CAVAN Commandes Avancées

- robustesse, optimalité -

B. Marinescu

ECN-LS2N

Contenu

- principe du minimum (Pontryagin)
- commande linéaire-quadratique (LQ et LQG)
- estimation d'état et principe de séparation
- commande H^2, H^∞ - robustesse
- équations de Lyapunov et Riccati
- inégalités matricielles (LMI)
- commande prédictive

Références

Commande optimale

F.L. Lewis, V.L. Syrmos, « Optimal Control », 2nd edition 1995 Wiley.

J.M. Dion, D. Popescu, Commande optimale – conceptions optimisées des systèmes, Diderot 1996

E. Trelat, Contrôle optimal : théorie et applications, Vuibert, Collection "Mathématiques Concrètes", 2005, https://www.ljll.math.upmc.fr/~trelat/

Lawrence C. Evans, An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory, https://math.berkeley.edu/~evans/control.course.pdf

LMI:

S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan (1994): Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM

Commande prédictive

P. Boucher, D. Dumur, La commande prédictive – avancées et perspectives, Hermes-Lavaoisier 2006

J. Richalet, Pratique de la commande prédictive standard, Hermes 1993.

A. Bemporad, M. Morari (1999): Robust model predictive control: A survey. Robustness in Identification and Control, Springer London, 207-226.

H^2, H^∞, LQ

S. Skogestad, I. Postlethwaite, Multivariable Feedback Control – Analysis and Design, 2nd edition Wiley 2005.

K. Zhou, J.C. Doyle, Essential of Robust Control, Prentice Hall 1998.

Partie 1 : Commande optimale

Formulation du problème

On donne:

$$\frac{dx}{dt} = f(\mathrm{x}, \mathrm{u}, \mathrm{t}), \qquad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R} \ni \mathrm{J} = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t)dt + g\left(x_{t_f}, t_f\right)$$

On cherche:

u*=u(t)

telle que la trajectoire x(t) soit *optimale*, i.e.,

min J

$\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$ multiplicateur de Lagrange

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x,u,t)\mathrm{dt} + \mathrm{g}(x_f, t_f) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} [L(x,u,t) + \lambda^T \underbrace{(f(x,u,t) - \dot{x})}_{0}]\mathrm{dt} + \mathrm{g}(x_f, t_f)$$

Variations de la trajectoire : u+Δu $\Rightarrow$ J+ΔJ

$$\Delta \mathrm{J} = \int_{t_0}^{t_f} (L_u + f_u^T \lambda)^T \, \Delta u \mathrm{dt} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} (L_x + f_x^T \lambda + \dot{\lambda})^T \, \Delta x \mathrm{dt} +$$

$$+(-\lambda(t_f) + g_x(x_f, t_f))\Delta x(t_f)$$

Principe du minimum (Pontryagin)

Système :

$$\frac{dx}{dt} = f(\mathrm{x}, \mathrm{u}, \mathrm{t}), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, x(t_\mathrm{f}) = x_\mathrm{f}$$

Hamiltonien : $H(\mathrm{x}, \mathrm{u}, t, \lambda) = L(x, u, t) + \lambda^T f(x, \mathrm{u}, t)$

Conditions nécessaires d'optimum :

(i) Equations de Hamilton :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = H_\lambda, & \mathrm{x}(t_0) = x_0 \\ \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{dt} = -H_x, & \lambda(t_f) = g_x\left(x_{t_f}, t_f\right) \end{cases}$$

(ii)

$$\min_u H \quad \leftarrow \quad H_u = 0$$

Formulation du problème LQ au cas continu

On donne :

- le système

$$\frac{dx}{dt} = A\mathrm{x} + Bu$$

- l'indice de performance quadratique

$$\mathrm{J} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(x^T Q x + u^T R u)dt + \frac{1}{2}x_f^T P x_f$$

$P=P^T \geq 0$, $Q=Q^T \geq 0$, $R=R^T > 0$

On cherche :

la commande u(t) telle que:

- la boucle fermée soit stable
- J soit minimal

Solution du problème LQ à horizon infini

$$u = -R^{-1}B^{T}Kx$$

avec K solution de l'équation algébrique de *Riccati*

$$\mathrm{K}A + A^{T}\mathrm{K} - KBR^{-1}B^{\mathrm{T}}\mathrm{K} + Q = 0$$

Cas particulier : l'équation de Lyapunov

$$A^T P + PA + Q = 0, \qquad Q = Q^T > 0$$

Proposition :

$$\chi(A) \subset \mathbb{C}^- \Leftrightarrow \mathrm{P} = P^T > 0$$

Equation Matricielle Algébrique de Riccati (EMARC)– Cas continu

Définition : P solution stabilisatrice (unique) si

$$A^T \mathrm{P} + PA - PBR^{-1}B^T \mathrm{P} + Q = 0$$

$$A - BR^{-1}B^T P \text{ stable}$$

Proposition : P solution stabilisatrice ⇔ H est *disconjuguée*.

Matrice de Hamilton H= $\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$

H disconjuguée ⇔ $\begin{cases} - \quad dichotomique \\ (pas\ de\ valeurs\ propres\ sur\ j\mathbb{R}) \\ \\ - \quad \det(X_1) \neq 0, o\text{ù} \\ H \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \Lambda, \quad \Lambda \ \ stable \end{cases}$

Cas particuliers importants :

(A,B) stabilisable et H dichotomique ⇔ H disconjuguée

(A,B) stabilisable et ($Q^{1/2}$,A) détéctable ⇒ H disconjuguée

Solution du problème LQ – cas continu

Si

(A, B) est stabilisable

H$= \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$ est dichotomique

alors

u = -Fx

avec F=$R^{-1}B^TP$ et P unique solution de l'équation de Riccati

$$A^T\mathrm{P} + PA - PBR^{-1}B^T\mathrm{P} + Q = 0$$

stabilise la boucle fermée (A-BF stable) et minimise J

Le problème LQ dans le cas discret

On donne :

le système : $x_{k+1}=Ax_k+Bu_k$

l'indice quadratique :

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k)$$

$$Q=Q^T \quad , \quad R=R^T>0$$

On cherche :

la commande u_k telle que :

- la boucle fermée soit stable
- J soit minimal

Solution du problème LQ dans le cas discret

Si

(A, B) est stabilisable

Z= $\begin{bmatrix} A + BR^{-1}B^TA^{-T}Q & -BR^{-1}B^TA^{-T} \\ -A^{-T}Q & A^{-T} \end{bmatrix}$ est dichotomique

alors

u = -Fx avec $F = (B^TPB + R)^{-1}B^TPA$ et P solution stabilisatrice de l'équation de Riccati

$$A^TP\mathrm{A} - P - A^TPB(B^TPB + R)^{-1}B^TPA + Q = 0$$

stabilise la boucle fermée (A-BF stable) et minimise J

Estimation d'état optimale – cas continu

On donne :

le système $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + w \\ y = Cx + Du + v \end{cases}$

w bruit blanc d'état $E\left\{w(t)w^T(t-\tau)\right\} = W\delta(t-\tau)$

v bruit blanc de mesure $E\left\{v(t)v^T(t-\tau)\right\} = V\delta(t-\tau)$

$$E\left\{w(t)v^T(t-\tau)\right\} = 0$$

$$\delta(i-j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

On cherche :

un estimateur d'état (le gain K)

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

qui minimise la variance de l'erreur d'estimation

$$P = \lim_{t \to \infty} E\left\{(\hat{x}(t) - x(t))(\hat{x}^T(t) - x^T(t))\right\}$$

Solution du problème d'estimation d'état filtre de Kalman – cas continu

Si

(C, A) est détéctable

($A, W^{1/2}$) est stabilisable

alors

- la valeur minimale P de la variance stationnaire de l'erreur d'estimation est la solution stabilisatrice de l'EMARC

$$AP + PA^T - PC^T V^{-1} CP + W = 0$$

- le gain d'estimation pour lequel la variance stationnaire de l'erreur d'estimation est minimale est

$$K = PC^T V^{-1}$$

Estimation optimale d'état au cas discret

On donne :

le système $\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k = Cx_k + Du_k + v_k \end{cases}$

w bruit blanc d'état $E\{w_k w_{k-\tau}^T\} = W\delta(k-\tau)$

v bruit blanc de mesure $E\{v_k v_{k-\tau}^T\} = V\delta(k-\tau)$

$$E\{w_k v_{k-\tau}^T\} = 0$$

$$\delta(i-j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

On cherche :

un estimateur d'état (le gain K)

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + K(y_k - C\hat{x}_k)$$

qui minimise la variance de l'erreur d'estimation

$$P = \lim_{k\to\infty} E\{(\hat{x}_k - x_k)(\hat{x}_k^T - x_k^T)\}$$

Solution du problème d’estimation optimale de l’état
Filtre de Kalman stationnaire au cas discret

Si

(C, A) est détéctable

(A,$W^{1/2}$) est stabilisable

alors

- la valeur minimale P de la variance stationnaire de l’erreur d’estimation est la solution stabilisatrice de l’EMARC

$$APA^T - \mathrm{P} - APC^T(CPC^T + V)^{-1}CPA^T + \mathrm{W} = 0$$

- le gain d’estimation pour lequel la variance stationnaire de l’erreur d’estimation est minimale est

$$\mathrm{K}= APC^T(CPC^T + V)^{-1}$$

Formulation du problème LQG au cas continu

On donne :

le système $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + w \\ y = Cx + Du + v \end{cases}$

w le bruit blanc d'état $E\left\{w(t)w^T(t-\tau)\right\} = W\delta(t-\tau)$

v le bruit blanc de mesure $E\left\{v(t)v^T(t-\tau)\right\} = V\delta(t-\tau)$

$$E\left\{w(t)v^T(t-\tau)\right\} = 0$$

$$\delta(i-j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

l'indice quadratique

$$J = E\left\{\int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt\right\}$$

$$Q = Q^T \geq 0, \qquad R = R^T$$

On cherche :

la commande u telle que :

- la boucle fermée soit stable
- J soit minimal

La solution du problème LQG
Le principe de séparation

Si

les triplets (A, B, $Q^{1/2}$) et (A, $W^{1/2}$, C) sont stabilisables et détéctables

On peut résoudre :

Sous-problème 1: on calcule une estimation optimale $\hat{x}$ de x

- filtre de Kalman –

Sous-problème 2: on calcule un retour d'état optimal

u = -FX

pour le système déterministe (w=0) et l'indice quadratique

$$J' = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$$ dans le cas continu

$$J' = \sum_{k=0}^\infty (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k)$$ dans le cas discret

- problème LQ –

alors

la solution du problème LQG est

$$u = -F\hat{x}$$

Stabilité de la boucle fermée LQG

Si

A est une matrice d'état de la boucle fermée par le régulateur LQG

alors

$$\chi(A) = \chi(A - BF)\ \dot{U}\ \chi(A - KC)$$

où χ(M) est l'ensemble des valeurs propres de M et $\dot{U}$ dénote l'union répétée

Formulation du problème LQG dans le cas discret

On donne :

le système $\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k = Cx_k + Du_k + v_k \end{cases}$

w bruit blanc d'état $E\{w_k w_{k-\tau}^T\} = W\delta(k-\tau)$

v bruit blanc de mesure $E\{v_k v_{k-\tau}^T\} = V\delta(k-\tau)$

$E\{w_k v_{k-\tau}^T\} = 0$

$$\delta(i-j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

l'indice quadratique

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k)$$

$$Q = Q^T \quad , \quad R = R^T > 0$$

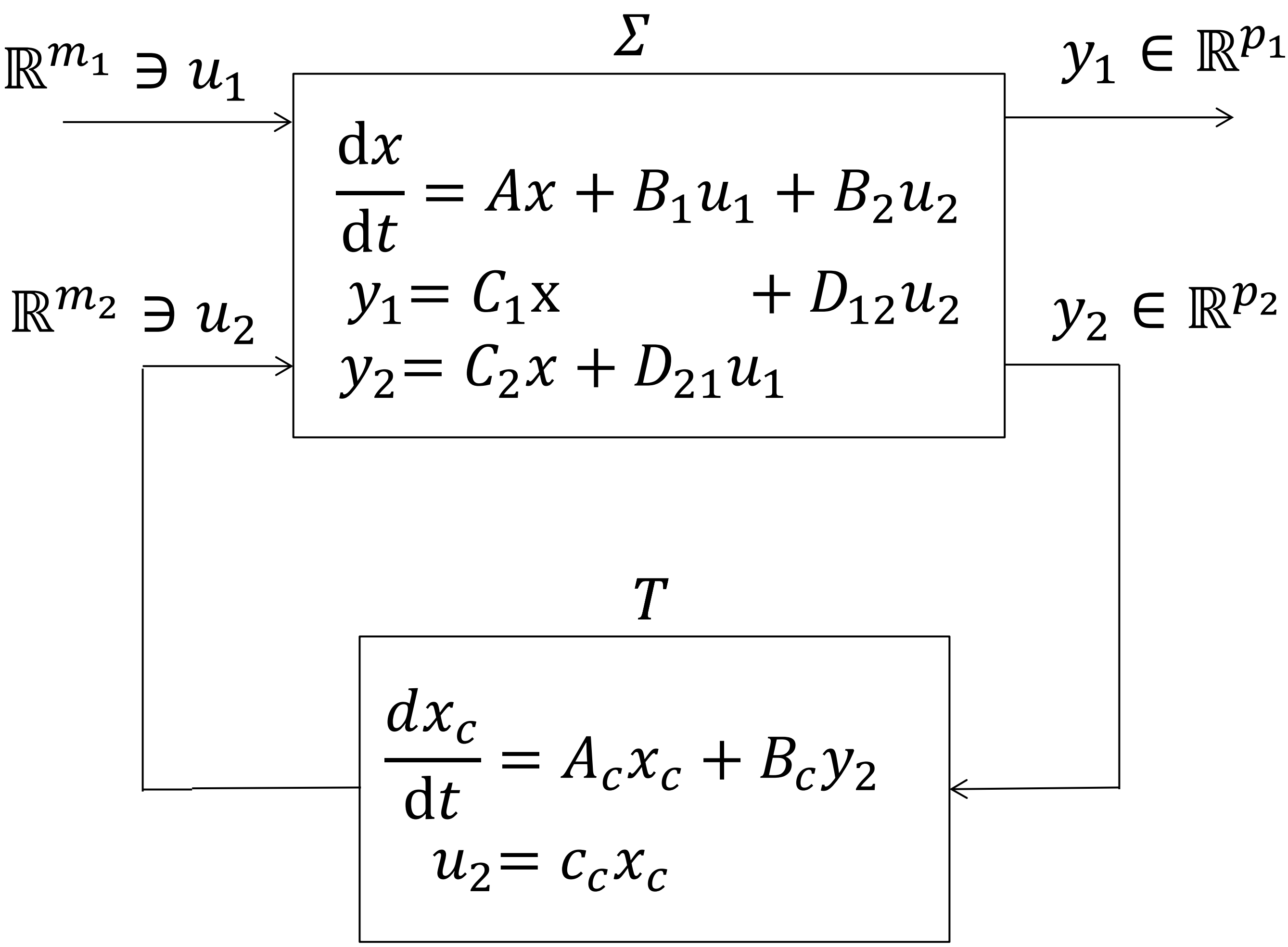
On cherche :

la commande u_k telle que :

- la boucle fermée soit stable
- J soit minimal

Formulation générale du problème H²

On donne : le système sous sa forme *standard*



On cherche : T tel que

- la boucle fermée soit stable

- $\min \left\| T_{y_1 u_1}(s) \right\|_2$

Solution du problème H²

Si

$$A^TX + XA - (XB + C_1^TD_{12})\underbrace{(D_{12}^TD_{12})^{-1}(B^TX + D_{12}^TC_1)}_{F} + C_1^TC_1 = 0$$

a une solution stabilisatrice : A-BF stable

$$AY + YA^T - \underbrace{(YC^T + B_1D_{21}^T)(D_{21}D_{21}^T)^{-1}}_{K}(CY + D_{21}B_1^T) + B_1B_1^T = 0$$

a une solution stabilisatrice : A-KC stable

alors

$$T = \left[\begin{array}{c|c} A - BF - \mathrm{K}C & K \\ \hline -F & 0 \end{array}\right]$$

stabilise la boucle fermée qui bénéficie de la propriété de *séparation* suivante

$$\chi(A_{BF}) = \underbrace{\chi(A - BF)}_{dyn.\ de\ commande} \cup \underbrace{\chi(A - \mathrm{K}C)}_{dyn.\ d'\acute{e}stimation}$$

Formulation du problème H^∞ sous-optimal

On donne :

$$\Sigma(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array}\right]$$

et $\gamma>0$.

On cherche : T(s) tel que

- la boucle fermée soit stable

- $\left\| T_{y_1 u_1}(s) \right\|_\infty < \gamma$

Solution du problème H$^\infty$ sous-optimal

EMR1 : $A^TX + XA + X(\gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T)X + C_1^TC_1 = 0$

EMAR2 : $AY + YA^T + Y(\gamma^{-2}C_1^TC_1 - C_2^TC_2)Y + B_1B_1^T = 0$

Proposition :

$$\exists T(s) \Leftrightarrow \begin{array}{l} a) EMAR1\, a\ une\ solution\ stabilisatrice\ X_\infty \geq 0 \\ b)\ EMAR2\ a\ une\ solution\ stabilisatrice\ Y_\infty \geq 0 \\ c)\ \rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2 \end{array}$$

un des régulateurs est $T(\mathrm{s}) = \left[\begin{array}{c|c} A_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & 0 \end{array}\right]$

avec :

$$\begin{aligned} A_\infty &= A + \gamma^{-2}B_1B_1^TX_\infty + B_2F_\infty + \mathrm{Z}_\infty \mathrm{L}_\infty \mathrm{C}_2 \\ F_\infty &= -B_2^Tx_2 \\ L_\infty &= -Y_\infty C_2^{\mathrm{T}} \\ Z_\infty &= (\mathrm{I} - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1} \end{aligned}$$