Commande optimale

Problem statement

$$\dot{x} = f(x, u, t) \text{ avec } x \in R^n \text{ et } u \in R^l$$

$$k(x_0, t_0) = 0 \qquad l(x_f, t_f) = 0$$

Commande optimale

Problem statement

$$\dot{x} = f(x, u, t) \text{ avec } x \in R^n \text{ et } u \in R^l$$

$$k(x_0, t_0) = 0 \qquad l(x_f, t_f) = 0$$

Contraintes instantanées

$$p(x, u, t)dt \leq 0 \quad pour\ \forall t$$

Commande optimale

Problem statement

$$\dot{x} = f(x,u,t) \text{ avec } x \in R^n \text{ et } u \in R^l$$

$$k(x_0,t_0) = 0 \qquad l(x_f,t_f) = 0$$

Contraintes instantanées et/ou *contraintes intégrales*

$$p(x,u,t)dt \leq 0 \;\; pour\ \forall t \qquad \int_{t_0}^{t_f} q(x,u,t)dt \leq 0$$

Commande optimale

Problem statement

$$\dot{x} = f(x, u, t) \text{ avec } x \in R^n \text{ et } u \in R^l$$

$$k(x_0, t_0) = 0 \qquad l(x_f, t_f) = 0$$

Contraintes instantanées   *et/ou*   *contraintes intégrales*

$$p(x, u, t)dt \leq 0 \quad pour\ \forall t \qquad \int_{t_0}^{t_f} q(x, u, t)dt \leq 0$$

La commande optimale u est celle qui minimise le critère*

$$J = \int_{t_0}^{t_f} r(x, u, t)dt + g(x_0, t_0, x_f, t_f) \quad => \quad min$$

Commande optimale

Problem statement

$\dot{x} = f(x, u, t)$ *avec* $x \in R^n$ *et* $u \in R^l$

$k(x_0, t_0) = 0 \qquad l(x_f, t_f) = 0$

Contraintes instantanées *et/ou* *contraintes intégrales*

$p(x, u, t)dt \leq 0 \quad pour\ \forall t \qquad \int_{t_0}^{t_f} q(x, u, t)dt \leq 0$

Partie terminale

La commande optimale u est celle qui minimise le critère*

J= $\int_{t_0}^{t_f} r(x, u, t)dt + g(x_0, t_0, x_f, t_f)$ => *min*

Commande optimale

Problem statement

$$\dot{x} = f(x,u,t) \text{ avec } x \in R^n \text{ et } u \in R^l$$

$$k(x_0,t_0) = 0 \qquad l(x_f,t_f) = 0$$

Contraintes instantanées   *et/ou*   *contraintes intégrales*

$$p(x,u,t)dt \leq 0 \quad pour\ \forall t \qquad \int_{t_0}^{t_f} q(x,u,t)dt \leq 0$$

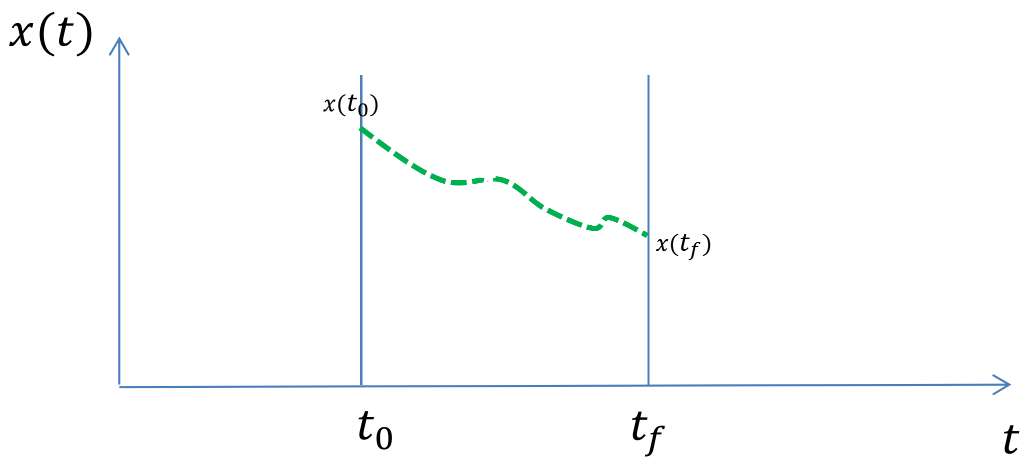
Partie terminale

La commande optimale u est celle qui minimise le critère*

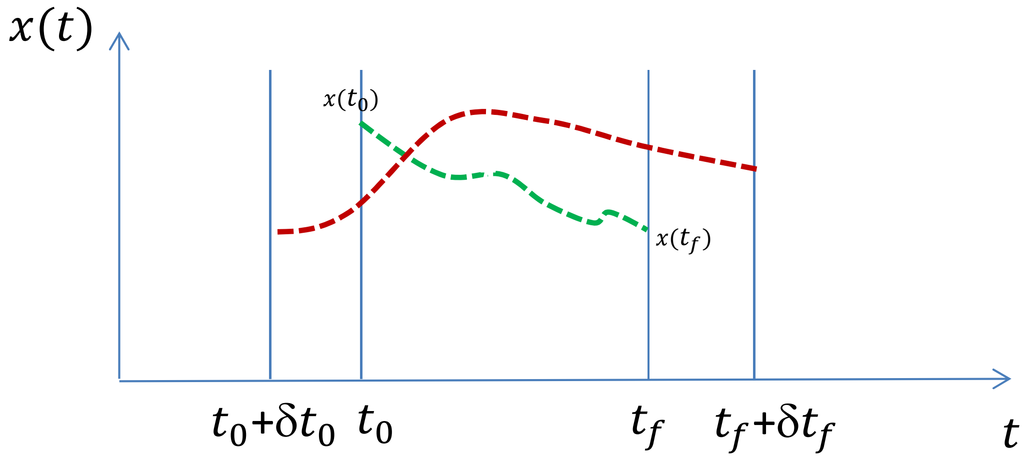
$$J = \int_{t_0}^{t_f} r(x,u,t)dt + g(x_0,t_0,x_f,t_f) \quad => \quad min$$

En posant $\mathcal{X} = [x^T, u^T]^T$ *la trajectoire optimale x^* est celle qui minimise le critère*

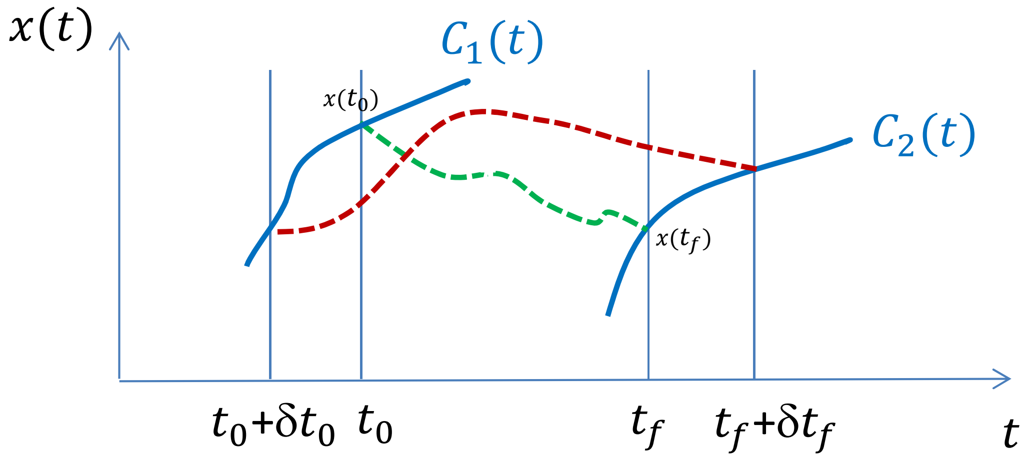
$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} r(x,\dot{x},t)dt + g(x_0,t_0,x_f,t_f) \quad => \quad min$$



$Variations\ de\ la\ trajectoire$



Variations de la trajectoire



Variations de la trajectoire

Variation de la fonctionnelle $J(x)$

$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} r(x, \dot{x}, t)dt + g(x_0, t_0, x_f, t_f)$ => *min*

$$k(x_0, t_0) = 0 \qquad l(x_f, t_f) = 0$$

Variation de la fonctionnelle *J(x)*

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} r(x, \dot{x}, t)dt + g(x_0, t_0, x_f, t_f) \quad \Rightarrow \quad min$$

$$k(x_0, t_0) = 0 \qquad l(x_f, t_f) = 0$$

La trajectoire perturbée $x(t_0+\delta t_0,\ t_f+\delta t_f)$

$$k\left(t_0+\delta t_0,\ t_f+\delta t_f\right) = 0 \qquad l(t_0+\delta t_0,\ t_f+\delta t_f) = 0$$

Variation de la fonctionnelle *J(x)*

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} r(x,\dot{x},t)dt + g(x_0, t_0, x_f\,, t_f) \quad => \quad min$$

$$k(x_0, t_0) = 0 \qquad l(x_f, t_f) = 0$$

La trajectoire perturbée $x(t_0+\delta t_0,\, t_f+\delta t_f)$

$$k\left(t_0+\delta t_0,\, t_f+\delta t_f\right) = 0 \qquad l(t_0+\delta t_0,\, t_f+\delta t_f) = 0$$

Variation de la fonctionnelle

$$\delta J = J(x + \delta x) - J(x)$$

En notant

$$r_0 = r\left(x(t_0), x(\dot{t}_0), t_0\right)$$

$$r_f = r\left(x(t_f), x(\dot{t}_f), t_f\right)$$

Variation de la fonctionnelle $J(x)$

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} r(x, \dot{x}, t)\,dt + g(x_0, t_0, x_f, t_f)$$

$$\delta J = J(x + \delta x) - J(x)$$

développement limité au 1^er^ ordre en δx et $\frac{d}{dt}\delta x$

Variation de la fonctionnelle $J(x)$

$$J(x)= \int_{t_0}^{t_f} r(x,\dot{x},t)dt + g(x_0,t_0,x_f\,,t_f)$$

$$\delta J = J(x + \delta x) - J(x)$$

développement limité au 1^er^ ordre en δx et $\frac{d}{dt}\delta x$

$$\delta J= \int_{t_0}^{t_f}({r_x}^T\delta x \ \ + {r_{\dot{x}}}^T \frac{d}{dt}(\delta x))dt + (r_f\delta t_f \ - r_0\delta t_0) +({g_{x_0}}^T\delta x_0+{g_{t_0}}^T\delta t_0) + ({g_{x_f}}^T\delta x_f+{g_{t_f}}^T\delta t_f)$$

Variation de la fonctionnelle *J(x)*

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} r(x, \dot{x}, t)dt + g(x_0, t_0, x_f\,, t_f)$$

$$\delta J = J(x + \delta x) - J(x)$$

développement limité au 1^er^ ordre en δx et $\frac{d}{dt}\delta x$

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} (r_x{}^T \delta x \;\; + r_{\dot{x}}{}^T \frac{d}{dt}(\delta x))dt + (r_f \delta t_f \text{ - } r_0 \delta t_0) + (g_{x_0}{}^T \delta x_0 + g_{t_0}{}^T \delta t_0) + (g_{x_f}{}^T \delta x_f + g_{t_f}{}^T \delta t_f)$$

Intégration par parties du second terme (*rappel* $\int_{t_0}^{t_f} u\dot{v}dt = [uv\;]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}(u)vdt$ *avec* $\dot{v} = \frac{d}{dt}\delta x$)

$$\int_{t_0}^{t_f} \underbrace{r_{\dot{x}}{}^T}_{u} \underbrace{\frac{d}{dt}(\delta x)}_{\dot{v}}dt = [\, r_{\dot{x}}{}^T \;(\delta x)\,]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}(r_{\dot{x}}{}^T)\delta x dt = [\, r_{\dot{x}}{}^T \;(t_f)\; \delta x\; (t_f)] -$$

$$- [\, r_{\dot{x}}{}^T \;(t_0)\; \delta x\; (t_0)\,] - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}(r_{\dot{x}}{}^T)\delta x dt$$

Variation de la fonctionnelle *J(x)*

$$J(x)= \int_{t_0}^{t_f} r(x,\dot{x},t)dt + g(x_0,t_0,x_f\,,t_f)$$

$$\delta J = J(x + \delta x) - J(x)$$

développement limité au 1^er ordre en δx et $\frac{d}{dt}\delta x$

$$\delta J= \int_{t_0}^{t_f}(r_x{}^T\delta x \;\; + \underbrace{r_{\dot{x}}{}^T \frac{d}{dt}(\delta x))dt}_{} + \cancel{(r_f\delta t_f \text{ - } r_0\delta t_0) +(g_{x_0}{}^T\delta x_0+g_{t_0}{}^T\delta t_0) + (g_{x_f}{}^T\delta x_f+g_{t_f}{}^T\delta t_f)}$$

Intégration par parties du second terme *(rappel* $\int_{t_0}^{t_f} u\dot{v}dt = [uv\;\;]_{t_0}^{t_f}$ - $\int_{t_0}^{t_f}\frac{d}{dt}(u)vdt$ *avec* $\dot{v} = \frac{d}{dt}\delta x$ *)*

$$\int_{t_0}^{t_f} \underbrace{r_{\dot{x}}{}^T}_{u} \underbrace{\frac{d}{dt}(\delta x)}_{\dot{v}}dt = [\, r_{\dot{x}}{}^T\; (\delta x)\;]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f}\frac{d}{dt}(r_{\dot{x}}{}^T)\delta x dt = [\, r_{\dot{x}}{}^T\; (t_f)\;\delta x\;(t_f)] -$$

$$- [\, r_{\dot{x}}{}^T\; (t_0)\;\delta x\;(t_0)\;] - \int_{t_0}^{t_f}\frac{d}{dt}(r_{\dot{x}}{}^T)\delta x dt$$

Si t_0, t_f, x_0, x_f sont fixés => δt_0 = 0, δt_f = 0, δx_0 = 0, δx_f = 0

Variation de la fonctionnelle $J(x)$

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left({r_x}^T \delta x + {r_{\dot{x}}}^T \frac{d}{dt}(\delta x) \right) dt = \int_{t_0}^{t_f} \left({r_x}^T - \frac{d}{dt} {r_{\dot{x}}}^T \right) \delta x \, dt$$

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(r_x - \frac{d}{dt} r_{\dot{x}} \right)^T \delta x \, dt$$

Variation de la fonctionnelle *J(x)*

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} (r_x{}^T \delta x \ + r_{\dot{x}}{}^T \frac{d}{dt}(\delta x))dt = \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} (r_x{}^T - \frac{d}{dt} r_{\dot{x}}{}^T)}\ \delta x \ dt$$

δ *Pour avoir un minimum :*

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} (r_x - \frac{d}{dt} r_{\dot{x}})^T \delta x \ dt \geq 0 \ \ mais \ \ \delta x > 0 \ \ ou \ \ \delta x < 0 \ \ => \ \ \delta J = 0$$

Lemme de Lagrange

Si $\int_{t_0}^{t_f} y^T(t) v(t) \, dt = 0$ *pour tout* $v(t)$ *continue*

Alors $y(t)$ *est nulle sur* $[t_0, t_f]$

Application : Condition d'Euler (eq. diff. du 2nd ordre)

$$(r_x - \frac{d}{dt} r_{\dot{x}}) = 0 \qquad pour \ \ x = x^*$$

Condition d'Euler

$$\left(\boldsymbol{r_x} - \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\boldsymbol{r_{\dot{x}}}\right) = \boldsymbol{0}$$

Si x *n'apparaît pas dans* r $=>$ $\frac{d}{dt}r_{\dot{x}} = 0$

$r_{\dot{x}} = const$

Condition d'Euler

$$\left(\boldsymbol{r_x} \quad - \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}} \boldsymbol{r_{\dot{x}}} \quad\right) \quad = \quad \boldsymbol{0}$$

$$Si \;\; x \;\; n'apparaît \quad pas\; dans \;\; r \quad => \quad \frac{d}{dt} r_{\dot{x}} \; = 0$$

$$r_{\dot{x}} = const$$

$$Si \;\; \dot{x} \quad n'apparaît\; pas\; dans \;\; r$$

$$r_x \; = \; 0$$

Condition d'Euler

$$\left(\boldsymbol{r_x} - \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\boldsymbol{r_{\dot{x}}}\right) = \boldsymbol{0}$$

Si x *n'apparaît pas dans* r => $\frac{d}{dt}r_{\dot{x}} = 0$

$r_{\dot{x}} = const$

Si $\dot{x}$ *n'apparaît pas dans* r

$r_x = 0$

Si t *n'apparaît pas explicitement dans* r

$r_t = 0$

$$\frac{d}{dt}(r - r_{\dot{x}}{}^T \dot{x}) = r_t + \underbrace{\left(r_x - \frac{d}{dt}r_{\dot{x}}\right)}_{\text{Condition d'Euler}}{}^T \dot{x} = 0$$

=> Identité de Beltrami

$$r - r_{\dot{x}}{}^T \dot{x} = \text{const}$$

Principe du maximum

$$r_x - \frac{d}{dt} r_{\dot{x}} = 0 \Leftrightarrow r_x = \frac{d}{dt} r_{\dot{x}}$$ *sur la trajectoire optimale*

$posons$ $r_{\dot{x}} = \lambda(\mathrm{t}) \Leftrightarrow r_x = \dot{\lambda}(t)$, et $\dot{x} = \Phi(x, u, t)$

Définissons $$H(x, u, \lambda, t) = -\underbrace{r}_{\text{La fonction sous l'intégrale à optimiser } J(x)=\int_{t_0}^{t_f} r(x,\dot{x},t)dt} + \lambda^T \Phi$$

Principe du maximum

La commande optimale u^* *d'un processus continu*

$$\begin{cases} \dot{x} = \Phi(x,u,t) \\ x \in \Upsilon, u \in U \end{cases}$$

Qui minimise l'intégrale $J = \int_{t_0}^{t_f} r(x,u,t)dt$ *=> min*

est celle qui maximise le Hamiltonien, les contraintes étant satisfaites

$$H(x,u,\lambda,t) = -r(x,u,t) + \lambda^T \Phi(x,u,t)$$

$$\boxed{H(x^*,u^*,\lambda,t) = \underset{u \in U}{\mathrm{Max}}\, H(x,u,\lambda,t) \quad pour\ \ \forall t}$$

Principe du maximum
Equations canoniques de Hamilton

$$H_x = -\dot{\lambda}$$

$$H_\lambda = \dot{x}$$

$$\frac{dH}{dt} = -r_t$$

Equations canoniques de Hamilton

$$H(x, \lambda, t) = -r + \lambda^T \Phi$$

rappel $r(x, \dot{x}, t)$

$\dot{x} = \Phi(x, u, t)$

$$H_x = \cancel{\Phi_x{}^T . \lambda} - r_x - \cancel{\Phi_x{}^T . r_{\dot{x}}} = -r_x$$

Equations canoniques de Hamilton

$$H(x, \lambda, t) = -r + \lambda^T \Phi$$

rappel $r(x, \dot{x}, t)$

$\dot{x} = \Phi(x, u, t)$

$$H_x = \cancel{\Phi_x{}^T.\lambda} - r_x - \cancel{\Phi_x{}^T.r_{\dot{x}}} = -r_x$$

soit $H_x = -\dot{\lambda}$

Equations canoniques de Hamilton

$$H(x,\lambda,t) = -r + \lambda^T \Phi$$

rappel $r(x,\dot{x},t)$

$\dot{x} = \Phi(x,u,t)$

$$H_x = \cancel{{\Phi_x}^T.\lambda} - r_x - \cancel{{\Phi_x}^T.r_{\dot{x}}} = -r_x$$

soit $H_x = -\dot{\lambda}$

$$H_\lambda = \Phi + \cancel{{\Phi_\lambda}^T.\lambda} - \cancel{{\Phi_\lambda}^T.r_{\dot{x}}} = \Phi = \dot{x}$$

Equations canoniques de Hamilton

$$H(x,\lambda,t) = -r + \lambda^T \Phi$$

rappel $r(x,\dot{x},t)$

$\dot{x} = \Phi(x,u,t)$

$$H_x = \cancel{{\Phi_x}^T.\lambda} - r_x - \cancel{{\Phi_x}^T.r_{\dot{x}}} = -\,r_x$$

soit $H_x = -\,\dot{\lambda}$

$$H_\lambda = \Phi + \cancel{{\Phi_\lambda}^T.\lambda} - \cancel{{\Phi_\lambda}^T.r_{\dot{x}}} = \Phi = \dot{x}$$

$$H_t = -\,r_t - {\Phi_t}^T.r_{\dot{x}} + \lambda^T\Phi_t = -\,r_t$$

comme $$\frac{dH}{dt} = {H_x}^T\dot{x} + {H_\lambda}^T\dot{\lambda} + H_t$$

Principe du maximum
Equations canoniques de Hamilton

Exemple : commande en temps minimum

$$H_x = -\dot{\lambda}$$

$$H_\lambda = \dot{x}$$

$$\frac{dH}{dt} = -r_t$$

Ex. Ramener à l'origine le système $\ddot{y} = u$ *avec la contrainte* $|u| \leq 1$ *en temps minimum i.e.* $J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt$ *=> min*

Commande en temps minimum

formulation du problème

- $\ddot{y} = u$ *éq. diff. 2^nd degré <=> deux éq. diff. 1^er degré*
- *Posons* $x_1 = y$; $x_2 = \dot{y}$ => $\dot{x_1} = x_2$; $\dot{x_2} = u$
- *La contrainte* $|u| \leq 1$ => $u^2 - 1 \leq 0$
- *Le critère* $J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt$ *=> min* *donc r(.) = 1*
- *Conditions terminales* $x_1(t_0) = y_0$; $x_2(t_0) = \dot{y}_0$

  $x_1(t_f) = 0$; $x_2(t_f) = 0$ *(ramener le système à l'origine)*

Hamiltonien $H = -r + \lambda^T \Phi = -1 + \lambda^T \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} = \underbrace{-1}_{\text{dépend du critère à optimiser}} + \underbrace{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 u}_{\text{dépend de la dynamique du système}}$

rappel $\dot{x} = \Phi(x, \lambda, t)$

Commande en temps minimum

conditions du 1^er ordre

$$\dot{x} = H_\lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial \lambda_1} \\ \dfrac{\partial H}{\partial \lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \Phi$$

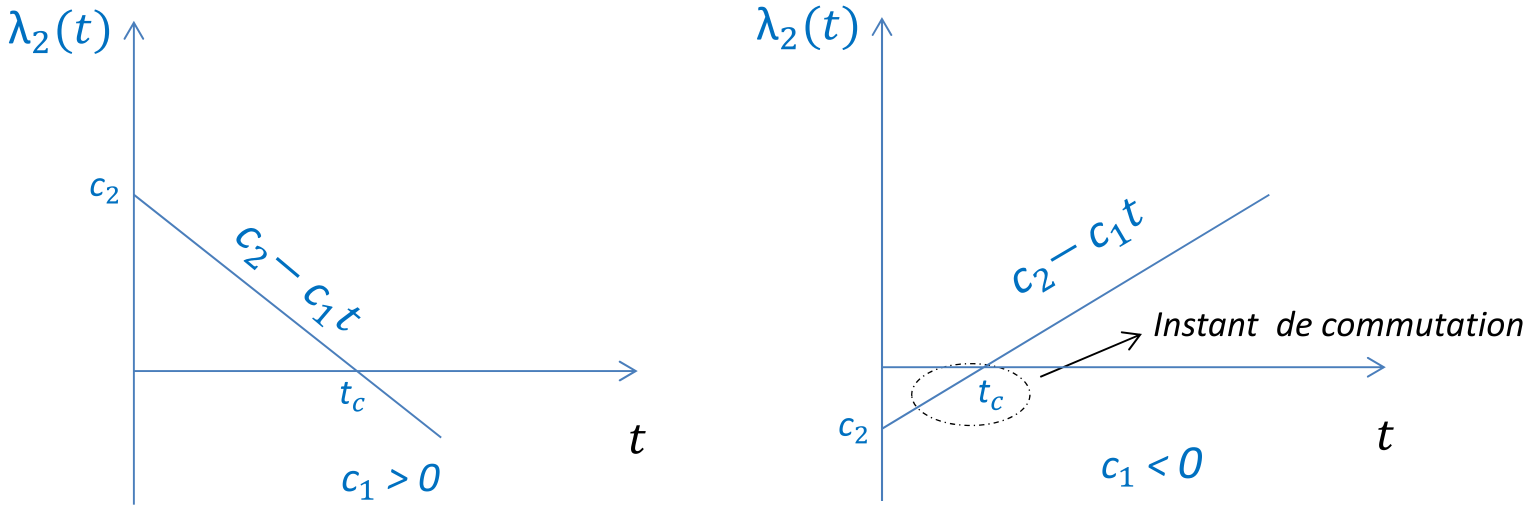
$$\dot{\lambda} = -H_x \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda_1 \end{bmatrix}$$

D'où $\dot{\lambda}_1 = 0$ et $\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1$ => $\lambda_1 = c_1$ et $\lambda_2 = c_2 - \lambda_1 t = c_2 - c_1 t$

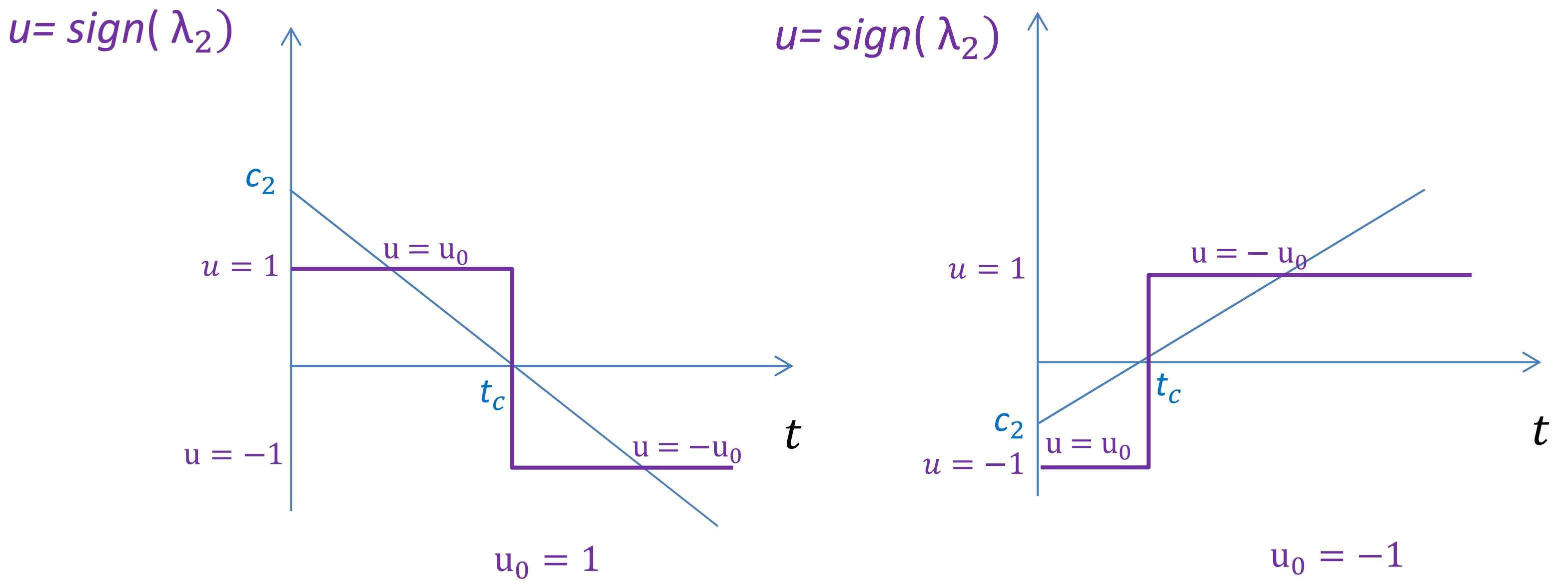
H = -1 + $\lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$ *= > linéaire en u => u= sign(* λ_2 *) pour maximiser H !*

Mais $\lambda_2(t)$ *est linéaire => change de signe une seule fois au maximum*

Comme $\lambda_2(t)$ *est linéaire en* t => λ_2 *change de signe au plus une seule fois :*



$u = u_0$ *qd* $t \in [\, t_0, t_c \,[$ *et* $u = -u_0$ *qd* $t \in [\, t_c, t_f \,]$



Commande en temps minimum

$u = u_0 \;\; qd \;\; t \in [\, t_0, t_c \,[\quad et \; u = -u_0 \;\; qd \;\; t \in [\, t_c, t_f \,]$

Deux types de trajectoires :

$t \in [\, t_0, t_c \,[$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

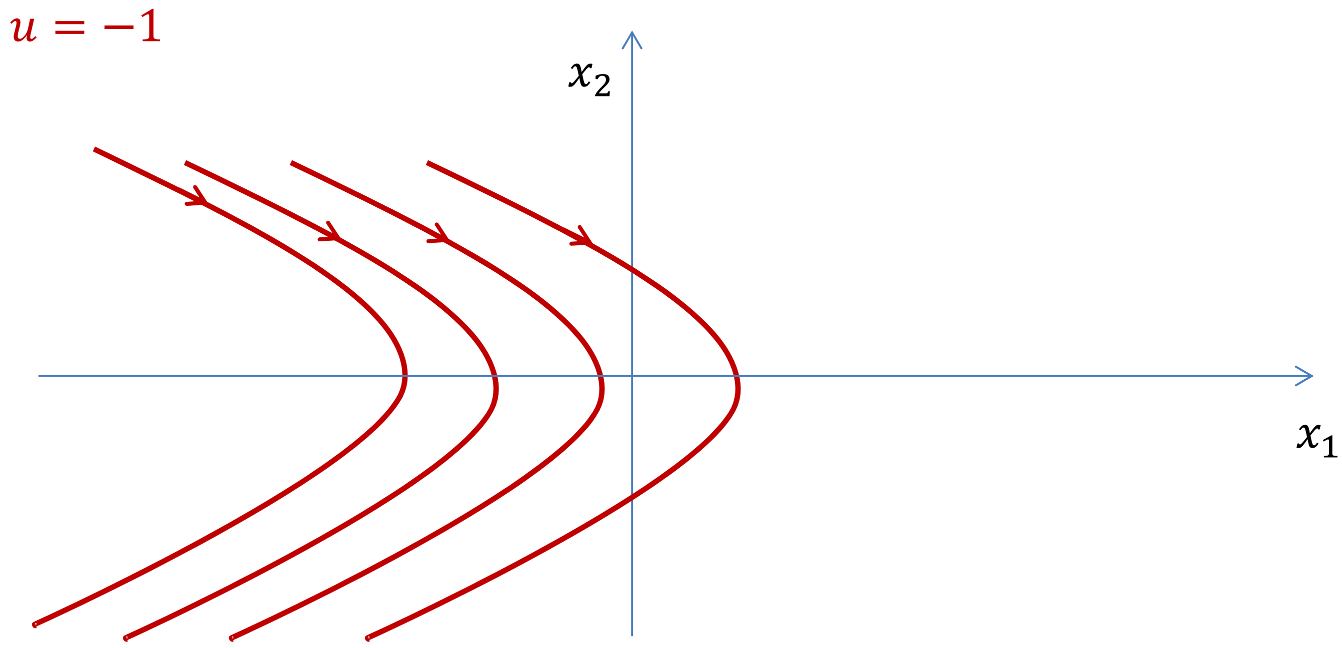
$$\frac{dx_2}{dt} = u_0 \quad => \quad u_0 \frac{dx_1}{dt} = x_2 \frac{dx_2}{dt}$$

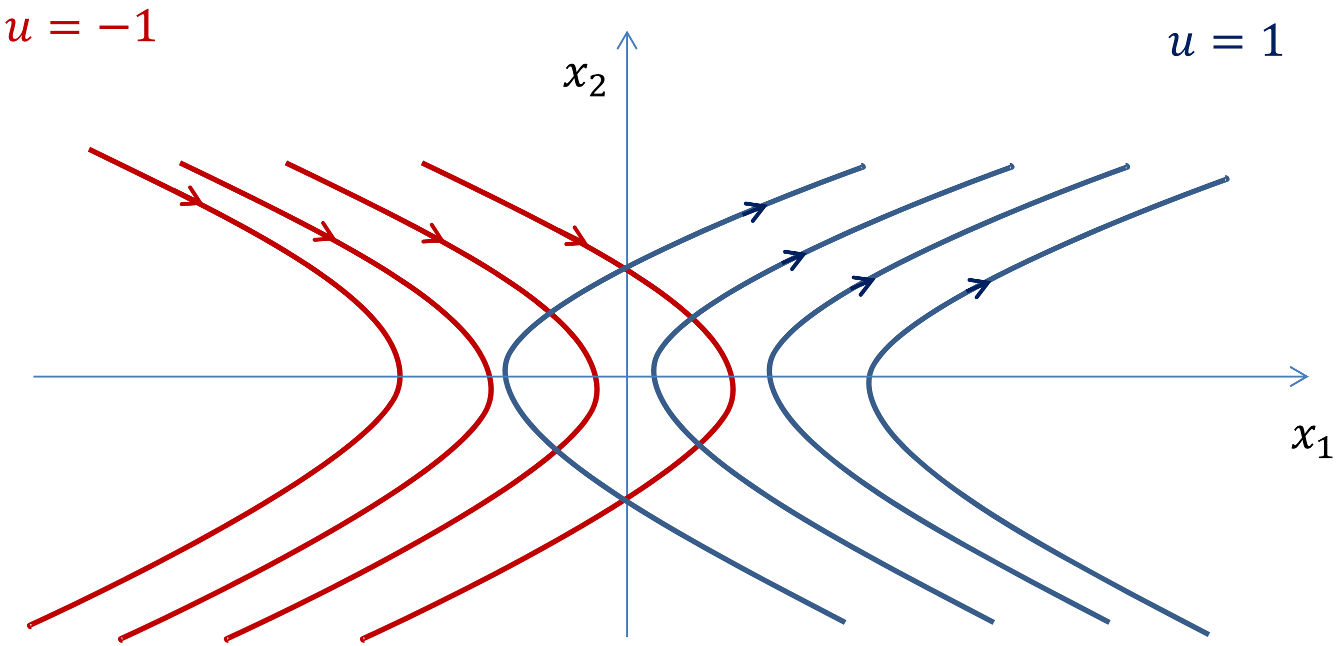
$$u_0(x_1 - x_1(t_0)) = \frac{1}{2}({x_2}^2 - {x_2}^2(t_0))$$

$$x_1 = \frac{1}{2\,u_0}{x_2}^2 + C_1$$

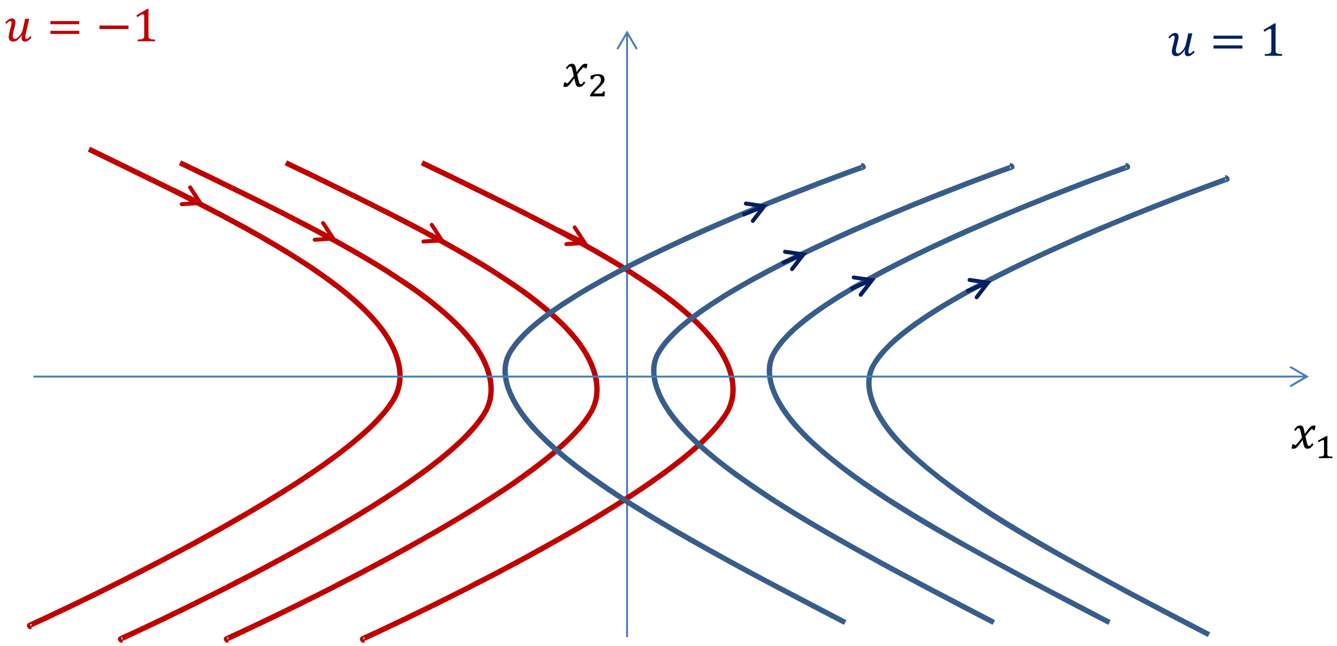
$t \in [\, t_c, t_f \,]$

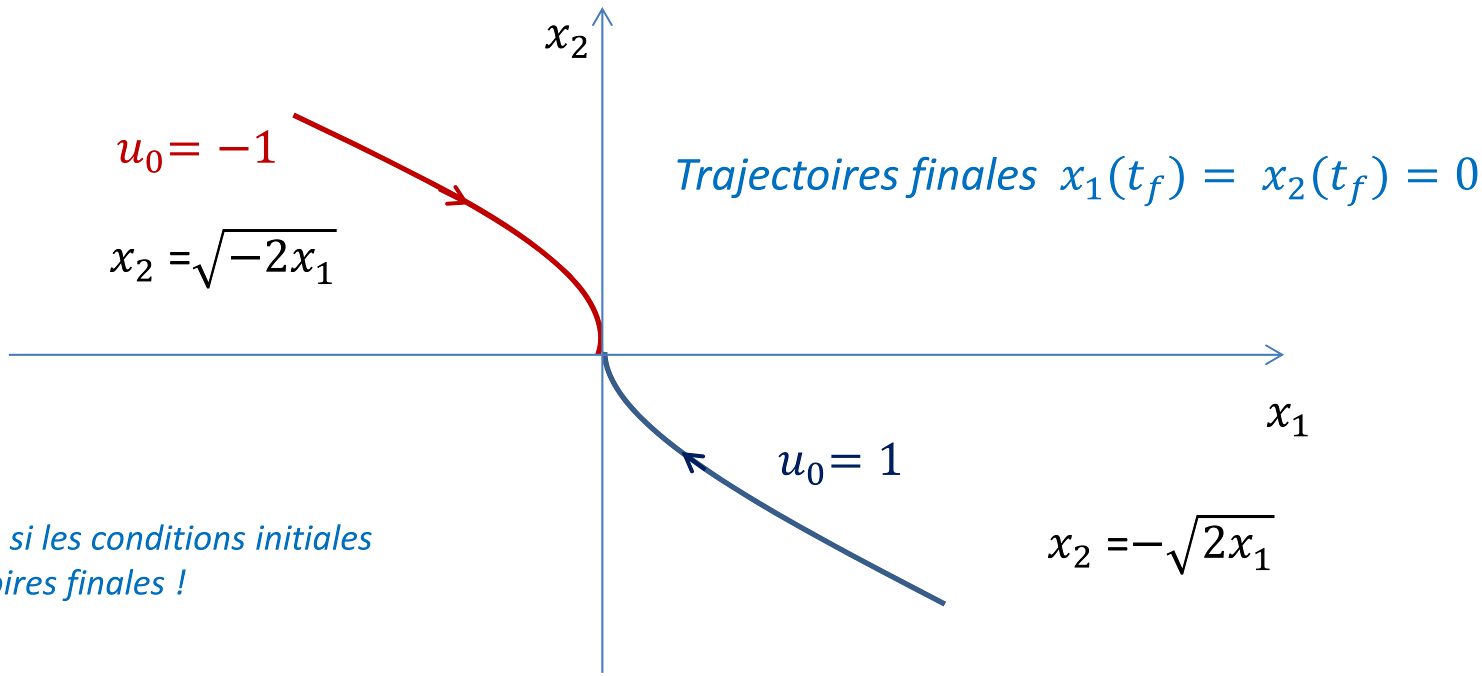
$$x_1 = -\frac{1}{2\,u_0}{x_2}^2 + C_2$$


$u = -1$
x_2
x_1



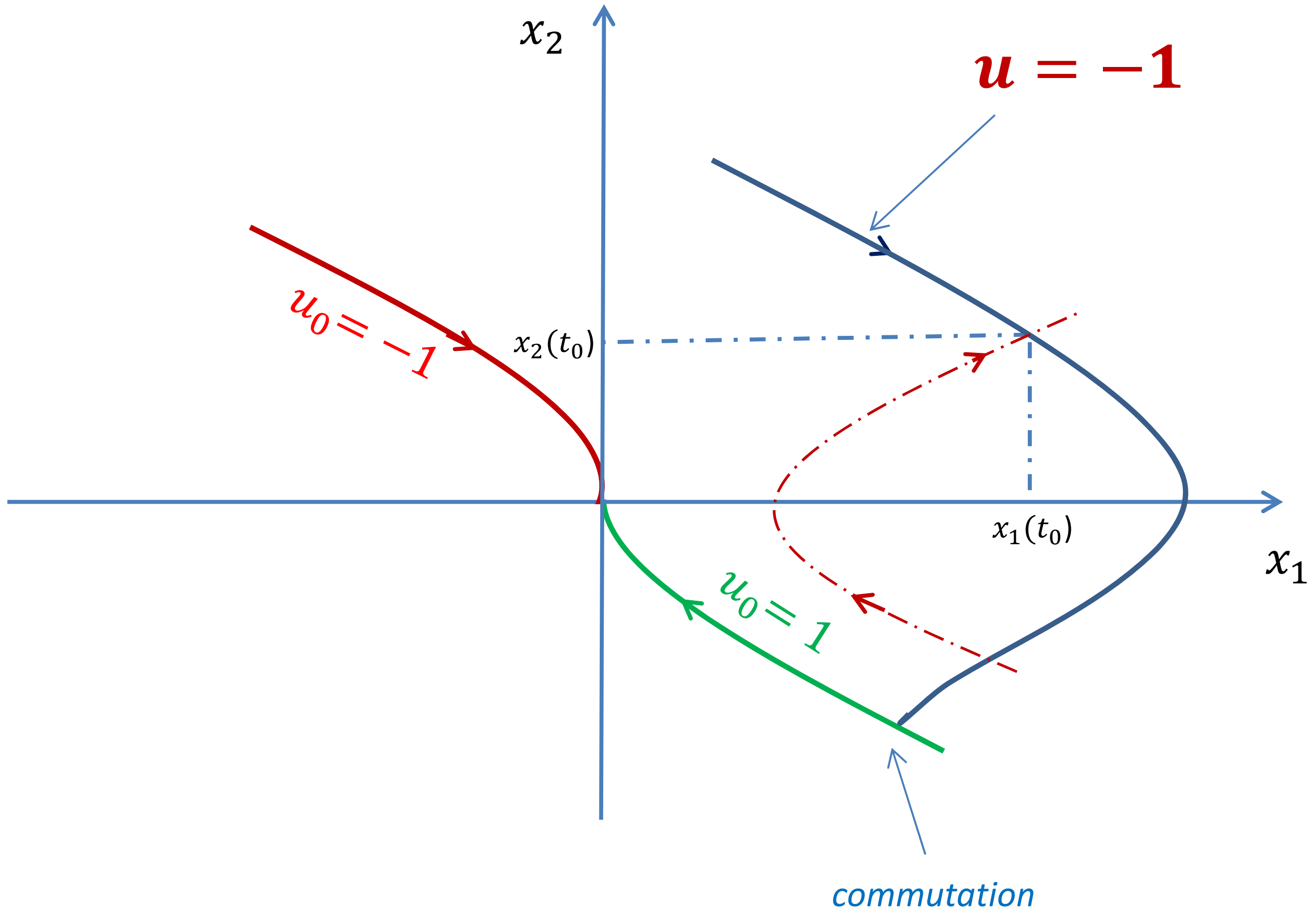
$u = -1$
$u = 1$
x_2
x_1





Zéro commutations si les conditions initiales sont sur les trajectoires finales !

Commande en temps minimum   Bang-bang control

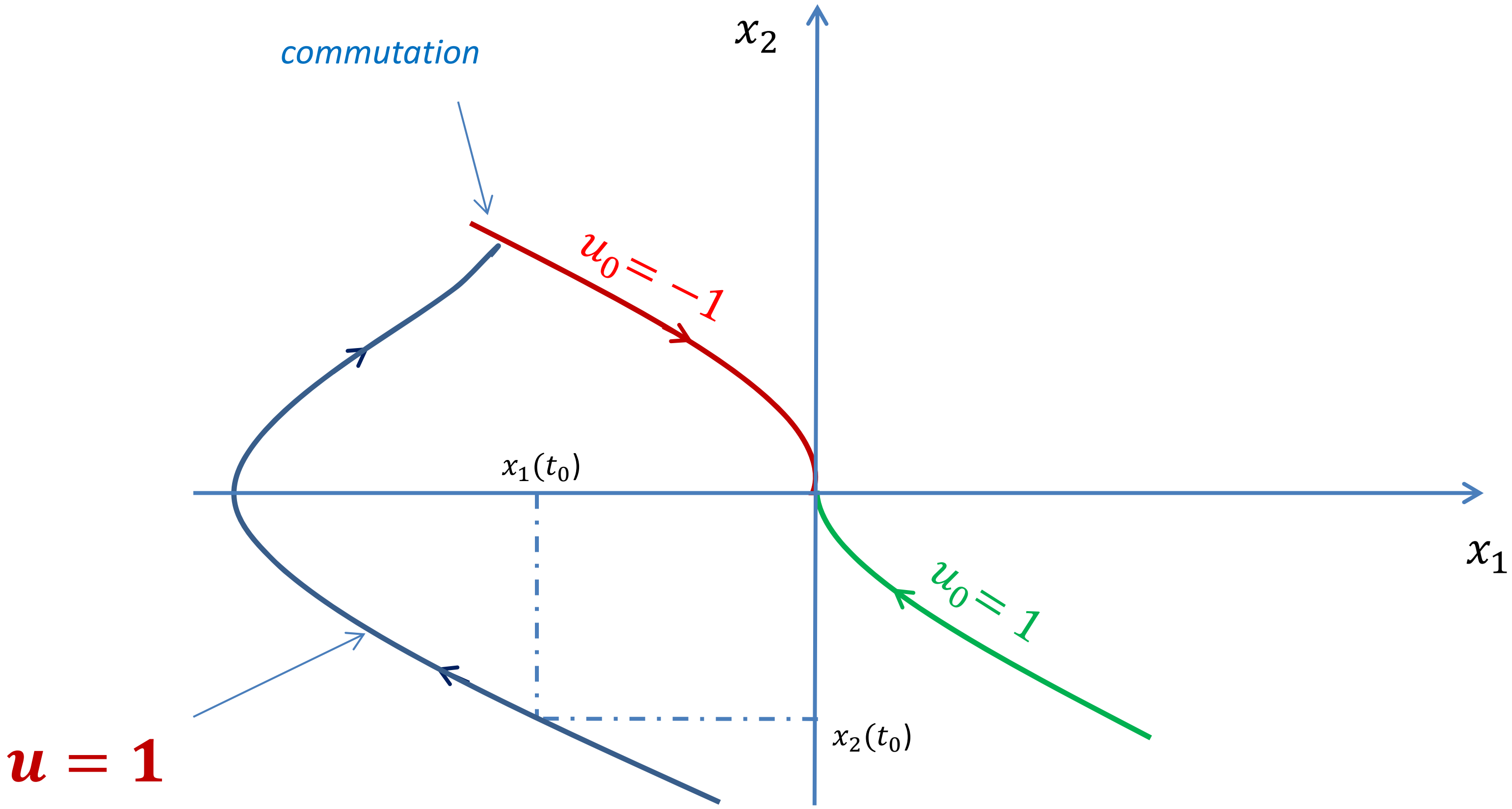


La commande change de signe sur la courbe de séparation

On a droit à une seule commutation maxi => de la condition initiale $\{x_1(t_0), x_2(t_0)\}$ *il faut suivre la parabole qui intersecte la courbe de séparation, pas celle qui s'éloigne (en pointillé) =>*

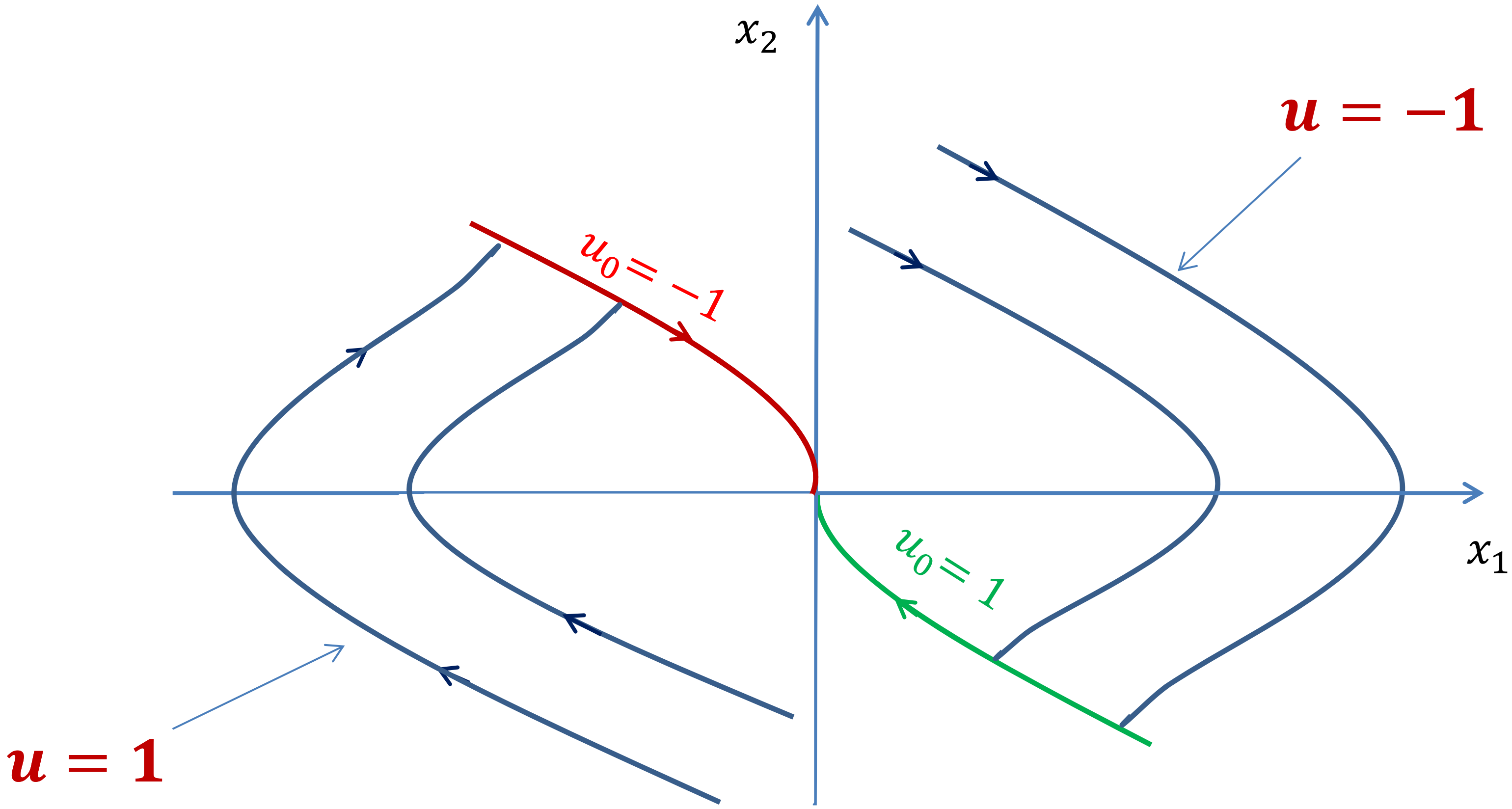
u = -1 si $t \in [\, t_0, t_c \,[$ *après u = 1 si* $t \in [\, t_c, t_f \,[$ *pour des CI au-dessus de la courbe*

Commande en temps minimum   Bang-bang control



La commande change de signe sur la courbe de séparation
On a droit à une seule commutation maxi => de la condition initiale $\{x_1(t_0), x_2(t_0)\}$ *il faut suivre la parabole qui intersecte la courbe de séparation =>*
u = 1 si $t \in [\, t_0, t_c\, [$ *après u = -1 si* $t \in [\, t_c, t_f\, [$ *pour des CI au-dessous de la courbe*

Commande en temps minimum   Bang-bang control

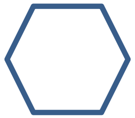


La commande change de signe sur la courbe de séparation

NB le nombre de commutations ≤ n-1 (l'ordre du système) car valeurs propres réelles   eig(A) = [0;0]

Commande en temps minimum
Généralisation pour des systèmes linéaires

- $\dot{x} = Ax + Bu$ *avec* $J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt \Rightarrow min$

  $u(\mathrm{t}) \in \omega =$  $\in R^m$ (polyhèdre)

$H = -1 + \lambda^T Ax + \lambda^T Bu$ *linéaire par rapport à* u

Pb de programmation linéaire max $\lambda^T Bu$

Solution **unique** sur les sommets du polyhèdre (simplexe)

NB Si les valeurs propres de A sont réelles => $\leq$ n-1 commutations avec n=dim(A)

Si les valeurs propres de A sont complexes => nombre de commutations fini mais peut être $>$ n (voir exemple pendule linéarisé)

Commande en temps minimum

pendule linéarisé

- $\ddot{y} + y = u$ *éq. diff. 2nd degré <=> deux éq. diff. 1er degré*
- *Posons* $x_1 = y$; $x_2 = \dot{y}$ => $\dot{x_1} = x_2$; $\dot{x_2} = -y + u = -x_1 + u$
- *La contrainte* $|u| \leq 1$ => u^2- $1 \leq 0$
- *Le critère J =* t_f - t_0 = $\int_{t_0}^{t_f} dt$ *=> min* *donc r(.) = 1*
- *Conditions terminales* $x_1(t_0)$= y_0 ; $x_2(t_0)$ = $\dot{y}_0$

  $x_1(t_f)$= 0 ; $x_2(t_f)$= 0 *(ramener le système à l'origine)*

Hamiltonien Max $H = -r + \lambda^T \Phi = -1 + \lambda^T \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + u \end{bmatrix} = -1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 (-x_1 + u)$

Commande en temps minimum

pendule linéarisé

$$\dot{\lambda} = -H_x \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ -\lambda_1 \end{bmatrix}$$

D'où $\dot{\lambda}_1 = \lambda_2$ et $\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1$ => $\ddot{\lambda}_2 = -\dot{\lambda}_1 = -\lambda_2$ et $\lambda_2 = A \sin(t - \varphi)$

H = -1 + $\lambda_1 x_2 + \lambda_2 (-x_1 u)$ *=> linéaire en u =>*

u= sign(λ_2 *) = sign(* $A \sin(t-\varphi)$ *) pour maximiser H !*

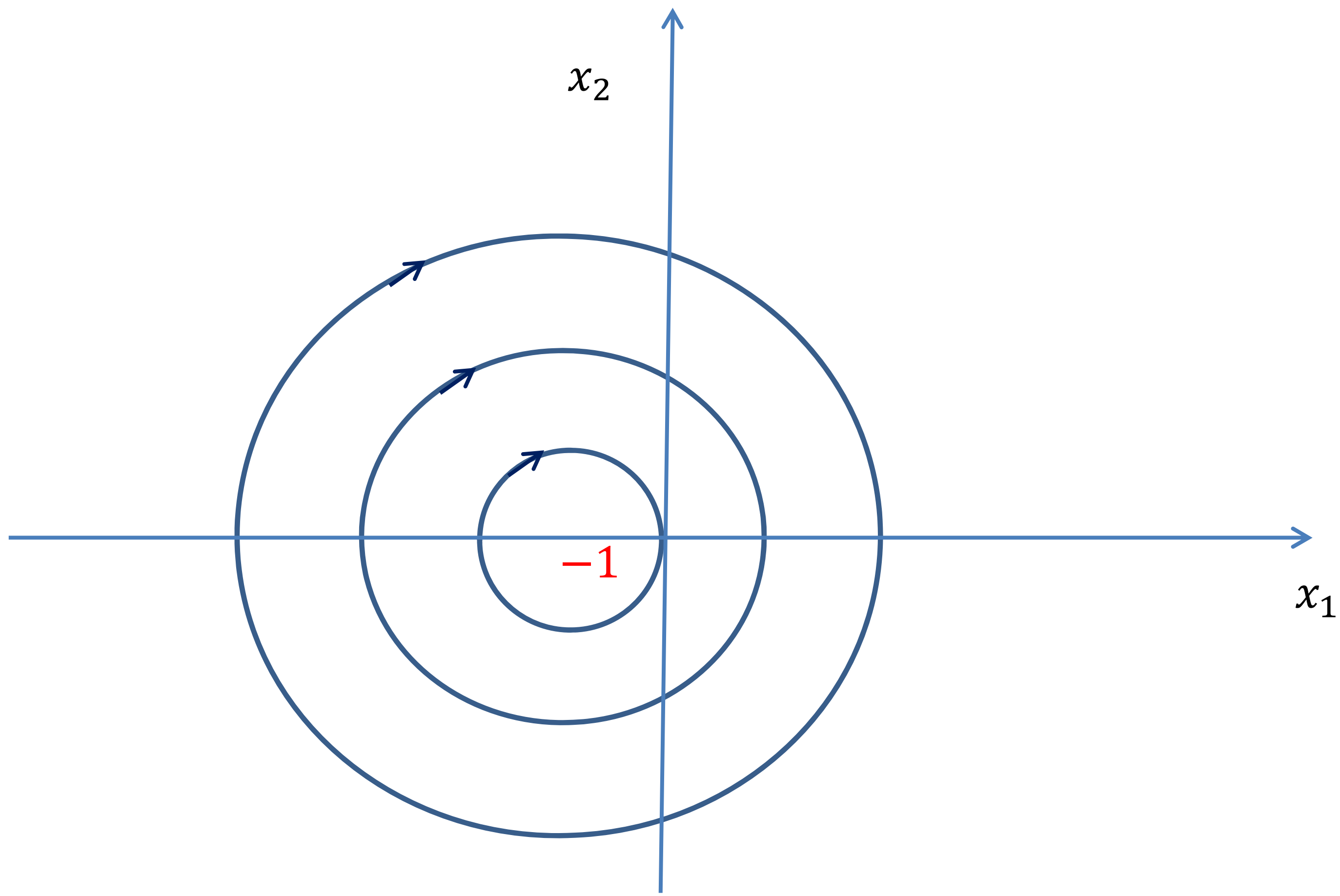
La fonction est sinusoïdale => u change de signe toutes les* π (secondes) et *u**= {1, -1}

$\frac{dx_1}{dt} = x_2$ => $dx_1 = x_2 dt$

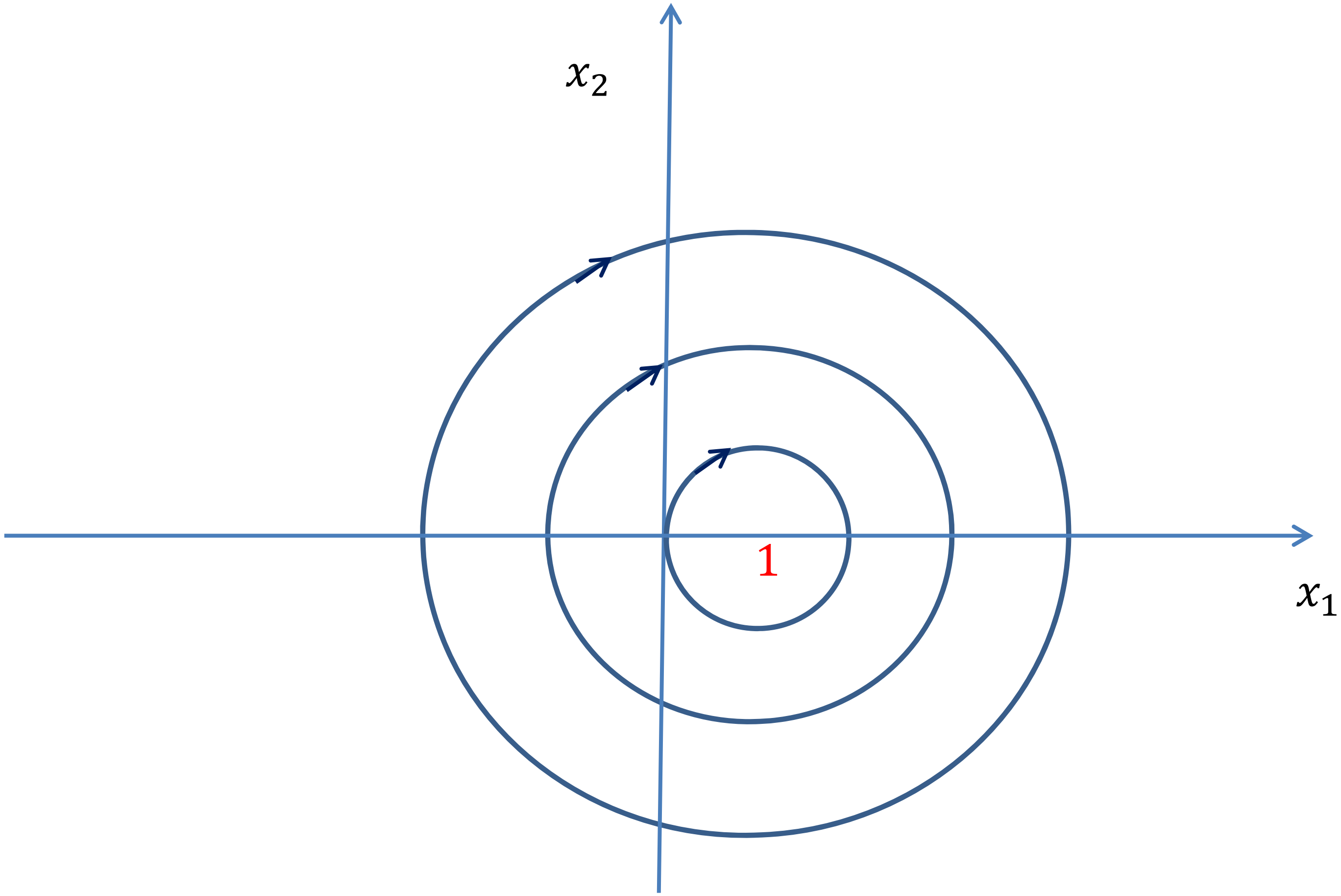
$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + u_0$ => $dx_2 = (-x_1 + u_0)dt$

$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{(-x_1 + u_0)}{x_2}$ => $(x_1 - u_0)d(x_1 - u_0) + x_2 dx_2 = 0$

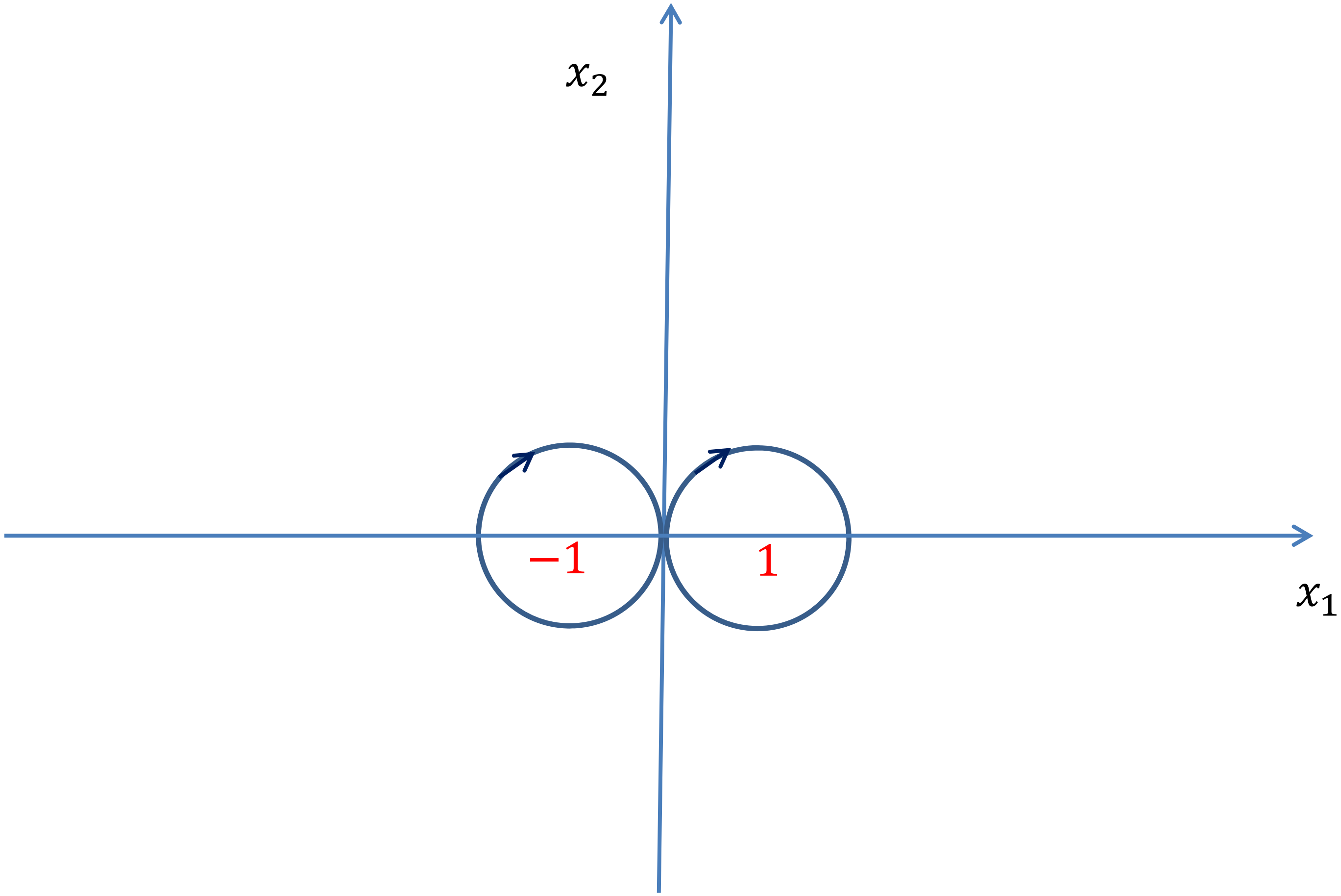
$(x_1 - u_0)^2 + x_2{}^2 = \rho^2$ => les trajectoires sont des cercles, parcourus en 2π (secondes),
et centrées en $u_0 = +1$ ou -1



x_2
-1
x_1

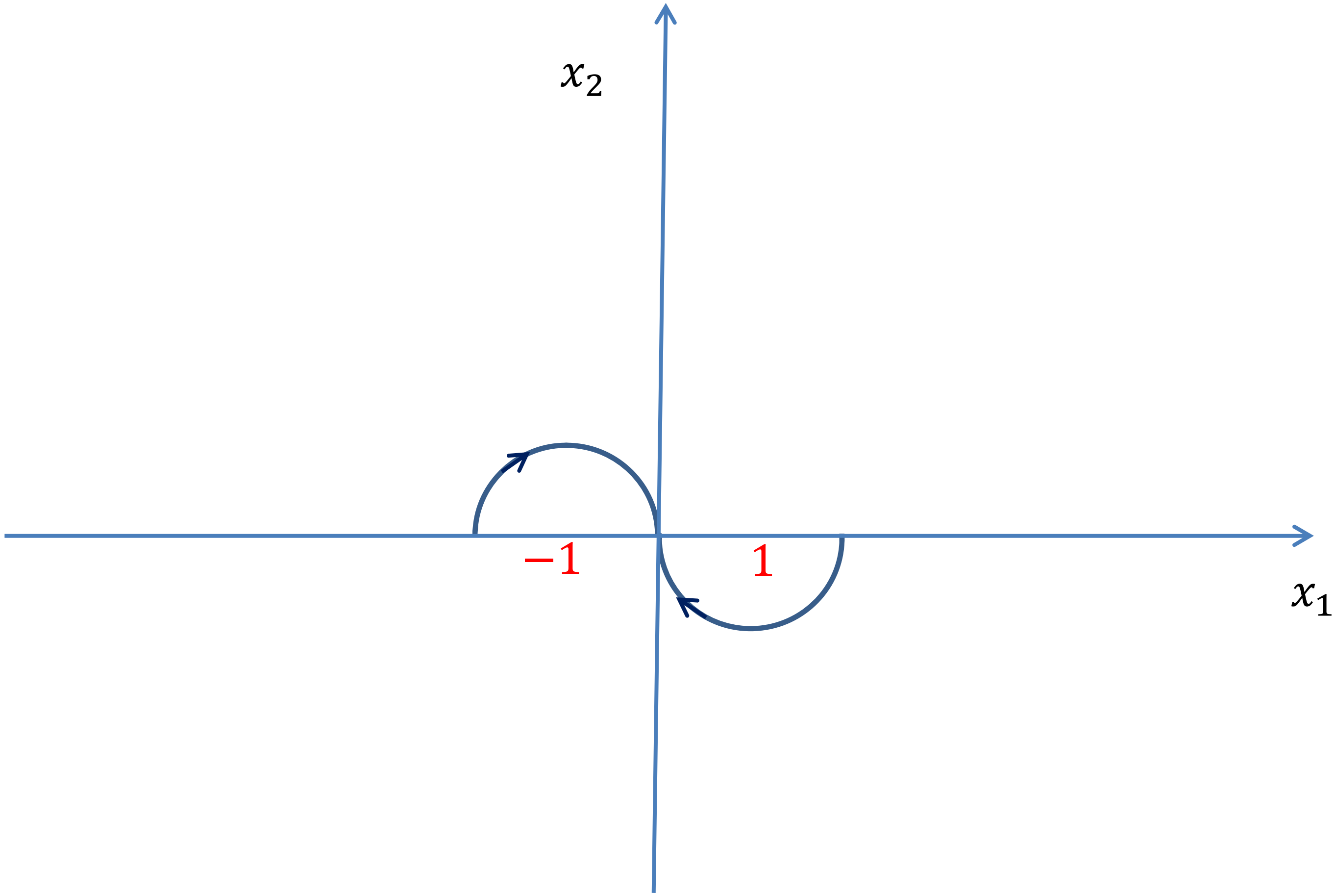


x_2
1
x_1

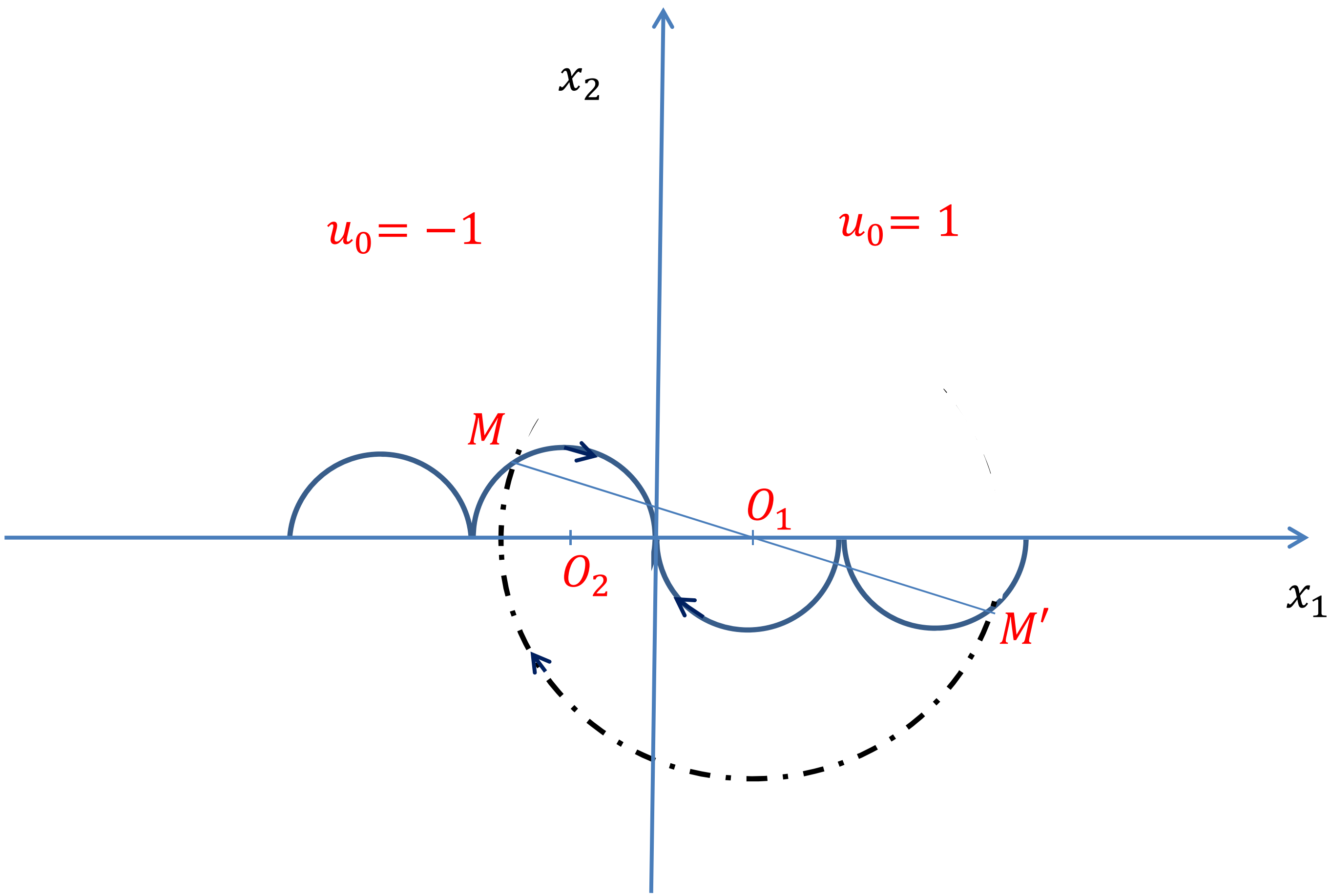


x_2
-1
1
x_1

Trajectoires finales qui ramènent le système à l’origine

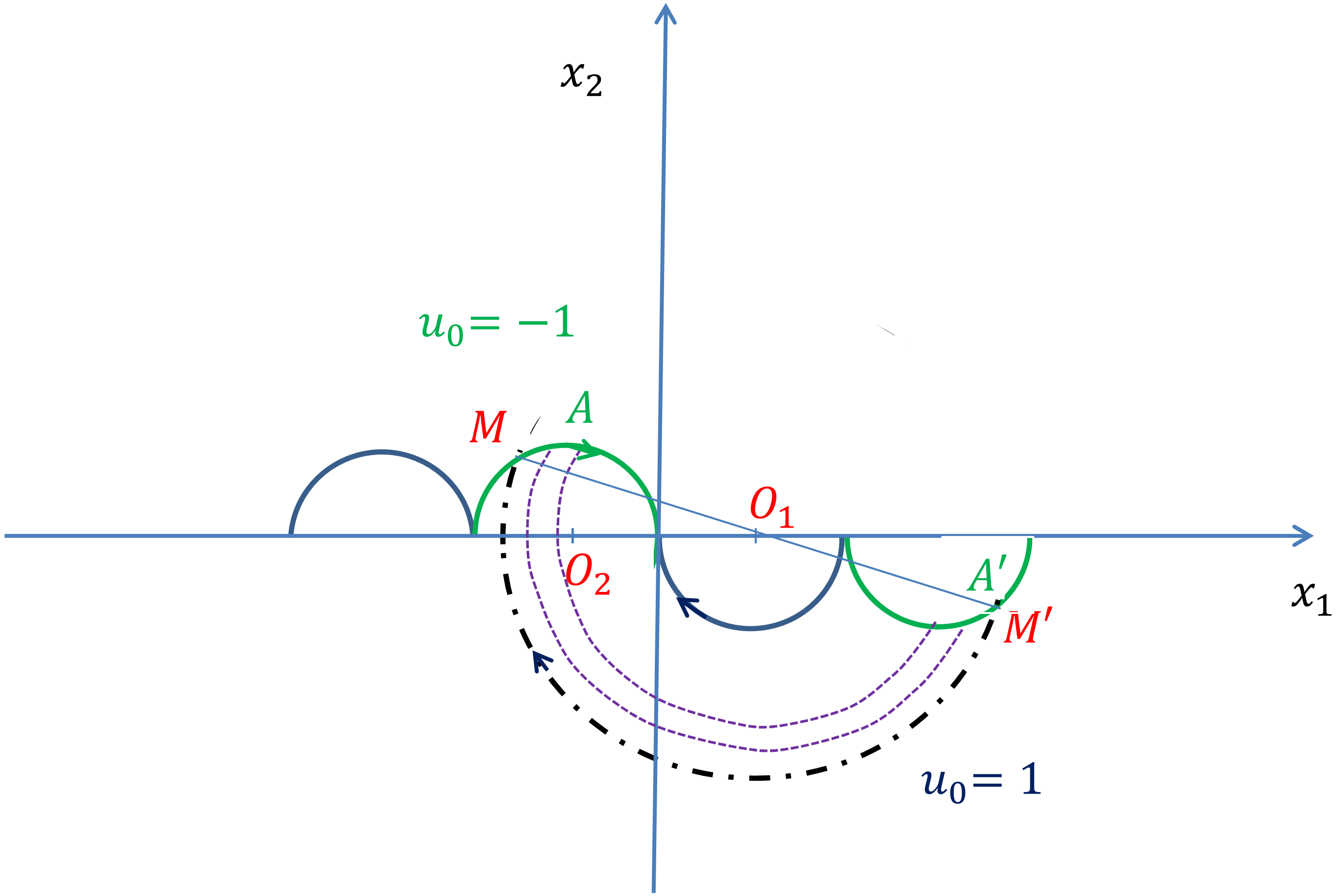


u change de signe toutes les π secondes => M’ symétrique à M par rapport à O_1



u change de signe toutes les π secondes, et en π secondes un demi-arc de cercle

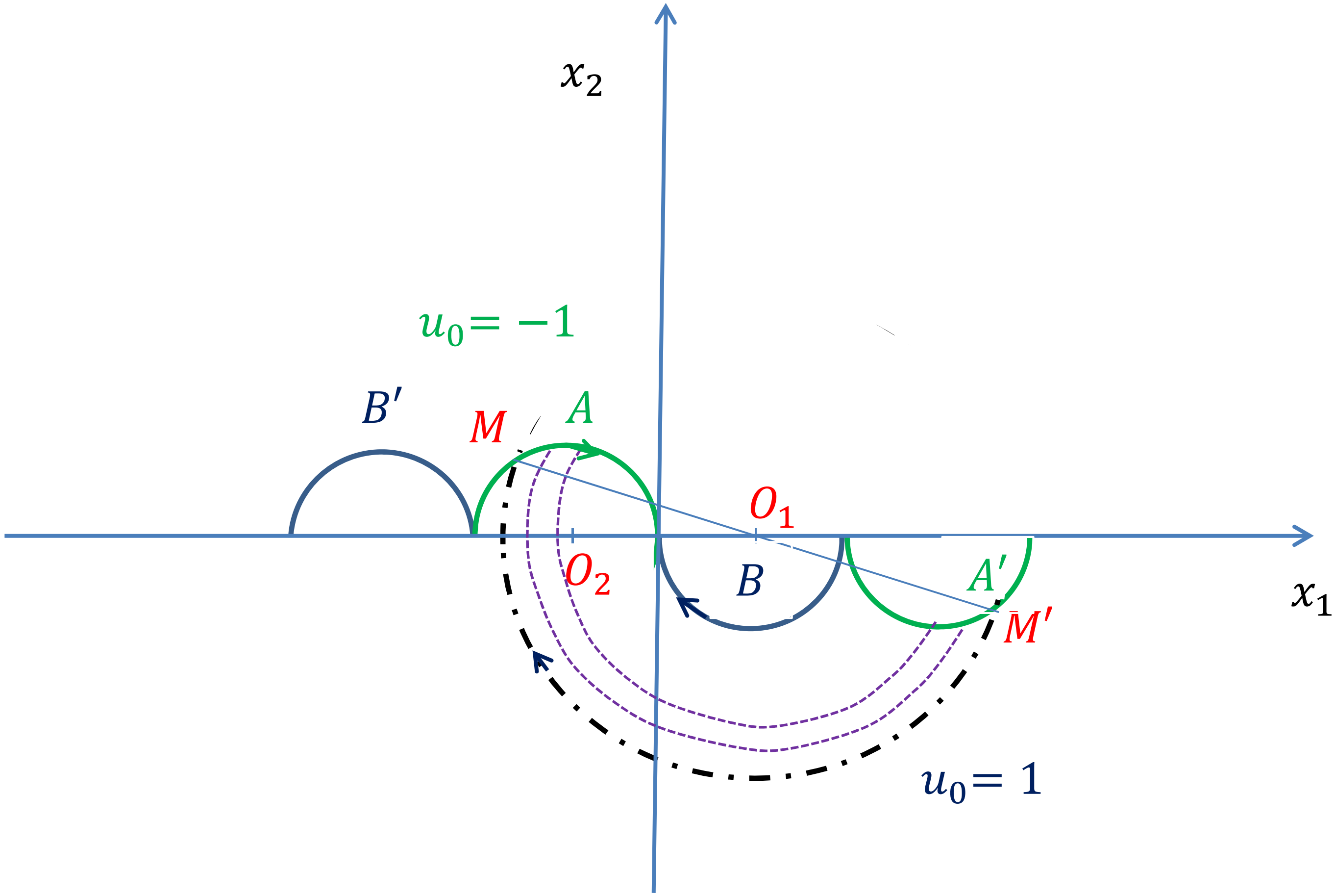
est parcouru => M’ symétrique à M par rapport à O_1 et ceci pour ∀ M’ ϵ A’



=> l’arc A’(M’ ϵ A’) est symétrique à l’arc A(M ϵ A) => A est « l’itéré » de A’ (1 itération = π secondes)

u change de signe toutes les π secondes, et en π secondes un demi-arc de cercle

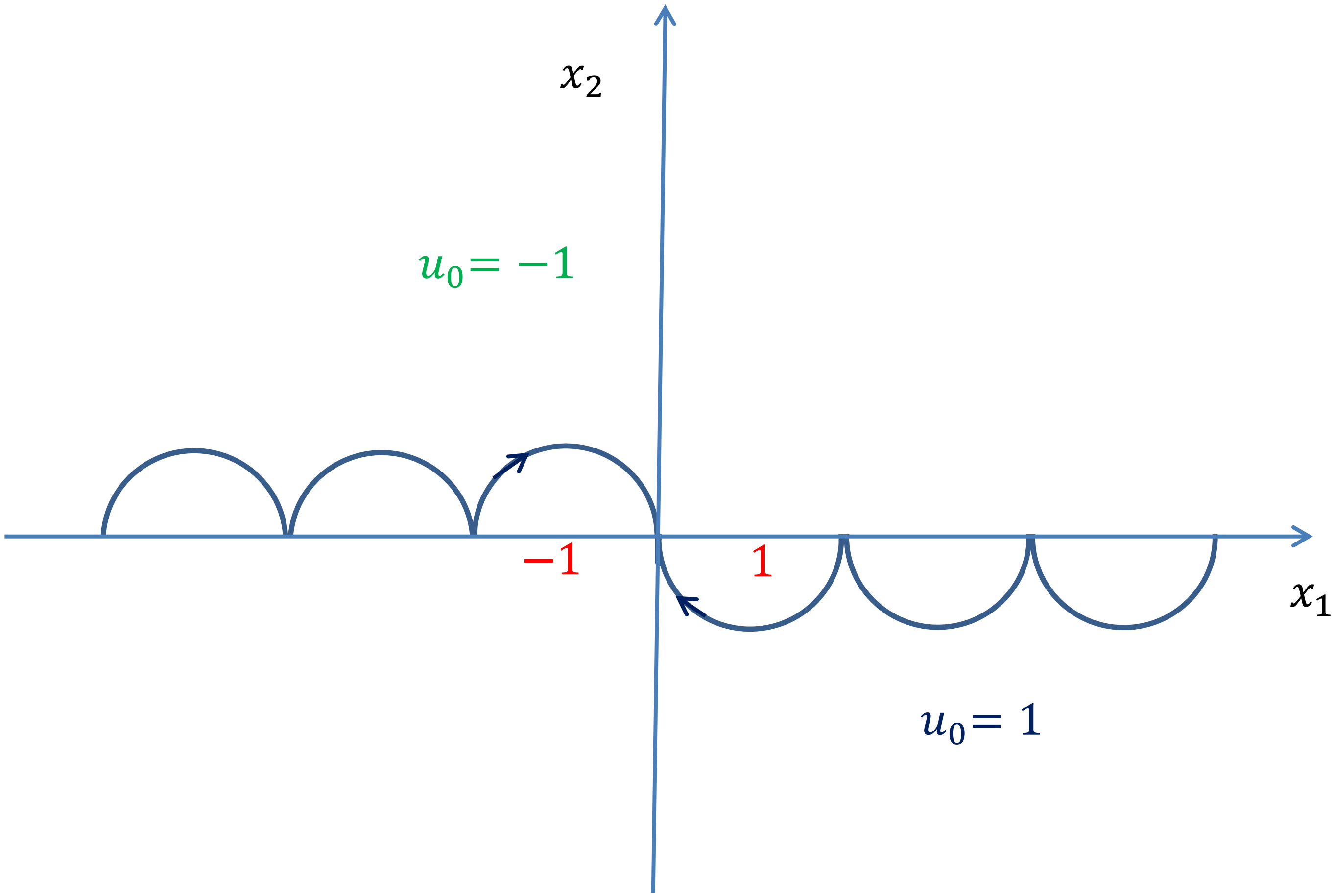
est parcouru => M' symétrique à M par rapport à O_1 et ceci pour ∀ M' ϵ A'



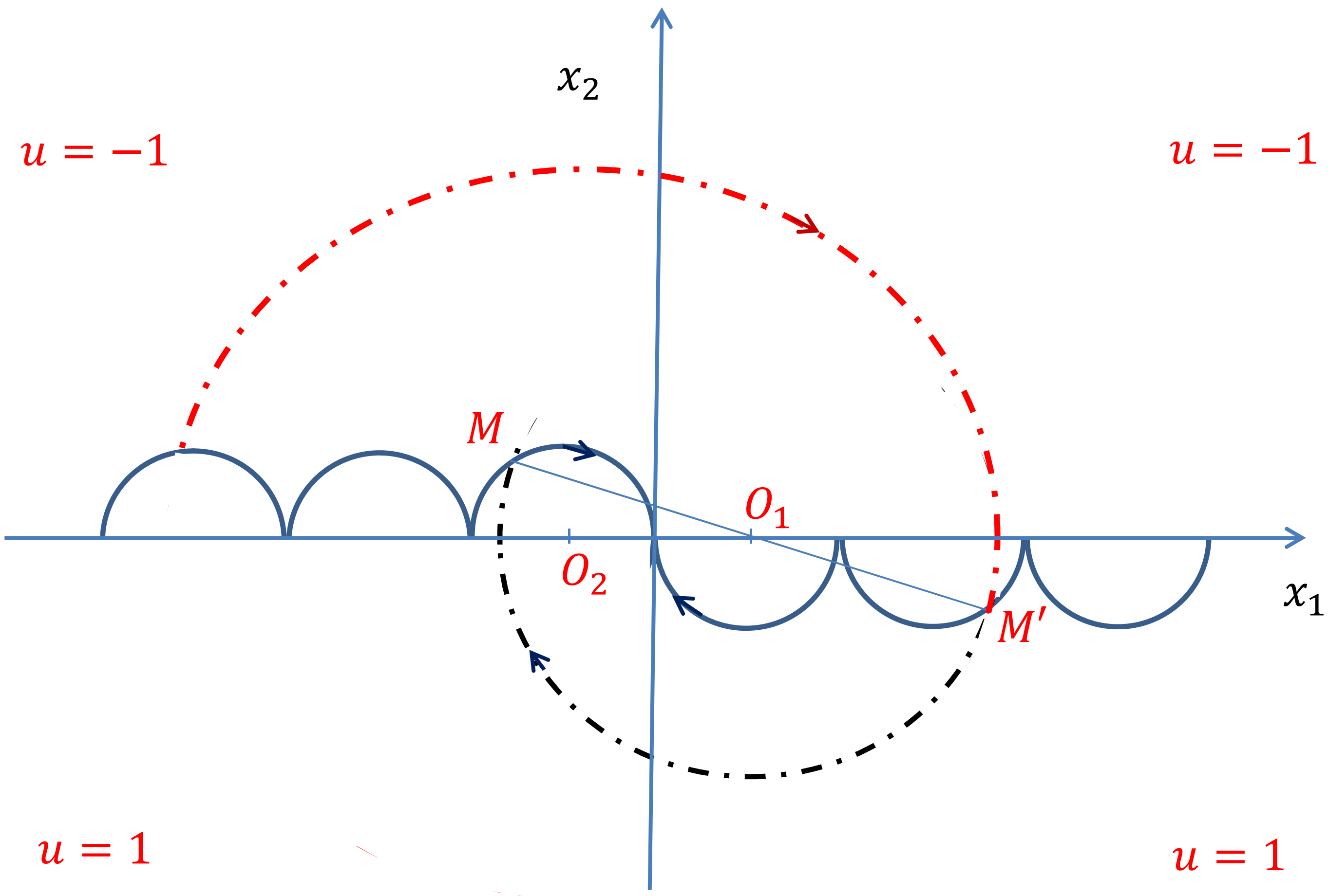
$\Rightarrow$ l'arc A'(M' ϵ A') est symétrique à l'arc A(M ϵ A) => A est « l'itéré » de A' (1 période = π secondes)
On applique le même raisonnement pour l'arc B => B' est symétrique à B etc
En itérant en arrière, on trouve la courbe de commutation

Courbe de commutation

u change de signe toutes les π secondes



u change de signe toutes les π secondes => trajectoires optimales



$$Commande\ optimale :$$
$$Au\ dessus\ de\ la\ courbe\ de\ commutation, on\ applique\ u = -1, et\ en\ dessous\ u = 1$$

NB le nombre de commutations peut être > n (l'ordre du système) car valeurs propres complexes $\mathrm{eig(A)} = \pm i$

Bilan des exercices :

- EX. 1 $\ddot{y} = u$ A = [? ?; ? ?] B = [0 ; 1]

valeurs propres ……., nb de commutations « borné »

- EX. 2 $\ddot{y} + y = u$ A = [? ?; ? ?] B = [0 ; 1]

valeurs propres …….., nb de commutations « non borné »

Question : On peut (ou on ne peut pas?) calculer Le nb maxi de commutations (indépendant des points d'origine)

Dualité

- $H_{\lambda} = \dot{x} = Ax + Bu$ avec x l'état du système

$$\updownarrow$$

- $-H_x = \dot{\lambda} = -\,\mathrm{A}^T\lambda$ avec λ l'état du système dual

=> λ est l'*état dual* du système

Exemple: Alunissage en douceur

Loi de Newton:

- $m\ddot{z} = -k\dot{m} - mg \quad k > 0 \;\; g = 1.63 > 0$ *gravité de la lune*
- $z(t_0) = x_0$, $\dot{z}(t_0) = \dot{z}_0$, $z(t_f) = 0$, $\dot{z}(t_f) = 0$
- $m(t_0) = m_0$ *masse initiale*
- *Objectif :* $m(t_f) = m_f$ => max (*dépenser le moins de carburant possible pour revenir sur la terre) donc* $m_0 - m_f = \int_{t_0}^{t_f} -\dot{m}dt$ => min
- $0 \leq -\dot{m} \leq \delta$ *consommation limitée*
- *Mise en équations*

$x_1 = z$; $x_2 = \dot{z}$; $x_3 = m$; $u = -\dot{m}$ => $\dot{x}_1 = x_2$; $\dot{x}_2 = -g + \frac{ku}{x_3}$; $\dot{x}_3 = -u$

$J = \int_{t_0}^{t_f} u\,dt$ => min (*ce n'est pas un problème en temps minimal!*) $0 \leq u \leq \delta$

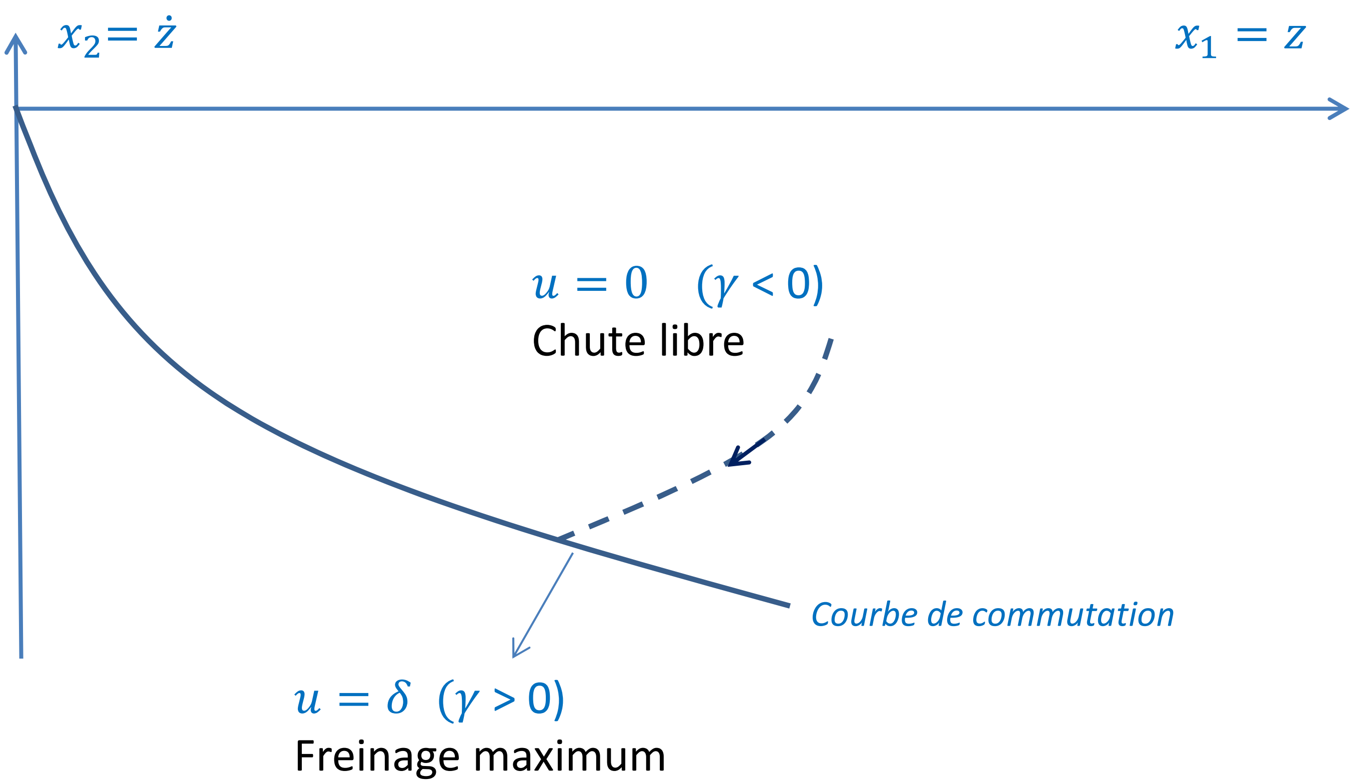
$H = -u + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 \left(-g + \frac{ku}{x_3}\right) - \lambda_3 u$ *et le Hamilton est linéaire en u =>*

$H = \lambda_1 x_2 - \lambda_2 g + \underbrace{\left(-1 - \lambda_3 + \frac{k\lambda_2}{x_3}\right)}_{\gamma} u$ => $u = \delta$ *si* $\gamma > 0$ *et* $u = 0$ *si* $\gamma < 0$

$\dot{\lambda} = \ = -\dfrac{\partial H}{\partial x}$ => $\dot{\lambda}_1 =$ 0 , $\dot{\lambda}_2$ = -λ_1 et $\dot{\lambda}_3$ = - (-$k\dfrac{\lambda_2\,\dot{x}_3}{{x_3}^2}$) = $k\dfrac{\lambda_2 u}{{x_3}^2}$

$\dfrac{d\gamma}{dt}$ = $-\dot{\lambda}_3 + k\dfrac{\dot{\lambda}_2}{x_3} - k\dfrac{\lambda_2\,\dot{x}_3}{{x_3}^2} = -\dfrac{k\lambda_1}{x_3} = signe\ const, car\ \ \lambda_2 = const\ \ et\ x_3$ > 0 => γ change de signe maximum 1 fois

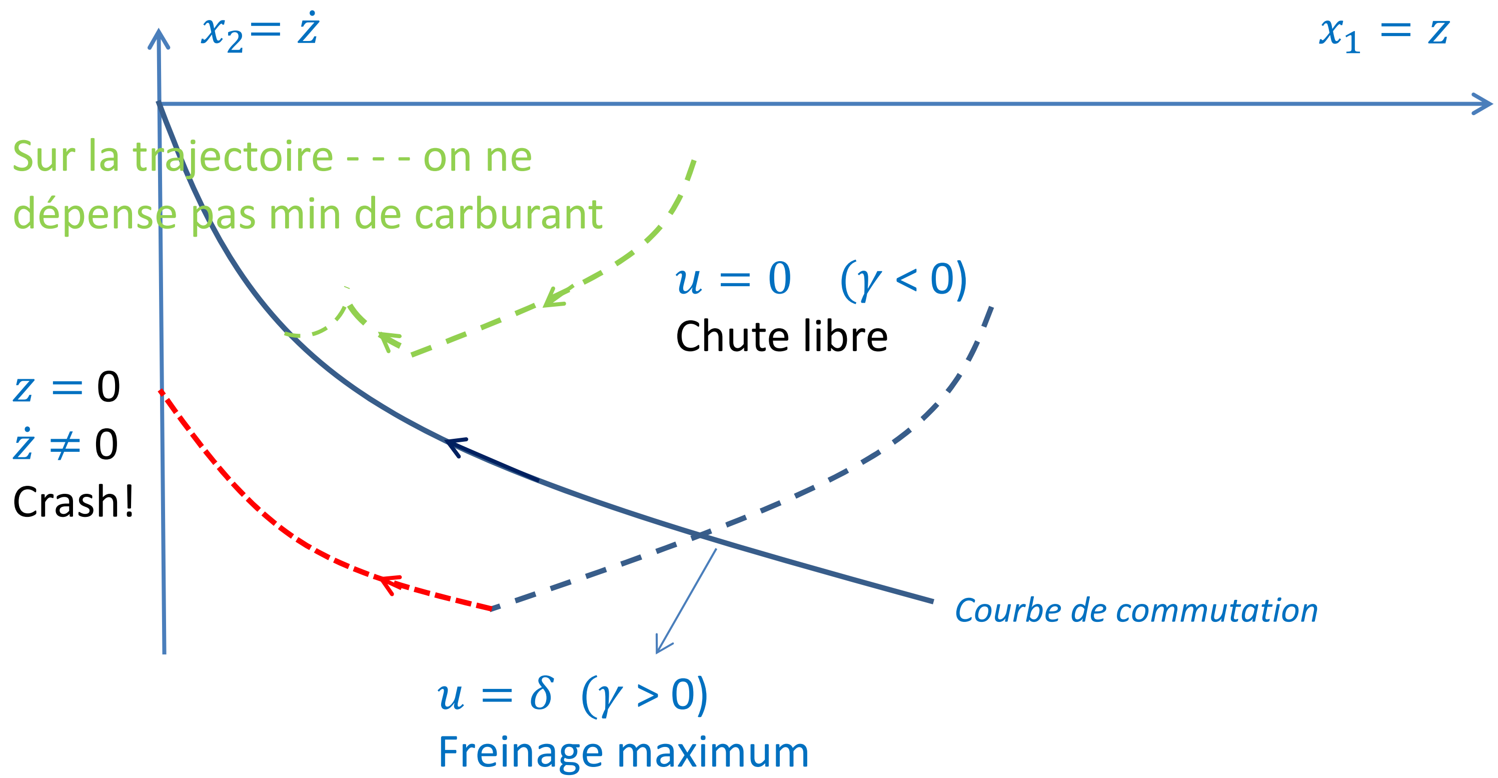
On ne peut pas couper la poussée avant de terminer l'alunissage => $t \in [\,t_0, t_c\,[$ u= 0 et $t \in [\,t_c, t_f\,]$ u= δ



$$\dot{\lambda} = \; = -\frac{\partial H}{\partial x} \;\Rightarrow\; \dot{\lambda}_1 = 0\;,\; \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \;\text{ et }\; \dot{\lambda}_3 = -\left(-k\frac{\lambda_2\,\dot{x}_3}{{x_3}^2}\right) = k\frac{\lambda_2 u}{{x_3}^2}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\dot{\lambda}_3 + k\frac{\dot{\lambda}_2}{x_3} - k\frac{\lambda_2\,\dot{x}_3}{{x_3}^2} = -\frac{k\lambda_1}{x_3} = const, car\;\; \lambda_2 = const\;\; et\; x_3 > 0 \;\Rightarrow\; \gamma$$ change de signe maximum 1 fois

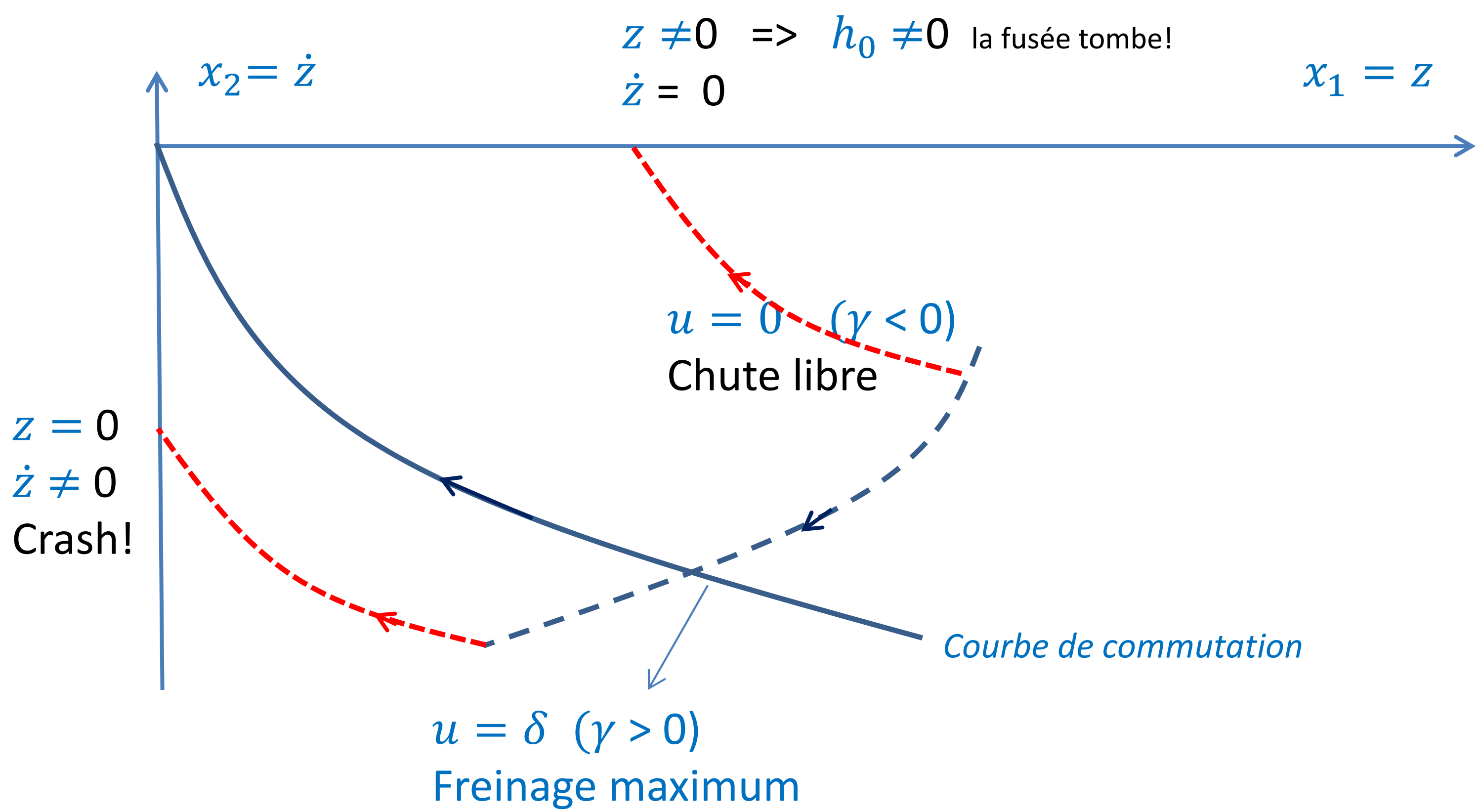
On ne peut pas couper la poussée avant de terminer l'alunissage => $t \in [\,t_0, t_c\,[$ u= 0 et $t \in [\,t_c, t_f\,]$ u= δ



$$\dot{\lambda} = = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \dot{\lambda}_1 = 0 \ , \ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \text{ et } \dot{\lambda}_3 = -\left(-k\frac{\lambda_2\,\dot{x}_3}{{x_3}^2}\right) = k\frac{\lambda_2 u}{{x_3}^2}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\dot{\lambda}_3 + k\frac{\dot{\lambda}_2}{x_3} - k\frac{\lambda_2\,\dot{x}_3}{{x_3}^2} = -\frac{k\lambda_1}{x_3} = const, car \ \lambda_2 = const \ \ et \ x_3 > 0 \Rightarrow \gamma$$ change de signe maximum 1 fois

On ne peut pas couper la poussée avant de terminer l'alunissage => $t \in [\,t_0, t_c\,[$ u= 0 et $t \in [\,t_c, t_f\,]$ u= δ



Problème linéaire quadratique

I. Problème de régulation $y_c = 0$

(rappel : problème de poursuite de trajectoire quand $y_c \neq 0$)

- $\dot{x} = Ax + Bu$ *avec* $x(0) = x_0$

- $J = \frac{1}{2}\int_0^T [(x^T Q x) + (u^T R u)]dt + \underbrace{\frac{1}{2} x^T Q_f x}_{\text{g(x) condition finale}}$ => min $\qquad R > 0, Q \geq 0, Q_f \geq 0$

NB. Si $y = Cx$ *alors* $Q \Rightarrow C^T Q C$ *et si de plus* $y_c \neq 0$ *on minimise* $e = y_c - y$ *et* $x \Rightarrow e$

- $H = -\frac{1}{2}[x^T Q x + u^T R u] + \lambda^T[Ax + Bu] = -\frac{1}{2} x^T Q x - \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T A x + \lambda^T B u$

- Maximiser $-\frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T B u = [-\frac{1}{2} u^T R + \lambda^T B]u$

- $\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow -u^T R + \lambda^T B = 0$ et donc $\boldsymbol{u^* = R^{-1} B^T \lambda}$

- $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -R < 0$ => c'est bien un maximum!

Equations de Hamilton

- $\dot{x} = Ax + BR^{-1}B^T\lambda = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$
- $\dot{\lambda} = Qx - A^T\lambda = -\frac{\partial H}{\partial x}$
- $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & BR^{-1}B^T \\ Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$ => $\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = e^{[\ \ ]t} \begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix}$
- On peut montrer que λ dépend linéairement de x
- $\lambda = P(t)x(t)$

Equation de Riccati

- $\lambda = P(t)x(t) \quad \Rightarrow \dot{\lambda} = \dot{P}(t)\,x(t) + P(t)\,\dot{x}(t)$
- $\dot{P}x = \dot{\lambda} - P\dot{x}$ et en remplaçant $\dot{\lambda}$ et $\dot{x}$
- $\dot{P}x = Qx - A^T\lambda - PAx - PBR^{-1}B^T\lambda$
- $\dot{P}x = Qx - A^TPx - PAx - PBR^{-1}B^TPx$
- $\dot{P} + A^TP + PA + PBR^{-1}B^TP - Q = 0$ *équation de Riccati => $P(t)$*

- Condition de transversalité

  $\lambda(t_f) = -\frac{\partial g}{\partial x}[x(t_f)] = -Q_f x(t_f) = P(t_f)x(t_f)$

- Valeur du critère $\min J(x,u) = J(x^*,u^*) = \frac{1}{2}x_0{}^T P(t_0)x_0$

La condition est suffisante

- Supposons $P(t)$ est la solution de l'équation de Riccati
- $\dot{P} + A^T P + PA + PBR^{-1} B^T P - Q = 0$

  $avec\ P(t_f) = -Q_f$
- *Alors* $\min J(x,u) = J(x^*,u^*)$

  $= \frac{1}{2} x_0^{\ T} P(t_0) x_0 \quad et \quad u^* = R^{-1} B^T P(t) x^*(t)$
- $\dot{x}(t) = Ax + Bu = (A + BR^{-1} B^T P)\, x$

Horizon infini (cas stationnaire)

- *Stabilisation c.a.d. x(t) -> 0 (t -> ∞)*
- $J = \frac{1}{2}\int_0^T [(x^T Q x) + (u^T R u)]dt + \frac{1}{2} x^T Q_f x$ *=> min*
- *A,B,C,D,Q,R sont constantes =>* $\frac{dH}{dt}$ *= 0 donc H const*
- t_f *non fixé (libre)*

  Comme $H(t_f) = H(\infty) = 0$ à $l'instant\ final\ (non\ fixé) \quad \Rightarrow H = 0$

  en position optimale
- *Pour la même commande* $u = -R^{-1} B^T P(t) x(t)$
- *H=0 donne* $A^T P + PA + PBR^{-1} B^T P - Q = 0$
- *C.a.d.* $\dot{P} = 0 \Rightarrow P(t) = const$

Horizon infini (cas stationnaire)

- P *solution de Riccati stationnaire:*

  $A^T P + PA + PBR^{-1} B^T P - Q = 0$

Le système bouclé est-il asymptotiquement stable? Définissons

$$V(x) = -\,x^T P x \qquad fonction\ de\ Lyapunov$$

$$\frac{dV}{dt} = -(\dot{x}^T P x(t) + x^T P \dot{x}(t)) = -x^T[(\mathrm{A} + BR^{-1} B^T P)^T P +$$

$$+P(\mathrm{A} + BR^{-1} B^T P)]x$$

et avec l'équation de Riccati

$$\frac{dV}{dt} = -x^T[PBR^{-1} B^T P + Q^T]x \quad \textit{qui est négative car } R > 0, Q \geq 0$$

=> Le système bouclé est asymptotiquement stable!

Problème de poursuite $y_c \neq 0$

- $\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix} + y_c\,(t, t_0)$

- $y_c(t, t_0)$ l'impact des consignes *r*
- On peut démontrer que
- $u^* = -R^{-1}(\mathrm{t})\, B^T(t)[P(t)x^*(t) + p(t)]$
- $p(t)$ terme en plus dû à la consigne
- Solution *P* de Riccati (pb régulation) et p de

  $\dot{p} + (PBR^{-1}\, B^T + A^T)p + C^T Q y_c = 0$

  avec y_c *le vecteur de consigne*

Exemple

- Exemple $W(s) = \frac{1}{s(1-s)}$

- Voir livre