Zahlendarstellung

Benjamin Tröster

Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin

24. November 2021

Fahrplan

Heute

- Coronabedingt: Sprung von Schaltkreisen und Transistoren zur Zahlendarstellung
- Ziel: Wir bauen ein Rechenwerk (ALU) aus Schaltkreisen mithilfe von Gattern
- Zwischenziel: Wie können wir die Zahlen im Rechner darstellen?
- Darstellung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ $\quad\surd$

Die ganzen Zahlen (anschaulich)

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

- kennt (fast) jedes Kind
- beginnen nirgends
- Es gibt positive und negative Zahlen
- Schulden, aber keine Tortenstücke

Die ganzen Zahlen (konstruktiv)

- Problem
  - Ist $n > m$, so hat $x + n = m$ keine Lösung $x \in \mathbb{N}$
- Ausweg
  - Erweitere $\mathbb{N}$ zu $\{x = (n, m)\}$. Wir schreiben $(n, m) = m - n$.
- Neues Problem
  - Nicht eindeutig: $x + 2 = 1$ und $x + 1 = 0$ hätten verschiedene Lösungen!
- Neuer Ausweg
  - Äquivalenzklassen

Anzahl der ganzen Zahlen

Gibt es mehr ganze Zahlen als natürliche Zahlen?

Anzahl der ganzen Zahlen

Gibt es mehr ganze Zahlen als natürliche Zahlen?

- Ja! – denn $-1 \in \mathbb{Z}$ aber $-1 \notin \mathbb{N}$

Anzahl der ganzen Zahlen

Gibt es mehr ganze Zahlen als natürliche Zahlen?

- ~~Ja! – denn $-1 \in \mathbb{Z}$ aber $-1 \notin \mathbb{N}$~~
- Nein! – denn $\mathbb{Z}$ ist abzählbar.

Es gibt eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

Zifferndarstellung mit Vorzeichenbit

- Darstellung positiver Zahlen

$$(z_k z_{k-1} \dots z_0)q = \sum_{i=0}^{k} z_i q^i \qquad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, 1, \dots q-1\}$$

- Zusätzliches Symbol: „$-$“
- Darstellung negativer Zahlen

$$(z_k z_{k-1} \dots z_0)q = \sum_{i=0}^{k} z_i q^i \qquad z_i \in \mathcal{Z} = \{0, 1, \dots q-1\}$$

- Technische Realisierung: Vorzeichenbit

Dualdarstellung ganzer Zahlen mit Vorzeichenbit

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, 111_2, 110_2, 101_2, 000_2, 001_2, 010_2, 011_2, \ldots\}$$

- Darstellung
  - Eindeutigkeit bei endlich vielen Stellen: 1.Stelle $=$ Vorzeichenbit
- Keine eindeutige Darstellung von $0 : 0 = 000_2 = 100_2$
- Addition natürlicher und ganzer Zahlen grundsätzlich verschieden

(Technische Realisierung) Betrag & Vorzeichen

Eine Stelle wird als Vorzeichenbit benutzt.

- MSB = Most Significant Bit

Das am weitesten links stehende Bit ist das Vorzeichen

- MSB $= 0 \Rightarrow$ positive Zahl
- MSB $= 1 \Rightarrow$ negative Zahl

Beispiel (hier `WORD` Size):

- $00010010 = +18$
- $10010010 = -18$

Nachteile:

- Bei Addition und Subtraktion müssen die Vorzeichen der Operanden gesondert betrachtet werden.
- Es gibt zwei Repräsentationen der Zahl 0
- Mit positivem und mit negativem Vorzeichen

Dualdarstellung ganzer Zahlen mit Einerkomplement

- Negative Zahlen werden durch das Invertieren aller Bits gebildet
  - Null ist eindeutig darstellbar
  - Nachteil: Woher weiß ich, ob die Zahl negativ oder positiv ist?

Dualdarstellung ganzer Zahlen mit Zweierkomplement

- Grundannahme: Feste Anzahl Stellen N
- Kochrezept: Das Zweierkomplement von $n < 0$ erhält man durch:
  - Dualdarstellung von $-n$, umklappen aller Bits, 1 addieren
- Beispiel:
  - Bei $N = 4$ Bits soll $n = -3$ dargestellt werden:
  - $-3 \quad \rightarrow \quad -(0011_2) \quad \rightarrow \quad 1100_2 \quad \rightarrow \quad 1101_2$

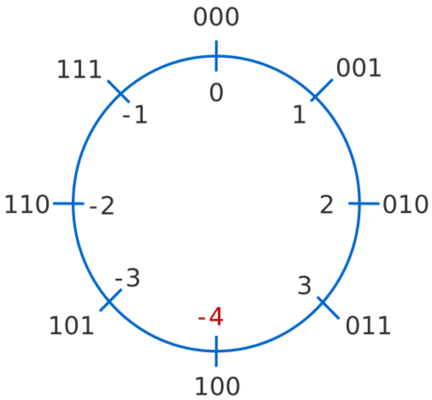
- Feste Anzahl Stellen N
- Größte darstellbare natürliche Zahl wäre $2^N - 1 = 111\ldots111_2$
- Umklappen aller Bits von $n \leq 0$ entspricht: $(2^N - 1) - n = 1\ldots1_2 - n$
- Addieren von eins führt zu: $(2^N - 1) - n + 1 = 1\ldots1 - n + 1$

Zweierkomplement-Darstellung

Nachteil:

- Unsymmetrischer Zahlenbereich. Die kleinste negative Zahl ist betragsmäßig um 1 größer als die größte positive Zahl

Beispiel: 3-Bit-ZK-Zahlen



Zweierkomplement-Darstellung

Nachteil:

- Alle anderen negativen Zahlen werden um 1 verschoben, das `MSB` bleibt aber gleich 1
- Aus der ersten Stelle kann das Vorzeichen der Zahl abgelesen werden
- Aus dieser Konstruktion ergibt sich der Stellenwert des `MSB` einer Zweierkomplementzahl mit $n+1$ Bit zu -2^n:

$$z_n z_{n-1} \ldots z_0 \qquad \text{hat den Wert:}$$

$$Z = -(z_n 2^n + z_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + z_0)$$

Darstellung negativer Zahlen – Beispiel

Die Zahl -77_{10} soll mit 8 Bit dargestellt werden

$$
\begin{aligned}
& 77_{10} && = 01001101_2 \\
\text{Mit Vorzeichenbit: } & -77_{10} && = 11001101_2 \\
\text{Einerkomplement: } & -77_{10} && = 10110010_2 \\
\text{Zweierkomplement: } & -77_{10} && = 10110011_2
\end{aligned}
$$

Beispiel Zweierkomplement

- Umrechnung von -741_{10} in dual mithilfe des Zweierkomplements

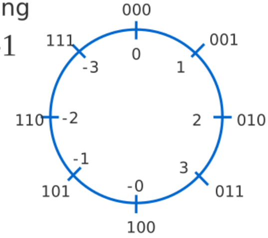
Offset-Dual- (Exzess-)Darstellung

- Wird hauptsächlich bei der Exponenten-Darstellung von Gleitkommazahlen benutzt
- Die Darstellung einer Zahl erfolgt in Form ihrer Charakteristik
- Der gesamte Zahlenbereich wird durch Addition einer Konstanten (Exzess, Offset) so nach oben verschoben, dass die kleinste (negative) Zahl die Darstellung $0 \ldots 0$ erhält
  - Bei n Stellen ist der Offset 2^{n-1}
  - Beispiel: $n = 8 \Rightarrow$ Offset 128
- Der Zahlenbereich ist hier auch asymmetrisch

Zusammenfassung der Möglichkeiten

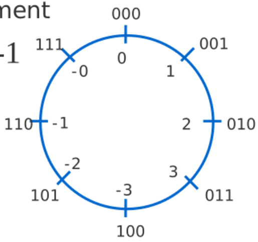
B+V-Darstellung

$-(2^{n-1}-1) : 2^{n-1}-1$



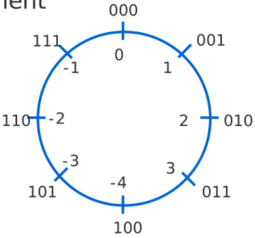
Einerkomplement

$-(2^{n-1}-1) : 2^{n-1}-1$



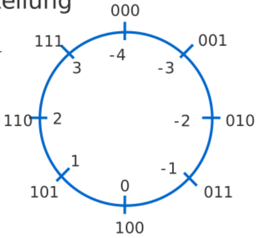
Zweierkomplement

$-2^{n-1} : 2^{n-1}-1$



Exzessdarstellung

$-2^{n-1} : 2^{n-1}-1$



Zusammenfassung der Möglichkeiten

	Darstellung mit			
Dezimalzahl	B+V	Einer-Komplement	Zweier-Komplement	Charakteristik
-4	—	—	100	000
-3	111	100	101	001
-2	110	101	110	010
-1	101	110	111	011
0	100,000	111, 000	000	100
1	001	001	001	101
2	010	010	010	110
3	011	011	011	111

Quellen I

Hoffmann, Dirk W (2020). *Grundlagen der technischen Informatik*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG.