig

- $\phi = \neg x$
- $\phi = x \wedge \neg x$
- $\neg(x \wedge \neg x)$

Äquivalenz

Definition (Äquivalenz)

Zwei bool'sche Ausdrücke φ und ψ sind äquivalent, falls sie dieselbe Funktion repräsentieren. In anderen Worten: $\varphi und \psi$ sind genau dann äquivalent, wenn für alle Variablenbelegungen $x_1, \ldots, x_n$ die folgende Beziehung gilt:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(x_1, \ldots, x_n)$$

D.h. Zwei bool'sche Ausdrücke ϕ und ψ sind genau dann äquivalent, wenn der Ausdruck $\varphi \Leftrightarrow \psi$ eine Tautologie ist.
Mithilfe von Wahrheitstafeln, algebraischer Umformung oder durch erzeugen einer Normalform können wir die Äquivalenz feststellen.

Beweisstrategien

- Direkter Beweis
  - Annahme: A ist allgemeingültig, durch richtiges Schließen: $A \Rightarrow B$
- Indirekter Beweis:
  - Negation der Annahme darf zu keinem korrekten Ergebnis führen
- Vollständige Induktion
  - Beweise für Aussagen über die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$
  - Basierend auf den Peano-Axiomen für $\mathbb{N}$

Beweisregeln

- Abtrennungsregel:
  - Sind A und $A \Rightarrow B$ allgemeingültig, so ist B allgemeingültig
  - Korrektheit folgt aus der Allgemeingültigkeit von $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
- Fallunterscheidung
  - Sind $A \Rightarrow B$ und $\neg A \Rightarrow B$ allgemeingültig, so ist B allgemeingültig
  - Korrektheit folgt aus der Allgemeingültigkeit von $((A \Rightarrow B) \wedge ((\neg A) \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
- Kettenschluss
  - Sind $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$ allgemeingültig, so ist $A \Rightarrow C$ allgemeingültig
  - Korrektheit folgt aus der Allgemeingültigkeit von $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Beweisregeln

- Indirekter Beweis
  - Sind $A \Rightarrow B$ und $A \Rightarrow \neg B$ allgemeingültig, so ist $\neg A$ allgemeingültig
  - Korrektheit folgt aus der Allgemeingültigkeit von $((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow (\neg B))) \Rightarrow (\neg A)$
- Kontraposition: Ist $A \Rightarrow B$ allgemeingültig, so ist $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ allgemeingültig
  - Korrektheit folgt aus der Allgemeingültigkeit von $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$.

Vollständige Induktion

- Drei Teile:
  - Induktionsanfang (IA) & Induktionsannahme
  - Induktionsschritt (IS)
  - Induktionsschluss

Beispiel: Vollständige Induktion

Theorem

$$\forall n(n \in \mathbb{N}_0 \rightarrow 2^0 + 2^1 + \ldots 2^n = 2^{n+1} - 1)$$

Beweis.

Prädikat: $\varphi(n) \equiv (2^0 + 2^1 + \dots 2^n = 2^{n+1} - 1)$

1. Induktionsanfang (IA): $\varphi(0)$ soll gelten $2^0 = 2^{0+1} - 1 \Leftrightarrow 1 = 1\surd$
2. Induktionsschritt (IS):

$$\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n^+)$$

$$2^0 + 2^1 + \dots 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$

$$\textbf{Anm.: } 2^0 + 2^1 + \dots 2^n = 2^{n+1} - 1$$

$$\Leftrightarrow 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$

$$\textbf{Anm.: } a^n + a^m = 2^{n+m}$$

$$\Leftrightarrow 2^{n+2} - 1 = 2^{(n+2)} - 1\surd$$

$\square$

Beweis.

Prädikat: $\varphi(n) \equiv (2^0 + 2^1 + \ldots 2^n = 2^{n+1} - 1)$

1. Induktionsanfang: $\varphi(0)$ soll gelten $2^0 = 2^{0+1} - 1 \Leftrightarrow 1 = 1\surd$
2. Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} \varphi(n) &\Rightarrow \varphi(n^+) \\ 2^0 + 2^1 + \ldots 2^n + 2^{n+1} &= 2^{(n+1)+1} - 1 \\ \Leftrightarrow 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} &= 2^{(n+1)+1} - 1 \\ \Leftrightarrow 2^{n+2} - 1 &= 2^{(n+2)} - 1\surd \end{aligned}$$

3. Induktionsschluss:

$$\text{nach IA und IS } \Rightarrow \varphi(n)(\forall n(\varphi(n)))$$

Strukturelle Induktion

- Vollständige Induktion ist eine Spezialfall der strukturellen Induktion
- Wie in der vollständigen Induktion: Beweis für Basisfälle (Atome)
- Anschließend via Induktionsschritt, dass sich die Gültigkeit der Behauptung auf nächste Ebene überträgt
- Basisfälle: Alle nicht zusammengesetzten Elemente
  - Wahrheitswerte 0 und 1,
  - bool'schen Ausdrücke mit einer Variablen
  - D.h. Rückführung auf $x \wedge \neg x$ bzw. $x \vee \neg x$
  - Induktionsanfang den Ausdruck $f = x$
- Induktionsschritt: Zeigt, dass Behauptung für beliebig zusammengesetzte Ausdrücke gilt
  - Induktionsschritt nur Elementaroperatoren: $\neg, \wedge, \vee$

Beispiel Strukturelle Induktion

Theorem

Sei φ ein beliebiger boolescher Ausdruck, in dem neben den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ausschließlich der Implikationsoperator vorkommt.
Dann ist φ stets erfüllbar.

- Idee: Wir zeigen, dass $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ stets gleich 1 ist, wenn wir alle Variablen 1 sind

Beispiel Strukturelle Induktion

Beweis.

Induktionsanfang (IA): φ sei ein nicht zusammengesetzter boolescher Term. φ hat die Form x_i, da keine Konstanten erlaubt sind . Es gilt $\varphi(1) = 1$.
Induktionsvoraussetzung (IV): φ sei ein zusammengesetzter boolescher Ausdruck, in dem neben den Variablen $x_1, \dots, x_n$ ausschließlich der Implikationsoperator vorkommt. Wir nehmen an, die Behauptung sei für alle Unterterme von φ bereits bewiesen.
Induktionsschritt (IS): Da die Implikation der einzige Operator ist, der in φ vorkommen darf, hat φ die Form $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$. Dann ist

$$\varphi(1, \dots, 1) = \varphi_1(1, \dots, 1) \Rightarrow \varphi_2(1, \dots, 1) = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

somit ist φ bewiesen. $\square$

Negationstheorem

Theorem

Sei $f(0,1,x_1,\ldots,x_n,\wedge,\vee,\neg)$ *ein boolescher Ausdruck, in dem neben den Konstanten* 1 *und* 0 *und den Variablen* $x_1,\ldots,x_n$ *die booleschen Operatoren* $\wedge,\vee$ *und* $\neg$ *vorkommen. Dann gilt:*

$$\overline{f(0,1,x_1,\ldots,x_n,\wedge,\vee,\neg)} = f(1,0,\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n},\vee,\wedge,\neg)$$

Beweis: Negationstheorem

Beweis.

Induktionsanfang (IA): Sei φ ein nicht zusammengesetzter Ausdruck. Wir betrachten alle Ausdrücke f der Länge 1:

Fall 1 $\varphi = 0$

$$\overline{\varphi(0, 1, x_1, \dots, x_n, \wedge, \vee, \neg)} = 0 = 1 = \varphi(1, 0, \overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \vee, \wedge, \neg)$$

Fall 2 $\varphi = 1$

$$\overline{\varphi(0, 1, x_1, \dots, x_n, \wedge, \vee, \neg)} = 1 = 0 = \varphi(1, 0, \overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \vee, \wedge, \neg)$$

Fall 3 $\varphi = x_i$

$$\overline{\varphi(0, 1, x_1, \dots, x_n, \wedge, \vee, \neg)} = \overline{(x_i)} = (\overline{(x_i)}) = \varphi(1, 0, \overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \vee, \wedge, \neg)$$

$\square$

Beweis: Negationstheorem

Beweis.

Induktionsvoraussetzung (IV): Wir nehmen an, die Behauptung sei für alle Unterterme von f bereits bewiesen.

$\square$

Beweis: Negationstheorem

Beweis.

Induktionsschritt (IS): Wir unterscheiden drei Fälle:

Fall 1: $\varphi = \overline{\varphi}$

$$\begin{aligned}
&\overline{\varphi(0,1,x_1,\ldots,x_n,\wedge,\vee,\neg)} \\
&= \overline{\overline{\varphi(0,1,x_1,\ldots,x_n,\wedge,\vee,\neg)}} \\
&\overset{IV}{=} \overline{\varphi(1,0,\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n},\vee,\wedge,\neg)} \\
&= \varphi(1,0,\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n},\vee,\wedge,\neg)
\end{aligned}$$

□

Beweis: Negationstheorem

Beweis.

Induktionsschritt (IS): Wir unterscheiden drei Fälle:

Fall 2: $\varphi = \varphi \wedge \varphi$

$$
\begin{aligned}
&\overline{\varphi(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg)} \\
&= \overline{\varphi_1(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg) \wedge \varphi_2(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg)} \\
&= \overline{\varphi_1(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg)} \vee \overline{\varphi_2(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg)} \\
&\overset{IV}{=} \varphi_1(1, 0, \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}, \vee, \wedge, \neg) \vee \varphi_2(1, 0, \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}, \vee, \wedge, \neg) \\
&= \varphi(1, 0, \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}, \vee, \wedge, \neg)
\end{aligned}
$$

$\square$

Beweis: Negationstheorem

Beweis.

Induktionsschritt (IS): Wir unterscheiden drei Fälle:

Fall 3: $\varphi = \varphi \vee \varphi$

$$
\begin{aligned}
&\overline{\varphi(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg)} \\
&= \overline{\varphi_1(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg) \vee \varphi_2(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg)} \\
&= \overline{\varphi_1(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg)} \wedge \overline{\varphi_2(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg)} \\
&\overset{IV}{=} \varphi_1(1, 0, \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}, \vee, \wedge, \neg) \wedge \varphi_2(1, 0, \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}, \vee, \wedge, \neg) \\
&= \varphi(1, 0, \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}, \vee, \wedge, \neg)
\end{aligned}
$$

□

Negationstheorem & De Morgansche Regel

- Mithilfe des Negationstheorem haben wir die De Morgansche Regel bewiesen:
  - (M1) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$
  - (M2) $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$
- Noch besser: Wir erhalten das Dualitätsprinzip – Symmetrieeigenschaft!

Dualitätsprinzip

Theorem

Sei

$$\varphi(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg) = \psi(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg)$$

ein Gesetz der booleschen Algebra, in der neben Variablen und den Konstanten 0 *und* 1 *ausschließlich die Elementarverknüpfungen* $\neg$, *land und* $\vee$ *vorkommen. Dann ist auch die duale Gleichung*

$$\varphi(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg) = \psi(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg)$$

ein Gesetz der booleschen Algebra.

Vollständige Operatorensysteme

Definition

$\mathcal{M}$ sei eine beliebige Menge von Operatoren. $\mathcal{M}$ ist ein vollständiges Operatorensystem, wenn sich jede boolesche Funktion durch einen Ausdruck beschreiben lässt, in dem neben den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ausschließlich Operatoren aus $\mathcal{M}$ vorkommen.

- Die Elementaroperatoren $\wedge, \vee$ und $\neg$ bilden zusammen ein vollständiges Operatorensystem
- Die Operatoren NAND und NOR bilden jeder für sich bereits ein vollständiges Operatorensystem
- Die Implikation und die 0 bilden zusammen ebenfalls ein vollständiges Operatorensystem

Universelle Operatoren

- Reduktion von $\wedge, \vee$ und $\neg$ auf NAND

$$
\begin{aligned}
\overline{x} &= \overline{x \wedge x} \\
x \wedge y &= \overline{\overline{x \wedge y}} \quad \text{Idee:Doppelte Negation hebt sicht auf} \\
&= \overline{\overline{x \wedge y} \wedge \overline{x \wedge y}} \\
x \vee y &= \overline{\overline{x \vee y}} \quad \text{Idee: OR ist A und K} \\
&= \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} \\
&= \overline{\overline{x \wedge x} \wedge \overline{y \wedge y}}
\end{aligned}
$$

Normalformdarstellungen

- Normalform beschreibt eine eindeutige Darstellung
- Bool’sche Funktionen: Exakt eine Art und Weise der Repräsentation
- Wahrheitstafeldarstellung ist eine Art der Normalformdarstellungen
- Bool’sche Ausdrücke hingegen sind keine Normalformdarstellung
  - Jede bool’sche Funktion durch unendlich viele Ausdrücke beschreibbar

Quellen I

- Barnett, Janet Heine (2013). "Boolean algebra as an abstract structure: Edward V. Huntington and axiomatization". In: *Convergence*.
- Bewersdorff, Jörg (2007). "Algebra für Einsteiger: Von der Gleichungsauflösung zur Galois-Theorie, 3". In: *Aufl. Vieweg+ Teubner, Wiesbaden (2007, Juli)*.
- Hoffmann, Dirk W (2020). *Grundlagen der technischen Informatik*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG.
- Rautenberg, Wolfgang (2008). *Einführung in die mathematische Logik*. Springer.
- Sasao, Tsutomu (1999). "Lattice and Boolean Algebra". In: *Switching Theory for Logic Synthesis*. Springer, S. 17–34.

Quellen II

Teschl, Gerald und Susanne Teschl (2013). *Mathematik für Informatiker: Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra*. Springer-Verlag.