Zahlendarstellung

Benjamin Tröster

Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin

21. November 2021

Fahrplan

Heute

- Coronabedingt: Sprung von Schaltkreisen und Transistoren zur Zahlendarstellung
- Ziel: Wir bauen ein Rechenwerk (ALU) aus Schaltkreisen mithilfe von Gattern
- Zwischenziel: Wie können wir die Zahlen im Rechner darstellen?
- Darstellung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ $\quad\surd$
- Darstellung der ganzer Zahlen $\mathbb{Z}$ $\quad\surd$

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ (anschaulich)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Bruchrechenregeln

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}$$

Konsequenz

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \qquad \Leftrightarrow \qquad ab' = a'b$$

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ (konstruktiv)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Problem

- Im Allgemeinen hat $x \cdot b = a$ keine Lösung $x \in \mathbb{Z}$.

Konstruktion von $\mathbb{Q}$

- Abschluss von $\mathbb{Z}$ unter Division
- Äquivalenzklassen von Paaren (a, b) mit $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$

Darstellung von $\mathbb{Q}$

Theorem

Jede Zifferndarstellung von $\mathbb{Q}$ induziert eine Zifferndarstellung von $\mathbb{Q}$.
Ziffernmenge: $\mathcal{Z} \cup \{-\} \cup \{/\}$

Folgerung

- $\mathbb{Q}$ ist abzählbar

Beispiele

- Dezimalsystem
- Dualsystem

q-adische Brüche

$$z_n \dots z_0, z_{-1} \dots z_{-m} = \sum_{-m}^{n} z_i q^i, \qquad z_i \in \{0, \dots, q-1\}, n, m \in \mathbb{N}$$

Beispiele:

- Dezimalbrüche: $q = 10$
- Dualbruch: $q = 2$

Theorem

Jeder Dualbruch ist ein Dezimalbruch, nicht umgekehrt.

Theorem

Jeder q-adische Bruch ist eine rationale Zahl, nicht umgekehrt.

Periodische Dezimalbrüche

Beispiel:
Periodischer Dezimalbruch (Periodenlänge 3): $0,1234234\ldots = 0,\overline{1234}$
Geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^{-i} = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m} q^{-i} = \lim_{m\to\infty} \frac{1-q^{-(m+1)}}{1-q^{-1}} = \frac{1}{1-q^{-1}}$$

Theorem

Jeder periodische Dezimalbruch ist eine rationale Zahl und umgekehrt.

Eindeutigkeit

- Im Allgemeinen ist die Darstellung nicht eindeutig: $1,0 = 0,9$
- Eindeutigkeit erzwingen: 0 ist verboten.

Praktische Realisierung im Rechner

- Darstellung als Paar von integer-Zahlen
  - integer $=$ Ganzzahldarstellung im Rechner
  - Länge muss variable sein
  - Aufwand für Rechenoperationen nicht a priori bekannt (Kürzen!)
- Keine standardisierte Hardware-Unterstützung
  - Spezialanwendungen (Schnitterkennung in der Computergraphik)
  - Symbolik-Programme (Maple, Mathematica, ...)
  - Aufwendig und langsam

Quellen I

Hoffmann, Dirk W (2020). *Grundlagen der technischen Informatik*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG.