En construction

Commande et optimisation Convexe

Partie I : quelques fondamentaux sur la modélisation, l'analyse, et la régulation H2-Hinf des systèmes LTI multivariables

Philippe CHEVREL & Mohamed YAGOUBI

Philippe.Chevrel@imt-atlantique.fr

http://masteraria.irccyn.ec-nantes.fr/

1 Introduction

Bilan des connaissances

Points de repère historique

Cf. [Henrion 2010], [Boyd & co]

LMI : Linear Matrix Inequality

Le vocable LMI pour “ Linear Matrix Inequality ” désigne communément une inégalité matricielle affine de la forme :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{i=r} x_i F_i > 0$$

où $x \in \Re^m$ regroupe les variables de décision x_i du problème et $F_i = F_i^T \in \Re^{n\times n}$, $i = 0,\dots,m$ sont des matrices symétriques données.

Le symbole d’inégalité traduit la définie-positivité de la matrice $F(x)$ i.e. $\xi^T F(x)\xi > 0$ pour tout $\xi \in \Re^n$ non nul. La LMI est, donc, équivalente à un ensemble fini de n inégalités polynomiales en x portant sur chacun des mineurs principaux de $F(x)$ (une matrice est définie-positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont positifs). L’ensemble $S = \left\{ x \in \Re^r / F(x) > 0 \right\}$ est en ensemble convexe fermé.

Equation de Lyapunov & LMI

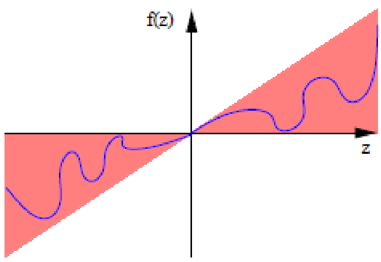
Les premières LMI sont apparues en 1890 quand A. Lyapunov montra que le système d’équations différentielles $\frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t) = Ax$ est exponentiellement stable (toutes les trajectoires convergent vers 0) si et seulement si il existe une solution aux inégalités matricielles :

$$A^T P + PA \prec 0,\ P = P^T \succ 0$$

N.B. : Elles sont linéaires en P.

Dans les années 1940, Lur’e & Postnikov obtiennent des *inégalités polynomiales paramétrées par la fréquence* en appliquant l’approche de Lyapunov à la commande de systèmes à non-linéarités séparables sur la commande :

$$\dot{x} = Ax + bf(x)$$



Sector-type nonlinearity

Années 1960 : Yakubovich, Popov, Kalman (et aussi Anderson) obtiennent le lemme positif réel, qui permet la reformulation de telles inégalités sous la forme de LMI ; lien entre les critères graphiques (critère de Popov, du cercle, de Tsypkin) et solution de LMI.

Années 1970 : Apparition graduelle de l'aspect unificateur des LMIs : travaux fondateurs de Yakubovich 1967 et Willems 1971. En 1970, la LMI apparaissant dans le lemme positif réel (PR) était résolue non seulement graphiquement, mais aussi algébriquement par l'intermédiaire de l'équation de Riccati (ARE). *Willems* 1971 fut le premier à comprendre et souligner le rôle central des LMIs en théorie de la commande. Il a aussi mis l'accent sur l'intérêt qu'il y aurait à les résoudre numériquement. La plupart des travaux en algèbre numérique se concentre sur la résolution des équations de Riccati.

programmation mathématique

En parallèle à ces développements en théorie de la commande, développement des outils de programmation mathématique :

1979 : algorithme des ellipsoïdes de *Khachiyan* : algorithme de complexité polynômiale pour la résolution de problèmes de programmation linéaire.

1984 : *Karmarkar* introduit les méthodes dites du point intérieur pour résoudre les problèmes de programmation linéaire ; efficacité accrue (à la fois théoriquement et pratiquement)

1988 : *Nesterov et Nemirowski* étendent l'usage des méthodes du point intérieur aux LMI.

Résolution numérique de problèmes de commande LMI-formalisables

Année 1990 : Des algorithmes performants pour résoudre des problèmes de faisabilité ou d'optimisation sous contraintes LMI voient jour et trouvent naturellement une place de choix au cœur d'outils de CAO (*Gahinet, Nemrovskii* 1995,…) dédiés à des problèmes de commande « LMI-formalisable ». Premier inventaire assez complet de ces problèmes en 1994 dans le livre [Boyd et. al 94] : *S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan*, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, ed. Siam 1994.

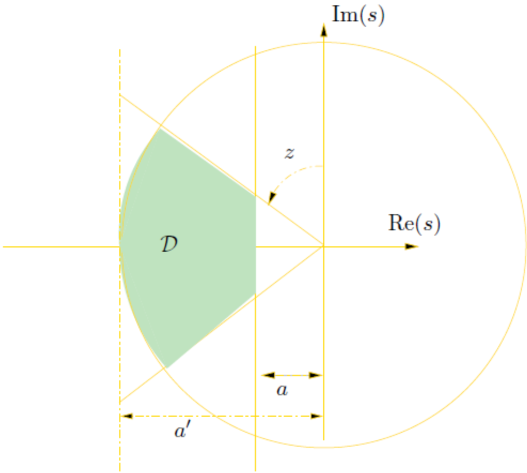
Les travaux portant sur la formalisation LMI de nouveaux problèmes de commande (et la programmation semi-définie positive <SDP>) n'ont pas cessé depuis.

Convexité et commande

Stabilité généralisée ou D-stabilité

On dit qu'une matrice est *D-stable* si et seulement si toutes ses valeurs propres sont contenues dans la région *D.*

La matrice *A (ou le système associé* $\dot{x} = Ax$) est dit *D-stable* si toutes les valeurs propres de *A* sont contenues dans la région *D.*



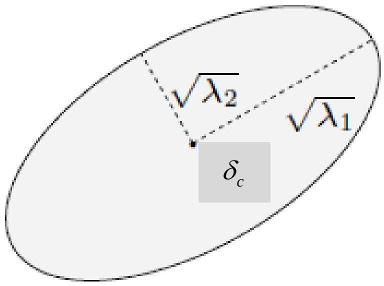
Exemple de région convexe (intersection de trois sous-régions LMI)

Domaine d'incertitudes paramétriques (voire sous espace d'état autorisé)

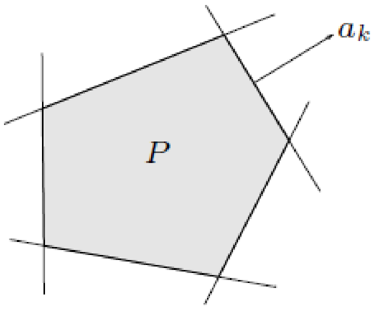
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\delta)x(t) + B(\delta)u(t) \\ y(t) = C(\delta)x(t) + D(\delta)u(t) \end{cases}$$

Exemples

- *Ellipse* : $\mathrm{E} = \left\{ \delta / (\delta - \delta_c)^T M (\delta - \delta_c) \le 1 \right\}$;   avec : $A = A^T \succ 0$, et $x_c \in R^n$ centre de l'ellipse



- Polyèdre :



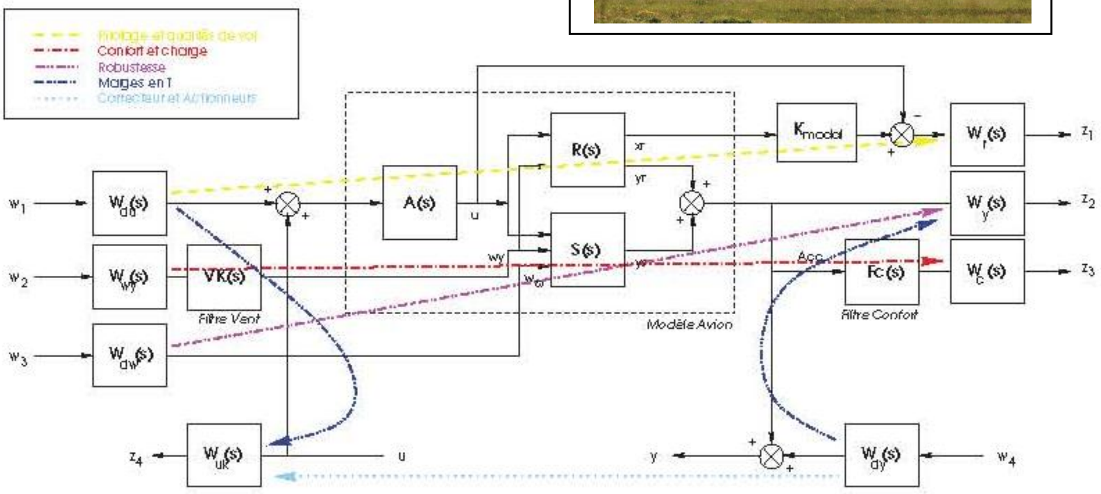
- Boules de R^n au sens de différentes normes, cônes, Etc.

Optimisation et commande

Cf. *<u>e.g. énergie des signaux d'erreur, performances H2/Hinf</u>*, etc.

Exemple : en aéronautique [Puyou 05]

- Qualité de vol
- Confort (dont cinétose)
- Robustesse
- Contraintes sur actionneurs



Formalisation[1] : compromis entre différents objectifs H2 et Hinf

- Qualité de vol : critère H2/Hinf
- Confort : critère H2
- Robustesse : contrainte Hinf
- Contraintes sur actionneurs : contrainte Hinf

Finalement, optimisation critère H2 sous contrainte Hinf ?

$$\min \left\| T_{z_1 w_1} \right\|_2 ,$$

sous les contraintes : $\left\| T_{z_2 w_3} \right\|_2 \le \gamma_{23}$, $\left\| T_{z_2 w_4} \right\|_\infty \le \gamma_{24}$, $\left\| T_{z_3 w_2} \right\|_\infty \le \gamma_{32}$, $\left\| T_{z_4 w_1} \right\|_\infty \le \gamma_{41}$

[1] Guilhem Puyou, Gilles Ferreres, *A multiobjective method for flight control law design*, AIAA Guidance Navigation and Control Conference, August 16-19 , Providence, Rhode Island

Optimisation et convexité

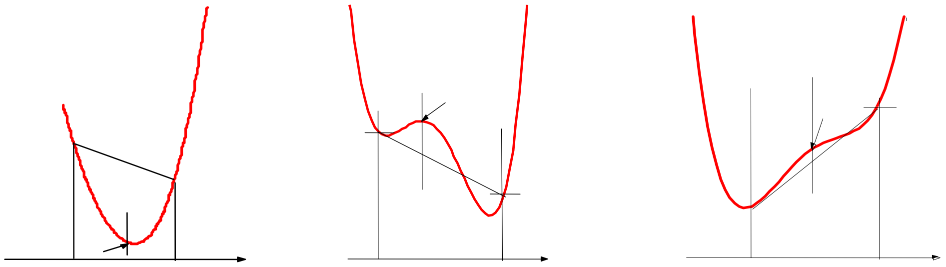
Un problème d'optimisation convexe est un problème de la forme :

$$\min f_0(x)$$

$$sous \begin{cases} f_i(x) \leq 0,\ i = 1,\dots,m \\ h_j(x) = 0,\ j = 1,\dots,p \end{cases}$$

où les fonctions $f_i(x) \leq 0,\ i = 0,\dots,m$ sont convexes et les fonctions $h_j(x) = 0,\ j = 1,\dots,p$ sont affines.

Propriété : Tout optimum local d'un problème d'optimisation convexe est en même temps un optimum global.



Fonction convexe *Fonction non-convexe* *Fonction quasi-convexe*

Objectifs du cours

Le cours a pour but de montrer le rôle clé joué en automatique par l'optimisation. Il revient sur les fondamentaux de la commande robuste par optimisation. Il présente les notions de base en optimisation convexe et formalise, par le biais des LMI, certains problèmes clés d'analyse ou de synthèse de régulateurs sous forme de problèmes d'optimisation convexe : analyse de stabilité, stabilisation simultanée, D-stabilité stabilité robuste, problèmes de synthèse de régulateurs H2-Hinf pour des systèmes LTI ou LPV, etc. Il présente aussi le principe général de quelques algorithmes efficaces pour les résoudre, et les met en pratique à l'aide des briques logicielles existantes.

...

2 Systèmes linéaires multivariables

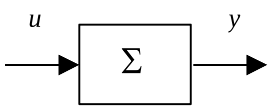
Nous nous intéressons ici aux systèmes régis par un système d'équations différentielles ordinaires à coefficients constants. De tels systèmes sont dits *linéaires rationnels invariants*[2] *(LRI)*.

La plupart des systèmes industriels sont en fait non-linéaires mais peuvent être *linéarisés* autour d'un *point d'équilibre* ou de *fonctionnement*. En ce cas, le modèle linéaire décrit *localement* le comportement du système, c'est à dire qu'il représente correctement le comportement du système pour de *petits mouvements* autour du point de fonctionnement étudié. Les problèmes de régulation industrielle peuvent majoritairement être traités comme des problèmes de régulation locaux (régulation autour d'un point de fonctionnement).

On pourra trouver de nombreux exemples intéressants dans [BOU 06] ou [AND 94].

2.1 Les différentes représentations

Hypothèse : Nous considèrerons dans la suite de ce document le système générique (Σ) ayant pour entrée le signal vectoriel $u(t) \in R^m$ et pour sortie $y(t) \in R^p$. (Σ) est supposé linéaire temporellement invariant.



2.1.1 Représentations externes

On suppose, pour introduire la notion de représentation externe, que l'on s'intéresse aux seules relations entrées/sorties. Il est ainsi implicitement supposé la nullité des conditions initiales.

Soit $h_{ij}(t)$ la *ième* sortie du système en réponse à une impulsion (distribution de Dirac) sur la *jème* composante du signal vectoriel d'entrée $u(t)$: $u(t) = [0 \ \cdots \ \delta(t) \ \cdots \ 0]^T$. On note $h(t)$ et l'on appelle *matrice de réponse impulsionnelle* d'un système multivariable la matrice $h(t) = \begin{pmatrix} h_{11}(t) & \cdots & h_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{p1}(t) & \cdots & h_{pm}(t) \end{pmatrix} \in R^{p \times m}$.

Théorème 2.1 :Réponse impulsionnelle versus générale

La réponse d'un système LRI à une entrée quelconque peut être déduite de sa réponse impulsionnelle $h(t) \in R^{p \times m}$ par la relation :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)\ d\tau = (h * u)(t) \tag{2.1}$$

[2] *à coefficients constants*

Théorème 2.2 : Réponse temporelle à partir de la fonction de transfert

La réponse d'un système LRI peut être déduite de sa matrice de transfert $H(p)$, élément du corps des fractions rationnelles à coefficients réels $R(p)^{p\times m}$, par la relation :

$$\begin{cases} Y(p) = H(p)U(p) \\ y(t) = L^{-1}(Y(p)) \end{cases} \tag{2.2}$$

La matrice de transfert peut être obtenue par application de la transformation de Laplace à la réponse impulsionnelle : $H_{i,j}(p) = L(h_{i,j}(t))$. Pour un système monovariable $(m = p = 1)$, la matrice de transfert est scalaire et l'on parle plutôt de fonction de transfert. Une matrice de transfert peut être exprimée de différentes manières, à partir de ratios de matrices polynomiales[3]. On écrira ainsi selon les cas :

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{p}) \overset{(1)}{=} \frac{\boldsymbol{N}(\boldsymbol{p})}{\boldsymbol{d}(\boldsymbol{p})} = \boldsymbol{D}_g^{-1}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{N}_g(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{N}_d(\boldsymbol{p})\ \boldsymbol{D}_d^{-1}(\boldsymbol{p}) \tag{2.3}$$

Question 1 : dimensions ?

où $N(p), d(p), N_g(p), D_g(p), N_d(p), D_d(p)$ sont des matrices polynomiales à valeur respectivement dans $\boxed{}$. L'indice g est affecté à la *forme à gauche* et d à la *forme à droite*.

Exercice 1 : Matrice de transfert d'un système donné par un système d'équations différentielles

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2y_1}{dt^2}(t) + \dfrac{dy_1}{dt}(t) = \dfrac{du_1}{dt}(t) + u_2(t) \\ \dfrac{dy_1}{dt}(t) + \dfrac{dy_2}{dt}(t) = u_1(t) \end{cases}$$

Calculer la matrice de transfert $H(p)$ associée, sous différentes formes : matrice de fractions rationnelles, forme (1) (matrice polynomiale sur dénominateur scalaire) et forme à gauche.

Exercice 2: Ordre d'un système donné par une matrice de transfert

[Donner la forme n°1 ($H(p) = \dfrac{N(p)}{d(p)}$) puis calculer l'ordre du système dans les deux cas suivants.

1. $H(p) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{p+1} & \dfrac{1}{p+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. $H(p) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{p+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{p+1} \end{pmatrix}$

[3] ou même parfois de matrices rationnelles mais nous laisserons cette possibilité de côté dans ce cours.

♦ L'ordre du système (*1* dans le 1[er] cas et *2* dans le second) n'est pas égal, dans le cas des systèmes *MIMO*, à $\deg(d(p))$.]

Théorème 2.3 : ordre d'une matrice de transfert

Contrairement au cas des systèmes SISO, l'ordre du système $H(p)$ (nombre d'intégrateurs minimum nécessaires à sa *réalisation*) ne peut être déduit du degré de $d(p)$. Partant de formes à droite ou à gauche *irréductibles* (notion à définir), l'ordre du système est en revanche égal au degré des polynômes $\det(D_g(p))$ ou $\det(D_d(p))$

Exercice 3 : ordre d'un système donné par le ratio de 2 matrices polynômiales [Kai 80].

[

$$H(p)=\begin{pmatrix} \dfrac{p}{(p+1)^2(p+2)^2} & \dfrac{p}{(p+2)^2} \\ \dfrac{-p}{(p+2)^2} & \dfrac{-p}{(p+2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & p(p+1)^2 \\ -p(p+1)^2 & -p(p+1)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (p+1)^2(p+2)^2 & 0 \\ 0 & (p+1)^2(p+2)^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} p & 0 \\ -p & p^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -(p+1)^2(p+2) \\ (p+2)^2 & (p+2) \end{pmatrix}^{-1}$$

♦ Solution : Somme des ordres des différents sous-systèmes = 10. $\deg(\det(D_1(p)))=8$. $\deg(\det(D_2(p)))=5$. L'ordre du système est donc inférieur ou égale à 5. On peut montrer que la 2[ème] forme est irréductible et que donc, le système est exactement d'ordre 5.]

On peut aussi introduire la forme canonique de Smith-Mc Millan (pas nécessairement la meilleure solution numériquement) :

$$H(p)=diag\left(\frac{n_i(p)}{d_i(p)}\right)=U_1^{-1}(p)M(p)U_2^{-1}(p)$$

où : $U_1(p)$ et $U_2(p)$ sont des matrices unimodulaires et les fractions $\dfrac{n_i(p)}{d_i(p)}$ sont irréductibles.

Ces notions au demeurant très intéressantes sortent du cadre de ce cours et l'on pourra se reporter à [KAI 80] pour une étude approfondie.

Question 2 : Matrices unimodulaires [Kai 80]

Les matrices $U_1(p)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $U_2(p)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha(p) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles des matrices unimodulaires ?

Question 3 : ordre du système à partir d'une forme de Smith Mc Millan

Donner l'ordre du système défini par :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{(p+2)(p+3)} \\ \dfrac{1}{(p+1)} & \dfrac{1}{(p+2)(p+3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{(p+1)} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(p+2)(p+3)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Représentation interne

Le système peut également être décrit par un système d'équations différentielles du 1er ordre. Il est nécessaire pour cela de faire intervenir des variables intermédiaires dites *variables d'état*. La notion d'état d'un système est un concept important et la représentation associée se généralise sans difficultés aux cas des systèmes multivariables. Le système multivariable (Σ) est alors caractérisé par le quadruplet $A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}$, $C \in R^{p\times n}, D \in R^{p\times p}$, et ses sorties se déduisent de l'évolution du vecteur d'état $x(t) \in R^n$ par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \qquad avec : x(0) = x_0 .$$

On obtient par application de la transformation de Laplace la relation :

$$H(p) = C(pI - A)^{-1} B + D$$

On dit alors que le quadruplet $A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}$, $C \in R^{p\times n}, D \in R^{p\times p}$ définit une *réalisation* de $H(p)$. Une telle réalisation n'existe qu'à la seule condition que $H(p)$ soit *propre*. Inversement, ce quadruplet définit de manière univoque la matrice de transfert. On utilisera parfois la *matrice système* pour définir $H(p)$en écrivant : $H(p) := \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$.

L'ordre de la réalisation est donné par la taille du vecteur d'état. L'ordre du système peut quant à lui être défini par l'ordre de l'une de ses réalisations minimales (réalisation comportant un nombre minimum de variable d'état).

Théorème 2.4 : Une *réalisation est minimale ssi* elle est à la fois commandable et observable.

Exercice 4 : réalisation minimale

[Considérons la matrice de transfert $H(p) = \begin{pmatrix} H_{11}(p) & H_{12}(p) \\ H_{21}(p) & H_{22}(p) \end{pmatrix}$ avec $H_{11}(p) = \dfrac{1}{p+1}$, $H_{12}(p) = \dfrac{1}{p+1}$, $H_{21}(p) = 0$, $H_{22}(p) = 0$.

1.1. Donner une réalisation dans l'espace d'état de $H_{11}(p) = \dfrac{1}{p+1}$ en notant x_1 le vecteur d'état.

1.2. Donner une réalisation dans l'espace d'état de $H_{12}(p) = \dfrac{1}{p+1}$ en notant x_2 le vecteur d'état.

1.3. Déduire des 2 réalisations précédentes une réalisation de $H(p)$.

1.4. Cette réalisation est-elle minimale ? Si non, donner une réalisation minimale et l'ordre du système.

N.B. : cet exemple a déjà été traité d'une autre manière dans un exercice précédent.]

Décomposition selon la commandabilité et l'observabilité (Rappel ; cf. fiche concepts de base) :

$$rg \;\; \mathcal{C} = n_c < n \;\Rightarrow\; \exists T \;\; / \quad \left(\begin{array}{c|c} TAT^{-1} & TB \\ \hline CT^{-1} & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} & \bar{B}_c \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} & 0 \\ \hline \bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}} & D \end{array}\right)$$

$$rg \;\; \mathcal{O} = n_o < n \;\Rightarrow\; \exists T \;\; / \quad \left(\begin{array}{c|c} TAT^{-1} & TB \\ \hline CT^{-1} & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \bar{A}_o & 0 & \bar{B}_o \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} & \bar{B}_{\bar{o}} \\ \hline \bar{C}_o & 0 & D \end{array}\right)$$

cas 1 : $T = \left(\mathcal{C}_{1\cdots n_c} \quad *\right)^{-1}$ (matrice de changement de base : décomposition selon la commandabilité)

cas 2 : $T = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{1\cdots n_o} \\ * \end{pmatrix}$ (matrice de changement de base : décomposition selon l'observabilité)

Décomposition de Kalman et matrice de transfert associée.

Cas 1 : $\bar{C}\left(pI - \bar{A}\right)^{-1}\bar{B} = \bar{C}_c\left(pI - \bar{A}_c\right)^{-1}\bar{B}_c$

Cas 2 : $\bar{C}\left(pI - \bar{A}\right)^{-1}\bar{B} = \bar{C}_o\left(pI - \bar{A}_o\right)^{-1}\bar{B}_o$

On peut faire les deux décompositions l'une après l'autre et réduire successivement à la partie commandable puis observable ou utiliser directement la forme canonique générale (facultatif) :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{co} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{c\bar{o}} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & A_{\bar{c}\bar{o}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{co} \\ B_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ \\ y = \begin{pmatrix} C_{co} & 0 & C_{\bar{c}o} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{pmatrix} + D \;\; u \end{array}\right.$$

On a directement : $C\left(pI - A\right)^{-1}B = C_{co}\left(pI - A_{co}\right)^{-1}B_{co}$.

Exercice 5 : Commandabilité, observabilité, et réalisation minimale

Soit le système défini par la réalisation :

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{array}, \quad \text{avec :} \; \left\{\begin{array}{l} x = \left(x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\right)^T \\ u = \left(u_1 \quad u_2\right)^T, \; y = \left(y_1 \quad y_2\right)^T \end{array}\right., \;\; \text{et}$$

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -8 & -5 & 4 & 1 \\ -5 & -5 & 10 & -5 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 10 & -11 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer, à l'aide d'un outil de calcul scientifique, que cette réalisation n'est pas commandable. Donner une décomposition de Kalman selon la commandabilité de cette réalisation. Quelles sont les variables d'état de cette nouvelle réalisation ? En déduire une réalisation réduite à la partie commandable.
2. La réalisation réduite à la partie commandable est-elle observable ? Dans la négative, donner la réalisation réduite à la partie observable.
3. Donner une réalisation minimale du système.
4. Comparer les réalisations obtenues à chaque étape, du point de vue entrée sortie. On pourra pour cela comparer les fonctions de transfert, les réponses temporelles ou fréquentielles.

2.2 Caractéristiques principales / Propriétés structurelles

2.2.1 Stabilité

L'analyse de la stabilité des systèmes multivariables ne diffère pas significativement de l'analyse de la stabilité d'un système SISO. On distingue les notions de stabilité entrée/sortie dite encore stabilité *externe* et la stabilité *interne*. On précisera le type de stabilité à laquelle il est fait référence en qualifiant le système considéré de EBSB stable, pour indiquer qu'il est stable du point de vue de ses entrées/sorties, et de stable *de manière interne* sinon.

Théorème 2.5 (stabilité entré-sortie)

Le système (Σ) est dit EBSB stable (*Entrées Bornées / Sorties Bornées*) si l'une des propriétés suivantes est vérifiée.

- Les sorties du système en réponse à des signaux d'entrée bornés (C.I. nulles) sont elles-mêmes bornées.
- La matrice de réponses impulsionnelles $h(t)$ satisfait $\int_0^{+\infty} \|h(t)\| dt < \infty$.
- Les pôles de (Σ) sont à partie réelle strictement négative.

La stabilité interne ne s'intéresse pas aux seules relations entrées/sorties mais également aux variables internes du système. Supposons (Σ) décrit de manière interne à partir de l'état $x(t)$ selon la représentation d'état :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$$
$$avec : x(0) = x_0$$

Théorème 2.6 (stabilité interne)

Le système (Σ) décrit par la représentation d'état ci-dessus est dit stable de manière *interne* si et seulement si l'une ou l'autre des propriétés suivantes est satisfaite :

- l'état interne $x(t)$ de (Σ) en réponse à des conditions initiales x_0 arbitraires (et à entrée nulle $u(t)\equiv 0$) tend vers 0 lorsque $t \to \infty$.
- Les valeurs propres de la matrice A sont à partie réelle strictement négative (on dit parfois A stable).
- $\forall Q>0,\ \exists P>0\ /\ A^T P + PA + Q = 0$.

♦ La réponse libre du système est donnée par $x(t)=e^{At}x_0$. Il est clair que $x(t)\to 0$ à la seule condition que les valeurs propres de A soient à partie réelle négative. L'équivalence avec la troisième propriété se déduit comme suit. Soit λ une valeur propre de A et V le vecteur propre associé. On a $V^*\left(A^T P + PA + Q\right)V = 0 \Leftrightarrow 2Re(\lambda)V^* PV + V^* QV = 0$ et ceci ne peut être obtenu (compte tenu des hypothèses $Q>0,\ P>0$) que si λ est à partie réelle négative. Inversement si A stable, $P=\int_0^{+\infty} e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}\,d\tau$ existe et est solution (cf. démonstration § 2.3.2 Equations de Lyapunov).

N.B. : L'équation $A^T P + PA = -Q$ est connue sous le nom d'*équation de Lyapunov*. Sous l'hypothèse $Q>0$ et $P>0$, la fonction quadratique $V(x)=x^T Px$ définit une fonction de Lyapunov prouvant la stabilité du système considéré (cf. cours de commande non linéaire).

2.2.2 Interconnexions de systèmes

Le formalisme d'état semble *a priori* moins adapté à la « réduction » de schéma blocs. Il ne présente cependant pas de difficultés majeures. Considérons les 2 matrices de transfert suivantes définies par l'une de leur réalisation dans l'espace d'état :

$H_1(p):=\left(\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array}\right)$, $H_2(p):=\left(\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array}\right)$ Vérifier à titre d'exercice les résultats ci-dessous ; réalisation dans l'espace d'état de :

- la somme : $H_1(p)+H_2(p) \quad := \left(\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1+D_2 \end{array}\right)$
- Le produit : $H_1(p)H_2(p) \quad := \left(\begin{array}{cc|c} A_2 & 0 & B_2 \\ B_1C_2 & A_1 & B_1D_2 \\ \hline D_1C_2 & C_1 & D_1D_2 \end{array}\right)$
- L'inverse : $H^{-1}(p) \quad := \left(\begin{array}{c|c} A-BD^{-1}C & BD^{-1} \\ \hline -D^{-1}C & D^{-1} \end{array}\right)$
- La dérivation : $pH(p) \quad := \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline CA & CB+pD \end{array}\right)$
- La transformation linéaire fractionnaire :

Soient : $H(p)=\begin{pmatrix} H_{11}(p) & H_{12}(p) \\ H_{21}(p) & H_{22}(p) \end{pmatrix} := \left(\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] \begin{pmatrix} x \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

$K(p) = D_K + C_K (sI - A_K)^{-1} B_K$

On a : $T_{y_1 u_1}(p) \triangleq F_l(H(p), K(p)) = H_{11}(p) + H_{12}(p) K(p) (I - H_{22}(p) K(p))^{-1} H_{21}(p)$

$T_{y_1 u_1}(p) := \begin{pmatrix} A_{bf} & B_{bf} \\ C_{bf} & D_{bf} \end{pmatrix}$ où $A_{bf}, B_{bf}, C_{bf}, D_{bf}$ sont données par les relations ci-dessous :

$$A_{bf} = \begin{bmatrix} A + B_2 (I - D_K D_{22})^{-1} D_K C_2 & B_2 (I - D_K D_{22})^{-1} C_K \\ B_K (I - D_{22} D_K)^{-1} C_2 & A_K + B_K (I - D_{22} D_K)^{-1} D_{22} D_K \end{bmatrix},$$

$$B_{bf} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 (I - D_K D_{22})^{-1} D_K D_{21} \\ B_K (I - D_{22} D_K)^{-1} D_{21} \end{bmatrix},$$

$$C_{bf} = \begin{bmatrix} C_1 + D_{12} (I - D_K D_{22})^{-1} D_K C_2 \ , & D_{12} (I - D_K D_{22})^{-1} C_K \end{bmatrix},$$

$$D_{bf} = \begin{bmatrix} D_{11} + D_{12} (I - D_K D_{22})^{-1} D_K D_{21} \end{bmatrix}$$

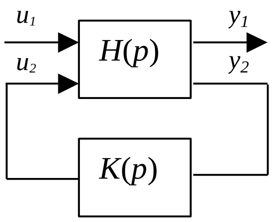


Figure 2.1 : Transformation linéaire fractionnaire

2.2.3 Gain fréquentiel et norme d'un système multivariable

Décomposition d'une matrice complexe en valeurs singulières (rappels liminaires)

Considérons la matrice rectangulaire $M \in C^{p \times m}$. Supposons qu'elle est de rang q. On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.7 (décomposition en valeurs singulières)

Il existe 2 matrices $V \in C^{p \times p}$ et $W \in C^{m \times m}$ unitaires [4] telles que $M = V \Sigma W^*$ avec $\Sigma = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_q & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \in C^{p \times m}$ et $\sigma_i \in R, \ \ \forall i = 1, \cdots, q$.

[4] Rappel : V matrice unitaire si et seulement si $VV^* = I_p$. W matrice unitaire si et seulement si $W^* W = I_m$.

Définition : $M = V\Sigma W^*$ est appelée décomposition en valeur singulière[5] de la matrice M. $\{\sigma_i, \cdots, \sigma_q\}$ est l'ensemble des valeurs singulières de M.

♦ La décomposition ci-dessus s'obtient trivialement à partir du calcul des valeurs et vecteurs propres (orthonormés) des matrices MM^* et M^*M. Notons en effet que $M = V\Sigma W^* \Rightarrow M^*MW = W\Sigma^2$ et $MM^*V = V\Sigma^2$. Les matrices MM^* ou M^*M sont hermitiennes et donc à valeurs propres réelles. Les valeurs singulières sont reliées à ces valeurs propres par la relation : $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(MM^*)}$.

Exercice 6 : Décomposition en valeurs singulières

[$M = \begin{pmatrix} 0,8712 & -1,3195 \\ 1,5783 & -0,0947 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{V} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}}_{W^T}$

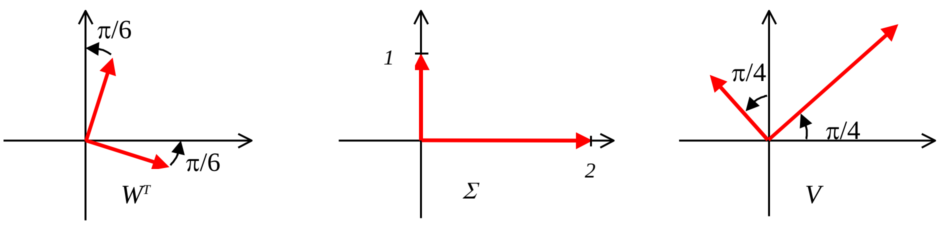
V rotation de $\theta = \pi/4$; $V = \begin{pmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{pmatrix}$

W^T rotation de $\theta = \pi/6$; $W^T = \begin{pmatrix} \cos \pi/6 & -\sin \pi/6 \\ \sin \pi/6 & \cos \pi/6 \end{pmatrix}$

Etudions géométriquement, en utilisant la décomposition ci-dessus, la transformation opérée par M sur les deux vecteurs normés suivants[6] : $x_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$ et $x_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$.

$$Mx_1 = V\Sigma W^T x_1 = V\Sigma\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = V\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Mx_2 = V\Sigma W^T x_2 = V\Sigma\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = V\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



]

Quelques propriétés et définitions relatives aux valeurs singulières ($M \in C^{p\times m}, E \in C^{p\times m}$) :

[5] Fonction *svd* sous Matlab

[6] Ce choix n'est pas fortuit mais correspond à des directions d'entrée particulières. Notons que $W = (x_1 \quad x_2)$.

1. On peut choisir V et W de manière à ordonner les valeurs singulières : $\sigma_1 \le \sigma_2 \le \cdots \le \sigma_q$. On note alors : $\underline{\sigma} \stackrel{\Delta}{=} \sigma_{\min} \stackrel{\Delta}{=} \sigma_1$ la plus petite valeur singulière et $\overline{\sigma} \stackrel{\Delta}{=} \sigma_{\max} \stackrel{\Delta}{=} \sigma_q$ la plus grande.
2. On a : $\forall x \in C^m, \quad \sigma_{\min} \le \frac{\|Mx\|_2}{\|x\|_2} \le \sigma_{\max}$.
3. Le nombre de conditionnement d'une matrice qui caractérise en analyse numérique la difficulté à réaliser son inversion numérique est définie par $cond(M) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}$. Il est d'autant plus grand que la matrice est difficile à inverser (cf. 4 et 5).
4. Les valeurs singulières de $M+E$ (E peut être vue ici comme une matrice de perturbation), ordonnées de même que celles de M, vérifient les inégalités : $\forall i = 1, \cdots \min\{p,m\}, \ \sigma_i(M) - \overline{\sigma}(E) \le \sigma_i(M+E) \le \sigma_i(M) + \overline{\sigma}(E)$.
5. On déduit aisément de la propriété précédente que : $\underline{\sigma}(M) = \min_{E \in C^{n\times n}} \{\overline{\sigma}(E) / \det(M+E) = 0\}$ et $\underline{\sigma}(M^{-1}) = \min_{E \in C^{n\times n}} \{\overline{\sigma}(E) / \det(I+ME) = 0\}$.[7]
6. La valeur singulière supérieure est une norme matricielle :
   - Soit $\alpha \in C$, $\overline{\sigma}(\alpha M) = |\alpha| \overline{\sigma}(M)$
   - Soient $M_1 \in C^{p\times m}$ et $M_2 \in C^{p\times m}$, on a : $\overline{\sigma}(M_1 + M_2) \le \overline{\sigma}(M_1) + \overline{\sigma}(M_2)$
   - Soient $M_1 \in C^{p\times m}$ et $M_2 \in C^{p\times m}$, on a : $\overline{\sigma}(M_1 M_2) \le \overline{\sigma}(M_1)\overline{\sigma}(M_2)$

Exercice 7 : Conditionnement d'une matrice

[Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/\varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer son déterminant. Calculer ses valeurs propres.

La matrice est-elle bien conditionnée ?
]

Gain et norme d'une matrice de transfert

fiche 1 : identification fréquentielle dans le cas SISO ; rappel

Dans le cas SISO, la réponse harmonique d'un système *LTI* est simple à déterminer. Le signal excitateur étant sinusoïdal de pulsation ω, on sait le signal de sortie également sinusoïdal de pulsation ω, amplifié ou atténué (resp. déphasé) avec le signal d'entrée d'une quantité définie par le module (resp. l'argument) de la fonction de transfert considérée.

De manière formelle, le signal $u(t) = \overline{u}\sin(\omega t + \varphi_u) = \overline{u}\,\mathrm{Im}\left(e^{j(\omega t + \varphi_u)}\right)$ est transformé, par filtrage par la fonction de transfert $H(p)$, en le signal $y(t) = \overline{y}\sin(\omega t + \varphi_y) = \overline{y}\,\mathrm{Im}\left(e^{j(\omega t + \varphi_y)}\right)$, avec $\overline{y} = |H(j\omega)|\overline{u}$ et $\varphi_y = \varphi_u + \arg(H(j\omega))$.

Notant $u_\omega = \overline{u}e^{j\varphi_u}$ et $y_\omega = \overline{y}e^{j\varphi_y}$, on obtient la relation $y_\omega = H(j\omega)u_\omega$.

<u>Démonstration</u> (rappel) :

---

[7] Remarque : $\det(I+ME) = 0 \Leftrightarrow \det(M^{-1}+E) = 0$ si M est non singulière.

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \bar{u}\sin(\omega t+\varphi_u) = \mathrm{Im}\left(\bar{u}e^{j(\omega t+\varphi_u)}\right) \\
y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,\mathrm{Im}\left(\bar{u}e^{j(\omega(t-\tau)+\varphi_u)}\right)d\tau = \mathrm{Im}\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right)\bar{u}e^{j(\omega t+\varphi_u)}\right] \\
&= \mathrm{Im}\left[H(j\omega)\bar{u}e^{j(\omega t+\varphi_u)}\right] = \mathrm{Im}\left[\left|H(j\omega)\right|e^{j\varphi_\omega}\bar{u}e^{j(\omega t+\varphi_u)}\right] = \mathrm{Im}\left[\left|H(j\omega)\right|\bar{u}e^{j(\omega t+\varphi_u+\varphi_\omega)}\right] \\
&= \underbrace{\left|H(j\omega)\right|\bar{u}}_{\bar{y}}\sin\left(\omega t+\underbrace{\varphi_u+\varphi_\omega}_{\varphi_y}\right) = \bar{y}\sin(\omega t+\varphi_y)
\end{aligned}
$$

De manière pratique, on peut identifier la réponse fréquentielle d'un système linéaire à la pulsation ω en lui appliquant en entrée le signal $u(t)$ défini précédemment, à partir des déphasage et rapport d'amplitude constatés entre l'entrée et la sortie[8] :

$$
\boxed{H(j\omega) = \frac{y_\omega}{u_\omega} = \frac{\bar{y}e^{j\varphi_y}}{\bar{u}e^{j\varphi_u}} = \frac{\bar{y}}{\bar{u}}e^{j(\varphi_y-\varphi_u)}}.
$$

Exercice 8 : Réponse fréquentielle d'un dérivateur

[Soit $H(p)=p$ et $u(t)=\bar{u}\sin(\omega t)=\bar{u}\,\mathrm{Im}\left(e^{j\omega t}\right)$. Calculer $y(t)=L^{-1}(H(p)u(p))$ d'au moins 2 façons différentes.

♦ 1/ $y(t)=\dot{u}(t)=\bar{u}\,\omega\cos(\omega t)$. 2/ $y(t)=\bar{y}\sin(\omega t+\varphi_y)$ avec : $\bar{y}=\omega\bar{u}$ et $\varphi_y={}^{\pi}\!/_{2}$. Détails : $u_\omega=\bar{u}e^{j\varphi_u}$ avec $\varphi_u=0$ soit $u_\omega=\bar{u}$; $y_\omega=H(j\omega)u_\omega=e^{j\pi/2}\omega\bar{u}=\bar{y}e^{j\pi/2}$; $\bar{y}=\omega\bar{u}$ et $\varphi_y={}^{\pi}\!/_{2}$. CQFD.]

Dans le cas **MIMO**, la ***direction*** du signal d'entrée intervient dans la relation entrée-sortie.

On notera $u(t)=\underbrace{\begin{pmatrix}\bar{u}_1e^{j\varphi_{u_1}}\\ \vdots \\ \bar{u}_me^{j\varphi_{um}}\end{pmatrix}}_{u_\omega}e^{j\omega t}$ le signal harmonique d'entrée et $y(t)=\underbrace{\begin{pmatrix}\bar{y}_1e^{j\varphi_{y_1}}\\ \vdots \\ \bar{y}_pe^{j\varphi_{y_p}}\end{pmatrix}}_{y_\omega}e^{j\omega t}$ la sortie obtenue en sortie de la matrice de transfert $H(p)$. On a bien toujours avec cette notation la relation $y_\omega=H(j\omega)u_\omega$.

La décomposition en valeur singulière de la matrice complexe $H(j\omega)$ permet de comprendre que l'amplification ou l'atténuation du signal vectoriel harmonique dépend dans le cas d'un système MIMO du choix de u_ω (direction d'entrée) et non pas seulement de la valeur de la pulsation (fréquence) comme dans le cas SISO.

Soit $H(j\omega)=V_\omega\Sigma_\omega W_\omega^{*}$ la décomposition en valeur singulière de la matrice $H(j\omega)$ telle que $\Sigma_\omega=diag(\sigma_1,\cdots,\sigma_q)$ et $\sigma_1\le\sigma_2\le\cdots\le\sigma_q$.

[8] $\left|\dfrac{y_\omega}{u_\omega}\right|=\dfrac{\bar{y}}{\bar{u}}=\left|H(j\omega)\right|$ et $\arg\left(\dfrac{y_\omega}{u_\omega}\right)=\arg(H(j\omega))$

Considérons le signal d'entrée $u(t)=u_\omega\, e^{j\omega t}$ avec $u_\omega = w_i$ le $i^{ème}$ vecteur de W_ω. Ce signal est alors amplifié ou atténué dans la proportion donnée par la $i^{ème}$ valeur singulière σ_i. Formellement, on a en ce cas $y(t)=y_\omega\, e^{j\omega t}$ avec $\|y_\omega\|=\sigma_i\|u_\omega\|$.

On définit le gain fréquentiel du système à la pulsation ω par $\bar{\sigma}(H(j\omega))$. Il correspond à la plus grande amplification possible d'un signal d'entrée vectoriel sinusoïdal de pulsation ω.

Le *gain* du système concentre l'information :
$\|H(p)\|_\infty \triangleq \sup_\omega \bar{\sigma}(H(j\omega)) = \sup_u \dfrac{\|y\|_2}{\|u\|_2}$ si $y(p)=H(p)u(p)$. (cf. fiche rappel sur les normes de signaux).
Pour un système SISO, le gain correspond au facteur de résonance.

Exercice 9 : Analyse temporelle et harmonique d'un système MIMO

2.2.4 Normes des signaux et systèmes

Cf. aussi fiche « norme ».

Norme d'un signal

Considérons l'espace L_2^n des signaux de carré intégrable sur $[0,\infty[$, à valeur dans R^n. On peut définir dans cet espace (qui est un espace de Hilbert) le produit scalaire et la norme[9] définis ci-dessous :

$$\langle x, y\rangle = \int_0^{+\infty} x(t)^T y(t)dt, \qquad \|x\|_2 = \left(\int_0^{+\infty} x(t)^T x(t)dt\right)^{1/2}$$

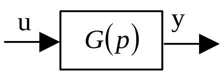
La *transformée de Laplace* $\mathrm{TL}(\ )$ fait correspondre à L_2^n, l'espace de Hardy H_2^n des fonctions analytiques dans $\mathrm{Re}(p)\geq 0$ et de carré intégrable. Le théorème de Parseval permet de relier la norme d'un signal temporel de L_2^n (ici *x*) à la norme de sa transformée de Laplace (ici *X*) dans H_2^n :

$$\|x\|_2 = \|X\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Trace\left(X^*(j\omega)X(j\omega)\right)d\omega\right)^{1/2}$$

Norme induite sur les systèmes

Soit le système multivariable défini par la matrice de transfert propre et stable (rationnelle) $G(p)$ ou alternativement par sa matrice de réponse impulsionnelle $g(t)=\mathrm{TL}^{-1}(G(p))$.

$u(t)\in R^m$ et $y(t)\in R^p$ sont respectivement l'entrée et la sortie du système à l'instant t.



[9] norme dont la signification physique en terme d'*énergie* est évidente

Rappel[10] sur la « norme H_∞ » : $\boxed{\|G(p)\|_\infty \triangleq \sup_\omega \bar{\sigma}(G(j\omega)) = \sup_u \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}}$ ♦

La « norme H_2 » de l'opérateur entrée-sortie associé à ce système est définie, lorsqu'elle existe par :

$$\|G(p)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Trace\left(G^*(j\omega)G(j\omega)\right)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_i \sigma_i^2\left(G(j\omega)\right)d\omega = \sum_{i,j}\|G_{i,j}(p)\|_2^2$$

L'égalité de Parseval permet de passer au domaine temporel :

$$\boxed{\|G_{i,j}(p)\|_2 = \|g_{i,j}(t)\|_2 = \left(\int_0^{+\infty} g_{i,j}^2(t)\,dt\right)^{1/2}}$$

Par suite, la « norme H_2 » est aussi l' « **énergie** » (la norme L_2) de la **réponse impulsionnelle**.

Une autre interprétation possible de la « norme H_2 » est la suivante. Notons $R_{uu}(t)$, $R_{yy}(t)$ les matrices d'autocorrélation associées aux signaux u et y et $S_{uu}(j\omega)$, $S_{yy}(j\omega)$ les matrices de densité spectrales associées.

Rappels :

1. Pour un signal u donné, on a : $R_{uu}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t+\tau)u^T(t)dt$.
2. Pour un signal aléatoire u centré dont certaines caractéristiques stochastiques (en particulier son moment à l'ordre 2) sont connues, $R_{uu}(\cdot)$ pourra également être définie par l'égalité : $R_{uu}(\tau) = E\left[u(t+\tau)u^T(t)\right]$.
3. Les deux définitions ci-dessus se rejoignent dans le cas d'un signal aléatoire possédant les propriétés de stationnarité et d'ergodicité [PIC 77]. Par ailleurs, on a la relation : $S_{uu}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{uu}(\tau)e^{j\omega\tau}d\tau$. ♦

Le rappel de ces notions va permettre une autre interprétation de la norme H_2 de G. Les résultats du Tableau 1 s'obtiennent aisément à partir de l'égalité de Parseval ou du théorème des interférences [PIC 77 ; ROU 92]. Ils permettent de conclure que la « norme H_2 » est aussi l'**énergie du signal de sortie en réponse à un bruit blanc normalisé.** Elle caractérise **la capacité du système à *transmettre* un bruit blanc**[11]. Ces interprétations seront importantes pour la suite.

---

[10] cf. § **Gain et norme d'une matrice** de transfert plus haut.

[11] Quelques rappels sur les processus stochastiques. Soit $y(t)$ un signal aléatoire stationnaire centré. Fonction de corrélation : $\varphi_{yy}(\tau) \triangleq E(y(t)y(t+\tau))$. Densité spectrale de puissance (ou spectre) obtenue par transformation de Fourier de la fonction de corrélation : $\phi_{yy}(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{yy}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$. Transmission d'un signal stochastique u de spectre $\phi_{uu}(\omega)$ à travers du filtre linéaire $F(p)$. On a $\phi_{yy}(\omega) = |F(j\omega)|^2\,\phi_{uu}(\omega)$ si $y(p) = F(p)u(p)$. On obtient dans le cas d'un signal vectoriel : $\varphi_{yy}(\tau) \triangleq E\left(y(t)y(t+\tau)^T\right)$ et $\phi_{yy}(\omega) = F(j\omega)\phi_{uu}(\omega)F^T(-j\omega)$.
w bruit blanc de densité spectrale unitaire $\Leftrightarrow \varphi_{ww}(\tau) = \delta(\tau) \Leftrightarrow \phi_{ww}(\omega) = 1$.

Caractéristique du signal d'entrée	Signification de $\|G\|_2$
$u(\cdot)$ signal de moyenne nulle t.q.: $R_{uu}(t)=I_m\delta(t)$	$\|G\|_2^2 = E\left[\|y(t)\|^2\right] = Trace\ \left(R_{yy}(0)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} Trace\ \left(S_{yy}(j\omega)\right)\ d\omega$

Tableau 1 : ***Une autre interprétation de*** $\|G\|_2$

2.2.5 Norme H2 : illustrations

Analyse d'un 1er ordre en terme de norme H2

Considérons le système : $G(p)=\dfrac{1}{p+a},\ a>0$,

On montre sans difficulté (cf. exercices) : $\|G(p)\|_2 = \sqrt{\dfrac{1}{2a}}$

Examinons l'effet de ce transfert sur Réponse impulsionnelle : $e^{-at}\Gamma(t)$

Réponses à un bruit blanc de spectre unitaire.

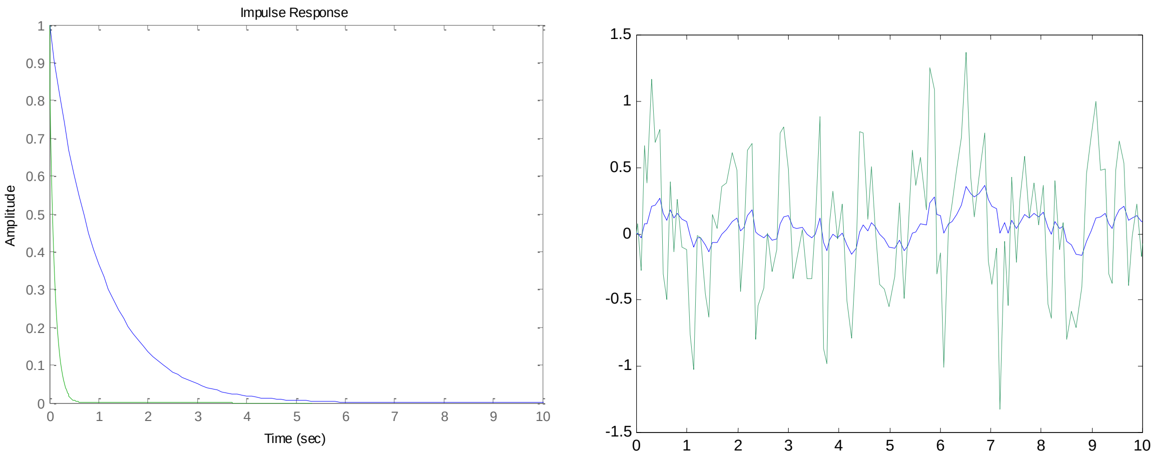


Figure 2.2 : réponses temporelles pour $a=1,\ a=10$

Système du 1er ordre asservi par un PI

Considérons le schéma du système asservi suivant.

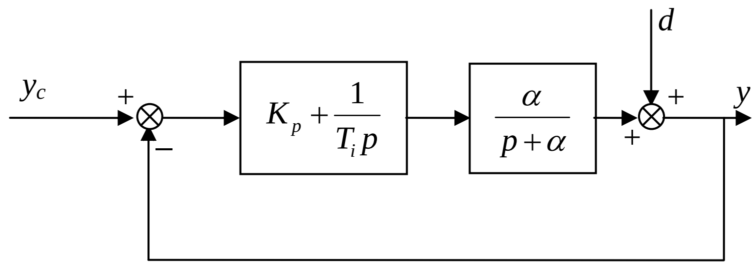


Figure 2.3 : Régulation PI d'un 1er ordre

On obtient en boucle fermée, entre la perturbation et la sortie :

$$T_{yd}(p) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha}{p+\alpha}\right)\left(K_p + \frac{1}{T_i p}\right)} = \frac{p(p+\alpha)}{p^2 + \alpha(1+K_p)p + \alpha / T_i}.$$

Par identification du dénominateur avec la forme *ad hoc*, on obtient les amortissement et pulsation naturelle suivants:

$$\xi = \frac{1}{2}(\alpha + K_p)\sqrt{\alpha T_i}, \quad \omega_n = \sqrt{\alpha / T_i}.$$

Calculons la norme 2 de la réponse indicielle de $T_{yd}(p)$ en fonction de K_p et T_i. Le tracé suivant correspond à la valeur $\alpha = 1$.

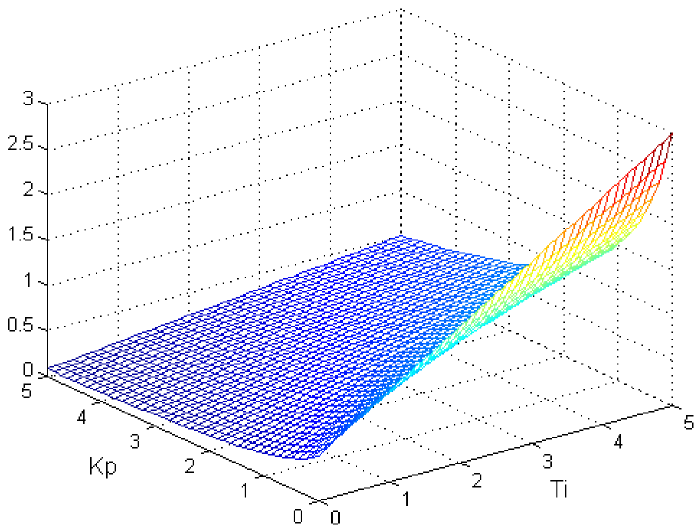


Figure 2.4 : ***Evolution de la norme H_2 en fonction de K_p et T_i***

Toujours pour une valeur de $\alpha = 1$ on considère les deux réglages du PI suivants : $K_p = 1,\ T_i = 4$ et $K_p = 4,\ T_i = 1$.

Ce résultat peut être confronté à la simulation du système asservi selon le scénario suivant : un échelon de consigne à $t = 1s$ et un échelon de perturbation à $t = 10s$. Il est clair que le les meilleure performances, en terme de rejet de perturbation, correspond au premier réglage. C'est bien lui qui possède la norme H2 la plus faible. La norme H2 permet bien ici d'évaluer la performance du système asservi.

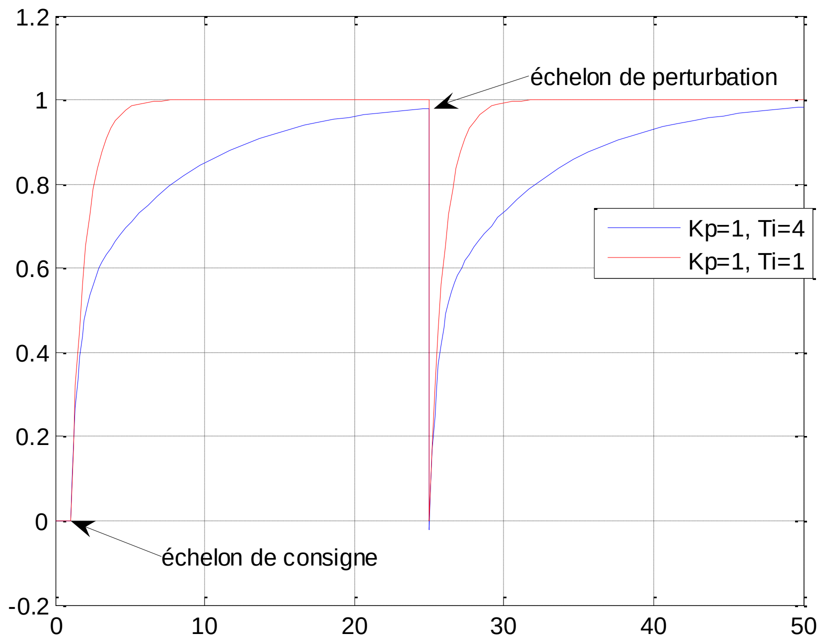


Figure 2.5 : Réponses indicielles pour les réglages et le scénario de simulation choisi

2.3 Des outils précieux

2.3.1 Gramiens

Définition

Les *gramiens* sont des outils précieux pour analyser un système linéaire. On distingue le *gramien de commandabilité* G_c et le *gramien d'observabilité* G_o. Ils sont définis comme suit à partir de la réalisation dans l'espace d'état du système (Σ).

$$(\Sigma)\quad \begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ u(t)\end{pmatrix} \quad \text{avec} : x(0)=x_0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \mathrm{G}_c(t) &= \int_0^t e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}\ d\tau \\ \mathrm{G}_o(t) &= \int_0^t e^{A^T\tau}C^TCe^{A\tau}\ d\tau \end{aligned}$$

On parle de *gramiens « totaux »* (on omet souvent ce qualificatif) lorsque $t\to\infty$ et de *gramiens partiels* dans le cas contraire.

Interprétation des gramiens en terme énergétique.

Gramien de commandabilité

Soit $h(t)$ la matrice de réponse impulsionnelle du système (Σ).

On a :

- $h(t)=e^{At}B=e^{At}\begin{pmatrix}B_{\bullet 1} & \cdots & B_{\bullet m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_{\bullet 1}(t) & \cdots & h_{\bullet m}(t)\end{pmatrix}$
- $h_{\bullet i}(t)=x(t)$ si $u(t)$ est tel que $u_i(t)=\delta(t)$ *et* $u_j(t)=0$ pour $j\neq i$.

Par suite, $\mathrm{G}_c(t)=\int_0^t e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}\ d\tau=\int_0^t h(\tau)h(\tau)^T\ d\tau=\int_0^t h_{\bullet 1}(\tau)h_{\bullet 1}(\tau)^T+h_{\bullet 2}(\tau)h_{\bullet 2}(\tau)^T+\cdots\ d\tau=\sum_{k=1}^{m}\mathrm{G}_c^k(t)$.

On déduit des égalités ci-dessus les résultats suivants.

1. Soit G_c^k le gramien de commandabilité associé à la paire $(A,B_{\bullet k})$. Le gramien de commandabilité G_c associé à la paire (A,B) peut être obtenu comme suit : $\mathrm{G}_c(t)=\sum_{k=1}^{m}\mathrm{G}_c^k(t)$.
2. Le gramien de commandabilité peut être explicité par : $\mathrm{G}_{cij}(t)=\sum_{k=1}^{m}\int_0^t h_{ik}(\tau)\ h_{jk}(\tau)\ d\tau$
3. $\mathrm{G}_c(t)=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{m}\int_0^t h_{1k}{}^2(\tau)d\tau & \cdots & \sum_{k=1}^{m}\int_0^t h_{1k}(\tau)\ h_{nk}(\tau)\ d\tau\\ \vdots & \ddots & \\ \sum_{k=1}^{m}\int_0^t h_{nk}(\tau)\ h_{1k}(\tau)\ d\tau & \cdots & \sum_{k=1}^{m}\int_0^t h_{nk}{}^2(\tau)d\tau\end{pmatrix}$

Remarques :

- $\int_0^t h_{ik}(\tau)^2\ d\tau$ (cf. diagonale du gramien) représente l'énergie de la i$^{\text{ème}}$ sortie en réponse à une impulsion de Dirac sur la k$^{\text{ième}}$ entrée.

- On montre par ailleurs que $\mathcal{G}_c(t) = E\left(x(t) \times x^T(t)\right)$ dans le cas où l'on applique en entrée du système un signal stochastique $u(\cdot)$ de moyenne nulle et tel que $R_{uu}(t) = I_m \delta(t)$ (bruits blancs unitaires et decorrélés sur chaque entrée).

Gramien d'observabilité

L'interprétation du gramien d'observabilité peut être réalisée par dualité avec le gramien de commandabilité. Le gramien $\mathcal{G}_o(t)$ est également relié à la réponse libre du système (Σ), $y_L(\cdot)$, par la relation :

$$x_0^T \mathcal{G}_o(t) x_0 = \int_0^t y_L(\tau)^T \, y_L(\tau) \, d\tau = \int_0^t \left\| y_L(\tau) \right\|_2^2 \, d\tau \,.$$

Démontrer ce résultat à titre d'exercice.

Interprétation des gramiens en terme de commandabilité et d'observabilité

On a par ailleurs les équivalences suivantes.

- (A, B) est commandable $\Leftrightarrow \forall t > 0, \mathcal{G}_c(t) > 0$
- (C, A) est observable $\Leftrightarrow \forall t > 0, \mathcal{G}_o(t) > 0$

Notons également (résultat relatif à la commandabilité mais aussi à l'interprétation énergétique du gramien) que $[\mathcal{G}_c(t)]^{-1}$ est directement relié à « l'énergie de commande » minimale requise pour transférer le système de l'état $x(0) = 0$ à l'état $x(t) = x_1$ [KWA 72]. Précisément, $u(\tau) = B^T e^{A^T(t_1 - \tau)} \left[\mathcal{G}_c(t_1)\right]^{-1} x_1$, $0 \le \tau < t_1$ est la commande à énergie minimale [12] $\left(\int_0^{t_1} u^T(\tau) \; u(\tau) d\tau = x_1^T \left[\mathcal{G}_c(t)\right]^{-1} x_1\right)$ amenant l'état $x(\cdot)$ de $x_0 = 0$ en $t = 0$, à x_1 en $t = t_1$. Cette remarque prouve de manière constructive l'équivalence : (A, B) est commandable $\Leftrightarrow \forall t > 0, \mathcal{G}_c(t) > 0$.

Les gramiens dit totaux sont obtenus dans le cas où $t \to +\infty$:

$$\mathcal{G}_c = \int_0^{+\infty} e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} \, d\tau$$
$$\mathcal{G}_o = \int_0^{+\infty} e^{A^T \tau} C^T C e^{A\tau} \, d\tau$$

Leur stricte positivité suffit pour conclure à la commandabilité et l'observabilité du système considéré. On verra par ailleurs en fin de ce paragraphe (§2.3) leur lien avec la norme H2.

2.3.2 Equations de Lyapunov

Equations de Lyapunov et gramiens

Les équations de Lyapunov tiennent une place privilégiée dans l'analyse et la commande des systèmes linéaires. Elles interviennent notamment dans l'étude de la stabilité, la commandabilité, l'observabilité, la capacité à transmettre un bruit blanc … On parlera

---

[12] Cas général : $u(\tau) = B^T e^{A^T(t_1 - \tau)} \left[\mathcal{G}_c(t_1 - t_0)\right]^{-1} \left(x_1 - e^{A(t_1 - t_0)} x_0\right)$; vérifier à titre d'exercice que partant de $x(t_0) = x_0$, on atteint bien à t_1, $x(t_1) = x_1$

d'équations différentielles de Lyapunov pour désigner les équations matricielles ci-dessous et d'équation (algébrique) de Lyapunov dans le cas ou $\dot{P}(t)\equiv 0$.

Eq. Lyapunov : $A^T P(t)+P(t)A+Q=\dot{P}(t)$

Théorème 2.8 (solution d'une équation différentielle de Lyapunov)

$P(t)=\int_0^t e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}\,d\tau$ est solution de l'équation différentielle de Lyapunov définie ci-dessous.

♦ Soit $M(t)=\int_0^t e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}\quad d\tau$. Notons tout d'abord que : $\frac{d}{dt}\left(e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}\right)=A^T e^{A^T t}Qe^{At}+e^{A^T t}Qe^{At}A$. En intégrant les membres de l'égalité, on obtient la nouvelle égalité : $\left[e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}\right]_0^t=A^T M(t)+M(t)A$ (e1). Or, on a aussi $\left[e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}\right]_0^t=\dot{M}(t)-Q$ (e2). D'après (e1) et (e2), on a bien : $A^T M(t)+M(t)A+Q=\dot{M}(t)$. Par suite, il est clair que $P(t)=M(t)=\int_0^t e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}\quad d\tau$ est bien solution de l'équation différentielle de Lyapunov. ♦

On montre sans difficulté que $\mathcal{G}_c(t)$ et $\mathcal{G}_o(t)$ sont les solutions des équations différentielles de Lyapunov :

$$\dot{G}_c(t)=A\mathcal{G}_c(t)+\mathcal{G}_c(t)A^T+BB^T \qquad \mathcal{G}_c(0)=0$$

$$\dot{G}_o(t)=A^T\mathcal{G}_o(t)+\mathcal{G}_o(t)A+C^TC \qquad \mathcal{G}_o(0)=0$$

Les gramiens partiels peuvent être calculés efficacement par intégration de ce système d'équations différentielles du 1er ordre (cf. §. Résolution des équations de Lyapunov).

On déduit trivialement, de l'équation ci dessus et de l'interprétation du gramien d'observabilité (cf. § correspondant), le résultat suivant.

Théorème 2.9 (critère quadratique et équation différentielle de Lyapunov)

Considérons le système autonome $\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t), & x(0)=x_0\\ y(t)=Cx(t), & \end{cases}$ et la fonction quadratique $J(t)=\int_0^t y(\tau)^T y(\tau)d\tau$. On a : $J(t)=x_0{}^T P(t)x_0$ si $\dot{P}(t)=A^T P(t)+P(t)A+C^T C$.

Remarque : S'il existe toujours une solution à l'équation différentielle de Lyapunov, il n'en va pas de même pour l'équation algébrique obtenue en imposant $\dot{P}(t)=0$. Il est clair que l'existence de $P=\int_0^{+\infty} e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}\,d\tau$ est conditionnée par la stabilité asymptotique de A si $\left(Q^{1/2},A\right)$ est observable. Pour autant, l'équation algébrique de Lyapunov peut admettre une solution même dans le cas où A est instable[13]. La proposition suivante précise les choses.

[13] On pourrait s'intéresser à l'interprétation à donner à la matrice P en ce cas. Ce point sort du cadre du cours.

Théorème 2.10 (équation de Lyapunov, stabilité et gramien)

L'équation $A^T P + PA + Q = 0$ d'inconnue P et pour laquelle Q est symétrique possède les propriétés suivantes :

1. A ne possède pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire est une condition nécessaire d'existence d'une solution. Précisément, l'équation possède une solution unique *si et seulement si* $\lambda_i(A) + \lambda_j(A) \neq 0 \ \forall i, j = 1, \cdots, n$.
2. Supposons que : $\exists C_q \,/\, Q = C_q{}^T C_q$ et (C_q, A) détectable. Alors, $[P \geq 0 \Rightarrow A \, est\ stable]$
3. A est stable $\Rightarrow P = \int_0^{+\infty} e^{A^T \tau} Q e^{A\tau} \, d\tau$

♦ point 1 : ce résultat découle de la proposition 3 page suivante.

point 2 : montrons que la positivité de P induit la stabilité de A. Soit λ une valeur propre de A et soit v le vecteur propre associé. On déduit de l'équation de Lyapunov que :

$$0 = v^* \left(A^T P + PA + Q\right) v = v^* \lambda^* P v + v^* P \lambda v + v^* Q v = 2Re(\lambda) \cdot \underbrace{v^* P v}_{\geq 0} + \underbrace{v^* Q v}_{\geq 0}.$$

Il est clair que cette égalité ne peut être vérifiée que si $Re(\lambda) \leq 0$. L'inégalité devient stricte si $Q > 0$ ou si $\left(Q^{1/2}, A\right)$ est détectable.

Résolution des équations de Lyapunov

Définitions préliminaires :

- Soient M et N deux matrices de dimension $m \times n$ et $p \times q$ respectivement. $M \otimes N = \begin{pmatrix} m_{11}N & \cdots & m_{1n}N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1}N & \cdots & m_{mn}N \end{pmatrix} \in R^{mp \times nq}$. $\otimes$ définit le produit de Kronecker.
- $Vec(M) = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{m1} & m_{12} & \cdots & m_{m2} & \cdots & m_{1n} & \cdots & m_{mn} \end{pmatrix}^T \in R^{mn}$
- Propriétés :
  1. $\mu_i = \lambda_i(M), \nu_i = \lambda_i(N) \Rightarrow spectre(M \otimes N) = \{\mu_i \nu_j, \ 1 \leq i \leq n_M, 1 \leq i \leq n_N\}$
  2. $M \oplus N \triangleq [M \otimes I + I \otimes N]$; $\mu_i = \lambda_i(M), \nu_i = \lambda_i(N) \Rightarrow spectre(M \oplus N) = \{\mu_i + \nu_j, \ 1 \leq i \leq n_M, 1 \leq i \leq n_N\}$

Théorème 2.11 (vectorisation de l'équation différentielle de Lyapunov)

L'équivalence ci-dessous est vérifiée.

$$\dot{P} = F^T P + PF + Q \iff Vec(\dot{P}) = \left[I \otimes F^T + F^T \otimes I\right] Vec(P) + Vec(Q)$$

Cette équivalence peut être utilisée avec profit pour calculer $P(t)$ à partir de la donnée des matrices F et Q. On obtient le gramien partiel de commandabilité pour $F = A^T$ et $Q = BB^T$, et le gramien partiel d'observabilité pour $F = A$ et $Q = C^T C$.

Remarques :

1. $F^T P + PF + Q = 0 \iff \left[I \otimes F^T + F^T \otimes I\right] Vec(P) = -Vec(Q)$

2. d'après la propriété 2, $\left\lfloor I\otimes F^T + F^T \otimes I \right\rfloor = F^T \oplus F^T$ est singulière *ssi* $\exists i, j \ / \ \lambda_i(F)+\lambda_j(F)=0$.

Exercice 10 : Analyse de la stabilité par Lyapunov

[Soit le système (Σ) défini par $H(p)=\dfrac{1}{(p+a)^2} := \left(\begin{array}{cc|c} -a & 0 & 1 \\ 1 & -a & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Discuter la stabilité de ce système en appliquant uniquement le point 2 de la proposition 2.

♦Solution : On choisit $Q=I$ ce qui assure la condition de détectabilité requise. On résout l'équation de Lyapunov $A^T P + PA + Q \ = 0$. On résout le système d'équations linéaires associé.

Solution : $P=\begin{pmatrix} \dfrac{2a^2+1}{4a^3} & \dfrac{1}{4a^2} \\ \dfrac{1}{4a^2} & \dfrac{1}{2a} \end{pmatrix}$. Cette matrice est positive à la seule condition que $a>0$ ce qui est bien la condition de stabilité recherchée.

On peut choisir d'utiliser la proposition 3 qui permet d'obtenir directement le système d'équations à résoudre.
$\left\lfloor I\otimes A^T + A^T \otimes I \right\rfloor Vec(P) = Vec(Q) \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A.N. : Pour $a=1/2$ on obtient $P=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$]

Calcul des normes H2 et Hinf

Considérons le système Σ *stable* et *strictement propre* décrit à partir de la *réalisation minimale* ($A\in R^{n\times n}, B\in R^{n\times m}, C\in R^{p\times n}$):

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \qquad avec: \ x(0)=x_0$$

Soit $G(p)=C(pI-A)^{-1}B+D$ la matrice de transfert associée.

Calcul de la norme Hinf dans l'espace d'état

Théorème 2.12 : norme Hinf et Riccati

$\|G(p)\|_\infty < \gamma$ si et seulement si :

1. $\|D\| < \gamma$
2. Il existe une solution $P = P^T \succ 0$ à l'équation de Riccati : $A^T P + PA + C^T C + \left(PB + C^T D\right)\left(\gamma^2 I - D^T D\right)^{-1}\left(B^T P + D^T C\right) = 0$

Théorème 2.13 : norme Hinf et matrice Hamiltonienne

$\|G(p)\|_\infty < \gamma$ si et seulement si :

1. $\|D\| < \gamma$
2. La matrice Hamiltonnienne $H = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C^T C & -A^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -B \\ C^T D \end{bmatrix}\left(\gamma^2 I - D^T D\right)^{-1}\begin{bmatrix} D^T C & B^T \end{bmatrix}$ n'a pas de valeurs propres imaginaires pures.

Remarque : Ces résultats permettent l'évaluation numérique de la norme Hinf du système Σ, par la procédure dite des γ-itérations.

Calcul de la norme H2 dans l'espace d'état

La norme H2 peut se déduire du calcul des gramiens totaux. Rappelons pour commencer leur définition et quelques propriétés :

$$\mathcal{G}_c = \int_0^{+\infty} e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau}\, d\tau$$
$$\mathcal{G}_o = \int_0^{+\infty} e^{A^T\tau} C^T C e^{A\tau}\, d\tau$$

Leur existence découle de l'hypothèse de stabilité du système. Ils sont solution des équations algébriques de Lyapunov:

$$A\mathcal{G}_c + \mathcal{G}_c A^T + BB^T = 0 \text{ et } A^T\mathcal{G}_o + \mathcal{G}_o A + C^T C = 0\,.$$

On déduit de ce qui précède (démonstration à tire d'exercice) la propriété importante suivante.

$$\|G(p)\|_2^2 = Trace\left(B^T \mathcal{G}_o B\right) = Trace\left(C\mathcal{G}_c C^T\right)$$

Numériquement, le **calcul de la norme** H_2 de $G(p)$ peut être réalisé par résolution d'une des 2 équations algébriques de Lyapunov ci-dessus (déduite des matrices d'état A, B, C) et de l'évaluation de la trace associée. Notons que la stricte propreté de la matrice $G(p)$ est indispensable à l'existence de $\|G(p)\|_2$.

Exercice 11 : calcul de norme H2

Calculer la norme H_2 du transfert $G(p) = \dfrac{a}{p+a}$ de différentes manières :

1. à partir de la représentation d'état associée
2. par évaluation de l'énergie de la réponse impulsionnelle
3. par application directe de la définition.

Calculer la norme H_2 du transfert $G(p)=\dfrac{1}{p^2+0.1p+1}$ à partir de la représentation d'état donnée ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Exercice 12 : calcul de norme Hinf

Calculer la norme H_∞ du transfert $G(p)=\dfrac{a}{p+a}$ de différentes manières :

1. à partir de la définition (réponse fréquentielle)
2. par résolution de l’équation de Riccati associée
3. par analyse de la matrice Hamiltonienne
4. par l’analyse de faisabilité de la LMI associée au Lemme réel borné (cf. p36)

2.4 Evaluation de la stabilité et des performances : concepts « avancés »

Dans ce paragraphe, on montre comment utiliser la théorie de Lyapunov pour formaliser une **classe élargie de problème d'analyse de stabilité et de performances**. Ces résultats seront approfondis dans la partie IV (Commande $H_{2,\infty}$ et optimisation convexe) du cours.

Commençons par ce résultat liminaire reliant équation et inéquation de Lyapunov.

Lemme: égalité versus inégalité de Lyapunov

Considérons l'équation de Lyapunov : $A^T P_0 + P_0 A + Q = 0$, avec $Q \succ 0$ et A Hurwitz. On sait dés lors que la matrice de Lyapunov solution $P_0 \succ 0$ est définie positive.
Dans ces conditions, toute matrice P satisfaisant l'inégalité matricielle $A^T P + PA + Q \prec 0$ est telle que $P \succ P_0$.

Rappelons aussi comment on définit la ***stabilité des systèmes non linéaires au sens de Lyapunov***.

Définition : stabilité au sens de Lyapunov
Soit un système autonome d'état x régit par l'équation $\dot{x} = f(x)$. Soit x_e un point d'équilibre pour ce système : il satisfait donc à l'équation $f(x_e) = 0$. x_e est un point stable au sens de Lyapunov s'il existe une fonction scalaire $V(x)$ vérifiant localement (e.g. dans $B(x_e, r)$) les conditions suivantes :

1. $V(x) \succ V(x_e), \quad \text{pour } x \neq x_e \;;\; V(x_e) = 0$
2. $\frac{d}{dt}V(x) \prec 0, \quad \text{pour } x \neq x_e$

Une telle fonction $V(x)$ est dite fonction de Lyapunov ou encore fonction d'énergie du système. A partir d'une condition initiale $x_0 \in B(x_e, r)$ distincte de x_e, la condition 2. garantit que l'énergie interne du système va décroître le long des trajectoires du système jusqu'à atteindre son minimum en x_e.

Démontrer la stabilité en s'appuyant sur ce résultat suppose le choix d'une fonction d'énergie appropriée (i.e. bien adaptée à la nature du système considéré, comme l'énergie totale pour un système mécanique), ce qui n'est en rien trivial dans le cas général. Une classe de fonctions souvent utilisées sont les fonctions quadratiques $V(x) = (x\text{-}x_e)^T P (x\text{-}x_e)$ avec $P = P^T > 0$. On parle alors de **stabilité quadratique**. Pour la fonction d'énergie choisie, il reste à démontrer que $\frac{d}{dt}V(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V(x)\, f(x) \prec 0$.

Stabilité des systèmes LTI et LPV[14]

Le système LTI $\dot{x} = Ax$ est un cas particulier du cas précédent ($f(x) = Ax$). Il comporte $x_e = 0$ pour seul point d'équilibre sur R^n. En choisissant $V(x) = x^T Px$ avec $P = P^T > 0$, la condition de stabilité s'écrit alors :

$$A^T P + PA \prec 0$$

Théorème 2.14 : stabilité d'un système LTI

Le système $\dot{x} = Ax$ est stable de manière interne si et seulement si il est quadratiquement stable, soit encore si il existe *P* solution de l'inégalité matricielle linéaire (LMI) suivante :

$$P \succ 0$$
$$A^T P + PA \prec 0$$

Si le système est stable, une telle matrice *P* peut être obtenue soit directement par résolution de ces LMI (cf. partie III commande et optimisation convexe), soit encore en fixant une matrice $Q = Q^T > 0$ et en résolvant : $AP_0 + P_0 A + Q = 0$.

Théorème 2.15 : α-stabilité d'un système LTI

Le système $\dot{x} = Ax$ est α-stable si et seulement si il est quadratiquement α-stable, soit encore si il existe *P* solution de l'inégalité matricielle linéaire (LMI) suivante :

$$P \succ 0$$
$$A^T P + PA \prec -2\alpha \mathrm{P}$$

On montre aisément que si $\dot{x} = Ax$ quadratiquement α-stable, alors les 2 propriétés suivantes sont satisfaites:

1. la partie réelle des valeurs propres de A sont inférieures à -α.
2. $\lim_{t \to \infty} e^{-\alpha t} \|x(t)\| = 0$

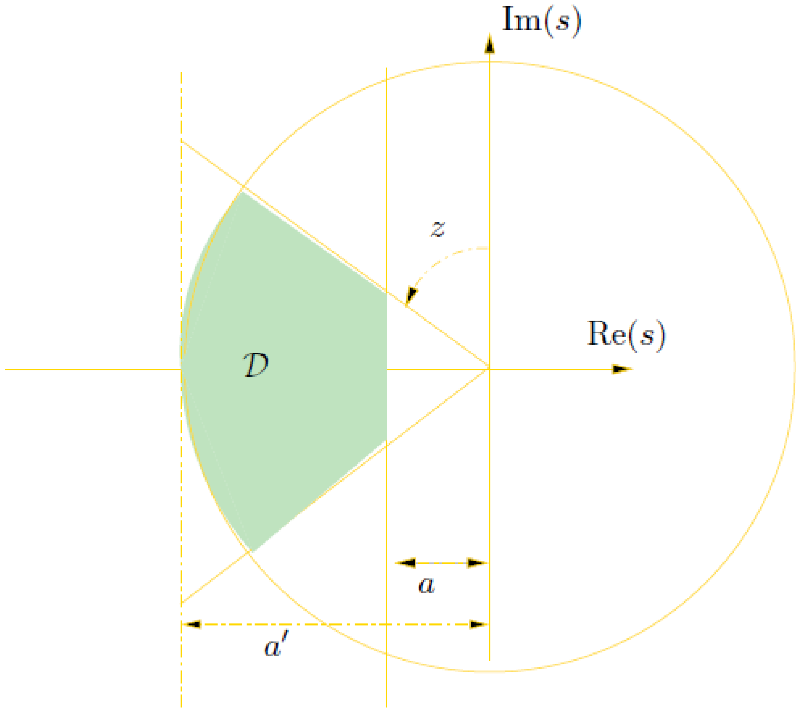
Théorème 2.16 : stabilité généralisée ou D-stabilité

On dit qu'une matrice est *D-stable* si et seulement si toutes ses valeurs propres sont contenues dans la région *D*. Toute région *D* du plan complexe décrite par : $D = \{ z \in C \setminus \alpha + \beta z + \beta^T \bar{z} < 0 \}$, avec $\alpha = \alpha^T \in R^{l \times l}$ et $\beta = \beta^T \in R^{l \times l}$ est dite région LMI d'ordre l.

La matrice *A (ou le système associé* $\dot{x} = Ax$) est dit *D-stable* si et seulement si il existe une matrice $X_D = X_D{}^T > 0$ telle que :

$$\alpha \otimes X_D + \beta \otimes (AX_D) + \beta^T \otimes (X_D A^T) < 0$$

[14] **LTI** system : Linear Time Invariant system ; on parle de système Linéaire à Temps Invariant ou stationnaire par opposition à des système **LTV** ou **LPV** (Linéaire à Temps Variant ou à Paramètre Variant);



Exemple de région LMI (intersection de trois sous-régions LMI)

Théorème 2.17 : stabilité robuste

Soit $A(\Delta)=\sum_{i=1}^{L}\alpha_k A_i$ et $\alpha_i>0,\ \forall i\in\{1,\cdots,L\},\sum_{i=1}^{L}\alpha_i=1$. Le **système incertain** $\dot{x}(t)=A(\Delta)x(t)$ est stable si il existe une matrice P symétrique telle que :

$$\begin{cases} P>0 \\ A_i^TP+PA_i<0 \end{cases},\quad i=1,\dots,L \iff \begin{bmatrix} P & 0 & .. & 0 \\ 0 & -(A_1^TP+PA_1) & . & : \\ : & . & . & 0 \\ 0 & .. & 0 & -(A_L^TP+PA_L) \end{bmatrix}>0$$

■

Exercice : Démontrer à titre d'exercice le résultat précédent.

Remarque : Ce résultat, garantit en fait la stabilité quadratique du système incertain. Il vaut également pour les systèmes à temps variant comme l'indique le résultat suivant.

Considérons ainsi le cas d'un système polytopique, décrit par : $\dot{x}(t)=A(t)x(t)$ avec $A(t)\in Co\{A_1,\ \ldots,\ A_L\}$. Autrement dit, la matrice d'état $A(t)$ évolue en fonction du temps selon la relation :

$$A(t)=\sum_{i=1}^{L}\alpha_i(t)A_i$$

fonction du signal $\alpha(t)=\left[\alpha_1(t) \quad \cdots \quad \alpha_L(t)\right]^T$, tel que $\sum_{i=1}^{L}\alpha_i(t)=1$ et $\alpha_i(t)>0,\ \forall i\in\{1,\cdots,L\},\forall t>0$.

Théorème 2.18 : stabilité des systèmes LTV

Le **système LTV polytopique** décrit ci-dessus est quadratiquement stable si il existe une matrice P symétrique satisfaisant indifféremment l'une des deux inéquations suivantes :

$$\begin{cases} P>0 \\ A_i^T P+PA_i<0 \end{cases},\quad i=1,\dots,L \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} P & 0 & .. & 0 \\ 0 & -(A_1^T P+PA_1) & . & : \\ : & . & . & 0 \\ 0 & .. & 0 & -(A_L^T P+PA_L) \end{bmatrix}>0$$

Notons qu'il s'agit d'une LMI.

Performance des systèmes LTI et LPV : dissipativité, norme H∞

On cherche désormais à garantir davantage que la stabilité, supposant que les performances peuvent être valablement évaluées en termes de dissipativité ou de norme.

Nous considèrerons dans ce qui suit la fonction scalaire $S(u,y)$ que l'on nommera flux d'énergie entrant.

Définition : (Dissipativité)

Le système $\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ u(t)\end{pmatrix}$ est dit *S*-dissipatif s'il existe une fonction d'énergie $V(x)>0$ telle que :

$$\frac{d}{dt}V(x)<S(u,y), \qquad \forall x\neq 0,\ \forall u$$

On s'intéressera en particulier à des fonctions du type : $S(u,y)=\begin{pmatrix}y\\ u\end{pmatrix}^T\underbrace{\begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{12}{}^T & Q_{22}\end{pmatrix}}_{Q}\begin{pmatrix}y\\ u\end{pmatrix}$ et l'on parlera de $\{Q_{11},Q_{22},Q_{12}\}$-dissipativité.

Théorème 2.19 : caractérisation de la *S*-dissipativité

Le système $\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ u(t)\end{pmatrix}$ est $\{Q_{11},Q_{22},Q_{12}\}$-dissipatif s'il existe une matrice $P=P^T>0$ vérifiant la LMI suivante :

$$P \succ 0$$
$$\begin{bmatrix} A^T P + PA\text{-}C^T Q_{11} C & PB\text{-}C^T Q_{11} D\text{-}C^T Q_{12} \\ B^T P\text{-}D^T Q_{11} C\text{-}D^T Q_{12} C & \text{-}D^T Q_{11} D\text{-}D^T Q_{12}\text{-}Q_{12} D^T\text{-}Q_{22} \end{bmatrix} \prec 0$$

■

La norme H∞ peut est vue comme un cas particulier de la *S*-dissipativité. Rappelons que celle-ci peut être caractérisée en tant que norme induite, pour $G(p) = C(pI - A)^{-1} B + D$ par :

$$\|G(p)\|_\infty \triangleq \sup_\omega \bar{\sigma}(G(j\omega)) = \sup_u \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}$$

Théorème 2.20 : performance H_∞ et *S*-dissipativité[15]

Si l'on choisit $S(u,y) = \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \text{-}I & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} = \gamma^2 u^T u - y^T y$, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. G est *S*-dissipatif
2. $\|G(p)\|_\infty \leq \gamma$

Corollaire : Lemme borné réel / norme H_∞

Le système $\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$ a une norme H_∞ inférieure à γ si et seulement si il existe une matrice $P = P^T > 0$ vérifiant la LMI suivante :

$$P \succ 0$$
$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D\text{-}\gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0$$

Théorème 2.21 : Norme H2 et condition optimisation sous contrainte LMI

La norme H_2 du système $G(p).= \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ peut être calculée par l'une des voies suivantes :

1. $\|G(p)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Trace\left(G^*(j\omega) G(j\omega)\right) d\omega$
2. $\|G\|_2^2 = \inf \left\{ Trace(CPC^T) : AP + PA^T + BB^T < 0,\ P > 0 \right\}$
3. $\|G\|_2^2 = \inf \left\{ Trace(B^T PB) : A^T P + PA + C^T C < 0,\ P > 0 \right\}$

■

[15] Cf. aussi le Lemme de Yakubovich – Kalman qui montre l'équivalence entre les propositions suivantes : (i) *G* est $\{Q_{11}, Q_{22}, Q_{12}\}$-dissipatif, (ii) $\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \geq 0$

On peut également chercher à évaluer les performances d'un système polytopique au travers d'une généralisation du Lemme borné réel. Considérons le cas du **système polytopique**, décrit par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{L} \alpha_i(t) \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$$

avec $\alpha(t) = \left[\alpha_1(t) \quad \cdots \quad \alpha_L(t)\right]^T$, tel que $\sum_{i=1}^{L} \alpha_i(t) = 1$ et $\alpha_i(t) > 0,\ \forall i \in \{1, \cdots, L\}, \forall t > 0$.

Théorème 2.22 : Lemme borné réel / système LTV/LPV non expansif

Le **système polytopique** ci-dessus n'est pas expansif au-delà de la valeur γ (i.e. $\int_0^T y(t)^T y(t) dt \leq \int_0^T \gamma^2 u(t)^T u(t) dt$ pour tout u et $T \geq 0$), si et seulement si il existe une matrice $P = P^T > 0$ vérifiant la LMI suivante :

$$\exists P / \quad \begin{cases} P \succ 0 \\ \begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i + C_i^T C_i & P B_i + C_i^T D_i \\ B_i^T P + D_i^T C_i & D_i^T D_i - \gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0 \end{cases}, \qquad i = 1, \ldots, L$$

3 Analyse d'un système asservi

Rappels : Les bases de la robustesse monovariable

3.1 Stabilité nominale

L'analyse de la stabilité d'un système asservi LRI se ramène toujours à l'étude du schéma de la figure ci-dessous pour lequel $L(p)$ représente le *transfert de boucle*. Cherchons à étendre les résultats vus l'an dernier aux cas des systèmes MIMO.

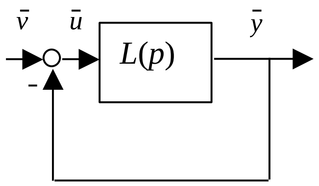


Figure 3.1 : Schéma pour l'analyse de la stabilité nominale d'un asservissement

La matrice de transfert du système bouclé s'obtient simplement :

$$\begin{cases} \bar{y}(p) = L(p)\bar{u}(p) \\ \bar{u}(p) = \bar{v}(p) - \bar{y}(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{y}(p) = [I + L(p)]^{-1} L(p)\bar{v}(p) \\ \bar{u}(p) = [I + L(p)]^{-1} \bar{v}(p) \end{cases}$$

Nous supposerons dans ce qui suit que le schéma de rétroaction est *bien posé*, c'est à dire que toutes les fonctions de transfert de la boucle fermée sont bien définies et propres.

Théorème 3.1 (Rétroaction bien posée) :

Le schéma de la Figure 3.1 correspond à une rétroaction *bien posée* si et seulement si $I + L(\infty)$ est non singulière.

Exemples de rétroactions *mal posées* : $L(p) = -\dfrac{p-1}{p+2}$, $L(p) = -1$.

Théorème 3.2 (Stabilité d'un système bouclé)

Le système bouclé est stable *si et seulement si* les racines de $\det(I + L(p))$ sont à partie réelle strictement négative.

- Soit $\mathrm{P}_{bo}(p)$ le polynôme caractéristique du transfert de boucle. Soit $\mathrm{P}_{bf}(p)$ le polynôme caractéristique du système bouclé. On a : $\dfrac{\mathrm{P}_{bf}(p)}{\mathrm{P}_{bo}(p)} = \det(I + L(p))$. (1.4)

Pour étudier la stabilité du système bouclé, on définit $l(p)$ par : $\det(I + L(p)) \triangleq 1 + l(p)$. On applique ensuite le critère de Nyquist habituel à $l(p)$.

Théorème 3.3 (CRITERE DE NYQUIST MULTIVARIABLE)

Le système bouclé est stable *si et seulement si* l'image du contour de Nyquist C par $l(p)$ entoure le point -1 dans le sens horaire un nombre de fois $N=-P$ (N fois dans le sens horaire) si P est le nombre de pôles instables de $l(p)$.

Exercice 13 : Marges de robustesse et critère de Nyquist Multivariable

[

Considérons le transfert de boucle MIMO suivant :

$$L(p)=\begin{bmatrix} \frac{1}{p+1} & \frac{b_{12}}{p+1} \\ 0 & \frac{1}{p+1} \end{bmatrix}.$$

Les questions qui suivent permettent d'analyser la stabilité et la robustesse du système asservi correspondant.

1. Donner une réalisation dans l'espace d'état de $L(p)$:

♦ $\begin{cases} \dot{x}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} 1 & b_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}u \\ y=x \end{cases}$ (2 pôles en -1)

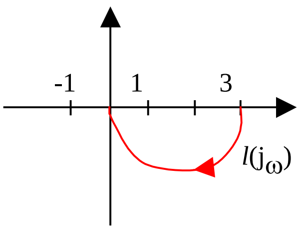
2. Calculer le transfert en boucle fermée $\frac{\bar{u}(p)}{\bar{v}(p)}=[I+L(p)]^{-1}$.

♦ $I+L(p)=\begin{bmatrix} \frac{p+2}{p+1} & \frac{b_{12}}{p+1} \\ 0 & \frac{p+2}{p+1} \end{bmatrix}$, $[I+L(p)]^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{p+1}{p+2} & -b_{12}\frac{p+1}{(p+2)^2} \\ 0 & \frac{p+1}{p+2} \end{bmatrix}$

3. Calculer $l(p)$.

♦ $\det(I+L(p))=\frac{(p+2)^2}{(p+1)^2}$, $l(p)=\det(I+L(p))-1=\frac{2p+3}{(p+1)^2}$.

4. Tracer le lieu de Nyquist de $l(p)$.

♦ 

5. Quelles sont les marges de robustesse du système en boucle fermée ?

♦ Si l'on applique le raisonnement monovariable, on obtient :

- Marge de gain = $\left] -1/3, \infty \right[$
- marge de phase $>90°$ et ce indépendamment de b_{12}. Ces marges ne traduisent absolument pas la robustesse du système bouclé.

6. Montrer que pour $b_{12} >> 1$, une légère perturbation sur le transfert de boucle est susceptible de rendre le système en boucle fermée instable.

♦ Solution 1 (raisonner à l'aide du formalisme « transfert) :

$$I + L_p(p) = I + L(p) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{\varepsilon}{p+1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{p+2}{p+1} & \dfrac{b_{12}}{p+1} \\ \dfrac{\varepsilon}{p+1} & \dfrac{p+2}{p+1} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det\left(I + L_p(p)\right) = \dfrac{(p+2)^2}{(p+1)^2} - \dfrac{\varepsilon b_{12}}{(p+1)^2} = \dfrac{p^2+4p+4-\varepsilon b_{12}}{(p+1)^2} = \dfrac{P_{bf}(p)}{P_{bo}(p)}$; $P_{bf}(p)$ possède une racine en 0 pour $\varepsilon b_{12} = 4$. Le critère de Nyquist multivariable laissait croire trompeusement que le système était robuste.

Solution 2 (raisonner à l'aide du formalisme d'état). L'introduction d'une perturbation ε même faible dans la matrice A selon $A_p = A + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}$ rend le système bouclé instable dés que $\varepsilon > \dfrac{4}{b_{12}}$. Le système bouclé s'écrit en ce cas : $\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -b_{12} \\ -\varepsilon & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$. Le polynôme caractéristique est $\det\left(pI - A_p\right) = p^2 + 4p + 4 - \varepsilon b_{12}$ (une racine en 0 pour $\varepsilon b_{12} = 4$). Le critère de Nyquist multivariable laissait croire trompeusement que le système était robuste.

7. Conclure à partir de la décomposition en valeur singulière de $I + L(j\omega)$

♦ $\inf\limits_{\omega} \underline{\sigma}\left(1 + L(j\omega)\right)$ est un bon indicateur de la robustesse de l'asservissement. Il généralise la notion de marge de module et doit être suffisamment grand. Pour l'exemple ci-dessus, on utilisera les commandes *matlab* données en note de bas de page [16]. On trouve $\inf\limits_{\omega} \underline{\sigma}\left(I + L(j\omega)\right) = \underline{\sigma}\left(I + L(0)\right) = 4 \times 10^{-3}$ pour $b_{12} = 10^3$ et $\inf\limits_{\omega} \underline{\sigma}\left(I + L(j\omega)\right) = \underline{\sigma}\left(I + L(0)\right) = 4 \times 10^{-6}$ pour $b_{12} = 10^6$. La faible robustesse de l'asservissement est cette fois bien détectée.

Rq. : Inversement, $\left\| S(p) \right\|_\infty = \sup\limits_{\omega} \bar{\sigma}\left(S(j\omega)\right) = 1 \Big/ \inf\limits_{\omega} \underline{\sigma}\left(I + L(j\omega)\right)$ doit être suffisamment petit.]

16

w=logspace(-1,5,1000); b12=1e3; L=[tf(1,[1 1]) tf(b12,[1 1]); 0 tf(1,[1 1])]; figure(1),sigma(L,w,2); title('svd(I+L)'), figure(2),sigma(eye(2,2)+L,w,1), title('svd(S), avec S=(I+L)^-1'), sv=sigma((eye(2,2)+L),0),format short eng,
%w=0; IplusLw=freqresp((eye(2,2)+L),w);[U,S,V]=svd(IplusLf)
ou bien:
b12=1e3; a=[-1 0;0 -1]; b=[1 b12;0 1]; c=eye(2,2); d=zeros(2,2);L=ss(a,b,c,d); w=logspace(-2,6,1000) ; figure(1),sigma(L,w,2); title('svd(I+L)'), figure(2),sigma(eye(2,2)+L,w,1), title('svd(S), avec S=(I+L)^-1'), sv=sigma((eye(2,2)+L),0),format short eng,

Contrairement au cas SISO, le théorème de Nyquist multivariable ne permet pas de quantifier graphiquement les marges de robustesse de l'asservissement. Ceci est du au fait que le *déterminant* n'est pas une norme matricielle.

3.2 Stabilité robuste

Théorèmes généraux

L'exemple précédent a montré que le critère de Nyquist multivariable ne permettait pas une analyse directe (géométrique) de la robustesse d'un asservissement comme c'était le cas pour un asservissement SISO. Ce paragraphe introduit succinctement quelques rappels sur la μ-analyse qui, tout en s'appuyant sur le critère de Nyquist multivariable, permet malgré tout de quantifier la robustesse d'un asservissement MIMO.

On considère désormais que le système est modélisé avec un certain degré d'incertitude. On distinguera ainsi le « modèle nominal » noté $G(p)$, utilisé pour concevoir l'asservissement et le « modèle réel » $G_{réel}(p)$ qui peut en différer de manière significative. Le modèle « réel » est bien entendu inconnu. Notons $L(p)$ et $L_{réel}(p)$ les transferts de boucle associés aux deux modèles (même régulateur dans les deux cas). La différence $L_{réel}(p)-L(p)$, caractérise l'incidence de l'erreur de modèle sur le transfert de boucle de l'asservissement.

Notre objectif consiste désormais à déterminer les hypothèses sous lesquelles on peut déduire la stabilité de l'asservissement du «modèle réel » de celle du modèle nominal. Un premier résultat est donné par le théorème suivant.

Théorème 3.4 (stabilité robuste et critère de Nyquist multivariable)

1. L'asservissement du « modèle réel » est stable si les conditions suivantes sont réunies :
2. l'asservissement nominal est stable.
3. $L(p)$ et $L_{réel}(p)$ ont le même nombre de pôles instables. De plus, les pôles sur l'axe imaginaire de $L_{réel}(p)$ sont aussi des pôles de $L(p)$.
4. quel que soit p appartenant au contour de Nyquist et tout $\varepsilon \in [0,1]$, $\det(I+(1-\varepsilon)L(p)+\varepsilon L_{réel}(p)) \neq 0$.

♦ Puisque le déterminant ne permet pas de quantifier directement la distance à l'instabilité, on fait évoluer continûment le transfert de boucle de $L(p)$ à $L_{réel}(p)$ en faisant varier ε de 0 à 1 et l'on vérifie que le lieu $l_\varepsilon(p) \triangleq \det(I+(1-\varepsilon)L(p)+\varepsilon L_{réel}(p))-1$ (fonction multilinéaire qui évolue continûment avec ε) ne franchit pas le point critique.

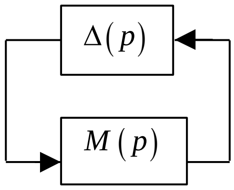


Figure 3.2 : Schéma d'interconnexion standard pour la μ-analyse.

Par ailleurs, s'appuyant toujours sur le critère de Nyquist multivariable, la μ-analyse permet de quantifier la robustesse d'un système bouclé. Considérons le schéma général d'analyse de la robustesse (stabilité) représenté en Figure 3.2 et définissons la « mesure[17] » μ comme suit.

Définition 3.1 (mesure μ d'une matrice complexe)

Soit $\mathbf{M}$ une matrice complexe de $C^{p\times m}$ et $\underline{\Delta}$ un sous ensemble de l'espace $C^{m\times p}$, on a :

- $$\mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M}) \triangleq \frac{1}{\min\limits_{\mathbf{\Delta}\in\underline{\Delta}} \left\{ \bar{\sigma}(\mathbf{\Delta}) \;\; / \;\; \det(I - \mathbf{M\Delta}) = 0 \right\}} \tag{1.5}$$
- $\mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M}) \triangleq 0$ si aucune matrice $\mathbf{\Delta} \in \underline{\Delta}$ n'annule le déterminant.

Elle permet l'analyse structurée de la distance d'une matrice à la singularité.

Corollaire[18] (lien entre $\bar{\sigma}$ et μ): Dans le cas où $\underline{\Delta} = C^{m\times p}$, $\mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M}) \triangleq \bar{\sigma}(\mathbf{M})$.

♦ $\mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M}) = \dfrac{1}{\min\limits_{\mathbf{\Delta}\in\underline{\Delta}} \left\{ \bar{\sigma}(\mathbf{\Delta}) \;\; / \;\; \det(I - \mathbf{M\Delta}) = 0 \right\}} = \dfrac{1}{\underline{\sigma}(\mathbf{M}^{-1})} = \bar{\sigma}(\mathbf{M})$ (cf. propriétés des valeurs singulières) CQFD.

Revenons à la Figure 3.2 et aux matrices de transfert $M(p)$ et $\Delta(p)$. Sous l'hypothèse : $M(p)$ *et* $\Delta(p)$ *sont stables*, on peut énoncer le théorème de stabilité suivant.

Théorème 3.5 (Stabilité robuste et μ)

Le système bouclé (cf. Figure 3.2) est stable pour toute matrice de transfert $\Delta(p)$ stable telle que $\Delta(p) \in \underline{\Delta}$ et $\|\Delta(p)\|_\infty \le \bar{\delta}$ *si et seulement si* : $\forall \omega \in R, \quad \mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega)) < \bar{\delta}^{-1}$.

♦ Démontrons ce résultat par l'absurde. Supposons alors que : $\exists \omega \in R$ tel que : $\mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega)) \ge \bar{\delta}^{-1}$.

Par suite :

$$\exists \omega \in R, \; \min_{\Delta\in\underline{\Delta}} \left\{ \bar{\sigma}(\Delta) \;\; / \;\; \det(I - M(j\omega)\Delta) = 0 \right\} \le \bar{\delta},$$

$$\Rightarrow \exists \Delta \in \underline{\Delta} \;\; t.q. \; \bar{\sigma}(\Delta) \le \bar{\delta} \text{ et } (I - M(j\omega)\Delta) = 0 \text{ pour un } \omega \text{ donné}$$

$$\Rightarrow \exists \Delta \text{ dans l'ensemble des perturbations admissible qui rend le système instable}.$$ CQFD

N.B. : $\mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega))$ permet l'analyse de la distance d'un système à l'instabilité. Il reste à préciser l'ensemble des incertitudes admissibles en définissant $\underline{\Delta}$ .Quelques exemples illustreront ce point dans différents cas, juste après la remarque suivante.

[17] Le choix du terme « mesure μ » peut être discuté car si $\mu(\cdot)$ permet de quantifier la taille de la matrice de transfert Δ capable de déstabiliser le système bouclé, elle ne possède pas toutes les propriétés d'une norme.

[18] Rappel : $\underline{\sigma}(\mathbf{M}) = \min\limits_{\mathbf{\Delta}\in C^{n\times n}} \{\bar{\sigma}(\mathbf{\Delta}) / \det(\mathbf{M} + \mathbf{\Delta}) = 0\}$ ou encore $\underline{\sigma}(\mathbf{M}^{-1}) = \min\limits_{\mathbf{\Delta}\in C^{n\times n}} \{\bar{\sigma}(\mathbf{\Delta}) / \det(\mathbf{I} + \mathbf{M\Delta}) = 0\}$.

Remarque : estimation de mu et inégalités matricielles
Une étude approfondie de la μ-analyse n'est pas l'objet de ce cours (cf. [Zho 98]). Notons malgré tout au passage qu'une borne sup de $\mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega))$ est $\mu_{\sup} = \min_{D/D\Delta=\Delta D,\ \text{avec}\ \Delta\in\underline{\Delta}} \bar{\sigma}\left(DM(j\omega)D^{-1}\right)$, qui peut être calculée par minimisation sur D de *mu* solution de l'inégalité matricielle $DM(j\omega)D^{-1} < mu\,I$. Cette inégalité est satisfaite si $\exists D\ /\ D^{-T}M(j\omega)D^{T}DM(j\omega)D^{-1} < mu\,I$, de manière équivalente si $\exists D\ /\ M(j\omega)D^{T}DM(j\omega) < mu\times D^{T}D$, et finalement si $\exists X \succ 0 / mu\times X - M(j\omega)^{T}XM(j\omega) > 0$ ($X = D^{T}D$). La résolution de telles inégalités matricielles sera abordée dans la partie 2 du cours.

Exemples

Exemple 1 : Robustesse paramétrique

Considérons le schéma de la Figure 3.3. Les valeurs nominales du pôle a et du gain g sont respectivement a_0 et $g_0 = 1$. On définit les écarts par rapport à ces valeurs nominales par : $\delta_a = a - a_0$ et $\delta_g = g - 1$. Le schéma peut alors être redessiné sous la forme de la Figure 3.3 ou encore de la Figure 3.2.

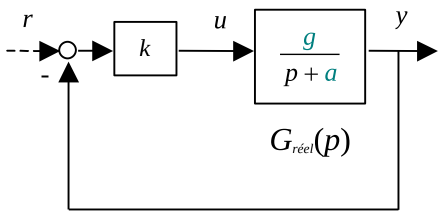


Figure 3.3 : Incertitudes paramétriques

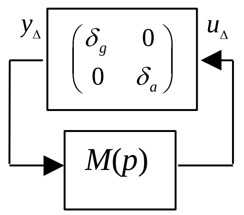


Figure 3.4: Forme M-Δ / incertitudes paramétriques

Exemple 2: $\Delta(p)$ incertitude dynamique sur le transfert de boucle de l'asservissement

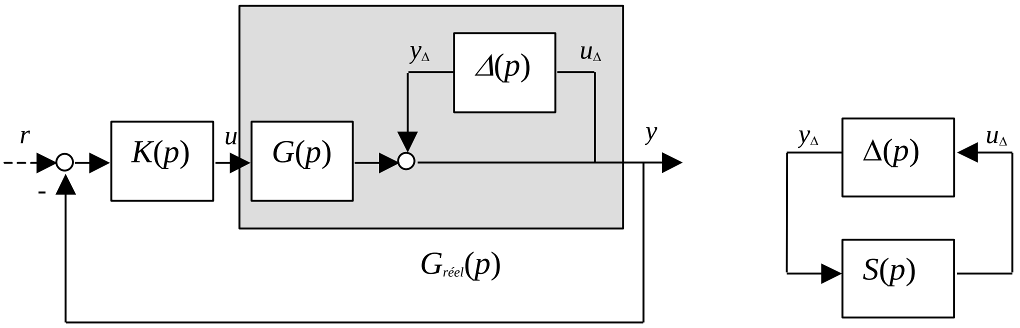


Figure 3.5 : Incertitude rétroactive en sortie

Considérons le cas où $\Delta(p)$ définit l'erreur relative[19] $\Delta(p)=[G_{réel}(p)-G(p)][G_{réel}(p)]^{-1}$. Autrement dit, $G_{réel}(p)=[I-\Delta(p)]^{-1}G(p)$, comme sur le schéma de la Figure 3.5. Montrer à titre d'exercice que le schéma d'asservissement de la Figure 3.5-1 est équivalent, du point de vue de l'analyse de la stabilité, au schéma (*M-Δ*) de la Figure 3.5-2, avec $M(p)=(I+G(p)K(p))^{-1}\triangleq S(p)$.

Théorème 3.6 (Condition de robustesse non structurée : incertitude multiplicative inverse)

L'asservissement de la Figure 3.5 est stable pour toute matrice $\Delta(p)$ stable[20] telle que $\|\Delta(p)\|_\infty \le \dfrac{1}{\|S(p)\|_\infty}$.

♦ L'asservissement nominal et donc $S(p)$ est implicitement stable. $\Delta(p)$ est stable par hypothèse. Par suite le Théorème 3.5théorème s'applique et le système bouclé est stable pour toute matrice de transfert $\Delta(p)$ telle que $\|\Delta(p)\|_\infty \le \bar{\delta}$ *et* $\Delta(p)\in C^{p\times p}$ si $\forall\omega\in R,\ \mu_\Delta(S(j\omega))<\bar{\delta}^{-1}$. Comme $\Delta(p)$ est une matrice de transfert ne possédant pas de structure spéciale (cf. Corollaire (lien entre $\bar{\sigma}$ et μ)), on a : $\sup_\omega \mu_\Delta(S(j\omega))=\sup_\omega \bar{\sigma}(S(j\omega))=\|S(p)\|_\infty$. CQFD.

Marges de robustesse génériques

Marges SISO (rappel)

Commençons par rappeler certains résultats dans le cas SISO. La marge de module pallie à l'insuffisance des marges de gain et de phase et représente la distance du lieu de Nyquist au point -1.

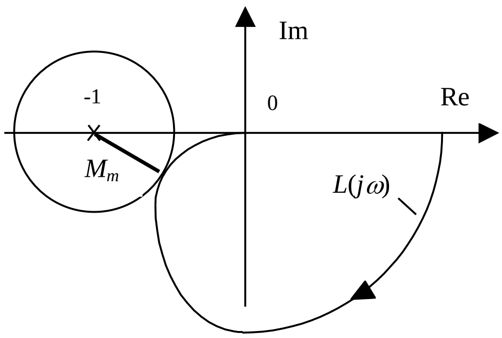


Figure 3.6 : Marge de module

Marge de module SISO : $M_m=\min_\omega |1+L(j\omega)|=\min_\omega \dfrac{1}{|S(j\omega)|}=\dfrac{1}{\max_\omega |S(j\omega)|}$. On considère que la marge de module doit *a minima* être égale à $0{,}5$. Autrement dit, le *pic de résonance* de la fonction de sensibilité ne doit pas excéder 2, soit $6\,dB$ environ.

---

[19] $\Delta(p)=\dfrac{G_{réel}(p)-G(p)}{G_{réel}(p)}$ dans le cas SISO.

[20] c'est le cas notamment si $G_{réel}(p)$ et $G(p)$ ont même pôles et zéros à partie réelle positive (à vérifier)

Notons également que la marge de module induit une marge de gain et de phase minimale.

$$Mg = \left]m_{gd}\,, m_{ga}\right[\supset \left]\frac{1}{1+M_m},\ \frac{1}{1-M_m}\right[$$

$$M\varphi = \left]m_{\varphi d}\,, m_{\varphi a}\right[\supset \left]-2\arcsin\left(M_m/2\right),\ 2\arcsin\left(M_m/2\right)\right[$$

Les marges de gain, phase et retard peuvent également être calculée de manière exacte dans le cas SISO (cf cours antérieurs).

Marges MIMO

Il est possible d'utiliser les marges SISO pour analyser la robustesse d'un asservissement MIMO. Il faut pour cela « ouvrir » la boucle fermée en un point particulier où l'on souhaite connaître ces marges. Considérons à titre d'exemple le schéma de la Figure 3.7 et ouvrons la boucle au point $\langle 1 \rangle$. Le transfert $\frac{u_1}{v_1}$ est scalaire et sa réponse fréquentielle peut être tracée dans le plan de Nyquist. On peut alors obtenir classiquement à partir de ce lieu les marges de gain, phase et retard au point $\langle 1 \rangle$. On peut reproduire cette opération en différents points de la boucle. Les marges obtenues diffèreront d'un point à l'autre. Notons également que de bonnes marges e.g. de gain obtenues en ouvrant successivement la boucle aux points $\langle 1 \rangle$, $\langle 2 \rangle$ … ne garantissent pas pour autant que le système bouclé est robuste vis-à-vis de variations simultanées de gain sur chacune des voies. Voilà pourquoi il importe d'introduire les marges de robustesse MIMO ci-dessous.

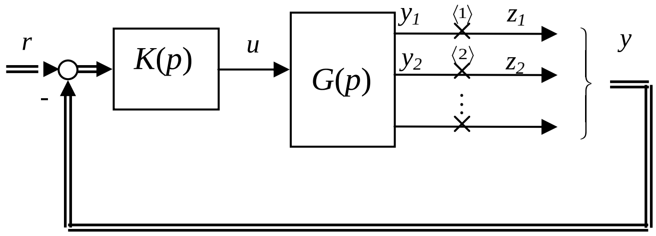


Figure 3.7 : Marges de robustesse SISO pour système MIMO

La marge de module peut se généraliser dans le cas MIMO comme suit.

Marge de module MIMO : $M_m = \min_\omega \underline{\sigma}(1 + L(j\omega)) = \min_\omega \frac{1}{\overline{\sigma}(S(j\omega))} = \frac{1}{\| S(j\omega)\|_\infty}$. On considère là encore le plus souvent que la marge de module doit *a minima* être égal à $0{,}5$. Autrement dit, $\| S(j\omega)\|_\infty$ ne doit pas excéder 2, soit $6\,dB$ environ.

Une marge de module MIMO M_m garantit *a minima* les marges de gain et de phase MIMO :

$$Mg = \left]m_{gd}\,, m_{ga}\right[\supset \left]\frac{1}{1+M_m},\ \frac{1}{1-M_m}\right[$$

$$M\varphi = \left]m_{\varphi d}\,, m_{\varphi a}\right[\supset \left]-2\arcsin\left(M_m/2\right),\ 2\arcsin\left(M_m/2\right)\right[$$

La marge de gain MIMO garantit la stabilité du système bouclé en dépit de variations de gain indépendantes sur chaque voie. La marge de phase MIMO garantit la stabilité du système bouclé en dépit de variations de phase indépendantes sur chaque voie.

N.B. : L'intérêt de la marge de module est clair si l'on examine le résultat du Théorème 3.6 (Condition de robustesse non structurée : incertitude multiplicative inverse). Notons que dans le cas MIMO, il faut distinguer en toute rigueur *marges en sortie* du système (considérées implicitement en Figure 3.5 puisque l'incertitude porte sur laest prise en compte en sortie du système) et *marges en entrée*. Les marges de gain, phase et module seraient obtenues en entrée du système si l'on utilisait la fonction de sensibilité en entrée du système $S_u(p) \stackrel{\Delta}{=} (I + K(p)G(p))^{-1}$ et non pas $S(p) = S_y(p) \stackrel{\Delta}{=} (I + G(p)K(p))^{-1}$ l'*exemple 2*.

3.3 Analyse des performances

Utilisation des normes H_2 et H_∞ pour l'évaluation des performances d'un asservissement

Analyse du système en boucle fermée

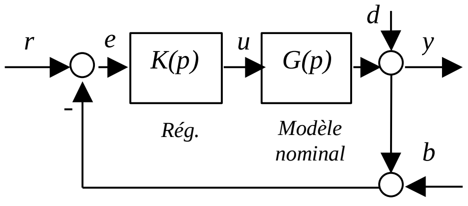


Figure 3.8 : Performance nominale de l'asservissement

Les signaux exogènes peuvent conceptuellement être considérés comme respectivement le signal de référence[21] r, le signal perturbateur[22] d et le signal b permettant la prise en compte de *bruits* de mesure.

On peut s'intéresser à l'évolution de différents signaux comme l'écart de consigne e, l'entrée de commande u ou la sortie du système y et notamment à la relation qui les lie aux signaux exogènes.

- $$e(p)=\left(I_p+G(p)K(p)\right)^{-1}\times\left(r(p)-b(p)-d(p)\right)$$
  $$u(p)=K(p)\left(I_p+G(p)K(p)\right)^{-1}\times\left(r(p)-b(p)-d(p)\right)$$

On peut analyser indépendamment les différentes contributions sachant que le principe de superposition s'applique. En particulier,

1. $\dfrac{e(p)}{r(p)}=\underbrace{\left(I_p+G(p)K(p)\right)^{-1}}_{S(p)}$ et $\dfrac{e(p)}{d(p)}=-\left(I_p+G(p)K(p)\right)^{-1}$ caractérisent respectivement les performances de l'asservissement en terme de *suivi de consigne et de régulation* (réjection de la perturbation). $S(p)$ est appelée pour différentes raisons *fonction de sensibilité*. Il est clair que son diagramme de Bode donne des informations pertinentes sur la *sensibilité* de l'écart de consigne vis-à-vis des perturbations ou d'un changement du point de consigne.
2. $\dfrac{u(p)}{r(p)}=\underbrace{K(p)\left(I_p+G(p)K(p)\right)^{-1}}_{U(p)}$ caractérise la *sollicitation de la commande* lors de changement de référence.
3. $\dfrac{u(p)}{b(p)}=-\underbrace{K(p)\left(I_p+G(p)K(p)\right)^{-1}}_{U(p)}$ caractérise la *sensibilité de la commande aux bruits de mesure* (autrement dit la capacité de *filtrage* de l'asservissement. $U(p)$ peut être appelée *fonction de sensibilité de la commande.* Sa réponse fréquentielle permet en effet une analyse fine de la *sensibilité* de la commande vis-à-vis des bruits de mesure ou d'un changement du point de consigne.

---

[21] éventuellement déduit d'un signal de consigne par préfiltrage : $r(p)=K_C(p)y_C(p)$

[22] d comme « disturbance » en anglais.

Les performances d'un asservissement ne peuvent se réduire à analyser la qualité du suivi de consigne. Il importe de tenir compte des contraintes portant sur l'actionneur. Une trop forte sollicitation transitoire de la commande pourra être incompatible avec les capacités de l'actionneur ($u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}$). Une trop grande sensibilité aux bruits de la mesure pourra réduire très significativement sa durée de vie.

Il importe donc de gérer ces différents compromis. Les objectifs peuvent être exprimés à partir de normes sur les matrices de transfert en boucle fermée.
On peut commencer par une analyse grossière, sans discrimination ni information *a priori* sur la nature des signaux exogènes.

Bonnes performances en terme de *suivi de consigne et de régulation*

$$\Rightarrow \quad \|S(j\omega)\|_{2,\infty} \approx 0 \qquad \Rightarrow \quad \underline{\sigma}(L(j\omega)) >> 1, \forall\omega$$

Ceci peut être obtenu en choisissant une *commande à grand gain* : $\underline{\sigma}(K(j\omega)) >> 1, \forall\omega$.

Faible sollicitation de la commande (et faible sensibilité aux bruits de mesure)

$$\Rightarrow \bar{\sigma}(U(j\omega)) \approx 0, \forall\omega \quad \Leftrightarrow \|U(j\omega)\|_{2,\infty} \approx 0 \Rightarrow \quad \bar{\sigma}(K(j\omega)) \approx 0, \forall\omega$$

Ceci correspond à une *commande à faible gain*.

Une autre fonction de transfert en boucle fermée mérite d'être privilégiée. Il s'agit de :

$$\frac{y(p)}{r(p)} = I - S(p) = \underbrace{G(p)K(p)\,(I + G(p)K(p))^{-1}}_{T(p)}.$$

$T(p)$ est appelée *fonction de sensibilité complémentaire* pour la raison qu'elle est le complément à 1 de la fonction de sensibilité : $S(p)+T(p)=I$. Il est clair que $\underline{\sigma}(L(j\omega)) >> 1, \forall\omega \Rightarrow \sigma_i(T(j\omega)) \approx 1, \forall\omega, \forall i$ et donc $y(t) \approx r(t)$ ce qui est cohérent avec l'analyse qui précède.

Finalement, il faut trouver le juste compromis entre exiger trop de performances en terme de suivi de consigne et ne rien faire pour ne pas trop solliciter l'actionneur. Ceci est possible en pratique car les exigences peuvent être différenciées selon la bande de fréquence considérée. On cherchera à avoir un bon suivi de consigne en « basse fréquence » et un bon filtrage du bruit de mesure en « haute fréquence » ce qui peut être exprimé en première approche par :

$\|W_1 S\|_{2,\infty} \approx 0$ si $W_1(p)$ est un filtre passe bas (performance)

$\|W_2 U\|_2 \approx 0$ si $W_2(p)$ est un filtre passe-haut (filtrage des bruits de mesure en haute fréquence)

Définition d'un critère « résumant » la qualité du système asservi

Il est tentant de chercher à définir un *critère* d'évaluation de la qualité d'un asservissement, critère que l'on chercherait à optimiser. La traduction d'un cahier des charges en un critère unique est souvent plus compliqué qu'il n'y paraît, d'autant que les performances atteignables sont rarement connues *a priori*.

Une voie consiste à partir du schéma pondéré de la Figure 3.9. Il permet la définition d'un critère et d'un problème d'optimisation[23] souvent pertinent.

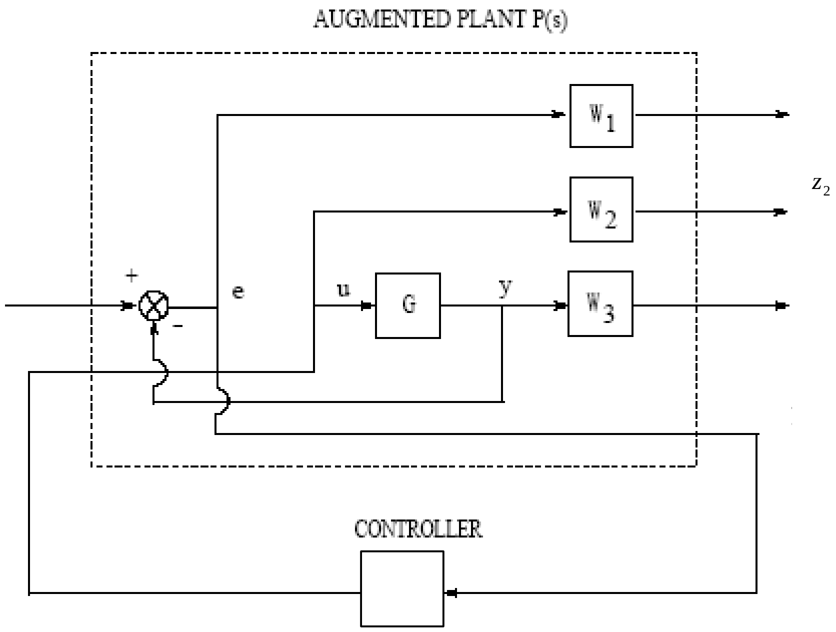


Figure 3.9 : schéma type d'un asservissement

On montre sans difficulté que le transfert en boucle fermée est : $T_{zw} = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 U \\ W_3 T \end{bmatrix}$. On choisira classiquement le critère :

$$J_\infty(K) = \left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 U \\ W_3 T \end{bmatrix} \right\|_\infty \text{ ou } J_2(K) = \left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 U \\ W_3 T \end{bmatrix} \right\|_2 ,$$

dans lequel $W_1(s), W_2(s)$ et $W_3(s)$ sont des pondérations pénalisant respectivement la fonction de sensibilité, la sensibilité de la commande et la sensibilité complémentaire aux fréquences requises pour gérer au mieux les compromis de commande « performance - sollicitation de la commande – robustesse ».

Une autre voie est développée dans : CHEVREL, PH. (2002) Méthodologie de la commande par l'approche d'état. In: *Commande des systèmes Linéaires*, *Collection IC2, Ph. de Larminat* (Hermès (Ed)). Chapitre 5, **2**, Paris, France et CHEVREL, PH. (2009), Méthodologie de commande multivariable, polycopié de l'Ecole des Mines de Nantes

Les problèmes de synthèse H_2 et H_∞ généraux font l'objet du chapitre suivant.

[23] Cf. sous Matlab la fonction *mixsyn.m*

4 Synthèse H2 & Hinf

4.1 Problème d'optimisation H2 Standard

Tout asservissement peut se mettre sous la forme standard de la Figure 4.1.

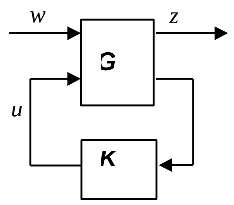


Figure 4.1 : *Schéma de rétroaction standard*

Le quadripôle ***G*** appelé aussi modèle standard et la rétroaction ***K*** sont supposés définis comme suit, à l'aide des matrices de transfert $G(s)$ et $K(s)$ et de leur réalisation dans l'espace d'état ci-dessous :

$$G(s)=\begin{pmatrix} G_{11}(p) & G_{12}(p) \\ G_{21}(p) & G_{22}(p) \end{pmatrix} := \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix}$$

$$K(p) = D_K + C_K (pI - A_K)^{-1} B_K$$

N.B. : La dimension de chacune des matrices se déduit de la dimension des différents signaux :

$$w \in R^{m1}, u \in R^{m2}, x \in R^n, z \in R^{p1}, y \in R^{p2}.$$

Le système en boucle fermée d'entrée w et de sortie z, noté $\boldsymbol{T_{zw}}$, s'en déduit :

$$T_{zw}(p) = F_l(G(p), K(p)) \stackrel{\Delta}{=} G_{11}(p) + G_{12}(p)K(p)(I - G_{22}(p)K(p))^{-1} G_{21}(p)$$

$$= D_{bf} + C_{bf}\left(pI - A_{bf}\right)^{-1} B_{bf}$$

avec :

$$A_{bf} = \begin{bmatrix} A + B_2(I - D_K D_{22})^{-1} D_K C_2 & B_2(I - D_K D_{22})^{-1} C_K \\ B_K(I - D_{22} D_K)^{-1} C_2 & A_K + B_K(I - D_{22} D_K)^{-1} D_{22} D_K \end{bmatrix}$$

$$B_{bf} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2(I - D_K D_{22})^{-1} D_K D_{21} \\ B_K(I - D_{22} D_K)^{-1} D_{21} \end{bmatrix},$$

$$C_{bf} = \left[C_1 + D_{12}(I - D_K D_{22})^{-1} D_K C_2 \ , \ D_{12}(I - D_K D_{22})^{-1} C_K\right]$$

$$D_{bf} = \left[D_{11} + D_{12}(I - D_K D_{22})^{-1} D_K D_{21}\right]$$

Il possède la propriété de *stabilité interne* si et seulement si les valeurs propres de A_{bf} sont toutes à partie réelle négative.

On appelle communément ***problème d'optimisation*** H_2 ***standard*** le problème consistant à trouver $\boldsymbol{K_{H_2}}$ qui assure :

- la stabilité interne du système bouclé $\boldsymbol{T_{zw}} = F_l(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{K_{H_2}})$

- la minimalité du critère $J_{H_2}\left(\boldsymbol{K_{H_2}}\right)=\|T_{zw}\|_2$

La solution du problème ci-dessus est bien connue [ZHO 96]. Distinguons pour commencer deux cas élémentaires avant de présenter le cas général.

4.2 Commande H2 par retour d'état

Cas du « retour d'état » (RE) : il s'agit du cas où $y=x$. Toutes les composantes de l'état du modèle standard sont accessibles pour la rétroaction.

$$G_{RE}(p):=\left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ I & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- L'optimum du critère H_2 dans le cas du *retour d'état* a la particularité de pouvoir être obtenu par une rétroaction statique :

$$K_{RE_{H_2}}(p)=D_K=-\left(D_{12}{}^T D_{12}\right)^{-1}\left(B_2{}^T P+D_{12}{}^T C_1\right)$$

$$\text{avec : }\begin{cases} P\geq 0 \qquad (P \text{ semi définie positive}) \\ A^T P+PA-\left(PB_2+C_1{}^T D_{12}\right)\left(D_{12}{}^T D_{12}\right)^{-1}\left(B_2{}^T P+D_{12}{}^T C_1\right)+C_1{}^T C_1=0 \end{cases}$$

Le retour d'état optimal se déduit ainsi de la résolution de cette dernière équation matricielle du second ordre, dite équation de Riccati, qui n'est autre pour le système en boucle fermée que l'équation de Lyapunov :

$$\left(A+B_2K_{RE_{H_2}}\right)^T P+P\left(A+B_2K_{RE_{H_2}}\right)+\left(C_1+D_{12}K_{RE_{H_2}}\right)^T\left(C_1+D_{12}K_{RE_{H_2}}\right)=0 \qquad (*)$$

P est ainsi le gramien d'observabilité du système bouclé et l'on déduit qu'à l'optimum:

$$\|T_{zw}\|_2^2=\left\|F_l\left(G_{RE},K_{RE_{H_2}}\right)\right\|_2^2=Trace\left(B_1PB_1{}^T\right).$$

Pour être complet, il faut préciser les hypothèses d'existence d'une solution à ce problème :

i) La paire (A,B_2) doit être stabilisable pour permettre la stabilité du système bouclé. Notons toutefois que si la stabilité *interne* du système bouclé n'est pas exigée, l'hypothèse selon laquelle les modes non stabilisables par u sont tous non commandables par w ou inobservable par z suffit. Le gain $K_{RE_{H_2}}$ peut alors être déterminé à partir de la représentation d'état réduite aux seuls états stabilisables [CHE 02].

ii) $D_{11}=0$ est une condition qui assure génériquement la stricte propreté de T_{zw} et donc l'existence de sa norme H_2.

iii) D_{12} doit être de rang plein (par les colonnes) pour assurer l'inversibilité de $D_{12}{}^T D_{12}$ dans l'équation de Riccati. De même, les zéros invariants de $G_{12}(s):=\begin{pmatrix} A & B_2 \\ C_1 & D_{12}\end{pmatrix}$ ne doivent pas se trouver sur l'axe imaginaire.

<u>Principe de la démonstration</u> : (cf. [ZHO 96] pour les détails)

On montre pour commencer que, compte tenu des hypothèses, une (unique) solution $P \geq 0$ à l'équation de Riccati existe (la stabilisabilité de (A, B_2) par exemple est une condition nécessaire si l'on vise la stabilité interne du système bouclé). Par suite, l'hypothèse d'inversibilité de $(D_{12}{}^T D_{12})$ assure l'existence (et l'unicité) de $K_{RE_{H_2}} = -(D_{12}{}^T D_{12})^{-1}(B_2{}^T P + D_{12}{}^T C_1)$. Récrivant alors l'équation de Riccati comme l'équation de Lyapunov (*) pour la boucle fermée, on déduit des hypothèses et de la positivité de P que $K_{RE_{H_2}}$ est stabilisant et que $\|T_{zw}\|_2^2 = \left\|F_l\left(G_{RE}, K_{RE_{H_2}}\right)\right\|_2^2 = Trace\left(B_1 P B_1^T\right)$. Reste à montrer qu'il s'agit bien de l'optimum du critère ; autrement dit, qu'il n'existe-t-il pas une autre matrice de gain $K = K_{RE_{H_2}} + \Delta K$ tel que le critère soit moindre. En raisonnant par l'absurde, on montre que la matrice $P' = P + \Delta P$ associée à K est telle que $\Delta P > 0$, et ce quelque soit ΔK . Par suite, $J\left(K_{RE_{H_2}}\right) = Trace\left(B_1 P B_1^T\right) \leq J(K) = Trace\left(B_1 P' B_1^T\right), \forall K$, et $K_{RE_{H_2}}$ minimise bien le critère.

lien avec la commande LQ (cf. détails § ***Erreur ! Source du renvoi introuvable.***)

Considérons le cas où $G_{RE}(p) := \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ I & 0 & 0 \end{array}\right]$ avec $Q = C_1^T C_1$, $R = D_{12}^T D_{12}$, $N_c = C_1^T D_{12}$.

Notons d'après ce qui précède que la commande minimisant $\|T_{zw}\|_2^2$ $(T_{zw} \triangleq F_l(G_{RE}, K))$ est la commande par retour d'état statique $u = -\underbrace{\left(D_{12}{}^T D_{12}\right)^{-1}\left(B_2{}^T P + D_{12}{}^T C_1\right)}_{K_{RE_{H2}}} x$ et que l'obtention de la matrice $K_{RE_{H2}}$ est indépendante de la matrice B_1.

D'après les différentes interprétations de la norme H_2 donnée précédemment et pour $B_1 = x_0$, $\|T_{zw}\|_2^2$ est aussi l' « énergie » de $z(\cdot)$:

$$\|T_{zw}\|_2^2 = \|z(t)\|^2 = \int_0^{+\infty} \left[x(t)^T \; u(t)^T\right] \begin{bmatrix} Q & N_c \\ N_c{}^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt = J_{LQ}$$

A contrario, la commande LQ *est optimale* quelque soit l'état initial considéré. Elle assure également la minimalité du critère dans le cas où l'on s'intéresse à la réponse impulsionnelle du système.

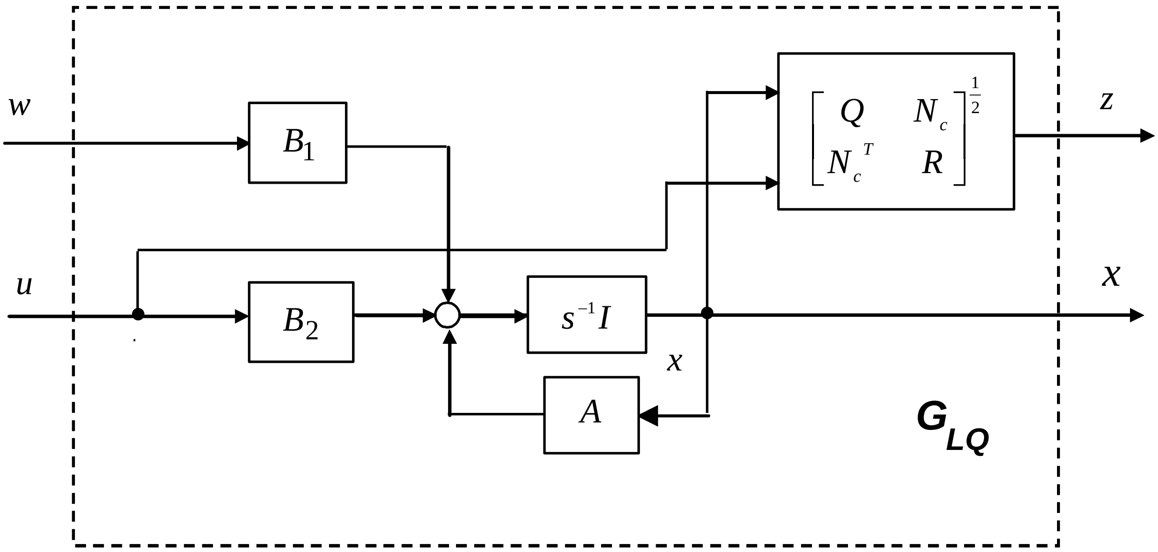


Figure 4.2 : Forme standard pour la commande LQ

4.3 Observateur H2

Cas de « l'injection de sortie » (IS) : il s'agit du cas où la rétroaction peut agir indépendamment sur chaque composante de l'équation d'évolution. Ce cas se présente lors de la conception d'un *observateur*.

$$G_{IS}(p) := \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & I \\ \hline C_1 & 0 & 0 \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array}\right]$$

- La solution H_2- optimale dans le cas de l'injection de sortie s'obtient à partir du cas du retour d'état par application du *principe de dualité* (cf. annexe). Sous les hypothèses duales de celles énoncées précédemment, on obtient :

$$K_{IS_{H_2}}(s) = D_K = -\left(\Sigma C_2^T + B_1 D_{21}^T\right)\left(D_{21}^T D_{21}\right)^{-1}$$

avec : $\begin{cases} \Sigma \geq 0 \quad (\Sigma \textit{ semi définie positive}) \\ A\Sigma + \Sigma A^T - \left(\Sigma C_2^T + B_1 D_{21}^T\right)\left(D_{21}^T D_{21}\right)^{-1}\left(C_2\Sigma + D_{21}B_1^T\right) + B_1 B_1^T = 0 \end{cases}$

A l'optimum, $\|T_{zw}\|_2^2 = \left\|F_l\left(G_{IS}, K_{IS_{H_2}}\right)\right\|_2^2 = Trace\left(C_1^T \Sigma C_1\right)$. Les hypothèses d'existence d'une solution à ce problème sont elles-mêmes duales de celle du problème (*RE*).

Le lien entre le problème dit « d'injection de sortie » et le problème de conception d'un observateur H_2 est le suivant. Concevoir un observateur d'état complet, c'est d'abord déduire de la représentation d'état du processus le système d'équations différentielles :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - L(y - C\hat{x})$$

C'est ensuite calculer une matrice de gains L qui assure la stabilité de ce système dynamique (L doit être tel que $Re(v.p.(A - LC)) < 0$). Ce choix peut être réalisé de manière à minimiser l'erreur de reconstruction de l'état du processus.

Considérons que le processus puisse être décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + Bu \\ y = Cx + D_{21} w \end{cases} \qquad (\,y \text{ représente le vecteur des signaux mesurés})$$

Définissons l'erreur de reconstruction par $\tilde{x} = x - \hat{x}$. On déduit des équations du processus et de l'observateur l'équation d'évolution de cette erreur :

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B_1 w + L\underbrace{\left(y - C\hat{x}\right)}_{\tilde{y}}$$

$$\tilde{y} = C\tilde{x} + D_{21} w$$

Le problème de conception de l'observateur se résume donc *in fine* à déterminer la rétroaction sur l'écart de reconstruction mesuré $u_{obs} = L\tilde{y}$ qui permet l'annulation asymptotique de $\tilde{x}$ et au delà qui minimise la norme H_2 de $T_{\tilde{x}w} = F_l\left(G_{IS}, L\right)$ si $G_{IS}(p) := \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & I \\ \hline I & 0 & 0 \\ C & D_{21} & 0 \end{array}\right]$.

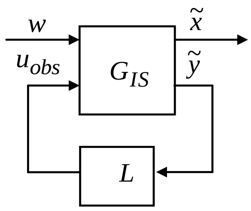


Figure 4.3 : *Observateur* H_2 et *problème standard*

Les différentes interprétations de la norme H_2 en terme de norme induite donnent différents éclairages sur l'intérêt d'un observateur H_2. Nous analysons ci-dessous et en particulier le lien entre l'observateur H_2 et le filtre de Kalman. Nous laissons au lecteur le soin de développer les autres « points de vue ».

lien avec le filtre de Kalman

Supposons le processus décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + w_x + Bu \\ y = Cx + w_y \end{cases}$$

où y représente le vecteur des sorties mesurées, u est un vecteur de signaux exogènes connus[24], et les composantes du vecteur w sont des bruits blancs centrés dont on suppose connus les moments d'ordre 2 :

$$E\left\{\begin{bmatrix} w_x(t) \\ w_y(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_x(\tau) & w_y(\tau) \end{bmatrix}^T\right\} = \begin{bmatrix} V & N_f \\ N_f^T & W \end{bmatrix}\delta(t-\tau)$$

[24] Dans le cas d'un processus à asservir, il peut s'agir de grandeurs d'action (commandes) ou de perturbations mesurées.

On cherche à reconstruire l'état du processus en filtrant au mieux les bruits d'évolution et de mesure. Définissons le modèle standard $G_{FK}(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & I \\ \hline I & 0 & 0 \\ C & D_{21} & 0 \end{array}\right]$ où B_1 et D_{21} sont choisis tels que $V = B_1 B_1^T$, $W = D_{21} D_{21}^T$ et $N_f = B_1 D_{21}^T$. Ce choix est cohérent avec le modèle du processus ci-dessus si $w_x = B_1 w$, $w_y = D_{21} w$, et w bruit blanc centré unitaire $E\{w(t)w(\tau)^T\} = I\,\delta(t-\tau)$.

La norme H_2 permet de quantifier la capacité d'un transfert à « transmettre » ou au contraire à filtrer un bruit blanc. Si l'on utilise cette interprétation de la norme H_2 et sous les hypothèses précédentes, on montre sans peine que l'observateur H_2 minimisant $\|T_{\tilde{x}w}\|_2^2$ si $T_{\tilde{x}w} = F_l(G_{FK}, L)$, minimise également $E\left[\tilde{x}(t)^T \times \tilde{x}(t)\right]$. L'observateur H_2 n'est en ce cas rien d'autre que le filtre de Kalman.

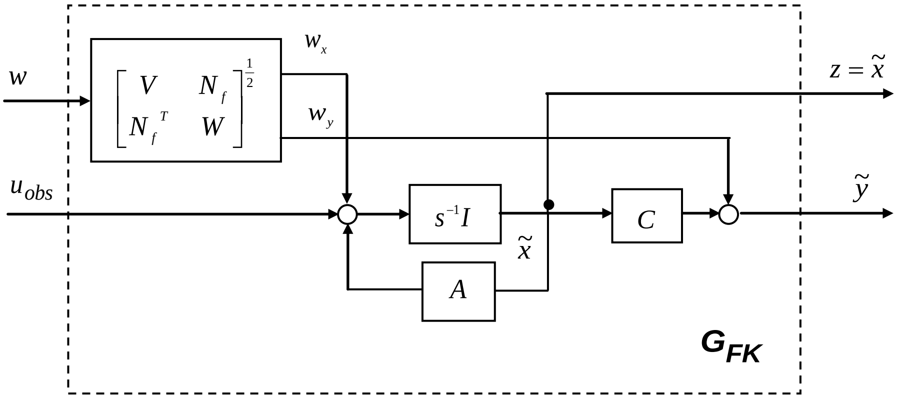


Figure 4.4 : *Equivalence observateur* H_2 / Filtre de Kalman

4.4 Commande H2 par retour dynamique de sortie

Principe de séparation et solution générale

- La solution H_2- optimale dans le cas général est cette fois un système dynamique de même dimension que le modèle standard. Il s'obtient à partir des deux cas élémentaires précédents par application du *principe de séparation* [AND 89] :

$$K_{H_2}(p) := \left(\begin{array}{c|c} A + B_2 K_{RE_{H_2}} + K_{IS_{H_2}} C_2 + K_{IS_{H_2}} D_{22} K_{RE_{H_2}} & K_{IS_{H_2}} \\ \hline K_{RE_{H_2}} & 0 \end{array}\right)$$

De plus,

$$\| T_{zw}(p) \|_2^2 = \| F_l(G(p), K_{H_2}(p)) \|_2^2 = \| F_l(G_{RE}(p), K_{RE_{H_2}}) \|_2^2 + \| F_l(G_{IS}(p), K_{IS_{H_2}}) \|_2^2 .$$

Résumons les conditions d'existence de cette solution au problème H_2 standard :

- (A, B_2) stabilisable et (C_2, A) détectable.

- $\forall \omega \in R, \begin{pmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix}$ et D_{12} sont de rang plein par les colonnes. $\forall \omega \in R, \begin{pmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix}$ et D_{21} sont de rang plein par les lignes. Ces hypothèses se comprennent aisément si l'on sait qu'à l'optimum, les pôles de $T_{zw}(s)$ tendent vers les zéros de transmission de $G_{12}(s)$ et $G_{21}(s)$. Par ailleurs, les zéros invariants restants sont des modes non commandables par B_1 ou non détectables par C_1 qui seraient conservés en boucle fermée. On impose donc l'absence de zéros infinis ou sur l'axe imaginaire.
- $D_{11} = 0$.

Lien avec la commande LQG

Les différentes interprétations de la norme H_2 données au paragraphe précédent nous permettent de faire le lien avec la théorie de Kalman et la commande LQG.

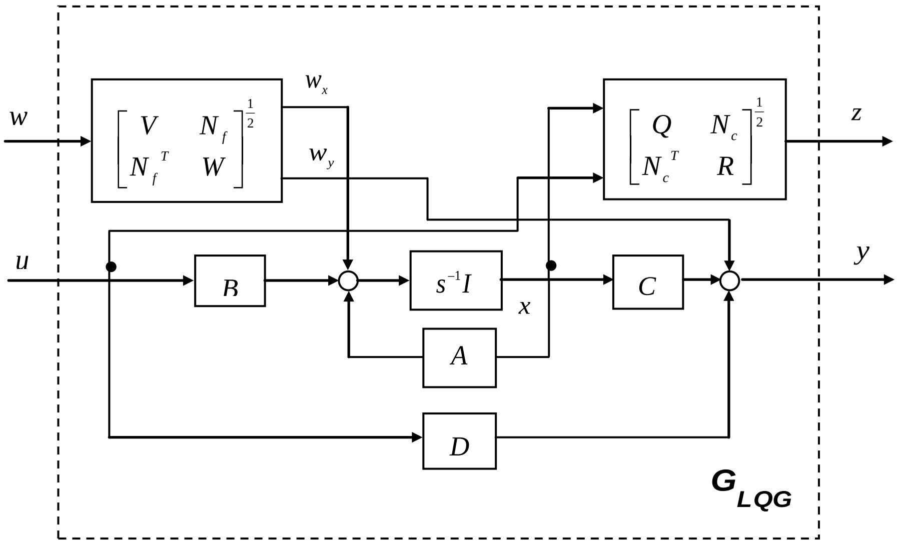


Figure 4.5 : Forme standard pour la commande LQG

On a, si w est un bruit blanc centré, stationnaire, de spectre unitaire, et si le modèle standard est celui de la

Figure 4.5 [STE 87] :

$$\|T_{zw}\|_2^2 = \lim_{T\to\infty} E\left[\frac{1}{T}\int_0^T \|z(t)\|^2 \, dt\right] = \lim_{T\to\infty} E\left[\frac{1}{T}\int_0^T \begin{bmatrix} x(t)^T & u(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & N_c \\ N_c^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt\right] = J_{LQG}$$

$$\text{et} \qquad E\left\{\begin{bmatrix} w_x(t) \\ w_y(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x(\tau) & w_y(\tau) \end{bmatrix}^T\right\} = \begin{bmatrix} V & N_f \\ N_f^T & W \end{bmatrix} \delta(t-\tau)$$

Les deux cas élémentaires traités précédemment dans le cadre H_2 correspondent, nous l'avons vu, au cas de la commande LQ et de la conception d'un filtre de Kalman. On a $K_{LQ} = -K_{\boldsymbol{RE}_{H_2}}$ et la loi de commande par retour d'état $u = -K_{LQ} x$ minimise

$J_{LQ} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \begin{bmatrix} x(t)^T & u(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & N_c \\ N_c^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt$. Par ailleurs, pour $L_{FK} = K_{IS_{H_2}}$, l'observateur $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2 u + L_{FK}(y - C_2\hat{x})$ n'est rien d'autre que le filtre de Kalman minimisant $E\left(\|C_1(x-\hat{x})\|^2\right)$ sous les hypothèses de bruits d'évolution w_x et de mesure w_y définies précédemment.

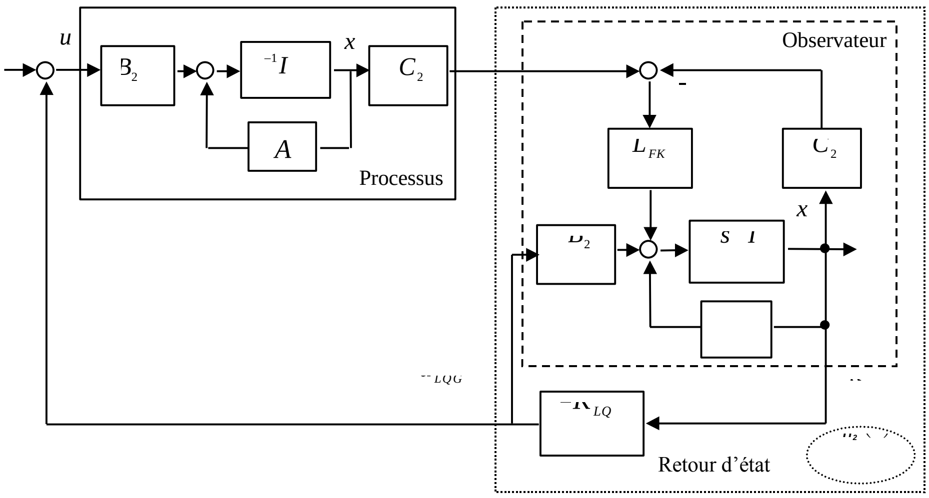


Figure 4.6 : ***Structure LQG (retour d'état / observateur)***

La loi de commande résultante illustrée par la Figure 4.6 possède la structure retour d'état / observateur :

$$\begin{cases} u = -K_{LQ}\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = (A - L_{FK}C_2)\hat{x} + B_2 u + L_{FK}(y - C_2\hat{x}) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$K_{H_2}(p) = -K_{LQ}\left(pI - A - B_2K_{LQ} + K_{FK}C_2\right)^{-1} K_{FK}$$

Finalement, l'équivalence entre le problème H_2 standard et le problème LQG est obtenue pour :

$$Q = C_1^T C_1, \quad R = D_{12}^T D_{12}, \quad N_c = C_1^T D_{12}, \quad V = B_1 B_1^T, \quad W = D_{21} D_{21}^T, \quad N_f = B_1 D_{21}^T .$$

Dans le contexte H_2 cependant, les matrices Q, R, N_c, V, W *et* N_f peuvent être légitimement considérées comme des matrices de pondération. Pour pouvoir choisir judicieusement ces pondérations, le concepteur doit disposer de règles méthodologiques telles que celles proposées dans la suite.

Résolution alternative par optimisation SDP

Trouver le retour d'état $u = Kx$ qui stabilise la boucle fermée et minimise $\|F_l(G_{RE}, K)\|_2$ est finalement équivalent au problème d'optimisation sous contrainte d'inégalité matricielle suivant:

$$\min_{P=P^T>0,\, Y,\, K} Trace(Y)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} (A+B_2K)^T P + P(A+B_2K) & (C_1+D_{12}K)^T \\ (C_1+D_{12}K) & -I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} Y & B_1^T P \\ PB_1 & P \end{bmatrix} > 0 \end{cases}$$

Si le critère est linéaire, les contraintes ne le sont pas: on voit en effet l'existence de produits entre les variables de décision P (matrice de Lyapunov) et K (la matrice de gain du correcteur par retour d'état). La deuxième partie du cours montrera comment ramener ces contraintes, par changement de variable, à des inégalités matricielles linéaires (cf. partie II du cours).

4.5 Formulation du problème Hinf *[DOY 89]*

Considérons à nouveau le schéma de rétroaction sous la forme standard ci-dessous.

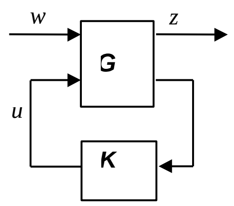


Figure 4.7 : *Schéma de rétroaction standard*

Le ***problème H_∞ γ-sous-optimal*** consiste à trouver K_{H_∞} qui assure :

- *la stabilité interne*[25] *du système bouclé* $T_{zw} = F_l(G, K_{H_\infty})$
- $J_{H_\infty}(K_{H_\infty}) = \|T_{zw}\|_\infty < \gamma$

[25] cf. e.g. [GRE 95] pour la définition de la stabilité interne d'une LFT.

4.6 Différentes voies de résolution du problème Hinf standard

Résolution à base d'équation de Riccati

Lemme : Lien entre équation de Riccati et matrice Hamiltonienne

Une matrice Hamiltonienne est une matrice réelle de dimension $2n \times 2n$ de la forme :

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

et telle que le produit $S \times H$ est symétrique, si $S = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$.

Les valeurs propres d'une telle matrice sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire.
Soit X une matrice réelle de taille $2n \times 2n$ telle que :

$$HX = X\Lambda$$

avec Λ matrice réelle de dimension $n \times n$ à valeurs propres toutes à partie réelle négative ; alors on a : $X^T SX = 0$.
Supposons la matrice X obtenue ci-dessus partitionnée selon $X = \begin{bmatrix} X_1^T & X_2^T \end{bmatrix}$, avec X_1 non singulière. Alors, $P = X_2 X_1^1$ est symétrique et satisfait :

$$PH_{11} + H_{11}^T P + PH_{12}P - H_{21} = 0$$
$$H_{11} + H_{12}P = X_1 \Lambda X_1^{-1}$$

Hypothèses de travail :

1. (A, B_1) stabilisable et $(C_{1,} A)$ détectable.
2. (A, B_2) stabilisable et $(C_{2,} A)$ détectable.
3. $\forall \omega \in R, \begin{pmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix}$ et D_{12} sont de rang plein par les colonnes. $\forall \omega \in R, \begin{pmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix}$ et D_{21} sont de rang plein par les lignes. On considèrera de plus sans perte de généralité (normalisation) que : $D_{12}^T \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$.
4. $D_{11} = 0$ et $D_{22} = 0$.

Considérons les équations de Riccati ci-dessous et les matrices hamiltoniennes associées :

- $A^T P + PA + P\left(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T\right)P + C_1^T C_1 = 0$
- $A\Sigma + \Sigma A^T + \Sigma\left(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2\right)\Sigma + B_1 B_1^T = 0$
- $H_c = \begin{pmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ C_1^T C_1 & -A^T \end{pmatrix}$

- $H_f = \begin{pmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1{}^T C_1 - C_2{}^T C_2 \\ -B_1 B_1{}^T & -A \end{pmatrix}$

Théorème 4.1 : problème H_∞ et équations de Riccati

Sous les hypothèses 1 à 4, le ***problème H∞ γ-sous-optimal*** admet une solution si et seulement si :

- H_c n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire
- il existe une solution $P_\infty \geq 0$ à l'équation de Riccati en P
- H_f n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire
- il existe une solution $\Sigma_\infty \geq 0$ à l'équation de Riccati en Σ
- $\rho(P_\infty \Sigma_\infty) < \gamma^2$

Théorème 4.2 : lien avec le problème H_2 (rappel)

Sous les hypothèses 2 à 4, le ***problème d'optimisation*** H_2 ***standard*** admet une solution si et seulement si :

- il existe une solution $P_2 \geq 0$ à l'équation de Riccati en P pour $\gamma \to \infty$
- il existe une solution $\Sigma_2 \geq 0$ à l'équation de Riccati en Σ pour $\gamma \to \infty$

Théorème 4.3

Une solution[26] $\boldsymbol{K_{H_\infty}}$ au problème ***H∞ sous-optimal*** est le régulateur central qui peut être déduit des solutions P_∞ et Σ_∞ des équations de Riccati sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1 \underbrace{\gamma^{-2} B_1{}^T P_\infty \hat{x}}_{\hat{w}_{pire\,cas}} + B_2 u + \left(I - \gamma^{-2} P_\infty \Sigma_\infty\right)^{-1} \underbrace{\Sigma_\infty C_2{}^T}_{L_\infty} \left(y - C_2 \hat{x}\right) \\ u = -\underbrace{B_2{}^T P_\infty}_{K_\infty} \hat{x} \end{cases}$$

On obtient la solution $\boldsymbol{K_{H_2}}$ au ***problème d'optimisation*** H_2 ***standard*** en faisant tendre $\gamma \to \infty$:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B + B_2 u + \underbrace{\Sigma_2 C_2{}^T}_{L_2} \left(y - C_2 \hat{x}\right) \\ u = -\underbrace{B_2{}^T P_2}_{K_2} \hat{x} \end{cases}$$

Nous avons choisi cette écriture de manière à rendre explicite le principe de séparation sous-jacent dans le cadre H_2 ou H_∞. Dans le contexte H_∞ notamment, la commande issue du correcteur dynamique H_∞ est également celle obtenue par reconstruction, en tenant compte de la présence de la perturbation $w_{pirecas}$, du retour statique d'état obtenu dans le cas de la commande à information complète (état et signaux exogènes connus). On parlera

[26] L'ensemble des régulateurs ***H∞*** (resp. H_2) solutions se déduit du correcteur central $\boldsymbol{K_{H_\infty}}$ (resp $\boldsymbol{K_{H_2}}$) à partir de la paramétrisation de Youla-Kucera.

d'**observateur H_∞ γ-sous optimal** (i.e. tel que $\sup_{\|w\|_2=1}\|C_1(x-\hat{x})\|_2<\gamma$) pour désigner le modèle dynamique :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + +B_2 u + \underbrace{\Sigma_\infty C_2^{\,T}}_{L_\infty}\left(y - C_2\hat{x}\right)$$

Résolution alternative par optimisation SDP (cas du retour d'état)

D'après le lemme réel-borné, il existe un retour d'état $u = K_{RE}\, x$ tel que : $\|F_l(G_{RE}, K_{RE})\|_\infty < \gamma$ si et seulement si il existe K_{RE} et $P = P^T$ telles que :

$$P > 0,$$
$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} & P B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T P & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

avec :
$$\begin{aligned} A_{cl} &= A + B_2 K_{RE} \\ B_{cl} &= B_1 \\ C_{cl} &= C_1 \\ D_{cl} &= D_{11} + D_{12} K_{RE} \end{aligned}$$

Il s'agit là d'un problème de faisabilité en les variables de décision P et K_{RE}. Les contraintes à respecter sont des inégalités matricielles non linéaires : on constate en effet l'existence de produits entre les variables P et K_{RE}. La deuxième partie du cours montrera comment ramener ces contraintes, par changement de variables, à des inégalités matricielles linéaires (cf. partie II du cours), et aussi à traiter le cas général du retour dynamique de sortie.

Notons malgré tout dés à présent que la résolution du problème H_∞ standard par optimisation SDP permet de relâcher certaines hypothèses (cf. l'hypothèse de travail n°3 ci-dessus) par rapport à la solution classique à base d'équation de Riccati.

Enfin, avant de clore cette partie I du cours, et basculer vers la partie II traitant spécifiquement des inégalités matricielles et de l'optimisation SDP comme moyen de résolution de problèmes avancés de commande, le résultat suivant offre un lien supplémentaire entre équations de Riccati et inégalités matricielles.

Théorème [Zho 98] : lien entre équation et inéquation de Riccati

Considérons l'inégalité de Riccati suivante paramétrée par les matrices $Q = Q^T$ et $\mathsf{R} = \mathsf{R}^T \geq 0$; supposons (A, R) commandable et $\exists P = P^T \in R^{n\times n}$ telle que

$$PA + A^T P + P\mathsf{R}P + Q < 0$$

Alors, $\exists P_+ > P$ solution de l'équation de Riccati

$$P_+ A + A^T P_+ + P_+ \mathsf{R} P_+ + Q = 0$$

telle que les valeurs propres de $A + \mathsf{R}P_+$ sont à partie réelle strictement négative.

5 Références

[AL 99] ALAZARD D., CUMMER C., APKARIAN P., GAUVRIT M., FERRERES G., *Robustesse et commande optimale*, Ed. Cépadués, Toulouse, 1999

[BGFB 94] BOYD S., EL GHAOUI L., FERON E., BALAKRISHNAN V., Linear Matrix Inequality in System and Control Theory, Ed. SIAM, 1994. http://www.stanford.edu/~boyd/lmibook/lmibook.pdf

[CHE 02] CHEVREL, PH. (2002) Méthodologie de la commande par l'approche d'état. In: *Commande des systèmes Linéaires, Collection IC2, Ph. de Larminat* (Hermès (Ed)). Chapitre 5, **2**, Paris, France

[DOY 78] DOYLE J.C., "Guaranteed margins for LQG regulators", *IEEE Trans. on Autom. Control*, vol. AC-23 pp 756-757, 1978.

[DUC 93] DUC G., « Robustesse des systèmes linéaires multivariables », Polycopié ESE n°03317

[DUC 99] DUC G., FONT S., *Commande H_∞ et μ-analyse*, Hermès, 1999

[KAI 80] KAILATH T., *Linear Systems*, Ed. Prentice Hall, 1980

[KWA72] KWAKERNAAK H., SIVAN R., *Linear Optimal Control Systems*, Wiley, 1972

[LAR 00] DE LARMINAT, PH. (2000). *Contrôle d'état standard*, Collection pédagogique d'automatique, *hermès*, Paris, 2000

[LAR 96] LARMINAT P. (de), *Automatique - commande des systèmes linéaires*, Hermès, 2nde édition, 1996

[WON 85] WONHAM W.M., "Linear multivariable control : a geometric approach", Springer, 1979, 1985.

[ZHO 96] ZHOU K., DOYLE J.C., GLOVER K., *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, 1996.

6 Annexes (exercices)

Les exercices

Partie II : Problèmes de commande

1 LMI et optimisation convexe

Programmation LP , QP et SDP

Propriétés et manipulation des LMI

2 Problèmes de commande LMI-formalisables

Retour sur quelques problèmes clés

Etudes de cas :

LQ/H2 : Riccati versus LMI

H2-Hinf sous contrainte de D-stabilité

H2-Hinf polytopique

…