TP1 cours CAVAN : commandes optimales linéaires (LQ/LQG)

M. Belhocine, B. Marinescu

N. B. Entre autres, il sera tenu compte dans la note du TP de la présentation des résultats et le respect du style « clair, concis, précis » dans la rédaction du compte rendu.

1 But de la manipulation

L'objectif de cette manipulation est d'utiliser les techniques de commande LQ et LQG afin de stabiliser un modèle quart de véhicule. Plus spécifiquement, améliorer son comportement dynamique en minimisant des critères de performance tels que le débattement de la suspension $z_2(t) - z_1(t)$ (voir Fig. 1) ou encore l'accélération verticale de la caisse $\ddot{z}_2(t)$. A cela s'ajoutent aussi d'autres critères liés à l'énergie de la commande $u(t)$ et la prise en compte des bruits.

2 Système physique

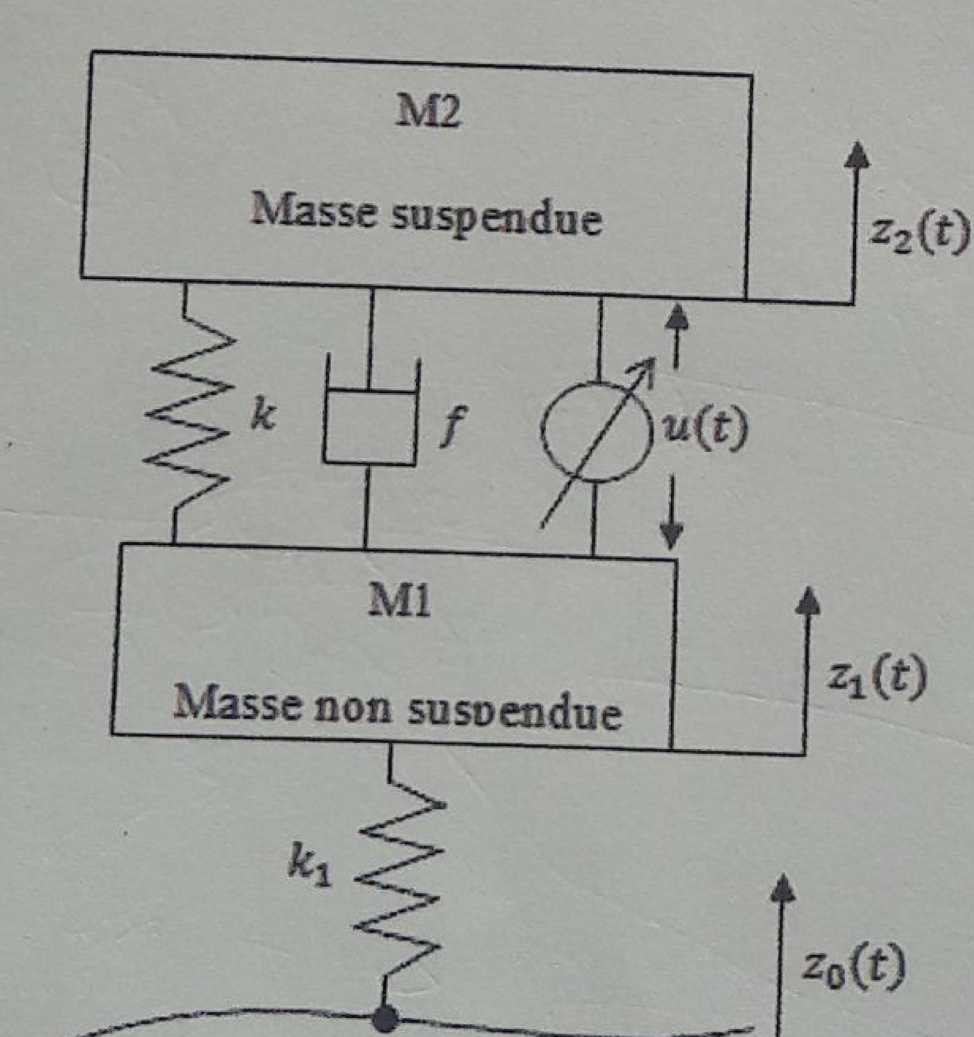

FIGURE 1 – Représentation d'une suspension active quart de véhicule

La figure ci-dessus est une représentation d'un système de suspension active correspondant à une seule roue (quart de véhicule). Le contrôle est assuré par un amortisseur actif qui génère une force $u(t)$ représentant la commande. Enfin le profil de la route (du sol) $z_0(t)$ joue le rôle d'une perturbation.

3 Modèle dynamique

Le modèle dynamique du système de la Fig. 1 est donné par

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(k_1+k)}{M_1} & -\frac{f}{M_1} & \frac{k}{M_1} & \frac{f}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{M_2} & \frac{f}{M_2} & -\frac{k}{M_2} & -\frac{f}{M_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M_1} \\ 0 \\ \frac{1}{M_2} \end{pmatrix}}_{B_u} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{M_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} z_0(t), \quad (1)$$

avec $x_1(t) = z_1(t)$, $x_2(t) = \frac{dz_1(t)}{dt}$, $x_3(t) = z_2(t)$ et $x_4 = \frac{dz_2(t)}{dt}$. On prend comme valeurs de paramètres, $M_1 = 30$ Kg, $M_2 = 250$ Kg, $k = 2.10^4$ N/m, $k_1 = 2.10^5$ N/m et $f = 10^3$ N.S/m.

4 Travail demandé

A) Sans prendre en compte la perturbation $z_0(t)$, simulez le comportement du système (pensez à la commande (lsim) de Matlab) en l'absence du contrôle $u(t)$ et en partant des conditions initiales $x(0) = [0.0022, -0.1146, 0.0421, -0.0183]^T$.

B) Écrivez l'équation qui donne la sortie $y_s(t)$ correspondante au débattement de la suspension.

C) Étant donné un système dynamique comme (1), que doit-on vérifier avant toute tentative de contrôle ? Le système (1) peut-il être commandé ? Justifiez votre réponse.

4.1 Synthèse optimale (LQ)

Par le biais d'un retour d'état, i.e., $u(t) = -Kx(t)$, on cherche à minimiser le critère ci-dessous

$$J = \int_0^\infty \left(y_s^T(t) Q y_s(t) + u^T(t) R u(t) \right) dt, \quad (2)$$

1. Que vise-t-on par l'introduction d'un tel critère ?
2. Quelles conditions doivent vérifier les pondérations Q et R, et pourquoi ?
3. Trouvez le gain K qui minimise (2) en proposant un jeu de pondérations R et Q (pensez à utiliser la commande (lqr) de la control toolbox de Matlab).
4. Simulez le comportement du système en utilisant la loi de commande trouvée avec les mêmes conditions initiales utilisée au point A) et $z_0(t) = 0$.
5. Visualisez les résultats et comparez avec le cas sans contrôle. Que pouvez-vous dire sur l'apport de votre contrôleur par rapport aux objectifs visés par le critère (2) ?

On propose d'utiliser les pondérations suivantes :

$$Q = 1 \quad \text{et} \quad R = 1, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-10}.$$

6. Pour chaque valeur de R, trouvez la nouvelle loi de commande, simulez le comportement du système (mêmes conditions qu'au point 4) et notez vos observations. Si l'on s'intéresse à la commande $u(t)$ et au gain K que peut-on déduire ?
7. En utilisant le R qui permet d'avoir $\max_t |u(t)| \approx 102$ N, que se passe-t-il au niveau des performances dynamiques (amplitudes et durées des oscillations) de $y_s(t)$ si l'on met $Q = 10$? Quel est donc l'apport de cette modification sur la stabilisation ? Quel est l'effet sur la commande $u(t)$?

8. Avec $Q = 10$, quelle doit être la valeur de R pour retrouver exactement les mêmes performances que ceux du point 6) qui correspondent à $\max_t |u(t)| \approx 102$ N ? Justifiez votre réponse.
9. Que peut-on donc dire sur le duo (performances dynamiques/énergie de la commande) vis-à-vis des pondérations Q et R ?
10. Si l'on veut en plus minimiser l'accélération verticale de la caisse $\ddot{z}_2(t)$, quel critère d'optimisation doit-on poser ? Que faut-il faire dans ce cas pour appliquer la commande (lqr) ?

4.2 Estimateur d'état optimal : filtre de Kalman

a) Si on considère qu'on ne peut mesurer que la sortie $y_{ac}(t) = \ddot{z}_2(t)$, peut-on reconstruire les états de (1) ? Justifiez votre réponse.

On considère désormais $z_0(t)$ comme étant un bruit blanc gaussien de moyenne nulle tout comme le bruit de mesure $v(t)$ qui affecte la sortie $y_{ac}(t)$, i.e., $y_{mes}(t) = y_{ac}(t) + v(t)$. Avec un observateur ayant la dynamique :

-Du

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + B_u u(t) + K_f\left(y_{mes}(t) - C\tilde{x}(t)\right) = (A - K_f C)\tilde{x}(t) + (B_u - K_f D_{ac})u(t) + K_f y_{mes}(t) \quad (3)$$

b) Calculez le gain K_f (pensez à la commande (kalman) de Matlab.) qui permet de minimiser la variance de l'erreur stationnaire, i.e., $\lim_{t\longrightarrow\infty} E\left[(x(t) - \tilde{x}(t))(x(t) - \tilde{x}(t))^T\right]$ en sachant que :

$$E\left[z_0(t) z_0^T(t)\right] = \rho_0,\ E\left[v(t) v^T(t)\right] = \rho_1,\ \text{et } E[z_0(t)] = E[v(t)] = E[z_0(t) v(t)] = 0,$$

avec $\rho_0 = \rho_1 = 0.01$ et $E[\cdot]$ qui représente l'espérance mathématique.

c) Avec le gain trouvé et en initialisant $\tilde{x}(t)$ à $x(0)$ (voir A)), simulez le comportement de l'observateur ($u(t) = 0$) en y ajoutant au système des bruits blancs gaussiens ($z_0(t)$ et $v(t)$) de moyenne nulle et de variances $\rho_0 = 0.01$ et $\rho_1 = 0.01$ (voir la fonction (randn) de Matlab). Comparez les états estimés avec les vrais. Que peut-on constater ?

d) Changez l'état initial de l'observateur pour avoir l'erreur $(x(t) - \tilde{x}(t)) = [0.3, 1, 0.9, 1]^T$ à $t = 0$, et refaites la simulation. Par rapport au cas précédent, quelle est la dynamique de l'estimation (notamment au début) ?

e) Pour $\rho_0 = 1$, recalculez le gain K_f et comparez-le avec celui obtenu au point b). En prenant pour $z_0(t)$ la variance $\rho_0 = 1$ puis $\rho_0 = 0.01$, simulez le comportement de l'observateur (mêmes conditions initiales qu'au point d)) et expliquez pourquoi il converge plus lentement dans le second cas.

f) D'une manière succincte, que fait la fonction (place) de Matlab ? Calculez alors le gain qui permet de placer les pôles de l'observateur exactement là où ils sont placés par le gain K_f obtenu au point b). Que remarquez vous ?

4.3 Système bouclé : commande LQG

i) Avec l'observateur synthétisé au point b) et le gain K trouvé au point 6) pour $R = 10^{-8}$, bouclez le système avec la commande $u(t) = -K\tilde{x}(t)$ et simulez son comportement ($\tilde{x}(0)$ le même qu'au point 4)). En se limitant à la sortie $y_s(t)$, que remarquez vous par rapport au régulateur LQ ?

ii) Calculez les pôles du système en boucle fermée ainsi que ceux de l'observateur et du régulateur LQ, i.e., $\lambda(A - K_f C)$ et $\lambda(A - BK)$. Que constatez vous ?

iii) utilisez cette fois-ci le gain K_f trouvé au point e) et refaites les calculs précédents. Les pôles en boucle fermée ont-ils tous changé ? Pourquoi ?

1/R