Bool'sche Algebra

Fahrplan

Aussagenlogik

Definition (Aussagenlogik)

Aussagenlogik, als Teilgebiet der Logik, befasst sich mit Aussagen und der Verknüpfung von Aussagen mittels *Junktoren*.

- Junktoren sind logische Verknüpfungen
- Klassische Junktoren:
  - Negation $\neg P$
  - Implikation/Subjunktion/Konditional $P \Rightarrow Q$
  - Äquivalenz/Bikonditional/Bisubjunktion $P \Leftrightarrow Q$
  - Konjunktion $P \wedge Q$
  - Disjunktion $P \vee Q$

[Rau08]

Bool'sche Algebra nach Huntington (Wichtig!)

Definition

Die bool'sche Algebra nach Huntington ist definiert als Menge $\mathcal{V} : \{0, 1\}$ mit den Verknüpfungen $\cdot(\wedge), +(\vee)$, sodass $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, also $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$.

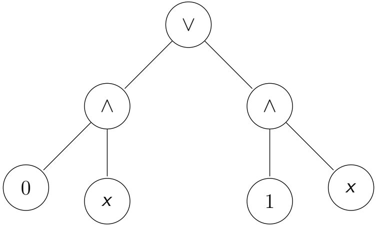
- Kommutativgesetze (K): $a \cdot b = b \cdot a$ bzw. $a + b = b + a$
- Distributivgesetze (D): $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ bzw. $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
- Neutrale Elemente (N): $\exists e, n \in \mathcal{V}$ mit $a \cdot e = a$ und $a + n = a$
- Inverse Elemente (I): $\forall a \in \mathcal{V}$ existiert ein a' mit $a \cdot a' = n$ und $a + a' = e$

Übernommen von [Bar13] bzw. [Hof20]

Darstellungen & Bool'sche Funktionen

- Wahrheitstabelle

a	b	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- 

- Algebraische Darstellung: $y = ((0 \wedge x) \vee (1 \vee x))$

Notation und Operatorenbindung

- Syntactic Sugar (Ableitungen aus Basisverknüpfungen)
  - $(a \Rightarrow b)$ für $(\neg a \vee b)$ – Implikation
  - $(a \Leftarrow b)$ für $(b \Rightarrow a)$ – Inversion der Implikation
  - $(a \Leftrightarrow b)$ für $(a \Rightarrow b) \wedge (a \Leftarrow b)$ – Äquivalenz
  - $(a \oplus b) f r \neg (a \Leftrightarrow b$ – Antivalenz oder Exklusiv-ODER/XOR
  - $\neg(a \vee b)$ – NOR
  - $\neg(a \wedge b)$ – NAND
- Bindung der Operatoren
  - $\wedge$ bindet stärker als $\vee$
  - $\neg$ bindet stärker als $\wedge$
- Klammerung
  - Gleiche Verknüpfungen: linksassoziativ zusammengefasst

Beispiel

$$Y = (A \lor B) \land (\neg A \lor B) \land (A \lor \neg B)$$

Beispiel

$$Y = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$
$$Y = (\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b)$$

- Erfüllbarkeit & Äquivalenz
- De Morgan Regeln
- Universelle Operatoren
- Beweisstrategien & Induktion – Strukturelle Induktion
- Dualitätsprinzip
- Normalformen
- Bitweise logische Operationen, Bit-Maskierung
- Einführung Logikgatter

Erfüllbarkeit

Definition (Erfüllbarkeit)

Sei φ ein beliebiger boolescher Ausdruck. φ heißt

- erfüllbar, wenn es Werte $x_1, \ldots, x_n$ gibt, mit $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 1$.
- widerlegbar, wenn es Werte $x_1, \ldots, x_n$ gibt, mit $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
- unerfüllbar, wenn $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ immer gleich 0 ist.
- allgemeingültig, wenn wenn $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ immer gleich 1 ist.

Einen allgemeingültigen Ausdruck bezeichnen wir auch als **Tautologie**.

Erfüllbarkeit/Unerfüllbar/Allgemeingültig

- $\phi = \neg x$
- $\phi = x \wedge \neg x$
- $\neg(x \wedge \neg x)$

Äquivalenz

Definition (Äquivalenz)

Zwei bool'sche Ausdrücke φ und ψ sind äquivalent, falls sie dieselbe Funktion repräsentieren. In anderen Worten: $\varphi und \psi$ sind genau dann äquivalent, wenn für alle Variablenbelegungen $x_1, \ldots, x_n$ die folgende Beziehung gilt:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(x_1, \ldots, x_n)$$

D.h. Zwei bool'sche Ausdrücke ϕ und ψ sind genau dann äquivalent, wenn der Ausdruck $\varphi \Leftrightarrow \psi$ eine Tautologie ist.
Mithilfe von Wahrheitstafeln, algebraischer Umformung oder durch erzeugen einer Normalform können wir die Äquivalenz feststellen.

Beweisstrategien

- Direkter Beweis
  - Annahme: A ist allgemeingültig, durch richtiges Schließen: $A \Rightarrow B$
- Indirekter Beweis:
  - Annahme das Aussage korrekt, durch Negation der Annahme muss der Schluss falsch sein
- Vollständige Induktion
  - Beweise für Aussagen über die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$
  - Basierend auf den Peano-Axiomen für $\mathbb{N}$

Beweisregeln

- Abtrennungsregel
- Fallunterscheidung
- Kettenschluss
- Indirekter Beweis
  - Sind $A \Rightarrow B$ und $A \Rightarrow \neg B$ allgemeingültig, so ist $\neg A$ allgemeingültig
  - Korrektheit folgt aus der Allgemeingültigkeit von $((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow (\neg B))) \Rightarrow (\neg A)$
- Kontraposition: Ist $A \Rightarrow B$ allgemeingültig, so ist $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ allgemeingültig
  - Korrektheit folgt aus der Allgemeingültigkeit von $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$.

Vollständige Induktion

- Drei Teile:
  - Induktionsanfang (IA) & Induktionsannahme
  - Induktionsschritt (IS)
  - Induktionsschluss

Beispiel: Vollständige Induktion

Theorem

$$\forall n(n \in \mathbb{N}_0 \to 2^0 + 2^1 + \ldots 2^n = 2^{n+1} - 1)$$

Beweis.

Prädikat: $\varphi(n) \equiv (2^0 + 2^1 + \dots 2^n = 2^{n+1} - 1)$

1. Induktionsanfang (IA): $\varphi(0)$ soll gelten $2^0 = 2^{0+1} - 1 \Leftrightarrow 1 = 1\surd$
2. Induktionsschritt (IS):

$$\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n^+)$$

$$2^0 + 2^1 + \dots 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$

$$\textbf{Anm.: } 2^0 + 2^1 + \dots 2^n = 2^{n+1} - 1$$

$$\Leftrightarrow 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$

$$\textbf{Anm.: } a^n + a^m = 2^{n+m}$$

$$\Leftrightarrow 2^{n+2} - 1 = 2^{(n+2)} - 1\surd$$

$\square$

Beweis.

Prädikat: $\varphi(n) \equiv (2^0 + 2^1 + \dots 2^n = 2^{n+1} - 1)$

1. Induktionsanfang: $\varphi(0)$ soll gelten $2^0 = 2^{0+1} - 1 \Leftrightarrow 1 = 1\surd$
2. Induktionsschritt:

$$\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n^+)$$

$$2^0 + 2^1 + \dots 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$

$$\Leftrightarrow 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$

$$\Leftrightarrow 2^{n+2} - 1 = 2^{(n+2)} - 1\surd$$

3. Induktionsschluss:

$$\text{nach IA und IS } \Rightarrow \varphi(n)(\forall n(\varphi(n)))$$

Strukturelle Induktion

- Vollständige Induktion ist eine Spezialfall der strukturellen Induktion

Quellen I

- Barnett, Janet Heine (2013). "Boolean algebra as an abstract structure: Edward V. Huntington and axiomatization". In: *Convergence*.
- Bewersdorff, Jörg (2007). "Algebra für Einsteiger: Von der Gleichungsauflösung zur Galois-Theorie, 3". In: *Aufl. Vieweg+ Teubner, Wiesbaden (2007, Juli)*.
- Hoffmann, Dirk W (2020). *Grundlagen der technischen Informatik*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG.
- Rautenberg, Wolfgang (2008). *Einführung in die mathematische Logik*. Springer.
- Sasao, Tsutomu (1999). "Lattice and Boolean Algebra". In: *Switching Theory for Logic Synthesis*. Springer, S. 17–34.

Quellen II

Teschl, Gerald und Susanne Teschl (2013). *Mathematik für Informatiker: Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra*. Springer-Verlag.