Schalttechnik & Logikgatter

Fahrplan

Bool'sche Algebra nach Huntington (Wichtig!)

Definition

Die bool'sche Algebra nach Huntington ist definiert als Menge $\mathcal{V} : \{0,1\}$ mit den Verknüpfungen $\cdot(\wedge), +(\vee)$, sodass $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, also $\{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$.

- Kommutativgesetze (K): $a \cdot b = b \cdot a$ bzw. $a + b = b + a$
- Distributivgesetze (D): $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ bzw. $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
- Neutrale Elemente (N): $\exists e, n \in \mathcal{V}$ mit $a \cdot e = a$ und $a + n = a$
- Inverse Elemente (I): $\forall a \in \mathcal{V}$ existiert ein a' mit $a \cdot a' = n$ und $a + a' = e$

Übernommen von [Bar13] bzw. [Hof20]

Notation und Operatorenbindung

- Syntactic Sugar (Ableitungen aus Basisverknüpfungen)
  - $(a \Rightarrow b)$ für $(\neg a \vee b)$ – Implikation
  - $(a \Leftarrow b)$ für $(b \Rightarrow a)$ – Inversion der Implikation
  - $(a \Leftrightarrow b)$ für $(a \Rightarrow b) \wedge (a \Leftarrow b)$ – Äquivalenz
  - $(a \oplus b)$ für $\neg(a \Leftrightarrow b)$ – Antivalenz oder Exklusiv-ODER/XOR
  - $\neg(a \vee b)$ – NOR
  - $\neg(a \wedge b)$ – NAND
- Bindung der Operatoren
  - $\wedge$ bindet stärker als $\vee$
  - $\neg$ bindet stärker als $\wedge$
- Klammerung
  - Gleiche Verknüpfungen: linksassoziativ zusammengefasst

Erfüllbarkeit

Definition (Erfüllbarkeit)

Sei φ ein beliebiger boolescher Ausdruck. φ heißt

- erfüllbar, wenn es Werte $x_1, \ldots, x_n$ gibt, mit $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 1$.
- widerlegbar, wenn es Werte $x_1, \ldots, x_n$ gibt, mit $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
- unerfüllbar, wenn $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ immer gleich 0 ist.
- allgemeingültig, wenn wenn $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ immer gleich 1 ist.

Einen allgemeingültigen Ausdruck bezeichnen wir auch als **Tautologie**.

Negationstheorem

Theorem (Negationstheorem)

Sei $f(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg)$ *ein boolescher Ausdruck, in dem neben den Konstanten* 1 *und* 0 *und den Variablen* $x_1, \ldots, x_n$ *die booleschen Operatoren* $\wedge, \vee$ *und* $\neg$ *vorkommen. Dann gilt:*

$$\overline{f(0, 1, x_1, \ldots, x_n, \wedge, \vee, \neg)} = f(1, 0, \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}, \vee, \wedge, \neg)$$

Dualitätsprinzip

Theorem

Sei

$$\varphi(0, 1, x_1, \dots, x_n, \wedge, \vee, \neg) = \psi(0, 1, x_1, \dots, x_n, \wedge, \vee, \neg)$$

ein Gesetz der booleschen Algebra, in der neben Variablen und den Konstanten 0 *und* 1 *ausschließlich die Elementarverknüpfungen* $\neg, \wedge$ *und* $\vee$ *vorkommen. Dann ist auch die duale Gleichung*

$$\varphi(0, 1, x_1, \dots, x_n, \wedge, \vee, \neg) = \psi(0, 1, x_1, \dots, x_n, \wedge, \vee, \neg)$$

ein Gesetz der booleschen Algebra.

Vollständige Operatorensysteme

Definition (Vollständige Operatorensystem)

$\mathcal{M}$ sei eine beliebige Menge von Operatoren. $\mathcal{M}$ ist ein vollständiges Operatorensystem, wenn sich jede boolesche Funktion durch einen Ausdruck beschreiben lässt, in dem neben den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ausschließlich Operatoren aus $\mathcal{M}$ vorkommen.

- Die Elementaroperatoren $\wedge, \vee$ und $\neg$ bilden zusammen ein vollständiges Operatorensystem
- Die Operatoren NAND und NOR bilden jeder für sich bereits ein vollständiges Operatorensystem
- Die Implikation und die 0 bilden zusammen ebenfalls ein vollständiges Operatorensystem

Normalformdarstellungen

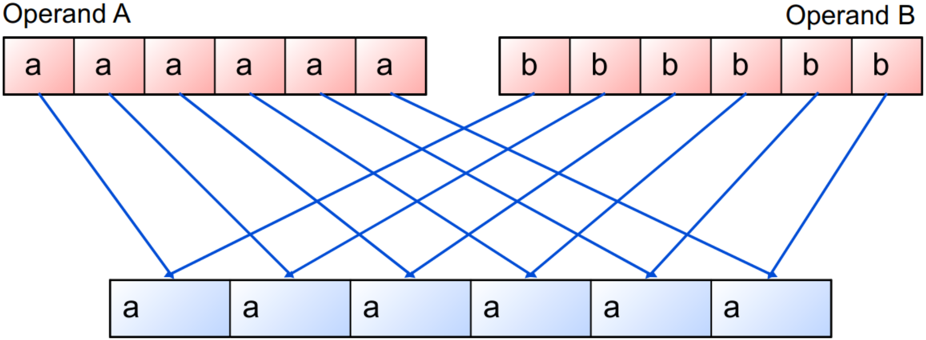
- Normalform beschreibt eine eindeutige Darstellung
- Vollform: Ausdruck, in dem jede Variable genau einmal vorkommt
- Literal: Teilausdruck, der entweder negierte oder unnegierte Variable darstellt
- Wahrheitstafeldarstellung ist eine Art der Normalformdarstellungen
- Bool'sche Ausdrücke hingegen sind keine Normalformdarstellung
    - Jede bool'sche Funktion durch unendlich viele Ausdrücke beschrieben werden

Disjunktive Normalform

- Die disjunktive Normalform (DNF) ist jene Darstellungsart, bei der eine Reihe von Vollkonjunktionen disjunktiv verknüpft wird. Negationen treten nur in atomarer Form auf.
  - $(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$
-
- Die konjunktive Normalform (KNF) ist jene Darstellungsart, bei der eine Reihe von Volldisjunktionen konjunktiv verknüpft wird. Negationen treten nur in atomarer Form auf.
  - $(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C)$
- Andere Bezeichnungen:
  - Kanonische disjunktive/konjunktive Normalform (KDNF/KKNF)
  - Vollständige disjunktive/konjunktive Normalform

Bitweise logische Operationen

A, B seien Bitvektoren, $\circ$ eine beliebige Verknüpfung



Dann erhalten wir als Ergebnis: $E = A \circ B$

Heute:

-

Quellen I

- Barnett, Janet Heine (2013). "Boolean algebra as an abstract structure: Edward V. Huntington and axiomatization". In: *Convergence*.
- Bewersdorff, Jörg (2007). "Algebra für Einsteiger: Von der Gleichungsauflösung zur Galois-Theorie, 3". In: *Aufl. Vieweg+ Teubner, Wiesbaden (2007, Juli)*.
- Hoffmann, Dirk W (2020). *Grundlagen der technischen Informatik*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG.
- Rautenberg, Wolfgang (2008). *Einführung in die mathematische Logik*. Springer.
- Sasao, Tsutomu (1999). "Lattice and Boolean Algebra". In: *Switching Theory for Logic Synthesis*. Springer, S. 17–34.

Quellen II

Teschl, Gerald und Susanne Teschl (2013). *Mathematik für Informatiker: Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra*. Springer-Verlag.