Optimisation fonctionelle

Problem statement

$$\dot{x} = f(x, u, t) \text{ avec } x \in R^n \text{ et } u \in R^l$$

$$k(x_0, t_0) = 0 \qquad l(x_f, t_f) = 0$$

Optimisation fonctionelle

Problem statement

$\dot{x} = f(x, u, t)$ *avec* $x \in R^n$ *et* $u \in R^l$

$k(x_0, t_0) = 0 \qquad l(x_f, t_f) = 0$

Contraintes instantanées

$p(x, u, t)dt \leq 0 \quad pour\ \forall t$

Optimisation fonctionelle

Problem statement

$\dot{x} = f(x, u, t)$ *avec* $x \in R^n$ *et* $u \in R^l$

$k(x_0, t_0) = 0 \qquad l(x_f, t_f) = 0$

Contraintes instantanées *et/ou* *contraintes intégrales*

$p(x, u, t)dt \leq 0 \quad pour\ \forall t$ $\qquad \int_{t_0}^{t_f} q(x, u, t)dt \leq 0$

Optimisation fonctionelle

Problem statement

$\dot{x} = f(x, u, t)$ *avec* $x \in R^n$ *et* $u \in R^l$

$k(x_0, t_0) = 0 \qquad l(x_f, t_f) = 0$

Contraintes instantanées *et/ou* *contraintes intégrales*

$p(x, u, t)dt \leq 0 \;\; pour\ \forall t \qquad \int_{t_0}^{t_f} q(x, u, t)dt \leq 0$

La fonction optimale doit minimiser le critère

J= $\int_{t_0}^{t_f} r(x, u, t)dt + g(x_0, t_0, x_f, t_f)$ *=>* *min*

Optimisation fonctionelle

Problem statement

$\dot{x} = f(x,u,t)$ *avec* $x \in R^n$ *et* $u \in R^l$

$k(x_0, t_0) = 0 \qquad l(x_f, t_f) = 0$

Contraintes instantanées *et/ou* *contraintes intégrales*

$p(x,u,t)dt \leq 0 \;\; pour\ \forall t \qquad \int_{t_0}^{t_f} q(x,u,t)dt \leq 0$

Partie terminale

La fonction optimale doit minimiser le critère

J= $\int_{t_0}^{t_f} r(x,u,t)dt + g(x_0, t_0, x_f, t_f)$ => *min*

Optimisation fonctionelle

Problem statement

$\dot{x} = f(x, u, t)$ *avec* $x \in R^n$ *et* $u \in R^l$

$k(x_0, t_0) = 0 \qquad l(x_f, t_f) = 0$

Contraintes instantanées *et/ou* *contraintes intégrales*

$p(x, u, t)dt \leq 0 \;\; pour\ \forall t \qquad \int_{t_0}^{t_f} q(x, u, t)dt \leq 0$

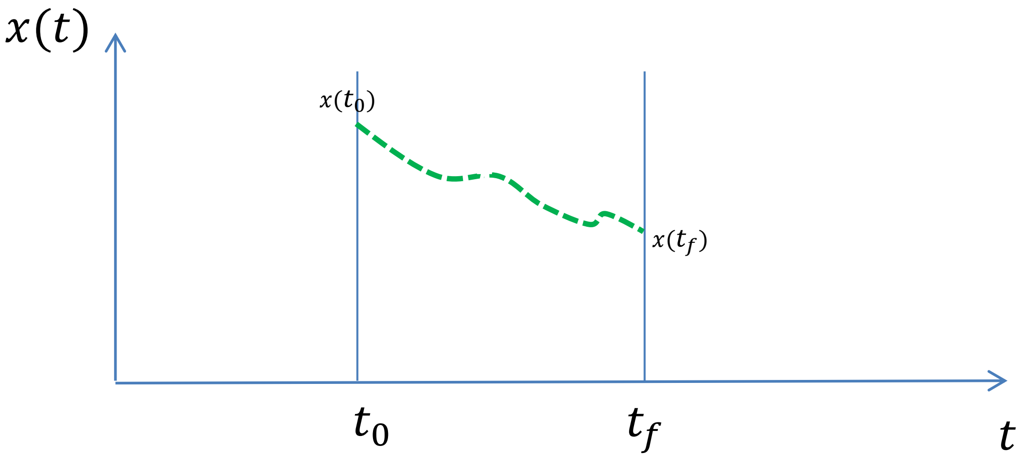
Partie terminale

La fonction optimale doit minimiser le critère

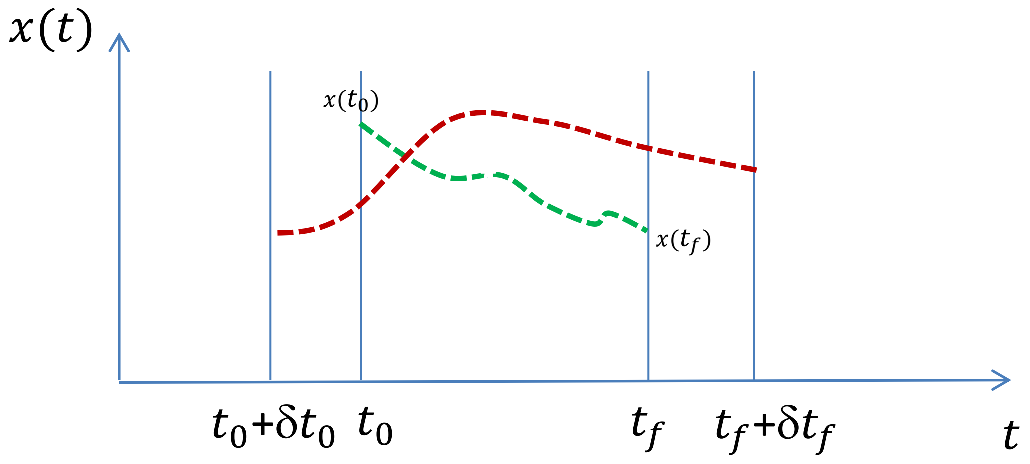
$J = \int_{t_0}^{t_f} r(x, u, t)dt + g(x_0, t_0, x_f, t_f)$ => *min*

En posant $x = [x^T, u^T]^T$ *la trajectoire optimale x* est celle qui minimise le critère*

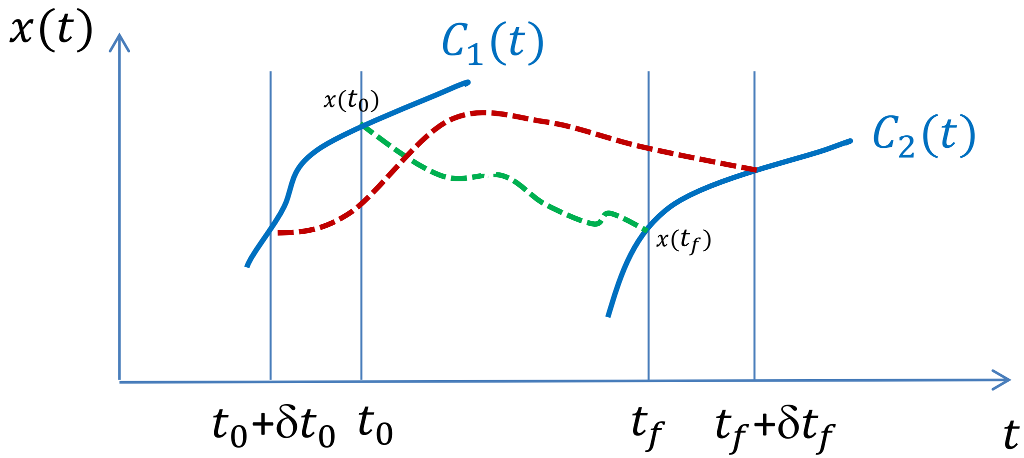
$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} r(x, \dot{x}, t)dt + g(x_0, t_0, x_f, t_f)$ => *min*



Variations de la trajectoire



Variations de la trajectoire



Variations de la trajectoire

Variation de la fontionnelle *J(x)*

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} r(x, \dot{x}, t)\,dt + g(x_0, t_0, x_f, t_f) \quad => \quad min$$

$$k(x_0, t_0) = 0 \qquad l(x_f, t_f) = 0$$

Variation de la fonctionnelle *J(x)*

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} r(x, \dot{x}, t)dt + g(x_0, t_0, x_f, t_f) \quad => \quad min$$

$$k(x_0, t_0) = 0 \qquad l(x_f, t_f) = 0$$

La trajectoire perturbée $x(t_0 + \delta t_0,\ t_f + \delta t_f)$

$$k\left(t_0 + \delta t_0,\ t_f + \delta t_f\right) = 0 \qquad l(t_0 + \delta t_0,\ t_f + \delta t_f) = 0$$

Variation de la fonctionnelle *J(x)*

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} r(x,\dot{x},t)dt + g(x_0, t_0, x_f\,, t_f) \quad => \quad min$$

$$k(x_0, t_0) = 0 \qquad l(x_f, t_f) = 0$$

La trajectoire perturbée $x(t_0+\delta t_0,\, t_f+\delta t_f)$

$$k\left(t_0+\delta t_0,\, t_f+\delta t_f\right) = 0 \qquad l(t_0+\delta t_0,\, t_f+\delta t_f) = 0$$

Variation de la fonctionnelle

$$\delta J = J(x + \delta x) - J(x)$$

En notant

$$r_0 = r\left(x(t_0), x(\dot{t}_0), t_0\right)$$

$$r_f = r\left(x(t_f), x(\dot{t}_f), t_f\right)$$

Variation de la fontionnelle *J(x)*

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} r(x, \dot{x}, t)\,dt + g(x_0, t_0, x_f\,, t_f)$$

$$\delta J = J(x + \delta x) - J(x)$$

développement limité au 1er ordre en δx et $\frac{d}{dt}\delta x$

Variation de la fonctionnelle $J(x)$

$$J(x)= \int_{t_0}^{t_f} r(x,\dot{x},t)dt + g(x_0,t_0,x_f\ ,\ t_f)$$

$$\delta J = J(x + \delta x) - J(x)$$

développement limité au 1^er ordre en δx et $\frac{d}{dt}\delta x$

$$\delta J= \int_{t_0}^{t_f}(r_x{}^T\delta x \ \ + r_{\dot{x}}{}^T\frac{d}{dt}(\delta x))dt + (r_f\delta t_f \ \text{-}\ r_0\delta t_0) + (g_{x_0}{}^T\delta x_0 + g_{t_0}{}^T\delta t_0) + (g_{x_f}{}^T\delta x_f + g_{t_f}{}^T\delta t_f)$$

Variation de la fontionnelle *J(x)*

$$J(x)= \int_{t_0}^{t_f} r(x,\dot{x},t)dt + g(x_0,t_0,x_f\,,t_f)$$

$$\delta J = J(x + \delta x) - J(x)$$

développement limité au 1^er ordre en δx et $\frac{d}{dt}\delta x$

$$\delta J= \int_{t_0}^{t_f}(r_x{}^T\delta x \;\; + \underbrace{r_{\dot{x}}{}^T\frac{d}{dt}(\delta x)})dt + (r_f\delta t_f \,-\, r_0\delta t_0) + (g_{x_0}{}^T\delta x_0 + g_{t_0}{}^T\delta t_0) + (g_{x_f}{}^T\delta x_f + g_{t_f}{}^T\delta t_f)$$

Intégration par parties du second terme *(rappel* $\int_{t_0}^{t_f} u\dot{v}dt = [uv\;\;]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f}\frac{d}{dt}(u)vdt$ *avec* $\dot{v} = \frac{d}{dt}\delta x$ *)*

$$\int_{t_0}^{t_f} \underbrace{r_{\dot{x}}{}^T}_{u}\underbrace{\frac{d}{dt}(\delta x)}_{\dot{v}}dt = [\, r_{\dot{x}}{}^T\;(\delta x)\,]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f}\frac{d}{dt}(r_{\dot{x}}{}^T)\delta x dt = [\, r_{\dot{x}}{}^T\;(t_f)\,\delta x\,(t_f)] -$$

$$-\,[\, r_{\dot{x}}{}^T\;(t_0)\,\delta x\,(t_0)\,] - \int_{t_0}^{t_f}\frac{d}{dt}(r_{\dot{x}}{}^T)\delta x dt$$

Variation de la fontionnelle *J(x)*

$$J(x)= \int_{t_0}^{t_f} r(x,\dot{x},t)dt + g(x_0,t_0,x_f\,,t_f)$$

$$\delta J = J(x+\delta x) - J(x)$$

développement limité au 1^er ordre en δx et $\frac{d}{dt}\delta x$

$$\delta J= \int_{t_0}^{t_f}(r_x{}^T\delta x \;\; + \underbrace{r_{\dot{x}}{}^T \frac{d}{dt}(\delta x)}_{})dt + (r_f\delta t_f \text{ - } r_0\delta t_0) \cancel{+(g_{x_0}{}^T\delta x_0+g_{t_0}{}^T\delta t_0) + (g_{x_f}{}^T\delta x_f+g_{t_f}{}^T\delta t_f)}$$

t

Intégration par parties du second terme (rappel $\int_{t_0}^{t_f} u\dot{v}dt = [uv\;\;]_{t_0}^{t_f}$ - $\int_{t_0}^{t_f}\frac{d}{dt}(u)v dt$ *avec* $\dot{v}$ = $\frac{d}{dt}\delta x$ *)*

$$\int_{t_0}^{t_f} \underbrace{r_{\dot{x}}{}^T}_{u} \underbrace{\frac{d}{dt}(\delta x)}_{\dot{v}}dt = [\, r_{\dot{x}}{}^T\;(\delta x)\,]_{t_0}^{t_f} \text{ - } \int_{t_0}^{t_f}\frac{d}{dt}(r_{\dot{x}}{}^T)\delta x dt = [\, r_{\dot{x}}{}^T\;(t_f)\,\delta x\;(t_f)] -$$

$$\text{- } [\, r_{\dot{x}}{}^T\;(t_0)\,\delta x\;(t_0)\,] \text{ - } \int_{t_0}^{t_f}\frac{d}{dt}(r_{\dot{x}}{}^T)\delta x dt$$

Si t_0, t_f, x_0, x_f sont fixés => δt_0 = 0, δt_f = 0, δx_0 = 0, δx_f = 0

Variation de la fontionnelle $J(x)$

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left({r_x}^T \delta x \;\; + {r_{\dot{x}}}^T \frac{d}{dt}(\delta x) \right) dt \;=\; \int_{t_0}^{t_f} \left({r_x}^T - \frac{d}{dt} {r_{\dot{x}}}^T \right) \delta x \; dt$$

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(r_x \quad - \frac{d}{dt} r_{\dot{x}} \quad \right)^T \delta x \; dt$$

Variation de la fontionnelle *J(x)*

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} ({r_x}^T \delta x \ + {r_{\dot{x}}}^T \frac{d}{dt}(\delta x))dt = \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} ({r_x}^T - \frac{d}{dt} {r_{\dot{x}}}^T)}\, \delta x \, dt$$

δ *Pour avoir un minimum :*

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} (r_x \quad - \frac{d}{dt} r_{\dot{x}} \quad)^T \delta x \, dt \geq 0 \ \ mais \ \ \delta x > 0 \ \ ou \ \ \delta x < 0 \ \ => \ \ \delta J = 0$$

Lemme de Lagrange

$$Si \ \ \int_{t_0}^{t_f} y^T(t) v(t) \, dt = 0 \ \ \text{pour tout} \ \ v(t) \ \text{continue}$$

Alors $y(t)$ *est nulle sur* $[t_0, t_f]$

Application : Condition d'Euler (eq. diff. du 2nd ordre)

$$(r_x \quad - \frac{d}{dt} r_{\dot{x}} \quad) \ = \ 0 \qquad pour \ \ x = x^*$$

Condition d'Euler

$$\left(\boldsymbol{r_x} - \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\boldsymbol{r_{\dot{x}}}\right) = \boldsymbol{0}$$

Si x *n'apparaît pas dans* r => $\frac{d}{dt} r_{\dot{x}} = 0$

$r_{\dot{x}} = const$

Condition d'Euler

$$\left(\boldsymbol{r_x} \quad - \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\boldsymbol{r_{\dot{x}}} \quad\right) \quad = \quad \boldsymbol{0}$$

$Si \;\; x \;\; n'apparaît \quad pas\; dans \;\; r \quad => \quad \frac{d}{dt}r_{\dot{x}} = 0$

$r_{\dot{x}} = const$

$Si \; \dot{x} \quad n'apparaît\; pas\; dans \;\; r$

$r_x \; = \; 0$

Condition d'Euler

$$\left(\boldsymbol{r_x} - \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\boldsymbol{r_{\dot{x}}}\right) = \boldsymbol{0}$$

Si x *n'apparaît pas dans* r $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt} r_{\dot{x}} = 0$

$r_{\dot{x}} = const$

Si $\dot{x}$ *n'apparaît pas dans* r

$r_x = 0$

Si t *n'apparaît pas explicitement dans* r

$r_t = 0$

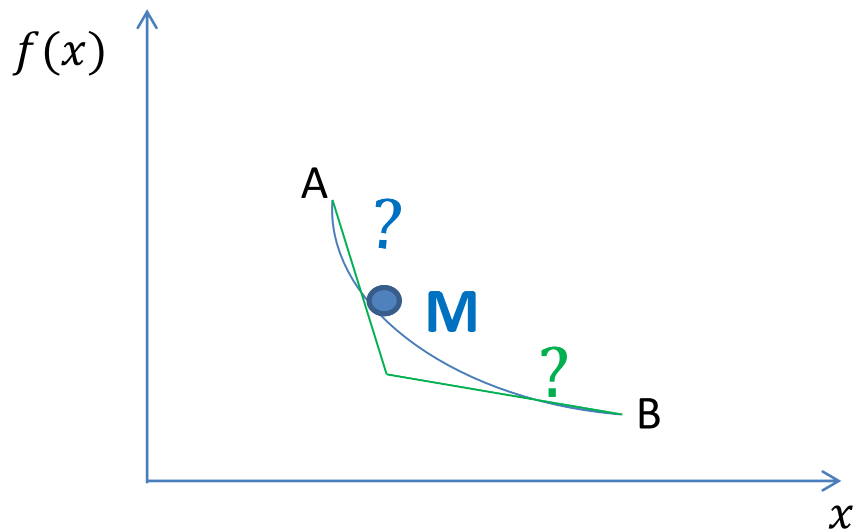
$$\frac{d}{dt}\left(r - r_{\dot{x}}^{T}\,\dot{x}\right) = r_t + \underbrace{\left(r_x - \frac{d}{dt} r_{\dot{x}}\right)^{T}}_{\text{Condition d'Euler}}\dot{x} = 0$$

=> Identité de Beltrami

$$r - r_{\dot{x}}^{T}\,\dot{x} = \text{const}$$

Problème du brachistochrone

- Etant donné deux points A et B (de hauteurs différentes), rechercher la trajectoire optimale $f^*(x)$ permettant la descente la plus rapide de A à B d'un point M, de masse m, soumis à la seule pesanteur (sorte de toboggan).



NB Ce problème (qui peut être résolu par des méthodes différentes) a donné naissance au *calcul des variations* !

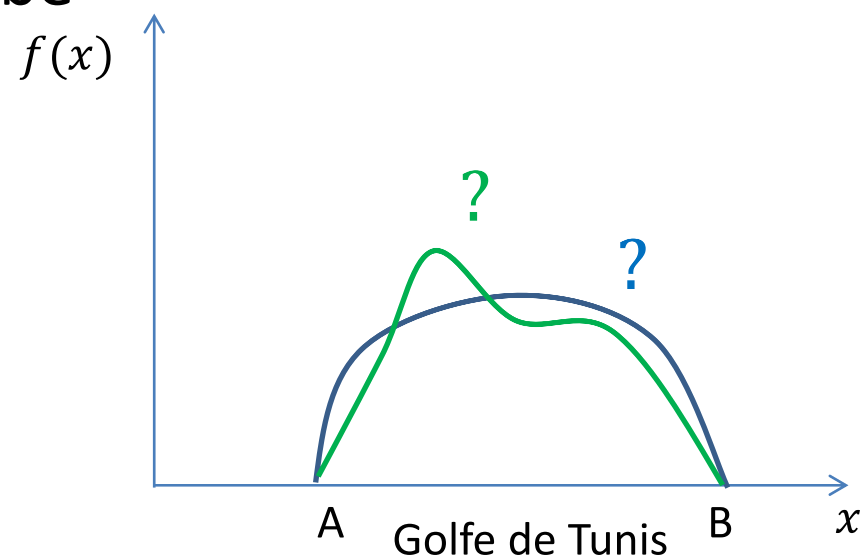
Problème du brachistochrone

- Fait au tableau (« tip » : utiliser l'équation d'Euler-Lagrange)

Problèmes isoparamétriques

- Problème de Didon: si on dispose d'une corde de longueur fixée, disons L, quelle est la plus grande surface qu'on puisse entourer avec cette corde?

- Du point de vue de l'optimisation fonctionnelle: Trouver la fonction optimale $f^*(x)$ qui maximise l'aire sous la courbe



Problèmes isoparamétriques

Problème de Didon, formalisation

- La longueur est définie par la formule

$$L = \int_a^b ds\,;\; ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\Rightarrow\; L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

- Problème : rechercher une courbe $y = f(x)$ qui maximise l'aire
- $$A = \int_a^b f(x) dx \Rightarrow max$$

Problèmes isoparamétriques

Problème de Didon, formalisation

- Fait au tableau (« tip « : utiliser l’identité de Beltrami)

Principe du maximum

$$r_x - \frac{d}{dt} r_{\dot{x}} = 0 \Leftrightarrow r_x = \frac{d}{dt} r_{\dot{x}}$$ *sur la trajectoire optimale*

$posons \;\; r_{\dot{x}} = \lambda(\mathrm{t}) \Leftrightarrow r_x = \dot{\lambda}(t)$, et $\dot{x} = \Phi(x, u, t)$

Définissons $$H(x, u, \lambda, t) = -r + \lambda^T \, \Phi$$

La fonction sous
l'intégrale à optimiser
$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} r(x, \dot{x}, t)\, dt$

Principe du maximum

La commande optimale u^* *d'un processus continu*

$$\begin{cases} \dot{x} = \Phi(x, u, t) \\ x \in \Upsilon, u \in U \end{cases}$$

Qui minimise l'intégrale $J = \int_{t_0}^{t_f} r(x, u, t) dt$ *=> min*

est celle qui maximise le Hamiltonien, les contraintes étant satisfaites

$$H(x, u, \lambda, t) = -r(x, u, t) + \lambda^T \Phi(x, u, t)$$

$$H(x^*, u^*, \lambda, t) = \underset{u \in U}{\text{Max}}\, H(x, u, \lambda, t) \quad \text{pour } \forall t$$

Equations canoniques de Hamilton

$$H(x,\lambda,t) = -r + \lambda^T \Phi$$

rappel $r(x,\dot{x},t)$

$\dot{x} = \Phi(x,u\ ,t)$

$$H_x = \cancel{\Phi_x{}^T.\lambda} - r_x - \cancel{\Phi_x{}^T.r_{\dot{x}}} = -\,r_x$$

Equations canoniques de Hamilton

$$H(x,\lambda,t) = -r + \lambda^T\Phi$$

rappel $r(x,\dot{x},t)$

$\dot{x} = \Phi(x,u,t)$

$$H_x = \cancel{\Phi_x{}^T.\lambda} - r_x - \cancel{\Phi_x{}^T.r_{\dot{x}}} = -\,r_x$$

soit $H_x = -\,\dot{\lambda}$

Equations canoniques de Hamilton

$$H(x,\lambda,t) = -r + \lambda^T \Phi$$

rappel $r(x,\dot{x},t)$

$\dot{x} = \Phi(x,u\,,t)$

$$H_x = \cancel{\Phi_x{}^T.\lambda} - r_x - \cancel{\Phi_x{}^T.r_{\dot{x}}} = -\,r_x$$

soit $H_x = -\,\dot{\lambda}$

$$H_\lambda = \Phi + \cancel{\Phi_\lambda{}^T.\lambda} - \cancel{\Phi_\lambda{}^T.r_{\dot{x}}} = \Phi = \dot{x}$$

Equations canoniques de Hamilton

$$H(x, \lambda, t) = -r + \lambda^T \Phi$$

rappel $r(x, \dot{x}, t)$

$\dot{x} = \Phi(x, u, t)$

$$H_x = \cancel{\Phi_x{}^T . \lambda} - r_x - \cancel{\Phi_x{}^T . r_{\dot{x}}} = -r_x$$

soit $H_x = -\dot{\lambda}$

$$H_\lambda = \Phi + \cancel{\Phi_\lambda{}^T . \lambda} - \cancel{\Phi_\lambda{}^T . r_{\dot{x}}} = \Phi = \dot{x}$$

$$H_t = -r_t - \Phi_t{}^T . r_{\dot{x}} + \lambda^T \Phi_t = -r_t$$

comme $\frac{dH}{dt} = H_x{}^T \dot{x} + H_\lambda{}^T \dot{\lambda} + H_t$

Principe du maximum
Equations canoniques de Hamilton

Exemple : commande en temps minimum

$$H_x = -\dot{\lambda}$$

$$H_\lambda = \dot{x}$$

$$\frac{dH}{dt} = -r_t$$

Ex. Ramener à l'origine le système $\ddot{y} = u$ *avec la contrainte*
$|u| \leq 1$ *en temps minimum i.e.* $J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt$ *=> min*

Commande en temps minimum

formulation du problème

- $\ddot{y} = u$ éq. diff. 2nd degré <=> deux éq. diff. 1er degré
- *Posons* $x_1 = y$; $x_2 = \dot{y}$ => $\dot{x}_1 = x_2$; $\dot{x}_2 = u$
- *La contrainte* $|u| \leq 1$ => $u^2 - 1 \leq 0$
- *Le critère* $J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt$ => min   *donc r(.) = 1*
- *Conditions terminales* $x_1(t_0) = y_0$; $x_2(t_0) = \dot{y}_0$

  $x_1(t_f) = 0$; $x_2(t_f) = 0$ *(ramener le système à l'origine)*

Hamiltonien $H = -r + \lambda^T \Phi = -1 + \lambda^T \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} = \underbrace{-1}_{\text{dépend du critère à optimiser}} + \underbrace{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 u}_{\text{dépend de la dynamique du système}}$

rappel $\dot{x} = \Phi(x, \lambda, t)$

Commande en temps minimum

conditions du 1er ordre

$$\dot{x} = H_\lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \Phi$$

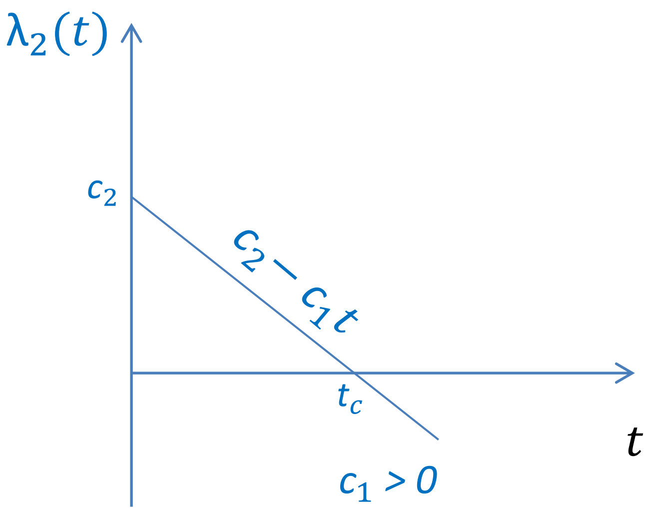
$$\dot{\lambda} = -H_x \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda_1 \end{bmatrix}$$

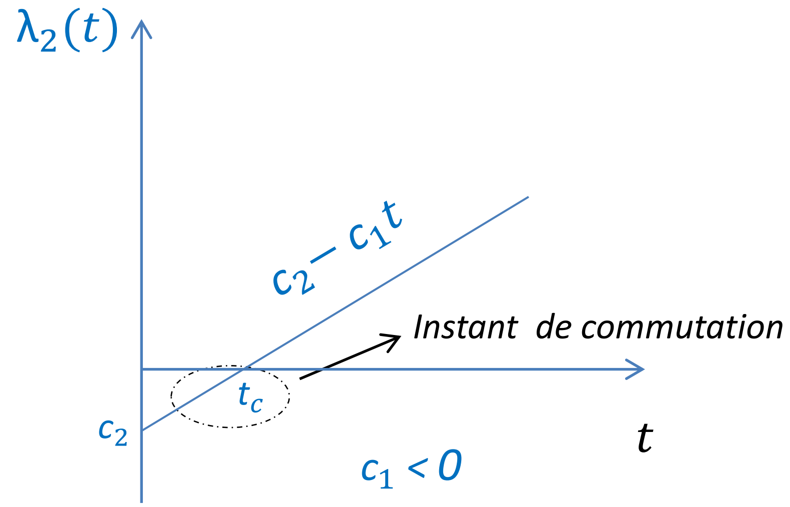
D'où $\dot{\lambda}_1 = 0$ et $\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1$ => $\lambda_1 = c_1$ et $\lambda_2 = c_2 - \lambda_1 t = c_2 - c_1 t$

H = -1 + $\lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$ *= > linéaire en u => u= sign(* λ_2*) pour maximiser H !*

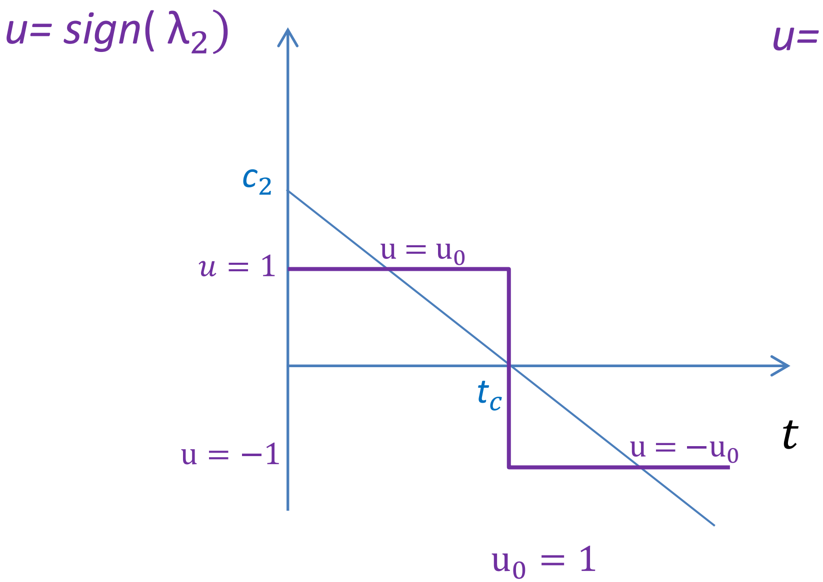
Mais $\lambda_2(t)$ *est linéaire => change de signe une seule fois au maximum*

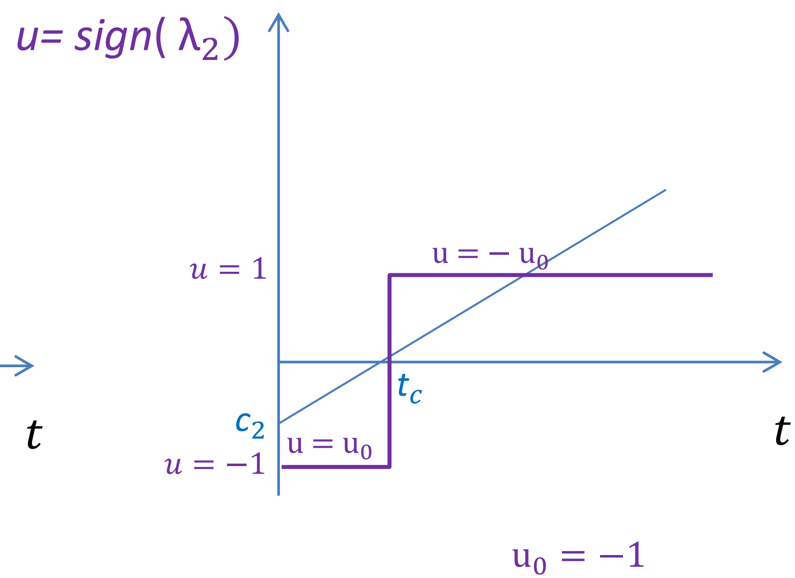
Comme $\lambda_2(t)$ est linéaire en t => λ_2 change de signe au plus une seule fois :





$u = u_0$ qd $t \in [\, t_0, t_c \,[$ et $u = -u_0$ qd $t \in [\, t_c, t_f \,]$





Commande en temps minimum

$u = u_0 \;\; qd \;\; t \in [\, t_0, t_c [\quad et \; u = -u_0 \;\; qd \;\; t \in [\, t_c, t_f \,]$

Deux types de trajectoires :

$t \in [\, t_0, t_c [$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = u_0 \quad => \quad u_0 \frac{dx_1}{dt} = x_2 \frac{dx_2}{dt}$$

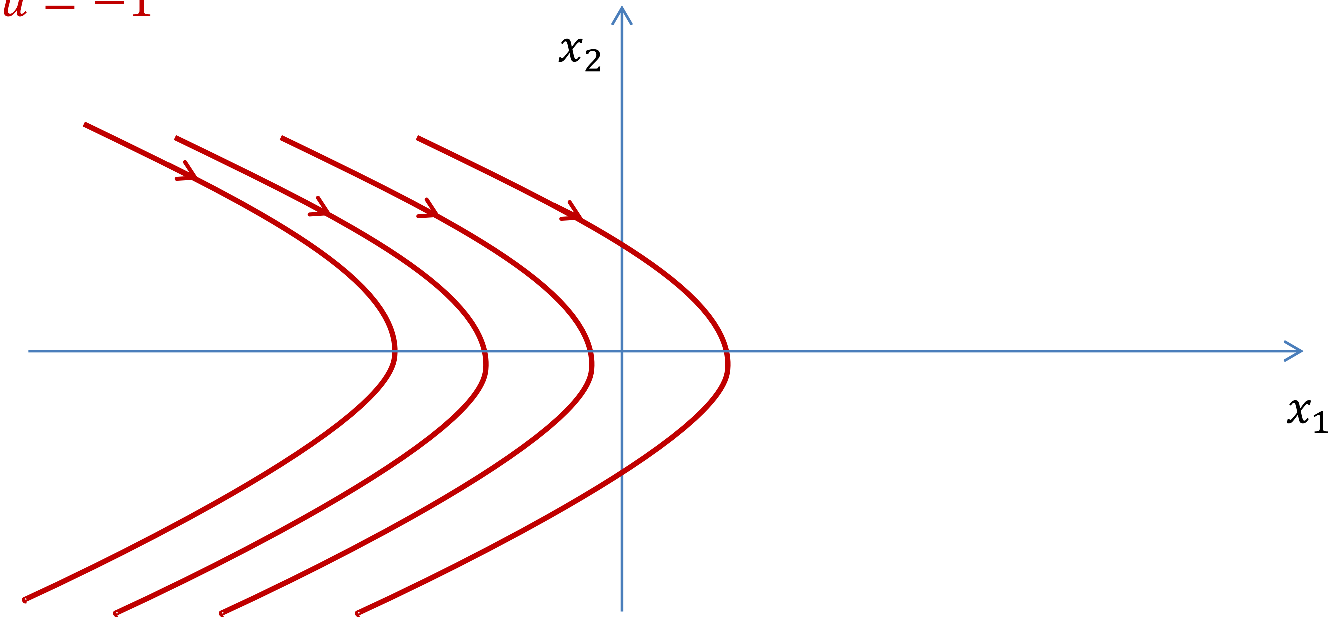
$$u_0(x_1 - x_1(t_0)) = \frac{1}{2}({x_2}^2 - {x_2}^2(t_0))$$

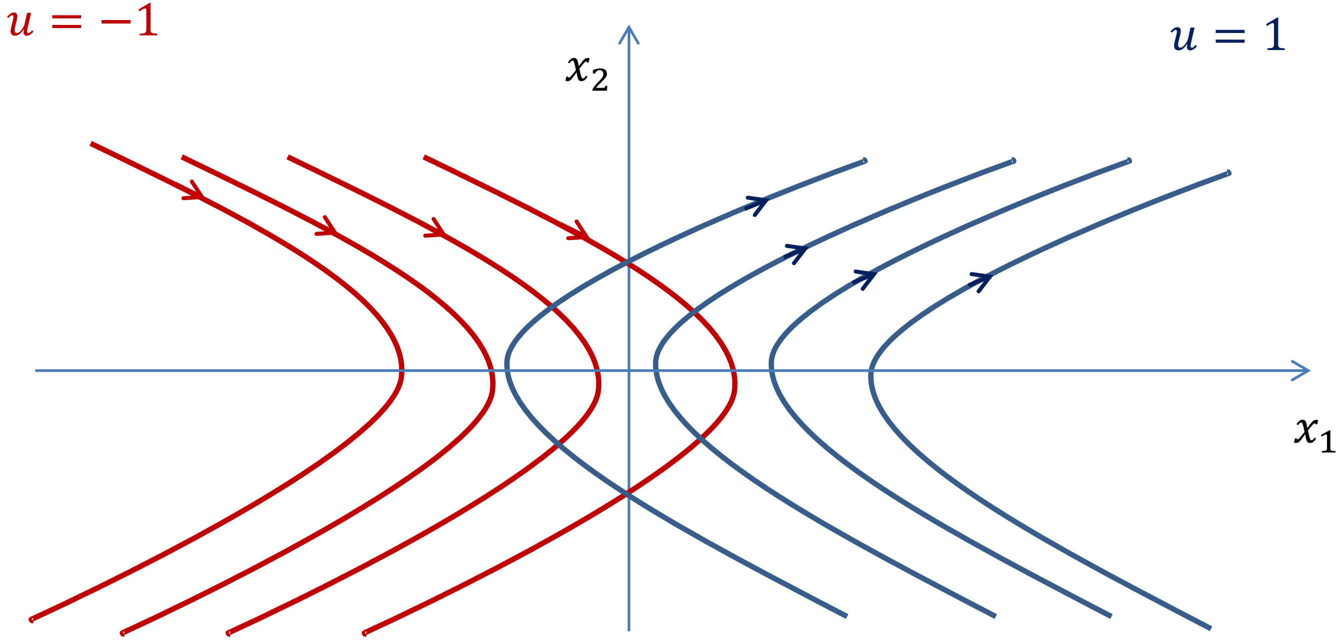
$$x_1 = \frac{1}{2\,u_0}{x_2}^2 + C_1$$

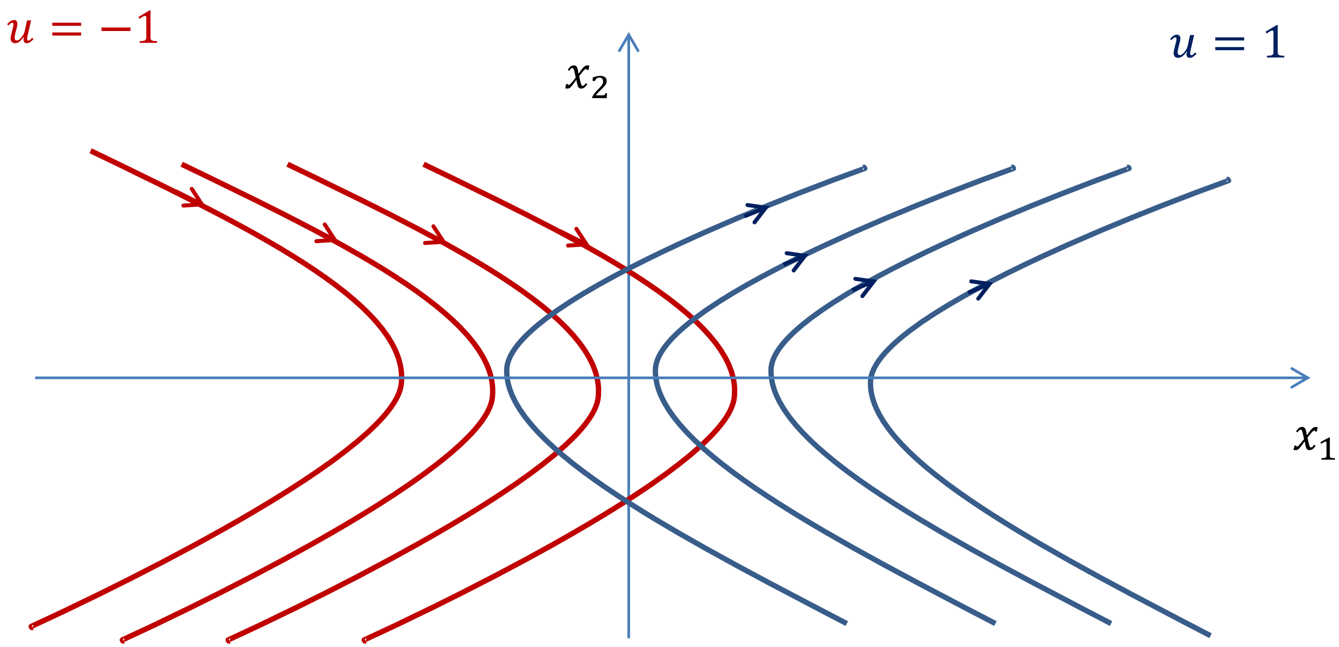
$t \in [\, t_c, t_f \,]$

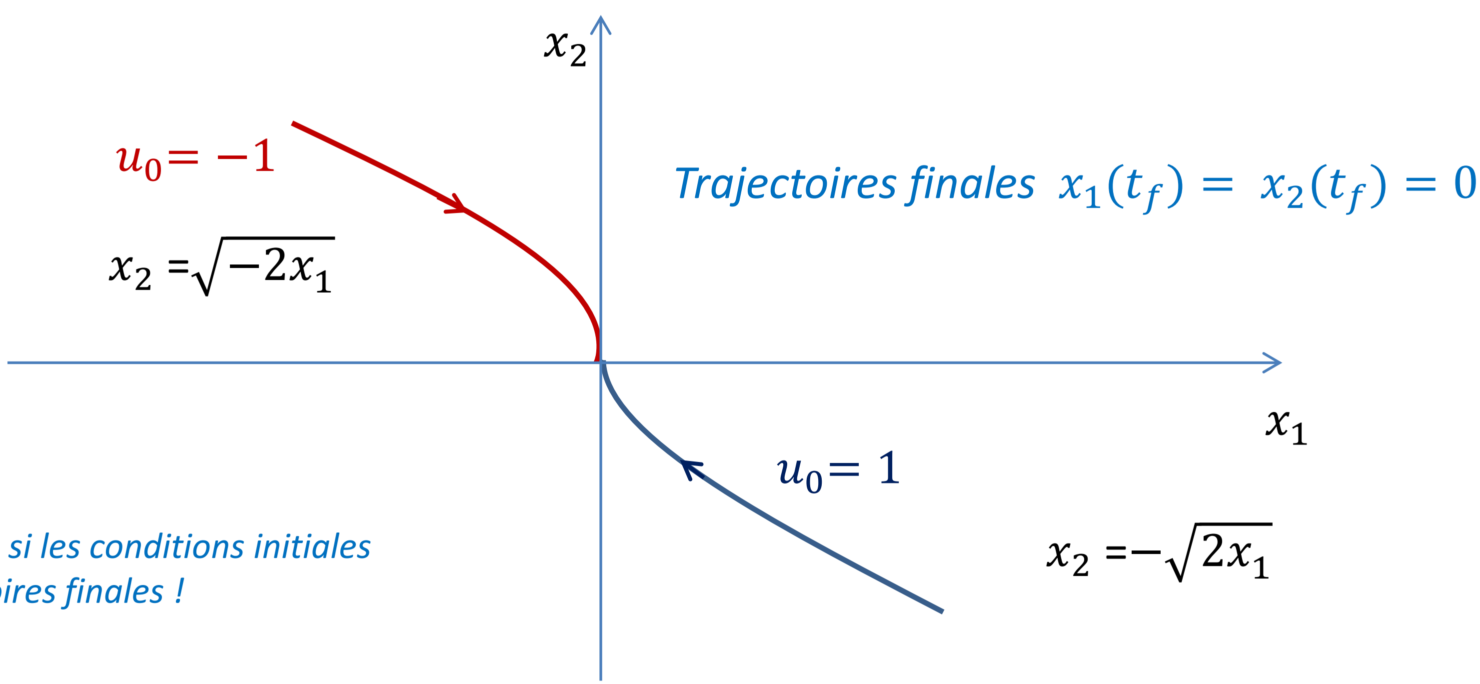
$$x_1 = -\frac{1}{2\,u_0}{x_2}^2 + C_2$$

$u = -1$



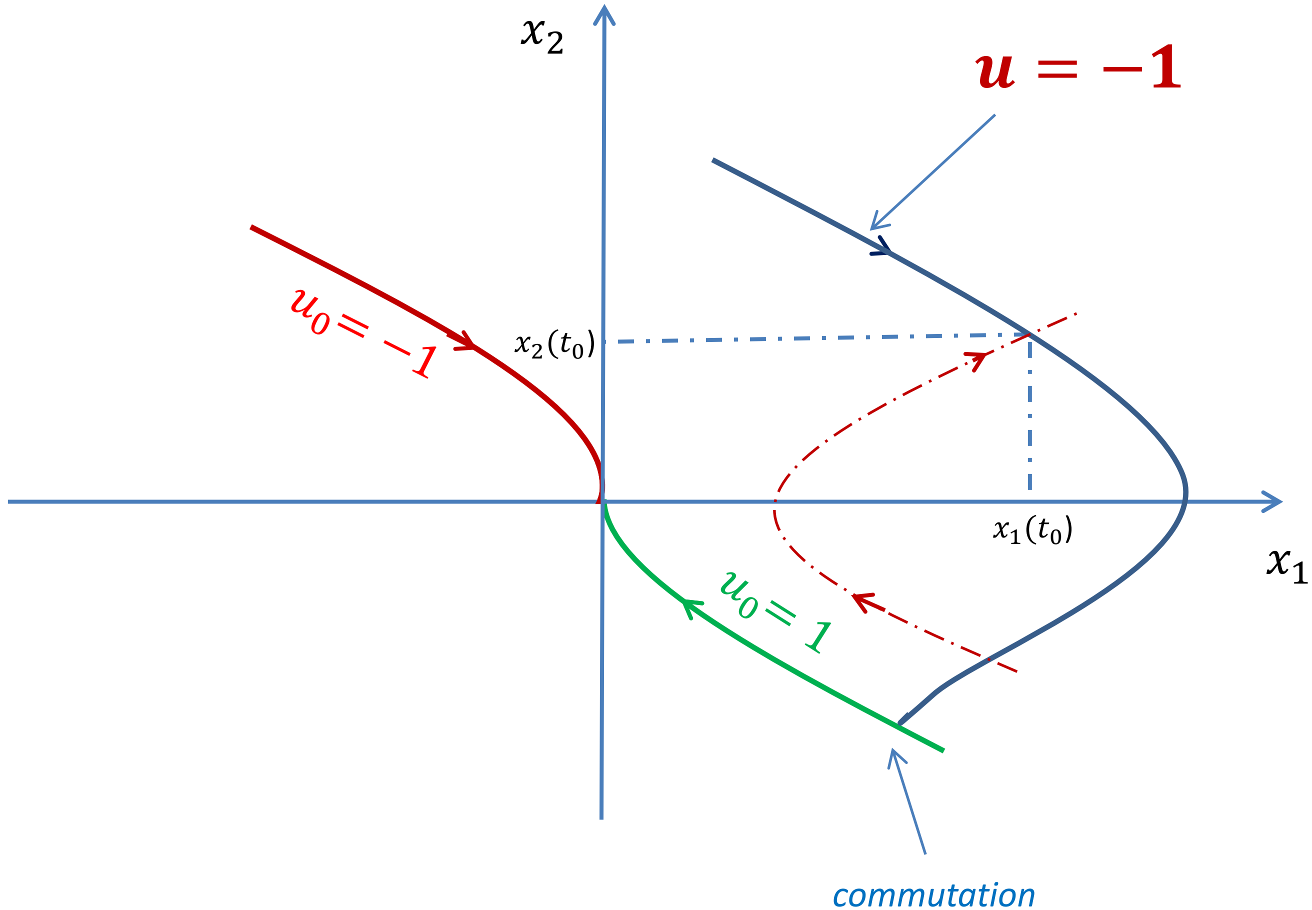

$u = -1$
$u = 1$
x_2
x_1





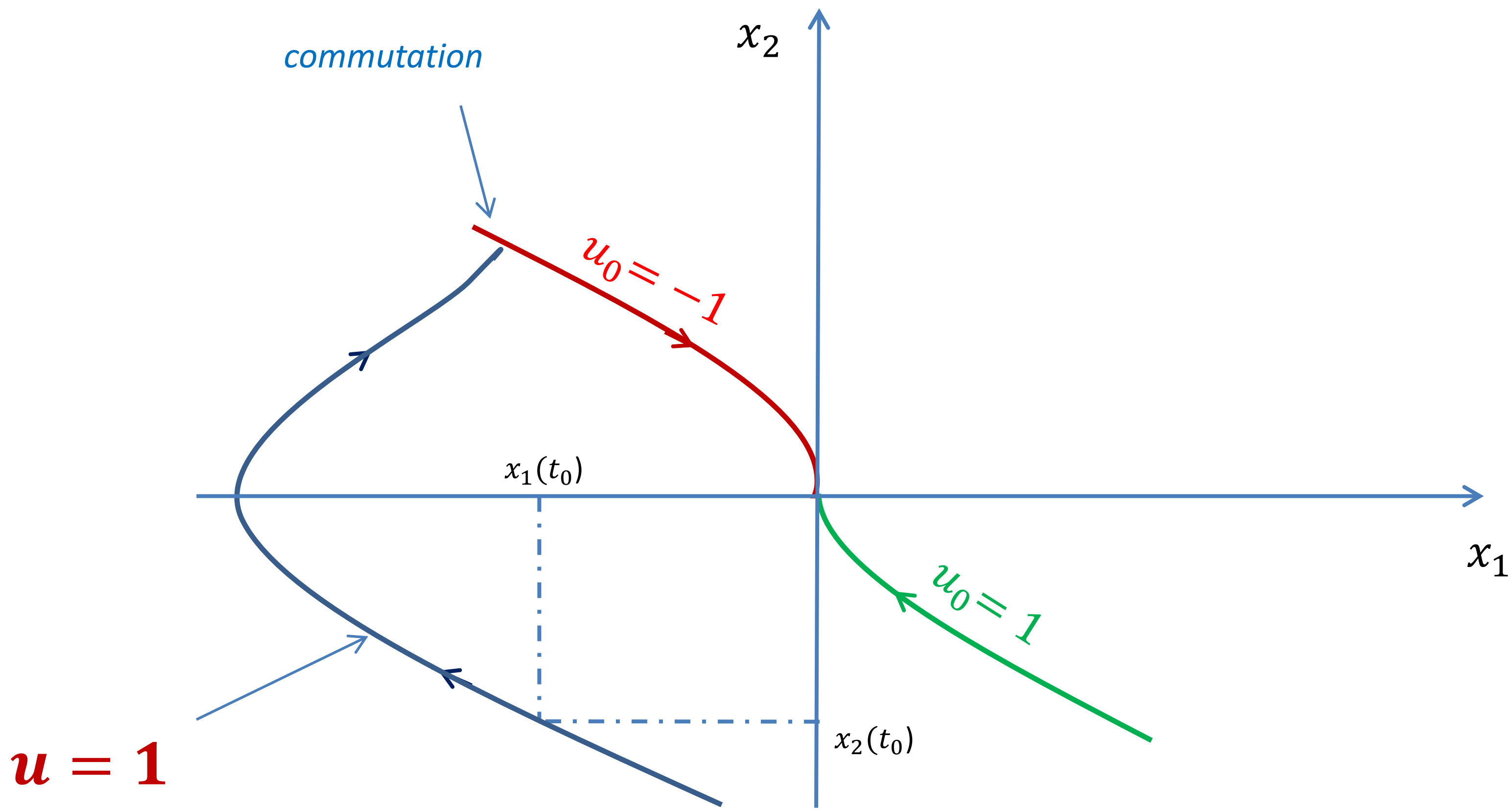
Zéro commutations si les conditions initiales sont sur les trajectoires finales !

Commande en temps minimum   Bang-bang control



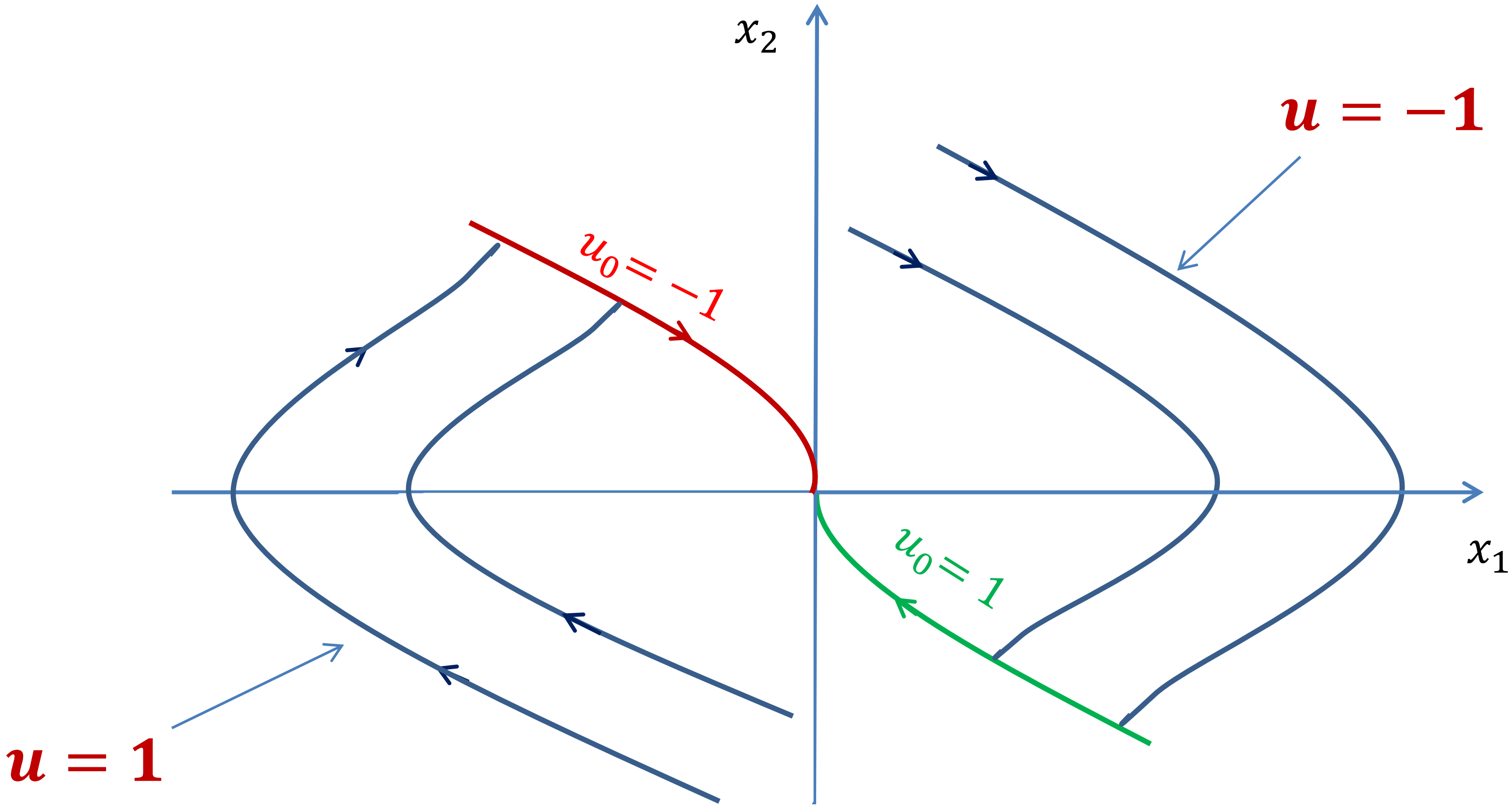
La commande change de signe sur la courbe de séparation
On a droit à une seule commutation maxi => de la condition initiale $\{x_1(t_0), x_2(t_0)\}$ *il faut suivre la parabole qui intersecte la courbe de séparation, pas celle qui s'éloigne (en pointillé) =>*
u = -1 si $t \in [\, t_0, t_c\, [$ *après u = 1 si* $t \in [\, t_c, t_f\, [$ *pour des CI au-dessus de la courbe*

Commande en temps minimum   Bang-bang control



La commande change de signe sur la courbe de séparation
On a droit à une seule commutation maxi => de la condition initiale $\{x_1(t_0), x_2(t_0)\}$ *il faut suivre la parabole qui intersecte la courbe de séparation =>*
u = 1 si t $\in [\, t_0, t_c\, [$ *après u = -1 si t* $\in [\, t_c, t_f\, [$ *pour des CI au-dessous de la courbe*

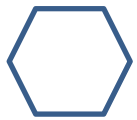
Commande en temps minimum   Bang-bang control



La commande change de signe sur la courbe de séparation

Commande en temps minimum
Généralisation pour des systèmes linéaires

- $\dot{x} = Ax + Bu$ *avec* $J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt$ => *min*

  $u(t) \in \omega =$  $\in R^m$ (polyhèdre)

$H = -1 + \lambda^T Ax + \lambda^T Bu$ *linéaire par rapport à* u

Pb de programmation linéaire max $\lambda^T Bu$

Solution **unique** sur les sommets du polyhèdre (simplexe)

NB Si les valeurs propres de A sont réelles => $\leq$ n-1 commutations avec n=dim(A)

Si les valeurs propres de A sont complexes => nombre de commutations fini non borne cad peut être $>$ n (voir exemple pendule linéarisé)

Commande en temps minimum

pendule linéarisé

- $\ddot{y} + y = u$ *éq. diff. 2nd degré <=> deux éq. diff. 1er degré*
- *Posons* $x_1 = y$; $x_2 = \dot{y}$ => $\dot{x_1} = x_2$; $\dot{x_2} = -y + u = -x_1 + u$
- *La contrainte* $|u| \leq 1$ => $u^2 - 1 \leq 0$
- *Le critère* $J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt$ => min *donc r(.) = 1*
- *Conditions terminales* $x_1(t_0) = y_0$; $x_2(t_0) = \dot{y}_0$

  $x_1(t_f) = 0$; $x_2(t_f) = 0$ *(ramener le système à l'origine)*

Hamiltonien *Max* $H = -r + \lambda^T \Phi = -1 + \lambda^T \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + u \end{bmatrix} = -1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 (-x_1 + u)$

Commande en temps minimum

pendule linéarisé

$$\dot{\lambda} = -H_x \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ -\lambda_1 \end{bmatrix}$$

D'où $\dot{\lambda}_1 = \lambda_2$ et $\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1$ => $\ddot{\lambda}_2 = -\dot{\lambda}_1 = -\lambda_2$ et $\lambda_2 = A\,sin(t - \varphi)$

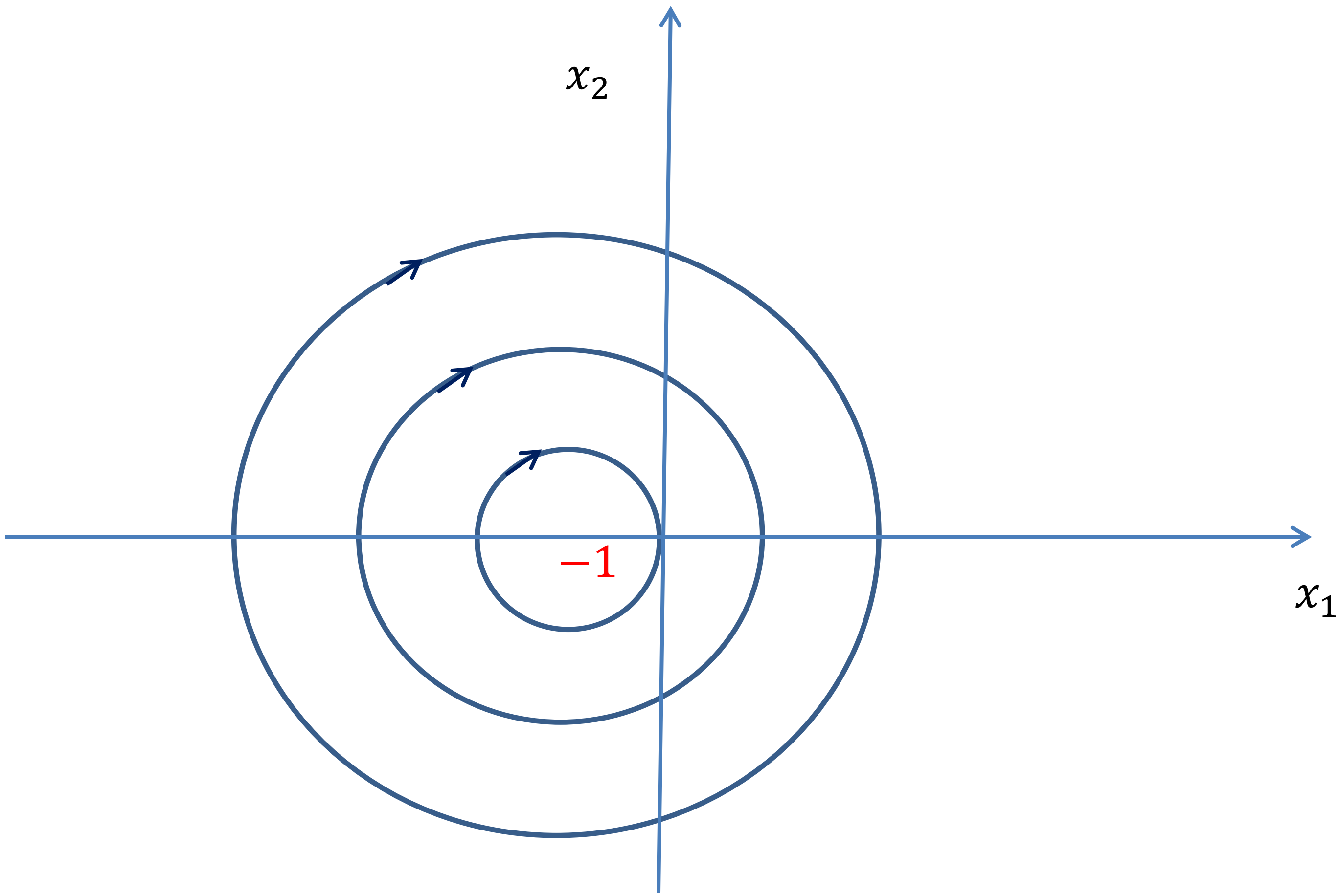
H = -1 + $\lambda_1 x_2 + \lambda_2(-x_1 u)$*= > linéaire en u =>*
u= sign(λ_2*) = sign(*$A\,sin(t-\varphi)$*) pour maximiser H !*

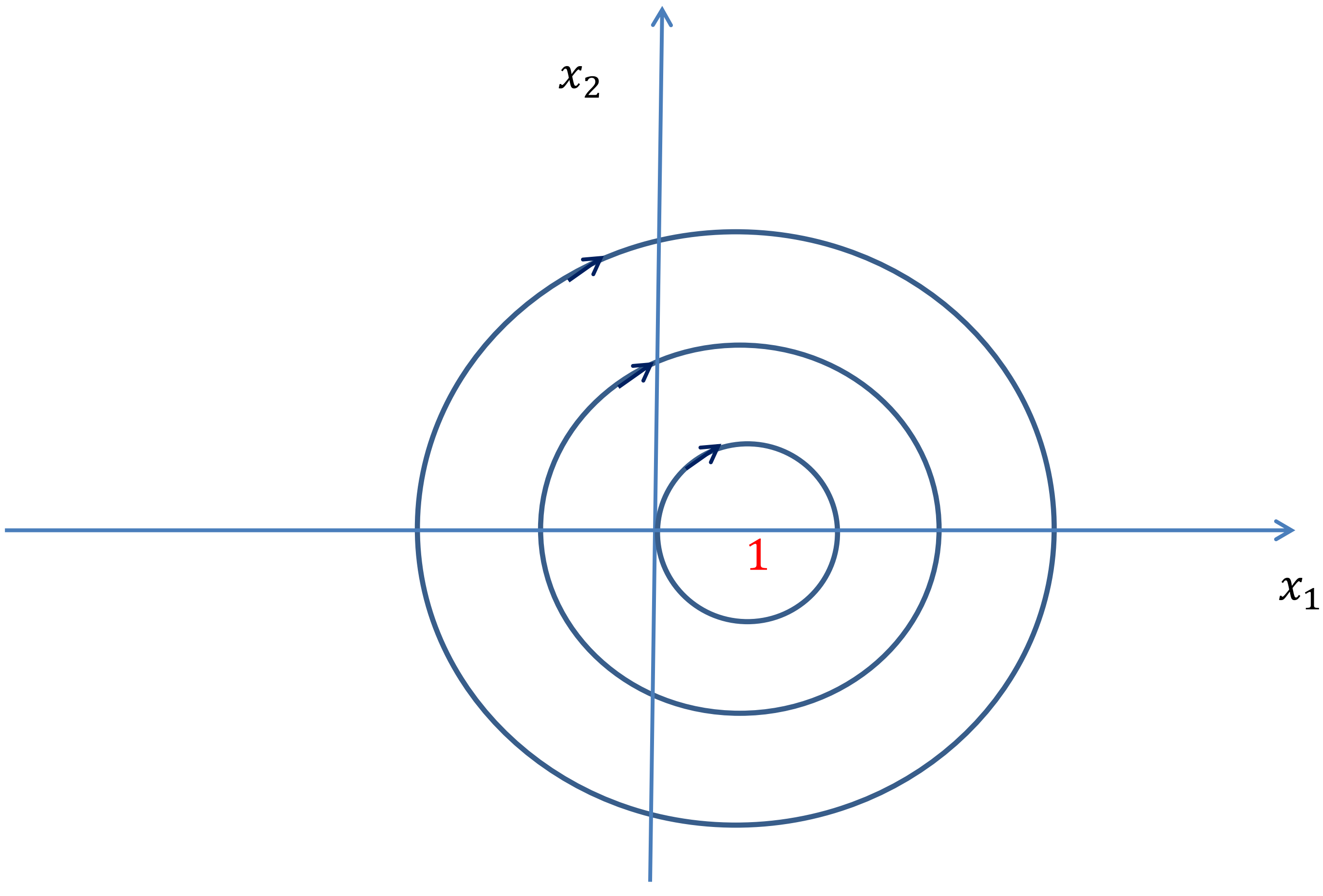
La fonction est sinusoïdale => change de signe toutes les π (secondes) et *u**= {1, -1}

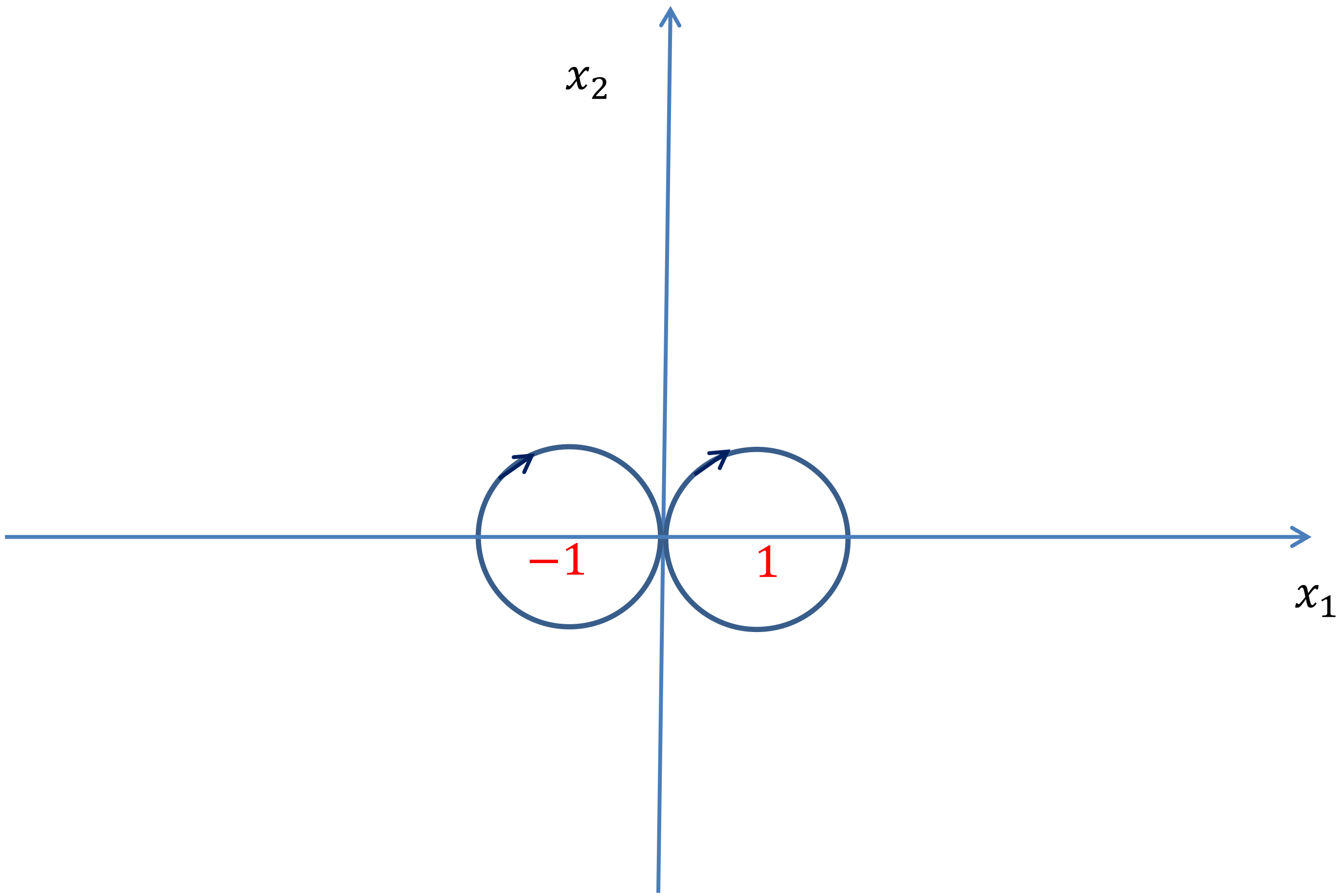
$\frac{dx_1}{dt} = x_2$ => $dx_1 = x_2 dt$

$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + u_0$ => $dx_2 = (-x_1 + u_0)dt$

$(x_1 - u_0)^2 + x_2^2 = \rho^2$ => les trajectoires sont des cercles parcourus en
2π (secondes) et centrées en $u_0 = +1$ ou -1

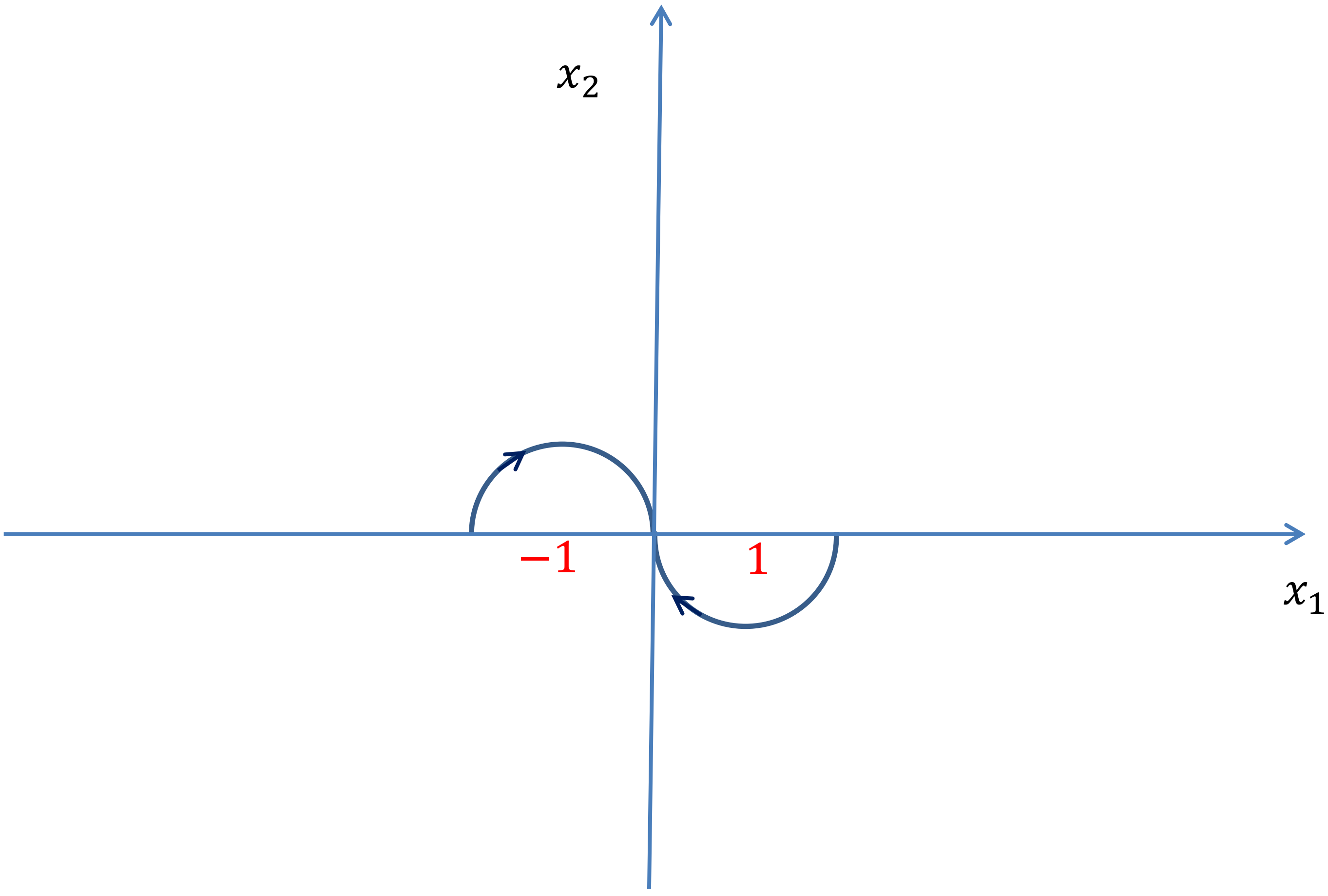

x_2
x_1
-1


x_2
x_1
1



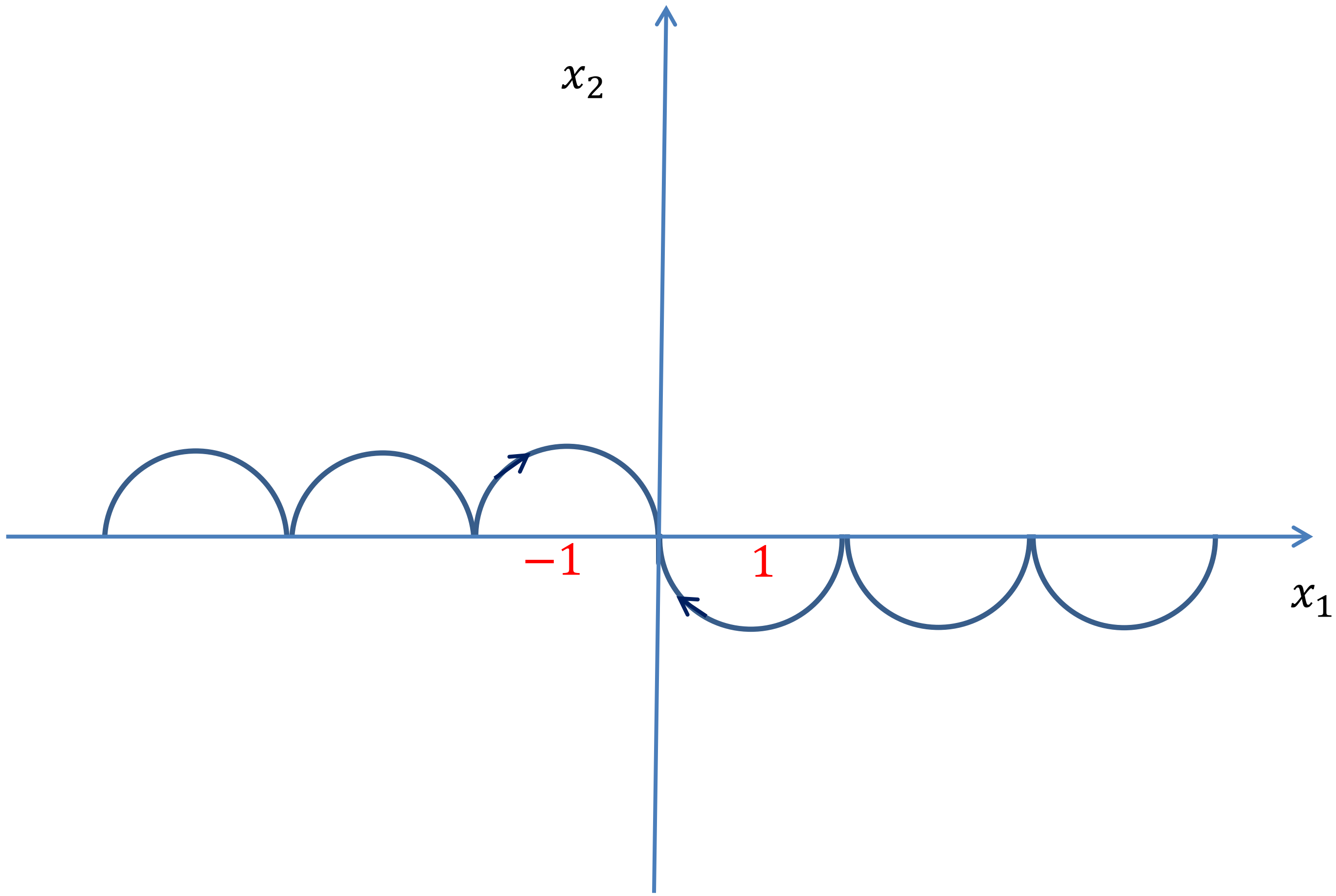
x_2
-1
1
x_1

Trajectoires finales

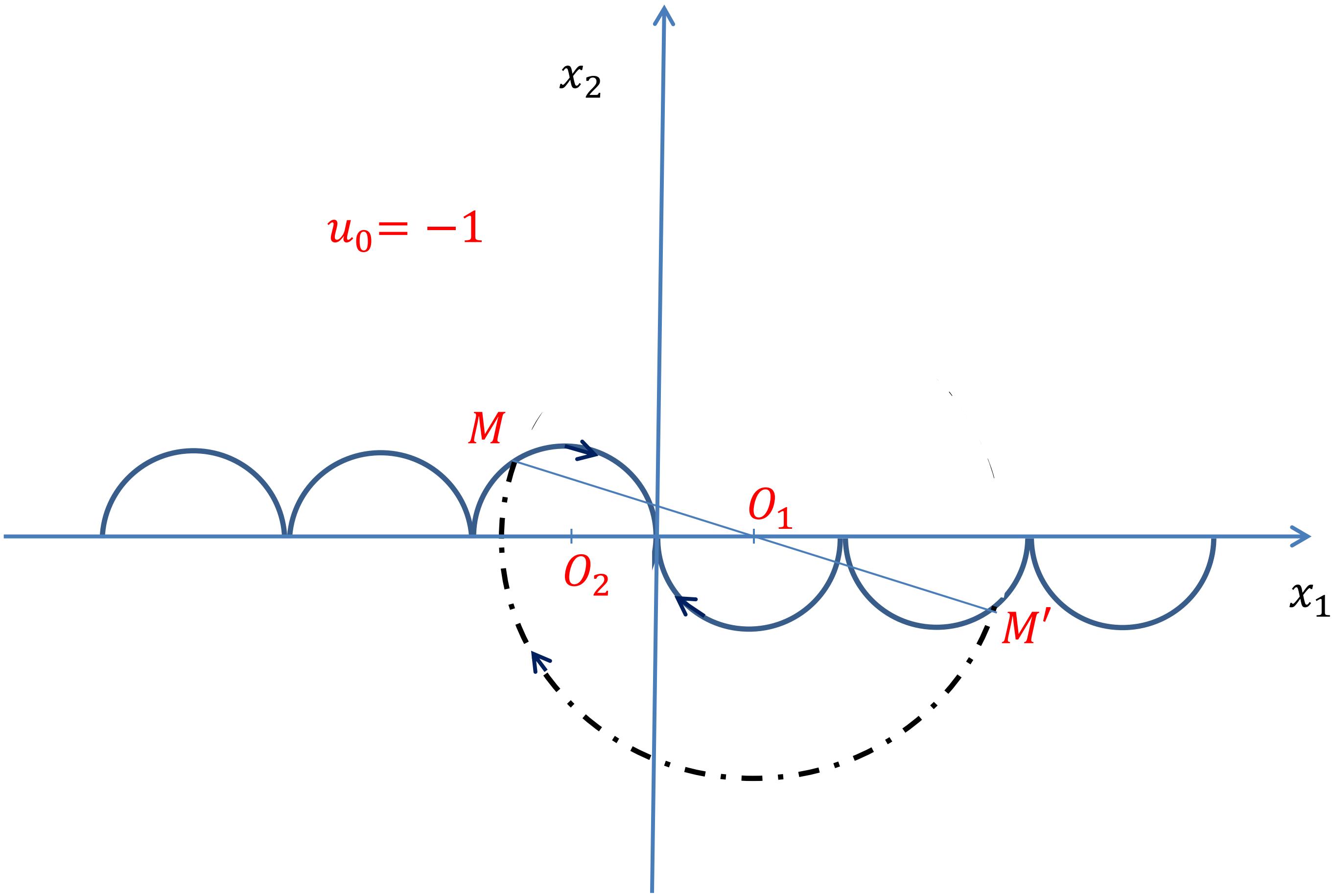


Courbe de commutation

u change de signe toutes les π secondes



u change de signe toutes les π secondes => M' symétrique à M par rapport à O_1



u change de signe toutes les π secondes => trajectoires optimales