



# Commande linéaire adaptative : solutions bornées et leurs propriétés

Laurent Praly

## ► To cite this version:

| Laurent Praly. Commande linéaire adaptative : solutions bornées et leurs propriétés. Automatique / Robotique. Université Paris Dauphine - Paris IX, 1988. Français. <pastel-00834015>

HAL Id: pastel-00834015

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00834015>

Submitted on 13 Jun 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS IX DAUPHINE  
U.E.R. MATHÉMATIQUES DE LA DÉCISION

Thèse pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR**  
**en MATHÉMATIQUES ET AUTOMATIQUE**

Sujet : *Commande linéaire adaptative.  
Solutions bornées et leurs propriétés*

Directeur de Recherche : *Jean-Michel LASRY*

Candidat : **Laurent PRALY**

Jury: Président: *Ivar EKELAND*  
Rapporteurs: *Albert BENVENISTE*  
*Petar KOKOTOVIC*  
*Claude SAMSON*  
Suffragants: *Jean-Michel LASRY*  
*Jean LEVINE*

Année de la Soutenance: 1988



## Résumé

Nous étudions les solutions d'un système en boucle fermée avec un contrôleur linéaire adaptatif.

D'une part, nous définissons une classe de systèmes tels que toutes les solutions soient bornées. Pour cela, nous observons que les effets non modélisés par un modèle linéaire peuvent sous des hypothèses réalistes être majorées par une norme des signaux entrées-sorties. Cette remarque motive la modification des lois d'adaptation. Ainsi, les paramètres adaptés, leur vitesse, et l'erreur d'adaptation acquièrent des propriétés telles que les perturbations qui leur sont associées dans le système bouclé puissent être analysées par les méthodes de stabilité totale. Ces résultats techniques nous donnent une description qualitative des systèmes auxquels on peut appliquer une commande linéaire adaptative liée à une paramétrisation explicite pour obtenir la bornitude de toutes les solutions. Enfin, des résultats plus quantitatifs sont obtenus dans le cas d'une paramétrisation implicite.

D'autre part, nous proposons une méthode pour analyser le portrait de phase des systèmes linéaires adaptatifs. Nous remarquons que lorsque les signaux exogènes ont une énergie faible ou lorsque la vitesse d'adaptation est réduite, un système linéaire en boucle fermée avec un contrôleur linéaire adaptatif exhibe, au moins localement, un comportement à deux échelles de temps. Le sous-système lent étant arrêté, le sous-système rapide est assimilable à une famille paramétrée de systèmes linéaires et une description exhaustive de ses solutions bornées et de leur stabilité peut être obtenue. La méthode de Poincaré nous permet de préciser celles qui se prolongent en solutions périodiques du système réel. Par ailleurs, tirant profit de la stabilité structurelle des ensembles intégraux hyperboliques, nous montrons l'existence d'ensembles intégraux dont l'attractivité ou la répulsivité nous permettent d'expliquer plus ou moins localement le portrait de phase. Enfin, la méthode de moyen-nisation peut être appliquée pour étudier le comportement à l'intérieur de ces ensembles intégraux.

## Mots-clés

Commande, Adaptation, Invariants, Periodicité, Bornitude, Perturbations



*l'Université n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les thèses. Ces opinions doivent être considérées comme propres aux auteurs.*



## **Remerciements**

Monsieur Ivar EKELAND a toute ma reconnaissance pour l'intérêt qu'il a montré pour mon travail en acceptant non seulement la présidence de ce Jury mais aussi la responsabilité de rapporteur.

Je remercie vivement Messieurs Albert BENVENISTE et Claude SAMSON qui ont eu l'obligeance de me faire bénéficier de leur très grande compétence en écrivant un rapport sur mon mémoire.

Monsieur Jean-Michel LASRY a assumé la tâche difficile de Directeur de Recherche. Il m'a encouragé avec beaucoup de gentillesse à mener à bien cette thèse. Je tiens à l'assurer de toute ma gratitude.

Les raisons de remercier Monsieur Petar KOKOTOVIC sont innombrables et variées. En dépit de l'éloignement, il a accepté avec empressement de participer à ce Jury. J'ai eu le plaisir d'écrire avec lui de nombreuses publications et le travail rapporté dans la deuxième partie de ce mémoire en atteste. J'ai pu également apprécier son enthousiasme et sa convivialité qui nous ont conduits jusqu'aux Grand Teton, haut lieu de l'Ouest Américain.

Je remercie Monsieur Jean LEVINE pour ses encouragements constants et des discussions fructueuses qui ont contribué à la réalisation de cette thèse. Je tiens également à l'assurer de toute ma reconnaissance ainsi que Messieurs Guy COHEN et Yves LENOIR, pour avoir su créer au Centre d'Automatique et Informatique de l'Ecole des Mines de Paris les conditions matérielles et intellectuelles les plus propices à un travail de recherche.

Monsieur Jean-Michel CORON, par ses conseils amicaux et pertinents, a été d'une aide très efficace. Qu'il soit assuré de toute ma gratitude.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur KUMAR avec qui j'ai entretenu une étroite collaboration. Elle a été pour moi d'un très grand bénéfice, elle m'a permis de mieux valoriser mes travaux et s'est traduite par des publications communes.

Tous mes camarades du C A I trouveront ici leur part de reconnaissance pour leur gentillesse et leur amabilité.

Je ne saurais oublier mes Parents qui, avec le plus grand dévouement et de nombreux sacrifices, ont tout fait pour me donner l'éducation nécessaire à ce travail.

Enfin et surtout je ne remercierai jamais assez Odile et Nicolas pour leur patience, leur dévouement et leur constant soutien. Ils savent ce que représente le travail rapporté ici; ils ont subi les peines et les moments de découragement sans pouvoir réellement bénéficier des moments de joie que procure un travail de recherche. C'est avec un très grand plaisir que je leur dédie cet ouvrage.



## **Avertissement**

Les résultats regroupés dans ce mémoire ont fait l'objet de rapports internes du Centre d'Automatique et Informatique de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, de communications lors de conférences ou de publications dans des livres de synthèse ou des journaux spécialisés, ceci sous une forme plus ou moins explicitement identique à celle présentée ici. Pour rester concis nous nous sommes donc autorisés un certain manque de précision et l'omission de quelques démonstrations. On pourra se reporter aux articles ajoutés en Annexe.



# Préface

Commander un système, c'est agir sur ses entrées fonctionnelles pour lui imposer un comportement dynamique. Ce comportement est généralement défini en décomposant le système en une partie certaine: le modèle et une partie incertaine: les perturbations. La commande classique suppose le modèle connu et s'intéresse aux réactions face aux perturbations. La commande adaptative suppose l'existence d'un modèle paramétré, les paramètres étant inconnus. Pour la commande linéaire adaptative, ce modèle est typiquement un modèle linéaire rationnel stationnaire. Pour un tel modèle, on sait (Kailath [5]) qu'une loi de commande elle aussi linéaire rationnelle et stationnaire permet de satisfaire la plupart des objectifs de commande: placement de pôles, commande optimale en horizon infini, modèle de référence ... Dans le cas où les paramètres du modèle sont connus (cas classique), la commande peut être obtenue, par exemple, par la technique de l'observateur-contrôleur. Dans le cas où les paramètres du modèle sont inconnus, il se pose en plus le problème d'identification et de réalisation. On peut formaliser ceci en écrivant le système avec un état "augmenté" ( $F, G, H, J, X$ ):

$$\begin{aligned} F(k+1) &= F(k) \\ G(k+1) &= G(k) \\ H(k+1) &= H(k) \\ J(k+1) &= J(k) \\ X(k+1) &= F(k)X(k) + G(k)u(k) \\ y(k) &= H(k)X(k) + J(k)u(k) \end{aligned}$$

où la suite  $u$  représente les entrées du modèle et la suite  $y$  représente les sorties. On mesure alors la difficulté du problème:

- la représentation ( $F, G, H, J$ ), même minimale, n'est pas unique. Ceci se traduit par le fait que l'état "augmenté" n'est pas observable. Ce problème est résolu en réduisant le nombre de paramètres, en choisissant une représentation appropriée, la plus courante étant la représentation polynomiale:

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-1)$$

ou:

$$A(q^{-1})x(k) = u(k-1), \quad y(k) = B(q^{-1})x(k)$$

où  $A(q^{-1})$  et  $B(q^{-1})$  sont des (matrices) polynôiales en l'opérateur de retard  $q^{-1}$

2. le système est non linéaire en l'état "augmenté" On contourne cette difficulté en espérant qu'un principe de séparation s'applique: on commande le système selon les techniques de commande linéaire classique, supposant à chaque instant les paramètres estimés (instationnaires et inexacts) constants et exacts. Les paramètres quant à eux sont mis à jour selon plusieurs techniques possibles - minimisation d'un critère de performance, décroissance d'une fonction de Lyapunov, estimation ... Le livre de Goodwin et Sin [3] décrit un grand nombre de lois de commande linéaire adaptative obtenues de cette façon.

**Exemple:** Considérons le modèle d'un système du premier ordre ayant le pôle pour paramètre  $\theta$ :

$$y(k) = \theta y(k-1) + u(k-1)$$

$y(i)$ ,  $y(i-1)$  et  $u(i-1)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , étant connus à l'instant  $k$ ,  $\theta$  est solution du système linéaire:

$$y(i) - u(i-1) = y(i-1)\theta \quad 1 \leq i \leq k$$

L'algorithme de Kaczmarz par exemple (Householder [4, Section 4.2]), utilisé en Analyse Numérique, nous donne une méthode itérative pour obtenir  $\theta$ :

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \frac{y(k-1)(y(k) - u(k) - y(k-1)\hat{\theta}(k-1))}{1 + y(k-1)^2} \quad (1)$$

Supposons maintenant que l'objectif de commande soit:

$$y(k+1) = r(k)$$

$r$  étant une suite de sorties désirées. La loi de commande:

$$u(k) = -\theta y(k) + r(k)$$

permet de réaliser parfaitement cet objectif. Ne connaissant pas  $\theta$ , nous prenons:

$$u(k) = -\hat{\theta}(k)y(k) + r(k) \quad (2)$$

(1) et (2) constituent les équations d'un contrôleur linéaire adaptatif, connu sous le nom de "contrôleur réponse pile adaptatif" (Goodwin et Sin [3]).

Les algorithmes de commande linéaire adaptative étant ainsi définis, il s'agit d'étudier les propriétés qu'ils confèrent aux signaux du système auxquels ils sont appliqués. Goodwin et Sin [3] ont regroupé de nombreux résultats connus lorsque le système à commander peut être exactement représenté par le modèle paramétré. Egardt [2] donne aussi une extension au cas des systèmes perturbés par un signal exogène borné.

**Exemple:** Si le système à commander est:

$$y(k) = a y(k-1) + u(k-1)$$

le contrôleur réponse pile adaptatif donne les propriétés suivantes (Goodwin et Sin [3, Theorem 6.3.1]):

- les suites  $\hat{\theta}$ ,  $u$  et  $y$  sont bornées pour toutes conditions initiales,
- les suites  $\hat{\theta}(k+1) - \hat{\theta}(k)$  et  $y(k+1) - r(k)$  sont de carrés sommables.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier les propriétés obtenues lorsque le modèle paramétré ne peut pas représenter exactement le système à commander. Cette étude est divisée en deux parties indépendantes:

- Bornitude de toutes les solutions des systèmes linéaires adaptatifs
- Etude qualitative des solutions des systèmes linéaires adaptatifs

Mentionnons [6] et [1] qui contiennent une première synthèse de nos travaux sur, respectivement, chacun de ces sujets.

# Bibliographie

- [1] Anderson B.D.O., Bitmead R.R., Johnson C.R., Kokotovic P.V., Kosut R.L., Mareels I.M.Y., Praly L., Riedle B.D.: *Stability of adaptive systems: Passivity and averaging analysis.* MIT Press, 1986.
- [2] Egardt B.: *Stability of adaptive controllers.* Springer Verlag. 1979.
- [3] Goodwin G.C., Sin K.S.: *Adaptive filtering, prediction and control.* Prentice-Hall. 1984
- [4] Householder A.S.: *The theory of matrices in numerical analysis.* Dover 1964.
- [5] Kailath T.: *Linear systems.* Prentice Hall. 1980.
- [6] Ortega R., Praly L.: *Robustesse des algorithmes de commande adaptative.* Publié dans: *Commande adaptative: Aspects pratiques et théoriques.* Coordonnateurs: Landau I.D., Dugard L.. Masson 1986.

# Table des Matières

<b>1 Bornitude de toutes les solutions des systèmes linéaires adaptatifs</b>	1
1.1 Introduction	1
1.2 Erreur de modélisation dans le cas linéaire	5
1.3 Adaptation des paramètres	10
1.3.1 Paramétrisation	10
1.3.2 Adaptation par observateur	13
1.3.3 Propriétés de l'adaptation	16
1.3.4 Application à une paramétrisation explicite	20
1.4 Commande liée à une paramétrisation explicite	22
1.4.1 Remarques sur la synthèse du contrôleur	22
1.4.2 Solutions bornées	27
1.5 Commande liée à une paramétrisation implicite	32
1.5.1 Modèle de référence pour système à modèle inverse instable	32
1.5.2 Solutions bornées: résultat qualitatif	34
1.5.3 Solutions bornées: résultat plus quantitatif	35
1.6 Conclusion	39
<b>2 Etude qualitative des solutions des systèmes linéaires adaptatifs</b>	43
2.1 Introduction	43
2.2 Le système “geld”	47
2.3 Solutions périodiques	49
2.4 Ensembles intégraux	53
2.5 Moyennisation	58
2.6 Conclusion	62

<b>A Compléments techniques sur le chapitre 1</b>	<b>67</b>
A.1 Une norme instationnaire adaptée	69
A.2 Démonstration du Lemme 1.1	71
A.3 Démonstration de (1.15)	73
A.4 Démonstration de la Propriété 1.1	74
A.5 Lemme A.1	76
A.6 A propos des inégalités (1.24)-(1.27)	77
A.7 Démonstration du Lemme 1.2	79
A.8 Démonstration de la Propriété 1.2	80
A.9 Démonstration de la Propriété 1.3	82
A.10 Démonstration du Lemme 1.3	84
A.11 Démonstration de la Propriété 1.4	86
A.12 A propos du Lemme 1.4	89
A.13 Démonstration du Lemme 1.6: Bornitude	91
A.14 Démonstration du Lemme 1.6: Convergence	97
A.15 Démonstration de (1.181)	100
A.16 Démonstration de la Propriété 1.5	102
A.17 Démonstration du Lemme 1.7	106
A.18 Démonstration de la Propriété 1.6	107
<b>B Compléments techniques sur le chapitre 2</b>	<b>115</b>
B.1 Démonstration de la Propriété 2.1	117
B.2 Démonstration de la Propriété 2.2	119
B.3 Démonstration de la Propriété 2.3	120
B.4 Démonstration de la Propriété 2.5	123
B.5 Démonstration du Lemme 2.1	124
<b>C Articles relatifs au chapitre 1</b>	<b>127</b>
C.1 MIMO indirect adaptive control: stability and robustness	129
C.2 The almost exact modelling assumption in adaptive linear control	131
<b>D Articles relatifs au chapitre 2</b>	<b>133</b>
D.1 On the global dynamics of adaptive systems: an elementary worked example	135





# Chapitre 1

## Bornitude de toutes les solutions des systèmes linéaires adaptatifs

### 1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de définir une classe de systèmes tels que, leur appliquant un contrôleur linéaire adaptatif, on obtienne toutes les solutions bornées. On cherche plus précisément à établir que cette propriété est "robuste", c'est à dire qu'elle est préservée en présence de certains types de perturbations à définir. Nous nous contenterons cependant de résultats qualitatifs, notre motivation étant plus de montrer les outils et leur manipulation que d'énoncer des résultats précis liés à des algorithmes particuliers.

Un contrôleur linéaire adaptatif est non linéaire et, pour prouver la bornitude de toutes les solutions, il faut utiliser des propriétés très spéciales du système. Nous intéressant à un contrôleur linéaire adaptatif basé sur une adaptation paramétrique, nous le regardons comme un contrôleur linéaire paramétré interconnecté avec un estimateur. Pour exploiter techniquement cette structure, il a été proposé (Egardt [2], de Larminat [12] et bien d'autres) de regarder le système en boucle fermée comme deux sous-systèmes interconnectés:

$$X(k+1) = F(\hat{\theta}(k), k) X(k) + G(\hat{\theta}(k), k) r(k) + \eta(k) \quad (1.1)$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k)e(k) + U(k) \quad (1.2)$$

Le sous-système (1.1) est linéaire en  $X$  et, supposant la partie linéaire du contrôleur adaptatif bien "conçue", il serait exponentiellement stable avec entrées bornées si les paramètres adaptés étaient constants et les effets non modélisés étaient bornées. Dans son équation:

- $X$  représente une partie de l'état du système telle que si  $X$  est borné, l'état du système complet, mis à part le vecteur des paramètres adaptés, est borné,
- $r$  représente des signaux bornés tels les signaux de consignes,
- $\hat{\theta}$  représente le vecteur des paramètres adaptés,

- les fonctions  $F$  et  $G$  sont régulières, uniformément en  $k$  et pour  $\hat{\theta}$  restant dans un ensemble  $\Omega$ ,
- Il existe deux constantes positives  $f$  et  $\zeta$ ,  $\zeta$  strictement inférieur à 1 et pour simplifier  $f$  est supérieur à 1, telles que pour tout  $\theta$  dans  $\Omega$ , on ait, pour tous  $j$  et  $k$  (Fuchs [3, Theorem 5]):

$$\left\| \prod_{i=j+1}^{j+k} F(\theta, i) \right\| \leq f \zeta^k \quad (1.3)$$

- $\eta$  est ce qu'il faut ajouter à  $FX + Gr$  pour obtenir l'égalité. Ce vecteur représente donc les effets qui ne peuvent être modélisés en particulier à cause des contraintes sur  $F$  et  $r$ . L'erreur d'adaptation est parmi ces composantes.

Le sous-système (1.2) est la loi d'adaptation des paramètres. Son rôle est de "minimiser" une erreur d'adaptation tout en gardant des paramètres aussi constants que possible. Dans son équation:

- $K$  est une suite de gains d'adaptation dépendant de  $X$ ,
- $e$  est l'erreur d'adaptation définissant, plus ou moins explicitement, une erreur d'estimation,
- $U$  est une commande de la loi d'adaptation, utilisée pour contrôler le vecteur des paramètres adaptés et en particulier pour introduire la connaissance qu'on peut en avoir a priori.

**Exemple:** Considérons le contrôleur réponse pile adaptatif (Goodwin et Sin [7]):

$$\left. \begin{aligned} \hat{\theta}(k+1) &= \hat{\theta}(k) + \frac{y(k) (y(k+1) - u(k) - \hat{\theta}(k)y(k))}{1 + y(k)^2} \\ u(k) &= -\hat{\theta}(k)y(k) + r(k) \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

où  $y$  est la sortie du système,  $u$  est l'entrée et  $r$  est la consigne. Dans ce cas l'erreur d'adaptation est:

$$e(k) = y(k) - u(k-1) - \hat{\theta}(k-1)y(k-1) \quad (1.5)$$

Reécrivant cette équation sous la forme:

$$y(k) - \hat{\theta}(k-1)y(k-1) = u(k-1) + e(k) \quad (1.6)$$

on obtient une représentation polynomiale observable instationnaire d'un système du premier ordre où  $e$  est ce qu'il faut ajouter pour obtenir effectivement une égalité, c'est à dire les effets non modélisés. On voit alors qu'on peut écrire un système du type (1.1):

$$X(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{\theta}(k) \end{pmatrix} e(k) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \hat{\theta}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(k) \\ r(k-1) \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

avec:

$$X(k+1) = \begin{pmatrix} y(k) \\ u(k) \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

(1.3) est vérifiée et l'état du système complet sera borné lorsque  $\hat{\theta}$ ,  $u$  et  $y$  le sont et, par exemple, le système à commander est linéaire uniformément détectable (Anderson et Moore [1]).

Pour obtenir des conditions pour lesquelles toutes les solutions de (1.1)-(1.2) sont bornées, nous nous inspirons de la méthode proposée, pour un problème plus général, par Persidskii et Dychman [14, pages 122–133]. Il s'agit de regarder les deux sous-systèmes indépendamment l'un de l'autre, en considérant les termes de couplage comme des perturbations, et de démontrer que leurs solutions sont bornées en présence des pires perturbations que l'autre sous-système peut créer. Ainsi, pour le sous-système (1.1), les termes de perturbations, introduits par (1.2), sont l'amplitude du vecteur  $\hat{\theta}(k)$ , sa vitesse d'évolution  $\dot{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)$  et les effets non modélisés  $\eta(k)$ . Pour le sous-système (1.2), les termes de perturbations, introduits par (1.1), sont l'incertitude sur l'amplitude et l'orientation du vecteur  $K(k)$ . Nous cherchons donc à établir que, pour toutes les solutions du sous-système (1.1), le vecteur des paramètres adaptés, donné par (1.2),

1. reste dans un compact “admissible”  $\Upsilon$ ,
2. donne une erreur d’adaptation “petite”,
3. varie “lentement” au cours du temps.

Pour préciser ces notions “admissible”, “petite”, “lentement” relatives au sous-système (1.2), il nous suffit de savoir sous quelles conditions le sous-système (1.1) aura toutes ses solutions bornées, malgré la présence des effets perturbateurs. Ainsi:

- “l’admissibilité” sera reliée à l’ensemble  $\Omega$  où les fonctions  $F$  et  $G$  restent régulières uniformément en  $k$ .
- “la lenteur” pourra être caractérisée grâce au résultat classique disant que la stabilité des solutions d’un système linéaire lentement variable peut se déduire de celle du système “gelé”. De façon plus précise, on a:

**Lemme 1.1 (Extension de Lyaschenko [15])** *Supposons que (1.3) soit satisfaite et que la fonction  $F(\cdot, k)$  soit Lipschitzienne en  $\theta$ , uniformément en  $k$ , c'est à dire:*

$$\forall k, \forall \theta_1, \theta_2 \in \Upsilon : \|F(\theta_1, k) - F(\theta_2, k)\| \leq f_1 \|\theta_1 - \theta_2\| \quad (1.9)$$

*Soient  $\alpha, \beta$  des constantes positives et  $p$  une constante plus grande ou égale à 1 Si, pour un couple d'entiers  $(j, k)$ , la suite  $\theta$  vérifie:*

$$\sum_{i=j+1}^{j+k} \|\theta(i) - \theta(i-1)\|^p \leq \beta + \alpha^p k, \quad \theta(i) \in \Upsilon, \forall i \in [j+1, j+k] \quad (1.10)$$

*pour tout  $\rho$  strictement supérieur à  $\zeta$ , il existe une suite bornée  $\underline{f}$  telle que:*

$$\left\| \prod_{i=j+1}^{j+k} F(\theta(i), i) \right\| \leq \underline{f}(k) \lambda^k \quad (1.11)$$

où:

$$\lambda = \left( \rho - \frac{\rho - \zeta}{f} \right) \left( 1 + \frac{ff_1\alpha}{\rho - \zeta} \right) \quad (1.12)$$

- enfin, pour la "petitesse", si  $G$  est uniformément bornée sur  $\Upsilon \times \mathbb{N}$  et puisque  $r$  est bornée, on voit, avec (1.1) et (1.11), qu'il existe des constantes positives  $c_1, c_2$  et  $\gamma$  telles que:

$$\|X(k)\|^2 \leq c_1 \lambda^{2k} \|X(0)\|^2 + c_2 + \gamma \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{2(k-1-i)} \|\eta(i)\|^2 \quad (1.13)$$

Pour pouvoir en conclure que  $X$  est borné, il faut savoir comment les effets non modélisés,  $\eta$ , sont reliés à la partie de l'état,  $X$ , que nous avons considérée. Théoriquement, de nombreuses conditions suffisantes sur cette relation sont connues. Ainsi, une conséquence directe du Lemme de Gronwall est que la suite  $X$  est bornée si il existe des constantes,  $c_3$  et  $c_4$ , et une suite de réels positifs,  $\gamma_1$ , telles que la relation  $\eta \cdot X$  vérifie:

$$\|\eta(k)\|^2 \leq c_3 + \gamma_1(k) \sum_{i=0}^k \tau^{2(k-i)} \|X(i)\|^2 \quad (1.14)$$

avec, pour une constante  $\varepsilon$  strictement positive et tous  $j, k$  [23]:

$$\frac{1}{k} \sum_{i=j+1}^{j+k} \gamma_1(i) < \frac{1}{k} c_4 + \frac{(1-\rho^2)(\rho^2 - \lambda^2)}{\gamma\rho^2} - \varepsilon, \quad \rho \geq \tau \quad (1.15)$$

Dans ce qui suit, nous allons tout d'abord énoncer des conditions dans lesquelles une inégalité de "petitesse" telle (1.14) est vérifiée par l'erreur de modélisation donnée par un modèle linéaire. Ensuite, nous verrons comment, sous l'hypothèse d'existence d'un modèle linéaire donnant ce type d'erreur de modélisation, on peut obtenir des paramètres adaptés vérifiant une propriété de "lenteur" du type (1.10) et donnant des effets non modélisés  $\eta$  dans

(1.1) satisfaisant aussi une inégalité de “petitesse” du type (1.14). D’après ce qui précède, ceci nous suffira pour établir, sous des hypothèses “réalistes”, que la commande linéaire adaptative permet de garantir la bornitude de toutes les solutions du système bouclé. Dans le but de simplifier les notations, nous ne traiterons que des systèmes “une entrée-une sortie”. Les résultats présentés ont été étendus au cas multivariable et même au cas de la commande décentralisée ([21], [30], Samson [31], Wiemer et Unbehauen [35]).

## 1.2 Erreur de modélisation dans le cas linéaire

Considérons un système linéaire stationnaire de dimension finie. On peut le représenter par:

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-1) + d(k) \quad (1.16)$$

où  $u$  est l’entrée,  $y$  la sortie et  $d$  une perturbation exogène bornée et  $A$  et  $B$  sont des polynômes en l’opérateur de retard  $q^{-1}$ ,  $A$  étant unitaire (i.e.  $A(0) = 1$ ). Nous choisissons d’approximer la paire système  $(A, B)$  par une paire modèle  $(A_m, B_m)$ . Pour chaque  $u$  et  $d$ ,  $y$ , obtenue de (1.16), et ce modèle donnent une erreur de modélisation:

$$d_m(k) = A_m(q^{-1})y(k) - B_m(q^{-1})u(k-1) \quad (1.17)$$

A partir des équations (1.16) et (1.17), nous voyons que, pour tous polynômes  $P_m$  et  $P$ , on a la relation suivante:

$$P(q^{-1})d_m(k) = (PA_m - P_m A, \quad q^{-1}(P_m B - PB_m))(q^{-1}) \begin{pmatrix} y(k) \\ u(k) \end{pmatrix} + P_m(q^{-1})d(k) \quad (1.18)$$

Pour exploiter cette égalité, nous introduisons les définitions suivantes:

**Définition 1.1** Soit  $\tau$  une constante strictement inférieure à 1,

- On appelle norme  $l_2(\tau)$  d’une suite  $u$ , la suite définie par:

$$\|u\|_{\tau,k} = \sqrt{\sum_{i=0}^k \tau^{-2i}|u(i)|^2} \quad (1.19)$$

On remarque:

$$\left\| \begin{array}{c} y \\ u \end{array} \right\|_{\tau,k} = \tau^{-k} s_\tau(k+1) \quad (1.20)$$

où  $s_\tau$  est obtenue récursivement:

$$s_\tau(k)^2 = \tau^2 s_\tau(k-1)^2 + |u(k-1)|^2 + |y(k-1)|^2 , \quad s_\tau(0) = 0 \quad (1.21)$$

Notons que  $\tau^{-k} s_\tau(k)$  est une suite croissante.

- On dit qu'une suite  $\beta$  est  $\tau$ -exponentiellement décroissante si la suite  $\tau^{-k}\beta(k)$  est majorée par une suite exponentiellement décroissante.
- On dit qu'une suite  $\beta$  est  $\tau$ -bornée si la suite  $\tau^{-k}\beta(k)$  est bornée.
- On dit qu'un polynôme  $C(k)$  à coefficients dépendant du temps est  $\tau$ -exponentiellement stable si il existe deux constantes positives  $c$  et  $\lambda$ ,  $\lambda$  étant strictement inférieure à  $\tau$ , telles que, pour toute suite  $u$ , les solutions de:

$$C(k, q^{-1})y(k) = u(k) \quad (1.22)$$

soient bien définies et vérifient:

$$|y(k)| \leq c \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} |u(i)| + \delta(k) \quad (1.23)$$

$\delta$  étant une suite  $\tau$ -exponentiellement décroissante, ne dépendant que des conditions initiales de  $y$ .

Remarquons qu'un polynôme  $P$  tel que  $P(z^{-1})$  ait tous ses zéros dans le disque ouvert de rayon  $\tau$  est  $\tau$ -exponentiellement stable. Soit alors  $\mathcal{S}(\tau)$ , l'algèbre des fractions rationnelles  $\frac{P_m}{P}$  telles que  $P(z^{-1})$  ait tous ses zéros dans le disque ouvert de rayon  $\tau$ . Le Théorème de Parseval, l'inégalité de Schwarz et la liberté de choix de  $P_m$  et  $P$  dans (1.18) nous permettent d'énoncer:

**Propriété 1.1** Soit  $d_m$  la suite des effets non modélisés par un modèle linéaire stationnaire de dimension finie  $(A_m, B_m)$  (1.17), pour un système linéaire stationnaire de dimension finie  $(A, B)$  (1.16). Pour tout  $\tau$  dans  $[0, 1[$ , tout  $\frac{P_m}{P}$  dans  $\mathcal{S}(\tau)$  et tout entier  $k$ , on a:

$$I - \tau^k \|d_m\|_{\tau, k} \leq \beta_\infty(k) + \gamma_\infty s_\tau(k) \quad (1.24)$$

où, avec  $\delta$  une suite  $\tau$ -bornée, ne dépendant que de  $P$  et des conditions initiales de  $u$  et  $y$ ,

$$\gamma_\infty^2 = \sup_{|z|=\tau} \left\{ \tau^2 |A(z^{-1}) \frac{P_m(z^{-1})}{P(z^{-1})} - A_m(z^{-1})|^2 + |B(z^{-1}) \frac{P_m(z^{-1})}{P(z^{-1})} - B_m(z^{-1})|^2 \right\} \quad (1.25)$$

$$\beta_\infty(k) = \sup_{|z|=\tau} \left\{ \left| \frac{P_m(z^{-1})}{P(z^{-1})} \right| \right\} \tau^k \|d\|_{\tau, k} + \delta(k) \quad (1.26)$$

$$2- \quad |d_m(k)| \leq \beta_2(k) + \gamma_2 s_\tau(k) \quad (1.27)$$

où, avec  $\delta$  une suite  $\tau$ -exponentiellement décroissante, ne dépendant que de  $P$  et des conditions initiales de  $u$  et  $y$ ,

$$\gamma_2^2 = \oint_{|z|=\tau} \left( \tau^2 |A(z^{-1}) \frac{P_m(z^{-1})}{P(z^{-1})} - A_m(z^{-1})|^2 + |B(z^{-1}) \frac{P_m(z^{-1})}{P(z^{-1})} - B_m(z^{-1})|^2 \right) \frac{dz}{2i\pi z} \quad (1.28)$$

$$\beta_2(k) = \sqrt{\oint_{|z|=\tau} \left| \frac{P_m(z^{-1})}{P(z^{-1})} \right|^2 \frac{dz}{2i\pi z}} \tau^k \|d\|_{\tau,k} + \delta(k) \quad (1.29)$$

On remarque que (1.24) implique (1.27), puisque:

$$|d_m(k)| \leq \tau^k \|d_m\|_{\tau,k} \quad (1.30)$$

Cette inégalité n'a pas d'équivalent en temps continu. Par contre, on démontre aisément le résultat technique suivant, montrant que (1.24) implique aussi (1.27) en moyenne sur les intervalles de temps où la suite  $\sigma$  est grande, domine la suite  $s$  et ne croît pas plus vite qu'exponentiellement:

**Lemme 1.2** Soient  $d_m$ ,  $\beta$  et  $s$  des suites telles que, pour tout  $k$ , on ait:

$$\mu^k \|d_m\|_{\mu,k} \leq \beta(k) + \gamma s(k) \quad (1.31)$$

où  $\mu$  est une constante positive. Soit  $\sigma$  une suite de réels strictement positifs telle que la suite  $\mu^{-k}\sigma(k)$  soit croissante. Pour chaque intervalle de temps  $[k+1, k+l]$ , on a:

$$\sum_{i=k+1}^{k+l} \left[ \frac{d_m(i)}{\sigma(i)} \right]^2 \leq \gamma^2 \left[ l + \log \left( \left[ \frac{\sigma(k+l)}{\mu^{l-1}\sigma(k+1)} \right]^2 \right) \right] \sup_{i \in [k+1, k+l]} \left\{ \frac{(s(i) + \frac{1}{\gamma}\beta(i))^2}{\sigma(i)^2} \right\} \quad (1.32)$$

Avec la Propriété 1.1, nous avons établi qu'une hypothèse, qualitativement peu restrictive, sur l'erreur de modélisation, donnée par (1.17), est (1.24) ou (1.27), où la suite  $s_\tau$  est obtenue récursivement par (1.21). En particulier, tous les effets pouvant être introduits par un système linéaire stationnaire de dimension finie sont pris en compte. Ce système peut même être de dimension infinie, comporter certaines non linéarités ou être instationnaire [25].

Si l'état  $X$  du système (1.1) est observable à partir des suites  $u$  et  $y$ , l'inégalité (1.24) est du type (1.14). On s'attend donc à pouvoir démontrer la bornitude des solutions si  $\gamma_2$  ou  $\gamma_\infty$  est suffisamment petit. De ce fait, on démontre que la bornitude des solutions est une propriété robuste vis à vis des topologies induites par les bases de voisinages obtenues à partir des expressions (1.25) et (1.28) ([25], [24], Vidyasagar [34]). D'après l'inégalité (1.15) de la Section 1.1, on voit que les hypothèses peuvent même être relâchées en remplaçant les constantes  $\gamma_2$  ou  $\gamma_\infty$  par des suites dont seule la moyenne est suffisamment "petite" [21].

En pratique, pour réduire les constantes  $\gamma_2$  ou  $\gamma_\infty$  dans (1.24) ou (1.27), on ne travaille pas directement avec les entrées-sorties du système, mais avec des entrées-sorties conditionnées nous dirons mesurées à la complexité réduite du modèle. Précisément, si  $u_p$  et  $y_p$  sont les entrées et sorties du système à commander,  $u$  et  $y$  sont données par:

$$\begin{pmatrix} U_y(q^{-1})y(k) \\ U_u(q^{-1})u(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [U_y(q^{-1}) - V_y(q^{-1})T(q^{-1})] & -q^{-1}W_y(q^{-1})T(q^{-1}) \\ V_u(q^{-1}) & W_u(q^{-1})T(q^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_p(k) - y_d(k) \\ u_p(k) \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

où:

- $U_u$ ,  $V_u$ ,  $W_u$ ,  $U_y$ ,  $V_y$ ,  $W_y$  et  $T$  sont des polynômes,  $(U_y - V_y T)W_u + q^{-1}V_u W_y$ ,  $U_u$  et  $U_y$  ayant tous leurs zéros dans le disque ouvert de rayon  $\mu$ . Ceci introduit implicitement  $\mu$  comme paramètre supplémentaire du "système de mesure"
- $y_d$  est une suite de consigne.
- La présence du polynôme  $T$  résulte de l'application du "principe du modèle interne" Ce polynôme étant sensé annihiler les signaux  $d$  et  $y_d$ , il a typiquement ses zéros sur le cercle unité. Ceci permet de rendre les signaux mesurés "insensibles" aux signaux exogènes  $d$  et  $y_d$ . Cependant, dans ce cas, le modèle doit être pris sous la forme  $(A_m S, B_m)$  où  $S$  est le plus grand diviseur commun de  $T$  et  $V_u$  (voir [25]).

En définissant  $s_{p\mu}$  de façon analogue à  $s_\mu$ , mais à partir des signaux réels et non des signaux mesurés:

$$s_{p\mu}(k)^2 = \mu^2 s_{p\mu}(k-1)^2 + |u_p(k-1)|^2 + |y_p(k-1)|^2, \quad s_{p\mu}(0) = 0 \quad (1.34)$$

on a:

**Propriété 1.2 ([25])** 1- Si le polynôme  $T$  est choisi tel que:

$$\sqrt{\sum_{i=0}^k \mu^{2(k-i)} |u_p(i)|^2} \leq \beta_u + \gamma_u \sqrt{\sum_{i=0}^k \mu^{2(k-i)} [|y_p(i)|^2 + |T(q^{-1})u_p(i)|^2]} \quad (1.35)$$

il existe des constantes  $\gamma$ ,  $\gamma_p$ ,  $\beta$  et  $\beta_p$  telles que, pour tout  $k$ :

$$s_{p\mu}(k) \leq \beta_p + \gamma_p s_\mu(k), \quad s_\mu(k) \leq \beta + \gamma s_{p\mu}(k) \quad (1.36)$$

et si  $s_\mu$  tend vers zéro,  $y_p - y_d$  tend vers zéro.

2- Si  $u_p$  et  $y_p$  sont les entrées-sorties d'un système linéaire:

$$A_p(q^{-1})y_p(k) = B_p(q^{-1})u_p(k-1) + d(k) \quad (1.37)$$

avec  $d$  bornée, l'erreur de modélisation  $d_m$ , donnée par un modèle  $(A_m S, B_m)$  appliquée aux signaux mesurés, vérifie:

$$\mu^k \|d_m\|_{\mu, k} \leq \beta_\infty(k) + \gamma_\infty s_\mu(k) \quad (1.38)$$

$$|d_m(k)| \leq \beta_2(k) + \gamma_2 s_\mu(k) \quad (1.39)$$

où les suites  $\beta_\infty$  et  $\beta_2$  sont bornées, ne dépendant que de  $\mu$ , de la suite  $d$  et de façon respectivement  $\mu$ -bornée et  $\mu$ -exponentiellement décroissante des conditions initiales de  $u$  et  $y$  et les constantes  $\gamma_\infty$  et  $\gamma_2$  sont données par (1.25) et (1.28) en remplaçant  $A_m$  par  $A_m S$  et en posant:

$$A = U_y(A_p W_u T + q^{-1} B_p V_u) , \quad B = U_u(-A_p W_y T + B_p U_y - B_p V_y T) \quad (1.40)$$

De plus, si le polynôme  $T$  est choisi tel que:

$$T(q^{-1})y_d(k) = 0 , \quad T(q^{-1})d(k) = 0 \quad (1.41)$$

dans (1.38) et (1.39), la suite  $\beta_2$  est  $\mu$ -exponentiellement décroissante et la suite  $\beta_\infty$  est  $\mu$ -bornée.

## Remarques

- $\gamma_\infty$  et  $\gamma_2$  n'auront la possibilité d'être "petits" que si le module des valeurs propres associées à des modes presque non observables du système et que nous choisissons de ne pas prendre en compte dans le modèle  $(A_m S, B_m)$  est plus petit que  $\mu$  (facteur presque commun à  $A$  et  $B$  divisé par  $P$  dans (1.25) ou (1.28)) [25]. Le choix implicite de  $\mu$  fait par le système de mesure fixe donc cette borne supérieure.

- Les égalités (1.40) montrent comment par déplacement des pôles et des zéros, le système de mesure peut permettre de réduire la complexité et rendre le système mieux représentable par le modèle.

- Dans le cas où (1.37) est satisfaite, (1.35) est vérifiée si les polynômes  $T$  et  $B_p$  sont premiers entre eux.

Nous avons établi que, sous des hypothèses réalistes, l'inégalité de "petitesse" du type (1.14) est vérifiée dans le cas linéaire et que la satisfaction de la condition (1.15) peut être facilitée par un choix judicieux du système de mesure. Notre prochaine tâche est l'étude de l'adaptation des paramètres (1.2).

## 1.3 Adaptation des paramètres

Il s'agit de montrer l'existence de lois d'adaptation du type (1.2) telles que, si il existe un modèle (inconnu) vérifiant l'inégalité de "petitesse" du type (1.14)-(1.15), les paramètres adaptés vérifient l'inégalité de "lenteur" du type (1.10) et l'erreur de modélisation qui leur est associée, vérifie aussi une inégalité de "petitesse" du type (1.14)-(1.15).

### 1.3.1 Paramétrisation

Soient  $u$  et  $y$  les signaux d'entrées-sorties mesurés donnés par (1.33), nous cherchons à adapter en ligne un modèle du système mesuré décrit par:

$$A_m(q^{-1})S(q^{-1})y(k) = B_m(q^{-1})u(k-1) \quad (1.42)$$

où les degrés  $n_A$  et  $n_B$  sont fixés,  $A_m$  est unitaire et  $S$ , également unitaire, est obtenu à partir du système de mesure comme le "p.g.c.d." de  $T$  et  $V_u$ . Nous adoptons une approche paramétrique pour cette adaptation. La paramétrisation la plus évidente, dite paramétrisation triviale, consiste à définir un vecteur  $\theta$  dans  $\mathbb{R}^{n_A+n_B-1}$  dont les composantes sont les coefficients de  $A_m$  et  $B_m$ . Ce choix n'est cependant pas le seul possible. Pour obtenir d'autres paramétrisations, nous considérons les suites  $z$  et  $Z$  définies par:

$$\begin{aligned} U(q^{-1})x(k) &= \begin{pmatrix} y(k) \\ u(k-1) \end{pmatrix} \\ Z(k) &= V(q^{-1})x(k) \\ z(k) &= W(q^{-1})x(k) \end{aligned} \quad (1.43)$$

où  $U$  est une matrice polynomiale  $2 \times 2$  unitaire dont les zéros sont dans le disque ouvert de rayon  $\mu$  (le même que pour le système de mesure),  $W$  est un vecteur polynomiale ligne à 2 composantes et  $V$  est une matrice polynomiale  $p \times 2$ . Les matrices  $(V^t \ W^t)^t$  et  $U$  sont premières à droite.

**Définition 1.2 ([26])** Le triplet  $(U, V, W)$  est dit définir une paramétrisation dans  $\mathbb{R}^p$  de la famille de modèle si pour tous polynômes  $A_m$  et  $B_m$  de degré  $n_A$  et  $n_B$ ,  $A_m$  étant unitaire, il existe un vecteur  $\theta$  de  $\mathbb{R}^p$  et un polynôme  $N$  premier avec  $\det\{U\}$ , tels que:

$$\det\{U\}(W - \theta^t V) = N(A_m S \quad , \quad -B_m)U \quad (1.44)$$

La paramétrisation triviale est donnée par:

$$\left. \begin{aligned} U_t(q^{-1}) &= 1 \\ W_t(q^{-1}) &= (1 \quad 0) \\ V_t(q^{-1})^t &= \begin{pmatrix} -q^{-1}S(q^{-1}) & -q^{-n_A}S(q^{-1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q^{-n_B} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

*Une paramétrisation est dite explicite si il existe une matrice  $P$  et un vecteur ligne  $Q$  tels que:*

$$\det\{U\}V = N P V_t U \quad , \quad \det\{U\}W = N (W_t - Q V_t) U \quad (1.46)$$

où le polynôme  $N$  a tous ses zéros sont dans le disque ouvert de rayon  $\mu$ .

### Remarques

- Nous cherchons à adapter les paramètres d'un modèle supposé a priori stationnaire. Dans le cas où ce modèle est instationnaire et donc l'instationnarité est connue, les matrices  $U$ ,  $V$  et  $W$  doivent être prises dépendantes du temps (voir Tsakalis et Ioannou [32] et [33]).
- La présence de la matrice  $P$  et du vecteur  $Q$ , dans (1.46), permettent d'exprimer  $A_m S$  et  $B_m$ , fractions rationnelles en  $q$  dans une base différente de celle des  $q^{-1}$

**Exemple:** Soit le modèle à adapter:

$$y(k) = a y(k-1) + u(k-1) \quad (1.47)$$

Choisissons un réel  $c$  et posons:

$$U(q^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V(q^{-1}) = \begin{pmatrix} q^{-2} & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}, \quad W(q^{-1}) = (1 + cq^{-1}, -1) \quad (1.48)$$

Ce triplet définit une paramétrisation dans  $\mathbb{R}^2$ . L'application qui à la paramétrisation triviale associe le vecteur  $\theta$  est non linéaire:

$$a \longrightarrow \theta = \begin{pmatrix} a(a+c) \\ a+c \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

Notons qu'une paramétrisation explicite est obtenue pour:

$$U(q^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V(q^{-1}) = (q^{-1} \ 0), \quad W(q^{-1}) = (1 \ -1) \quad (1.50)$$

C'est cette paramétrisation qui est utilisée pour le contrôleur réponse pile adaptatif (1.4).

L'intérêt des paramétrisations de la Définition 1.2 est que, si il existe  $(A_m S, B_m)$ , un modèle, tel que les suites  $u$  et  $y$  satisfont (1.42), il existe  $\theta$  dans  $\mathbb{R}^p$  donnant une suite  $z(k) - Z(k)^t \theta$   $\mu$ -exponentiellement décroissante. De plus, à un modèle donnant une erreur de modélisation  $d_m$ , il correspond un vecteur  $\theta$  vérifiant l'équation d'observation perturbée suivante:

$$z(k) = Z(k)^t \theta + w_\theta(k) \quad (1.51)$$

avec:

$$\det\{U(q^{-1})\} w_\theta(k) = N(q^{-1}) d_m(k) \quad (1.52)$$

Une paramétrisation non triviale implique donc un filtrage du terme perturbant l'équation d'observation des paramètres. De plus,  $\det\{U\}$  ayant tous ses zéros dans le disque ouvert de rayon  $\mu$ , la propriété de "petitesse" du type (1.14), établie, à la Propriété 1.2, pour l'erreur de modélisation sur les signaux mesurés, s'étend aux effets non modélisés par le vecteur de paramètres  $\theta$ :

**Propriété 1.3 ([26])** *Supposons l'existence d'un modèle instationnaire, à coefficients bornés,  $(A_m(k)S, B_m(k))$  donnant une erreur de modélisation  $d_m$ :*

$$d_m(k) = A_m(k, q^{-1})S(q^{-1})y(k) - B_m(k, q^{-1})u(k-1) \quad (1.53)$$

vérifiant, avec  $\beta_\infty$  et  $\beta_2$  des suites bornées et  $s_\mu$  donnée par (1.21):  
soit:

$$\mu^k \|d_m\|_{\mu,k} \leq \beta_\infty(k) + \gamma_\infty s_\mu(k) \quad (1.54)$$

soit:

$$|d_m(k)| \leq \beta_2(k) + \gamma_2 s_\mu(k) \quad (1.55)$$

D'une part, les suites  $z$  et  $Z$  vérifient le même type d'inégalité. D'autre part, soient  $\theta$  et  $N$  des suites associées au modèle  $(A_m(k)S, B_m(k))$  avec une erreur  $\Delta(k, q^{-1})$  dans:

$$\Delta(k) \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\{U\} \circ (W - \theta(k)^t V) - N(k) \circ (A_m(k)S - B_m(k)) U \quad (1.56)$$

L'erreur de modélisation  $w_\theta$ , associée à la suite  $\theta$ :

$$w_\theta(k) = z(k) - Z(k)^t \theta(k-1) \quad (1.57)$$

vérifie:  
soit:

$$\mu^k \|w_\theta\|_{\mu,k} \leq (\gamma_p \beta_\infty(k) + \delta_\infty(k)) + (\gamma_p \gamma_\infty + \gamma_\Delta) s_\mu(k) \quad (1.58)$$

soit:

$$|w_\theta(k)| \leq \left( \sum_{i=0}^k |h_p(k,i)| \beta_2(i) + \delta_2(k) \right) + (\gamma_p \gamma_2 + \gamma_\Delta) s_\mu(k) \quad (1.59)$$

où  $\delta_\infty$ , suite  $\mu$ -bornée, et  $\delta_2$ , suite  $\mu$ -exponentiellement décroissante, ne dépendant que de  $U$  et des conditions initiales de  $w_\theta$  et

$$\gamma_p^2 \leq \inf_{\lambda \leq \mu} \left\{ \frac{\mu^2}{\mu^2 - \lambda^2} \sup_k \left\{ \sum_{i=0}^k \left[ \frac{|h_p(t,i)|}{\lambda^{t-i}} \right]^2 \right\} \right\} \quad (1.60)$$

$$\gamma_\Delta^2 \leq \inf_{\lambda \leq \mu} \left\{ \frac{\mu^4}{\mu^2 - \lambda^2} \sup_k \left\{ \sum_{i=0}^k \left[ \frac{\|h_\Delta(t,i)\|}{\lambda^{t-i}} \right]^2 \right\} \right\} \quad (1.61)$$

$h_p$  et  $h_\Delta$  étant les réponses implusionnelles de  $\det\{U\}^{-1} \circ N$  et  $\det\{U\}^{-1} \circ \Delta$

### 1.3.2 Adaptation par observateur

La paramétrisation linéaire du modèle que nous venons de définir nous permet de poser le problème d'adaptation du modèle comme un problème d'observation du vecteur d'état  $\theta$  du système linéaire instationnaire suivant:

$$\begin{aligned} \theta(k) &= \Pi(k) \theta(k-1) + V(k) \\ \bar{z}(k) &= \bar{Z}(k)^t \theta(k-1) + \bar{w}(k) \end{aligned} \quad (1.62)$$

où:

- la notation  $\bar{\cdot}$  signifie division par  $\sigma$ , la suite  $\sigma$  reste à choisir mais est telle que la suite  $\bar{Z}$  est bornée. Rappelons que, d'après la Propriété 1.3, si (1.55) est vérifiée, les suites  $\frac{Z}{\sup\{s_\mu, 1\}}$  et  $\frac{z}{\sup\{s_\mu, 1\}}$  sont bornées.
- la présence de la suite  $\bar{w}$  est nécessaire pour traiter le cas de modélisation imparfaite. Grâce à la Propriété 1.3 on peut espérer qu'avec un choix judicieux de  $\sigma$ ,  $\bar{w}$  soit bornée. Notons que ceci est, en général, impossible dans le cas de la commande décentralisée [30].
- Cherchant à adapter un modèle supposé stationnaire, le vecteur des paramètres recherché est a priori constant. Aussi devrait-on prendre  $\Pi$  égale à l'identité et  $V$  nulle. Cependant, dans ce cas, la condition de détectabilité uniforme s'écrit:  
*Il existe un entier  $q$  et une constante strictement positive  $\alpha$  tels que pour tout  $k$ , on ait:*

$$\sum_{i=k+1}^{k+q} \bar{Z}(i) \bar{Z}(i)^t \geq \alpha I \quad (1.63)$$

Malheureusement, on ne sait pas aujourd’hui établir en général cette propriété dite de “balayage persistant” (voir cependant Ioannou et Tao [10] et Giri et al. [5]). Par contre, suivant Anderson et Moore [1], la détectabilité uniforme est garantie si les solutions  $\theta$  de (1.62) sont exponentiellement stables. C’est le cas si  $\Pi(k)$  est une contraction stricte uniforme. Cette matrice est donc introduite dans le seul but de régularisation. Notons aussi que (1.62) est un modèle d’évolution des paramètres d’un système instationnaire. Pour distinguer ces deux rôles, nous introduisons la décomposition suivante:

$$\Pi = \Pi_m \cdot \Pi_r \quad , \quad V = V_m + \Pi_m V_r \quad (1.64)$$

où l’indice  $\cdot_m$  réfère à “modèle d’instationnarité”, l’indice  $\cdot_r$  à “régularisation”

Un observateur linéaire pour le système (1.62) est donné par:

$$\hat{\theta}_+(k-1) = \hat{\theta}(k-1) + K(k)[\bar{z}(k) - \bar{Z}(k)\hat{\theta}(k-1)] \quad (1.65)$$

$$\hat{\theta}(k) = \Pi_m(k)[\Pi_r(k)\hat{\theta}_+(k-1) + V_r(k)] + V_m(k) \quad (1.66)$$

Une analyse par la méthode de Lyapunov montre qu’un choix approprié pour le gain d’observation  $K$  est [26]:

$$K(k) = a(k) \frac{M(k-1)\bar{Z}(k)}{\bar{Z}(k)^t M(k-1)\bar{Z}(k)} \quad (1.67)$$

$$M_+(k-1) \geq [I - b(k)K(k)\bar{Z}(k)^t]M(k-1) \quad , \quad M_s \geq M_+(k-1) \geq M_i \quad (1.68)$$

$$M(k) \geq \frac{\Pi_m(k)}{\pi_m(k)} M_+(k-1) \frac{\Pi_m(k)^t}{\pi_m(k)} \quad , \quad M_s \geq M(k) \geq M_i \quad (1.69)$$

où:

- $a$  et  $b$  sont des suites de réels positifs telles que:

$$a(k) + b(k) < 2 \quad (1.70)$$

- $\pi_m$  est une suite de réels positifs telle que:

$$\pi_m(k)^2 \geq \lambda_{\max}\{\Pi_m(k)^t \Pi_m(k)\} \quad (1.71)$$

$\lambda_{\max}$  étant le maximum des modules des valeurs propres.

- $M_s$  et  $M_i$  sont des matrices symétriques positives définies.
- Pour réduire le biais introduit dans l’estimation,  $\Pi_m$  devra être proche de l’identité et  $V_m$  de 0.

- De même pour éviter des problèmes de biais, on choisit  $\Pi_r(k)$  strictement contractante pour  $\|\hat{\theta}_r(k-1)\|$  "grand", mais proche de l'identité pour  $\|\hat{\theta}_r(k-1)\|$  "petit". Ainsi, on prend en général  $\Pi_r$  et  $V_r$  telles que  $\hat{\theta}(k)$  soit dans le compact  $\mathfrak{U}(k)$  tel la boule fermée de centre  $\theta_0(k)$  et de rayon  $R(k)$  où  $\theta_0$  est une suite d'estimation a priori du vecteur de paramètres adapté. Cette projection sur un convexe est aussi utile pour s'assurer que le vecteur  $\hat{\theta}$  reste dans le domaine  $\Omega$ , mentionné dans l'Introduction, où une loi de commande régulière peut être obtenue ([21], Goodwin et Sin [7], Middleton et al. [17]).

Notons que (1.65)–(1.66) est bien du type (1.2) annoncé, avec une commande  $U$  de la loi d'adaptation du type feedback:

$$U(k) = (\Pi(k) - I)\hat{\theta}_r(k) + V(k) \quad (1.72)$$

**Exemple:** Soit le système:

$$y(k) = a y(k-1) + u(k-1) + d(k) \quad (1.73)$$

pour lequel, on cherche à adapter le modèle:

$$y(k) = \theta y(k-1) + u(k-1) \quad (1.74)$$

Nous choisissons la paramétrisation triviale donnée par (1.50), soit:

$$z(k) = y(k) - u(k-1), \quad Z(k) = y(k-1) \quad (1.75)$$

Nous spécifions l'algorithme (1.65) en prenant:

$$a(k) = \frac{\overline{Z}(k)^2}{1 + \overline{Z}(k)^2}, \quad \sigma(k) = \sqrt{1 + y(k-1)^2} \quad (1.76)$$

$$V_r(k) = V_m(k) = 0, \quad b(k) = M(k) = M(k-1) = \Pi_m(k) = \pi_m(k) = \Pi_r(k) = 1 \quad (1.77)$$

Ceci nous donne la loi d'adaptation du contrôleur réponse pile adaptatif (1.4).

L'algorithme obtenu, sans modèle d'instationnarité ni régularisation ( $\Pi_m$  et  $\Pi_r$  sont égales à 1), n'est pas satisfaisant. En effet, avec la loi de commande de (1.4):

$$u(k) = -\hat{\theta}(k)y(k) \quad (1.78)$$

si la condition initiale  $y(1)$  est égale à 1 et si la perturbation  $d$  est:

$$d(k) = \frac{1}{\sqrt{k}} - \left[ (\hat{\theta}(1) - a) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \frac{\sqrt{i-1}}{i} \right] \frac{1}{k-1} \quad (1.79)$$

on obtient:

$$y(k) = \frac{1}{k}, \quad \hat{\theta}(k) \leq \hat{\theta}(1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \log(k) \quad (1.80)$$

Ainsi bien que  $y$  et  $d$  tendent vers 0, la suite  $\hat{\theta}$  est non bornée.

### 1.3.3 Propriétés de l'adaptation

Pour étudier les propriétés des solutions  $\hat{\theta}$  du système linéaire instationnaire (1.65)-(1.66), nous considérons une suite quelconque  $\theta$  de  $\mathbb{R}^p$ , dite suite de comparaison, et nous posons:

$$w_\theta(k) = z(k) - Z(k)^t \theta(k-1) \quad (1.81)$$

$$L_\theta(k) = [\hat{\theta}(k) - \theta(k)]^t M(k)^{-1} [\hat{\theta}(k) - \theta(k)] \quad (1.82)$$

$$L_{\theta+}(k) = [\hat{\theta}_+(k) - \theta(k)]^t M_+(k)^{-1} [\hat{\theta}_+(k) - \theta(k)] \quad (1.83)$$

$$\pi_r(k+1)^2 = \frac{[\hat{\theta}_+(k) - \theta(k) + U_r(k+1)]^t M_+(k)^{-1} [\hat{\theta}_+(k) - \theta(k) + U_r(k+1)]}{[\hat{\theta}_+(k) - \theta(k)]^t M_+(k)^{-1} [\hat{\theta}_+(k) - \theta(k)]} \quad (1.84)$$

$$W_\theta(k) = \theta(k) - \Pi_m(k) \theta(k-1) - V_m(k) \quad (1.85)$$

$w_\theta$  l'erreur de modélisation,  $W_\theta$  l'erreur de modèle d'instationnarité et  $\pi_r$  est la contraction de régularisation. Par ailleurs, l'erreur d'adaptation est:

$$e(k) = z(k) - Z(k)^t \hat{\theta}(k-1) \quad (1.86)$$

et la commande de régularisation est:

$$U_r(k) = [\Pi_r(k) - I] \hat{\theta}_+(k-1) + V_r(k) \quad (1.87)$$

On peut obtenir les inégalités suivantes:

**Lemme 1.3 ([26])** 1- (1.65) et (1.68) impliquent:

$$\begin{aligned} L_{\theta+}(k-1) &\leq L_\theta(k-1) + \frac{1}{Z(k)^t M(k-1) Z(k)} \frac{a(k)}{1 - a(k)b(k)} \times \\ &\quad \times [b(k) \bar{w}_\theta(k)^2 + 2|1 - b(k)| |\bar{w}_\theta(k)| |\bar{e}(k)| - (2 - a(k) - b(k)) \bar{e}(k)^2] \end{aligned} \quad (1.88)$$

$$\|\hat{\theta}_+(k-1) - \hat{\theta}(k-1)\|^2 \leq \frac{a(k)^2}{Z(k)^t M(k-1) Z(k)} \lambda_{\max}\{M_s\} \bar{e}(k)^2 \quad (1.89)$$

2- (1.66) et (1.69) impliquent:

$$L_\theta(k) \leq \pi_m(k)^2 \pi_r(k)^2 L_{\theta+}(k-1) + 2\sqrt{L_\theta(k)} \frac{\|W_\theta(k)\|}{\sqrt{\lambda_{\min}\{M_i\}}} - \frac{\|W_\theta(k)\|^2}{\lambda_{\max}\{M_s\}} \quad (1.90)$$

$$\|\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}_+(k-1)\| \leq \|U_r(k)\| + \|\Pi_m(k) - I\| \|\hat{\theta}_+(k-1) + U_r(k)\| + \|V_m(k)\| \quad (1.91)$$

et, si pour  $\alpha(k)$  plus grand que 1, on a:

$$U_r(k)^t M_+(k-1)^{-1} [2(\hat{\theta}_+(k-1) - \theta(k-1)) + \alpha(k) U_r(k)] \leq 0 \quad (1.92)$$

alors:

$$\|U_r(k)\|^2 \leq \frac{\lambda_{\max}\{M_s\}}{\alpha(k)-1} (1 - \pi_r(k)^2) L_{\theta+}(k-1) \quad (1.93)$$

Ce résultat technique nous permet de comprendre les choix faits en pratique spécifiant l'algorithme d'adaptation pour garantir que les solutions  $\hat{\theta}$  de (1.65)-(1.66) soient bornées. Ainsi:

- imposant aux suites de comparaison de vérifier le modèle d'instationnarité, i.e.  $W_\theta$  est nulle, et supposant que  $\sigma$  peut être choisie de sorte que  $|\bar{w}_\theta|$  soit inférieure à une borne choisie, on détermine la suite  $a$  pour que le terme entre crochets de (1.88) soit négatif. On peut alors prendre  $U_r$  nulle et  $\pi_m$  égale à 1. C'est la technique de la "zone morte" ([20], Egardt [2], Samson [31]).
- $W_\theta$  pouvant être non nulle, mais  $\bar{w}_\theta$  étant bornée, on prend  $\pi_m(k)\pi_r(k)$  tendant vers une valeur strictement inférieure à 1 si  $\hat{\theta}_+(k-1)$  tend vers l'infini. C'est la technique de la "contraction" (Egardt [2], Ioannou et Tsakalis [11], de Larminat et Raynaud [13]).
- $W_\theta$  pouvant être non nulle et  $\bar{w}_\theta$  non bornée, on choisit  $\pi_m$  et  $\pi_r$  telles que  $\pi_m \pi_r \hat{\theta}_+$  soit bornée. C'est ce que fait la projection sur un convexe compact ([21], Egardt [2]).

Precisément, on obtient, par exemple, le résultat suivant à partir du Lemme 1.3 (voir de Larminat et Raynaud [13] et Middleton et al. [17] pour d'autres exemples):

**Propriété 1.4 ([26])** Considérons le système (1.65)-(1.66) avec (1.67)-(1.69) où, avec  $c$ ,  $\Gamma_q$  et  $\Gamma_a$  des constantes positives, les suites  $a$ ,  $b$ ,  $M$ ,  $\pi_m$ ,  $\Pi_m$ ,  $V_m$ , paramètres de la loi d'adaptation, sont choisies pour que:

$$\frac{a(k)^2}{\bar{Z}(k)^t M(k-1) \bar{Z}(k)} \leq c \quad (1.94)$$

$$\begin{aligned} \frac{1 - a(k)b(k) + |1 - b(k)|\sqrt{1 - a(k)b(k)}}{(2 - a(k) - b(k))(1 - a(k)b(k))} &\leq \\ \leq \Gamma_q \frac{\bar{Z}(k)^t M(k-1) \bar{Z}(k)}{a(k)} &\leq \Gamma_a^2 \frac{2 - a(k) - b(k)}{1 - a(k)b(k) + |1 - b(k)|\sqrt{1 - a(k)b(k)}} \end{aligned} \quad (1.95)$$

$$\pi_m(k) = 1 \quad , \quad \Pi_m(k) = I \quad , \quad V_m(k) = 0 \quad (1.96)$$

De plus,  $\Pi_r$  et  $V_r$  sont choisies telles que  $\hat{\theta}(k)$  soit la projection de  $\hat{\theta}_+(k-1)$ , selon la distance induite par  $M_+(k-1)^{-1}$ , sur un compact convexe  $\underline{\Sigma}(k)$ , la suite  $\underline{\Sigma}$  restant dans un compact  $\Sigma$ .

D'une part toutes les solutions  $\hat{\theta}$  de (1.65)-(1.66) restent dans les compacts  $\underline{\Sigma}(k)$ . D'autre part, il existe des constantes positives  $\Gamma_\theta$  et  $\Gamma_W$ , ne dépendant que de  $c$ ,  $\Sigma$ ,  $\lambda_{\min}\{M_s\}$  et  $\lambda_{\max}\{M_s\}$ , telles que, pour toute suite  $\theta$  restant dans les compacts  $\underline{\Sigma}(k)$ , il existe une suite positive  $L_\theta$ , bornée indépendamment de  $\theta$ , vérifiant:

- pour l'écart entre  $\hat{\theta}$  et  $\theta$ :

$$\|\hat{\theta}(k) - \theta(k)\|^2 \leq \lambda_{\max}\{M_s\} L_\theta(k) \quad (1.97)$$

- pour l'erreur d'adaptation:

$$\bar{e}(k)^2 \leq \frac{\Gamma_a^2}{\Gamma_q} [L_\theta(k-1) - L_\theta(k) + \Gamma_W \|W_\theta(k)\|] + \Gamma_a^2 \bar{w}_\theta(k)^2 \quad (1.98)$$

- et pour la vitesse du vecteur des paramètres adapté:

$$\|\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)\|^2 \leq \Gamma_\theta [L_\theta(k-1) - L_\theta(k) + \Gamma_W \|W_\theta(k)\|] + \Gamma_q \Gamma_\theta \bar{w}_\theta(k)^2 \quad (1.99)$$

où  $e$  est l'erreur d'adaptation,  $w_\theta$  l'erreur de modélisation,  $W_\theta$  l'erreur de modèle d'instationnarité:

$$e(k) = z(k) - Z(k)^\dagger \hat{\theta}(k-1) \quad (1.100)$$

$$w_\theta(k) = z(k) - Z(k)^\dagger \theta(k-1) \quad (1.101)$$

$$W_\theta(k) = \theta(k) - \theta(k-1) \quad (1.102)$$

Cette Propriété nous donne les propriétés "admissible", "petite" et "lentement" dont nous avons parlé en Introduction. En effet, avec les Propriétés 1.2 et 1.3 et le Lemme 1.2, supposons l'existence d'une suite de comparaison  $\theta$  telle que:

- $\theta(k)$  appartienne au compact  $\underline{\mathcal{T}}(k)$ ,
- l'erreur de modèle d'instationnarité  $W_\theta$  satisfasse:

$$\frac{1}{l} \sum_{i=k+1}^{k+l} \|W_\theta(i)\| \leq \frac{\beta_W}{l} + \gamma_W^2 \quad (1.103)$$

- l'erreur de modélisation  $w_\theta$  satisfasse:

$$\frac{1}{l} \sum_{i=k+1}^{k+l} \bar{w}_\theta(i)^2 \leq \gamma_w^2 \left[ 1 + \frac{2\varepsilon^2}{l} \log \left( \frac{\sigma(k+l)}{\mu^{l-1}\sigma(k+1)} \right) \right] \sup_{i \in [k+1, k+l]} \left\{ \frac{(s_\mu(i) + \frac{1}{\gamma_w} \beta_w(i))^2}{\sigma(i)^2} \right\} \quad (1.104)$$

alors:

- $\hat{\theta}(k)$  appartenant au compact  $\underline{\mathcal{T}}(k)$ , "l'admissibilité" sera vérifiée si ce compact est contenu dans le domaine de régularité  $\Omega$ . Cependant, ceci restreint le domaine où l'on peut prendre la suite de comparaison  $\theta$ . Une méthode, moins contraignante mais plus complexe que la projection, a été proposée par de Larminat et Raynaud [13] pour satisfaire la contrainte  $\hat{\theta}(k) \in \Omega$ .

- La suite  $L_\theta$  étant bornée, (1.98) nous donne pour tout  $k$  et  $l$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \sum_{i=k+1}^{k+l} \bar{e}(i)^2 &\leq \frac{\beta_e}{l} + \frac{\Gamma_a^2}{\Gamma_q} \Gamma_W \gamma_W^2 + \\ &+ \Gamma_a^2 \gamma_w^2 \left[ 1 + \frac{2\varepsilon^2}{l} \log \left( \frac{\sigma(k+l)}{\mu^{l-1}\sigma(k+1)} \right) \right] \sup_{i \in [k+1, k+l]} \left\{ \frac{(s_\mu(i) + \frac{1}{\gamma_w} \beta_w(i))^2}{\sigma(i)^2} \right\} \end{aligned} \quad (1.105)$$

Donc, pour les intervalles de temps où  $\sigma$  est grand mais ne croît pas plus vite qu'exponentiellement:

$$\sigma(k+1) \leq c\sigma(k) \quad (1.106)$$

la moyenne de  $\bar{\varepsilon}^2$  est proportionnelle à celle de l'erreur de modèle d'instationnarité  $\gamma_W^2$  plus celle de l'erreur de modélisation  $\gamma_w^2(1 + 2\varepsilon^2 \log(\frac{\varepsilon}{\mu}))$ , les facteurs de proportionnalité ne dépendant que des paramètres de la loi d'adaptation. La propriété de "petitesse" sera donc vérifiée en moyenne [20], [21], [22], si il existe un modèle linéaire peu instationnaire qui la satisfait (voir la Propriété 1.3).

- De la même façon et dans les mêmes conditions, la propriété "lentement" (1.10) résulte de (1.99):

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \sum_{i=k+1}^{k+l} \|\hat{\theta}(i) - \hat{\theta}(i-1)\|^2 &\leq \frac{\beta_\theta}{l} + \Gamma_\theta \Gamma_W \gamma_W^2 + \\ &+ \Gamma_q \Gamma_\theta \gamma_w^2 \left[ 1 + \frac{2\varepsilon^2}{l} \log \left( \frac{\sigma(k+l)}{\mu^{l-1}\sigma(k+1)} \right) \right] \sup_{i \in [k+1, k+l]} \left\{ \frac{(s_\mu(i) + \frac{1}{\gamma_w} \beta_w(i))^2}{\sigma(i)^2} \right\} \end{aligned} \quad (1.107)$$

Un autre renseignement important, donné par (1.98), est que, non seulement en moyenne mais aussi "périodiquement", l'erreur  $\bar{\varepsilon}$  doit être proportionnelle à  $\|W_\theta\|$  et  $\bar{w}$  [30]. En effet, si pour une constante strictement positive  $\delta$  et tout  $i$  dans  $[k+1, k+K]$ ,  $L_\theta$  vérifie:

$$L_\theta(i-1) - L_\theta(i) > \delta \quad (1.108)$$

en sommant en  $i$  et en notant  $\Lambda_\theta$  la borne supérieure de  $L_\theta$ , on obtient une majoration de  $K$ :

$$\Lambda_\theta \geq L_\theta(k) - L_\theta(k+K) > K\delta \quad (1.109)$$

Donc, pour au moins un entier  $i$  dans tout intervalle  $[k+1, k+\frac{\Lambda_\theta}{\delta}]$ , on a:

$$\bar{\varepsilon}(i) \leq \frac{\Gamma_\theta^2}{q} (\delta + \Gamma_W \|W_\theta(i)\|) + \Gamma_q^2 \bar{w}_\theta(i)^2 \quad (1.110)$$

On en conclut que, si il existe une suite de comparaison telle que les suites  $\|W_\theta\|$  et  $|\bar{w}_\theta|$  sont "petites",  $\bar{\varepsilon}$  est "périodiquement" "petite". De là, nous pressentons que toute solution qui, bien que bornée, présente de grandes amplitudes est nécessairement oscillatoire. Cette conjecture est démontrée dans un cas simple pour le contrôleur réponse pile adaptatif dans [15] (voir aussi le deuxième chapitre de ce mémoire).

**Exemple:** La Propriété 1.4 nous donne une solution pour remédier au problème observé pour le contrôleur réponse pile adaptatif. Sa version robustifiée est (le polynôme  $S$  est choisi égal à 1):

$$\left. \begin{aligned} \hat{\theta}_+(k) &= \hat{\theta}(k) + \frac{y(k)(y(k+1) - u(k) - \hat{\theta}(k)y(k))}{\sigma(k+1)^2 + y(k)^2} \\ \hat{\theta}(k+1) &= \theta_0 + \min \left\{ 1, \frac{R}{|\hat{\theta}_+(k) - \theta_0|} \right\} (\hat{\theta}_+(k) - \theta_0) \\ u(k) &= -\hat{\theta}(k)y(k) + r(k) \end{aligned} \right\} \quad (1.111)$$

Dans ce cas, on obtient:

$$\Gamma_a^2 \leq 1 + \sup_k \left\{ \frac{y(k)^2}{\sigma(k+1)^2} \right\}, \quad \Gamma_q \leq 1, \quad \Gamma_\theta \leq 2 \quad (1.112)$$

### 1.3.4 Application à une paramétrisation explicite

Dans le cas d'une paramétrisation explicite, un modèle instationnaire est obtenu:

$$(\widehat{A_m}(k)S, -\widehat{B_m}(k)) = W_t - (\hat{\theta}(k)^t P + Q)V_t \quad (1.113)$$

avec  $\hat{\theta}$ , la suite donnée par l'adaptation,  $P$ ,  $Q$ ,  $W_t$  et  $V_t$  donnés par les équations (1.45) et (1.46) de la paramétrisation explicite. Notant  $\widehat{d_m}$ , l'erreur de modélisation qui lui est associée:

$$\widehat{d_m}(k) = \widehat{A_m}(k, q^{-1})S(q^{-1})y(k) - \widehat{B_m}(k, q^{-1})u(k-1) \quad (1.114)$$

on a:

$$N(q^{-1})\widehat{d_m}(k) = \det\{U(q^{-1})\}e(k) + \delta(k) \quad (1.115)$$

avec:

$$\begin{aligned} \delta(k) &= \hat{\theta}(k)^t [\det\{U(q^{-1})\}Z(k)] - \det\{U(q^{-1})\}[\hat{\theta}(k-1)^t Z(k)] + \\ &\quad + N(q^{-1})[\hat{\theta}(k)^t Y(k)] - \hat{\theta}(k)^t [N(q^{-1})Y(k)] \end{aligned} \quad (1.116)$$

en posant:

$$Y(k) = PV_t(q^{-1}) \begin{pmatrix} y(k) \\ u(k-1) \end{pmatrix}, \quad \det\{U(q^{-1})\}Z(k) = N(q^{-1})Y(k) \quad (1.117)$$

On vérifie facilement qu'il existe un entier  $d$  et une constante  $\Gamma_f$ , ne dépendant que de  $U$  et  $N$ , tels que:

$$|\delta(k)| \leq \Gamma_f \sum_{i=0}^d \|\widehat{\theta}(k-i) - \widehat{\theta}(k-i-1)\| \sum_{j=i}^d (\|Y(k-j)\| + \|Z(k-j)\|) \quad (1.118)$$

Nous remarquons que,  $U$  et  $N$  ayant tous leurs zéros dans le disque ouvert de rayon  $\mu$ , il existe deux constantes  $\Gamma_U$  et  $\Gamma_N$  ne dépendant que de  $U$  et  $N$  et deux suites  $\mu$ -bornées  $\beta_U$  et  $\beta_N$  ne dépendant que de  $U$ ,  $N$  et des conditions initiales de  $Y$  et  $Z$  telles que:

$$\Gamma_U \mu^k \|Y\|_{\mu,k} - \beta_U(k) \leq \mu^k \|Z\|_{\mu,k} \leq \Gamma_N \mu^k \|Y\|_{\mu,k} + \beta_N(k) \quad (1.119)$$

De plus,  $Y(k)$  n'étant qu'une combinaison linéaire de  $y(k-1), \dots, y(k-n_A), u(k-1), \dots, u(k-n_B)$ , il existe une constante  $\Gamma$  ne dépendant que de  $n_A, n_B, \mu, P, N$  et  $U$  et une suite  $\mu$ -exponentiellement décroissante  $\beta$ , ne dépendant que de  $n_A, n_B, \mu, P, N, U$  et des conditions initiales de  $Y$  et  $Z$ , telles que:

$$\sup\{\|Y(k)\|, \|Z(k)\|\} \leq \Gamma s_\mu(k) + \beta(k) \quad (1.120)$$

On peut donc simplifier (1.118) en:

$$|\delta(k)| \leq \Gamma_f \sum_{i=0}^d \|\widehat{\theta}(k-i) - \widehat{\theta}(k-i-1)\| s_\mu(k-i) + \beta_f(k) \quad (1.121)$$

où maintenant,  $\Gamma_f$  ne dépend que de  $n_A, n_B, \mu, P, N$  et  $U$  et la suite  $\beta_f$  est  $\mu$ -exponentiellement décroissante, dépendant en plus des conditions initiales de  $Y$  et  $Z$  et de  $\sup_k \{\|\widehat{\theta}(k)\|\}$ .

Il nous reste à préciser  $\sigma$ . Rappelons les contraintes:

1. On veut que la suite  $Z/\sigma$  soit bornée.
2. Pour pouvoir utiliser les Propriétés 1.2 et 1.3 dans les inégalités (1.98) et (1.99), il faut que la suite  $s_\mu/\sigma$  soit bornée.
3. Pour pouvoir utiliser le Lemme 1.2, il faut que la suite  $\mu^{-k}\sigma(k)$  soit croissante.

Un exemple de suite  $\sigma$  satisfaisant ces conditions est donné par:

$$\sigma(k)^2 = \sup\{1, \varsigma(k)\} \quad (1.122)$$

avec:

$$\varsigma(k) = s_\mu(k)^2 \quad (1.123)$$

On peut aussi prendre soit:

$$\varsigma(k) = \mu^2 \varsigma(k-1) + Y(k)^t Y(k) , \quad \varsigma(0) = 0 \quad (1.124)$$

soit

$$\varsigma(k) = \mu^2 \varsigma(k-1) + Z(k)^t Z(k) , \quad \varsigma(0) = 0 \quad (1.125)$$

dans le cas où la matrice  $P$  de la paramétrisation explicite est telle que:

$$s_\mu(k) \leq \Gamma_P \mu^k \|Y\|_{\mu,k} \quad (1.126)$$

$\Gamma_P$  ne dépendant que de  $\mu$ ,  $n_A$ ,  $n_B$  et  $P$ . Ces choix déterminent définitivement la valeur de  $\mu$  jusqu'ici borne supérieure des pôles des filtres impliqués dans le système de mesure et dans la paramétrisation. Par ailleurs, on a:

$$s_\mu(k) \leq \Gamma_p \sigma(k) \quad (1.127)$$

$\Gamma_p$  ne dépendant que de  $N$ ,  $U$ ,  $\mu$ ,  $n_A$ ,  $n_B$  et  $P$

**Exemple:** Pour le contrôleur réponse pile adaptatif robustifié, nous prenons:

$$\varsigma(k) = \mu^2 \varsigma(k-1) + \gamma_1 (u(k-1)^2 + y(k-1)^2) \quad (1.128)$$

$$\sigma(k)^2 = \sup\{1, \varsigma(k)\} \quad (1.129)$$

Avec (1.112), on obtient alors:

$$\Gamma_a^2 = \frac{1 + \gamma_1}{\gamma_1}, \quad \Gamma_q = 1, \quad \Gamma_\theta = 2 \quad (1.130)$$

## 1.4 Commande liée à une paramétrisation explicite

### 1.4.1 Remarques sur la synthèse du contrôleur

En cas de paramétrisation explicite, l'adaptation nous fournit un modèle instationnaire du système:

$$\widehat{A_m}(k, q^{-1}) S(q^{-1}) y(k) = \widehat{B_m}(k, q^{-1}) u(k-1) + \widehat{d_m}(k) \quad (1.131)$$

Le terme de perturbation  $\widehat{d_m}$  vérifie (1.115) où  $e$  satisfait (1.98) et  $\delta$  satisfait (1.121). Par ailleurs, nous savons que, si il existe une suite de comparaison ayant des erreurs de modèle d'instationnarité et de modélisation "petites", l'instationnarité de  $\widehat{A_m}$  et  $\widehat{B_m}$  est petite en moyenne (Propriété 1.4). Il s'en suit que, mis à part la commande quadratique traitée par Samson [31], les lois de commande, généralement proposées pour le système (1.131), sont obtenues en considérant à chaque instant le système comme gelé. On trouvera dans [21],

Samson [31] et Goodwin et Sin [7] la description non reproduite ici de divers algorithmes obtenus selon cette approche. Par ailleurs, nous observons que la théorie des systèmes linéaires instationnaires est très avancée et Tsakalis et Ioannou [32] et [33] ont montré l'intérêt de son application dans le contexte adaptatif. Ainsi, considérons une représentation d'état de (1.131):

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(k+1) &= \mathcal{F}(k)\mathcal{X}(k) + \mathcal{G}_1(k)u(k) + \mathcal{G}_2(k)\varpi(k) \\ y(k) &= \mathcal{H}_1(k)\mathcal{X}(k) + \mathcal{H}_2(k)\omega(k)\end{aligned}\quad (1.132)$$

où les suites  $\varpi$  et  $\omega$  sont déduites de  $\widehat{d}_m$ .

#### Lemme 1.4

(Extension de Ikeda et al. [8, Théorème 3] et Ilchman et al. [9, Théorème 6.4])

1- Supposons les suites  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}_1$  bornées. Si pour un entier  $l$  et  $l$  suites  $R_i$  bornées données, il existe  $l+1$  suites bornées  $\mathcal{Y}_i$  vérifiant:

$$\sum_{i=0}^l \left[ \prod_{j=i+1}^l \mathcal{F}(k+j) \right] [\mathcal{G}(k+i)\mathcal{Y}_i(k) - R_i(k)] = \prod_{i=0}^l \mathcal{F}(k+i) \quad R_l = 0 \quad (1.133)$$

il existe des matrices polynomiales instationnaires  $C(k)$  et  $D(k)$ , de degré au plus  $l$ , à coefficients bornés, satisfaisant:

$$[I - q^{-1}\mathcal{F}(k)] \circ C(k, q^{-1}) + q^{-1}\mathcal{G}_1(k) \circ D(k, q^{-1}) = I + \sum_{i=1}^l q^{-i}R_{i-1}(k) \quad (1.134)$$

En particulier, on peut prendre:

$$C(k, q^{-1}) = \sum_{i=0}^l q^{-i}\Psi_i(k) - \sum_{i=0}^l \left[ \sum_{j=0}^{l-i-1} q^{-j} \prod_{n=0}^{j-1} \mathcal{F}(k+n) \right] \circ q^{-1}\mathcal{G}_1(k) \circ q^{-i}\mathcal{Y}_i(k) \quad (1.135)$$

$$D(k, q^{-1}) = \sum_{i=0}^l q^{-i}\mathcal{Y}_i(k) \quad (1.136)$$

avec:

$$\Psi_{i+1}(k) = \mathcal{F}(k+i)\Psi_i(k) + R_i(k) \quad \Psi_0 = I \quad (1.137)$$

2- Supposons les suites  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{F}^{-1}$  bornées. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1 la paire  $[\mathcal{F}, \mathcal{G}_1]$  est uniformément complètement stabilisable, i.e., pour tout réel strictement positif  $\lambda$ , il existe une suite  $\mathcal{C}$  bornée et une constante positive  $a$  telles que pour tous les entiers  $k$  et  $j$ :

$$\left\| \prod_{i=k}^{k+j} [\mathcal{F}(i) - \mathcal{G}_1(i)\mathcal{C}(i)] \right\| \leq a\lambda^j \quad (1.138)$$

2. Il existe un entier  $l$  et un réel strictement positif  $\nu$  tels que, pour tout  $k$ :

$$\sum_{i=k}^{k+l} \left[ \prod_{j=i+1}^{k+l} \mathcal{F}(j) \mathcal{G}_1(i) \right] \left[ \prod_{j=i+1}^{k+l} \mathcal{F}(j) \mathcal{G}_1(i) \right]^t \geq \nu I \quad (1.139)$$

De plus, lorsque (1.139) est vérifiée, une suite  $\mathcal{C}$  satisfaisant (1.138) est donnée par:

$$\mathcal{C}(k) = \eta(k) \mathcal{G}_1(k)^t P(k+1)^{-1} \mathcal{F}(k) \quad (1.140)$$

avec:

$$\eta(k) \left[ 2 - \eta(k) \mathcal{G}_1(k)^t P(k+1)^{-1} \mathcal{G}_1(k) \right] \geq \frac{1}{\lambda^2 + \mathcal{G}_1(k)^t P(k+1)^{-1} \mathcal{G}_1(k)} \quad (1.141)$$

et:

$$P(k) = \sum_{i=k}^{k+l} \lambda^{2(i-k)} \left[ \prod_{j=i}^k \mathcal{F}(j)^{-1} \mathcal{G}_1(i) \right] \left[ \prod_{j=i}^k \mathcal{F}(j)^{-1} \mathcal{G}_1(i) \right]^t \quad (1.142)$$

Ce résultat n'est qu'un exemple de ce que l'on peut trouver dans la littérature. Ainsi Poolla et Khargonekar [19, Théorème 4.4] donnent l'équivalent du point 1 et Anderson et Moore [1, Corollaires 3.4 et 5.4] l'équivalent du point 2 pour le cas moins restrictif de la stabilisabilité uniforme.

Discutons l'intérêt de ce Lemme en l'appliquant à une représentation d'état de (1.131) parmi les plus usitées:

$$\mathcal{F}(k) = \begin{pmatrix} -\hat{a}_1(k) & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ -\hat{a}_2(k+1) & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\hat{a}_{n-1}(k+n-2) & 0 & \ddots & & 0 & 1 \\ -\hat{a}_n(k+n-1) & 0 & \ddots & & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \mathcal{H}_1(k) &= (1 \ 0 \ \dots \ 0) \\ \mathcal{H}_2(k) &= 1 \end{aligned} \quad (1.143)$$

$$\mathcal{G}_1(k) = \begin{pmatrix} \hat{b}_0(k) \\ \hat{b}_1(k+1) \\ \vdots \\ \hat{b}_{n-2}(k+n-2) \\ \hat{b}_{n-1}(k+n-1) \end{pmatrix} \quad \mathcal{G}_2(k) = \begin{pmatrix} -\hat{a}_1(k) \\ -\hat{a}_2(k+1) \\ \vdots \\ -\hat{a}_{n-1}(k+n-2) \\ -\hat{a}_n(k+n-1) \end{pmatrix} \quad (1.144)$$

où :

$$n = \sup\{n_A, n_B + 1\} \quad (1.145)$$

et:

$$\mathcal{X}(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{a}_2(k+1)q^{-1} \\ \vdots \\ -\hat{a}_{n-1}(k+n-2)q^{-1} \\ -\hat{a}_n(k+n-1)q^{-1} \end{pmatrix} y(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{b}_1(k+1)q^{-1} \\ \vdots \\ \hat{b}_{n-2}(k+n-2)q^{-1} \\ \hat{b}_{n-1}(k+n-1)q^{-1} \end{pmatrix} u(k) + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \omega(k) \quad (1.146)$$

D'après Poolla et Khargonekar [18, Théorème 3.9], cette représentation, étant équivalente à (1.131), est observable et a les mêmes propriétés de stabilisabilité. Son écriture à l'instant  $k$  requiert la connaissance des suites  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  à l'instant  $k+n-1$ . De plus les conditions du Lemme 1.4 requièrent la connaissance des suites  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$   $l$  pas en avance où  $l$  est au moins la dimension de l'état. Pour ces raisons, nous prenons pour  $\hat{a}_i(k)$  et  $\hat{b}_i(k)$  les coefficients de  $\widehat{A_m}(k-i-l+1)$  et  $\widehat{B_m}(k-i-l+1)$ . Dans ce cas, les suites  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont bornées (Propriété 1.4) et:

$$N(q^{-1})\omega(k) = \det\{U(q^{-1})\} e(k) + \bar{\delta}(k) , \quad \varpi = \omega \quad (1.147)$$

où  $\bar{\delta}$  satisfait (1.121) avec  $\Gamma_f$  et  $\beta_f$  dépendant en plus de  $l$ . Ce choix d'utiliser des valeurs passées du vecteur des paramètres est cohérent avec l'hypothèse d'un vecteur  $\theta$  constant pour le modèle. Si le modèle à adapter était supposé instationnaire, on utiliserait la connaissance de l'instationnarité pour prédire (Tsakalis et Ioannou [33]).

Si (1.133) est satisfaite avec par exemple toutes les matrices  $R_i$  nulles, on peut stabiliser le système (1.132) par le feedback dynamique suivant, avec  $C(k)$  et  $D(k)$  données par (1.135) et (1.136):

$$\left. \begin{aligned} C(k, q^{-1})\Xi(k) &= \mathcal{X}(k) \\ u(k) &= -D(k, q^{-1})\Xi(k) + u_d(k) \end{aligned} \right\} \quad (1.148)$$

où  $u_d$  est la commande du système bouclé, introduite en supplément de la sortie désirée  $y_d$  qui fait partie du système de mesure (1.33). Elle peut par exemple contenir un terme de feed forward puisque la perturbation agissant sur le système (1.131) est fournie par l'adaptation ([21], Samson [31], Giri et al. [5]). D'après Poolla et Khargonekar [19, Théorème 4.4], il existe aussi un feedback d'état stabilisant (1.132) dans ce cas.

Pour satisfaire (1.133), il suffit que (1.139) soit vérifiée et dans ce cas les suites  $R_i$  peuvent être choisies arbitrairement. Cette contrainte nous donne un critère de choix en ligne des paramètres de l'adaptation  $a, b, \dots$ , pour assurer que le modèle fourni puisse être uniformément complètement stabilisable. Par exemple dans le cas  $n = 2$  et choisissant  $l = 2$  (choix le plus contraignant), (1.139) sera vérifiée si:

$$\left[ \hat{b}_1(k+2)\hat{b}_1(k+1) - \hat{a}_1(k+1)\hat{b}_1(k+2)\hat{b}_0(k) + \hat{a}_2(k+2)\hat{b}_0(k+1)\hat{b}_0(k) \right]^2 \geq \nu^2 \quad (1.149)$$

C'est une forme quadratique en  $\hat{a}_2(k+2)$  et  $\hat{b}_1(k+2)$  i.e. en les coefficients de  $\hat{\theta}(k)$ . On peut chercher les paramètres de l'adaptation pour maximiser cette forme. Ce critère est beaucoup plus simple que celui obtenu en évaluant, dans (1.149), toutes les suites à l'instant  $k+2$  comme l'imposerait la commandabilité à chaque instant de la paire  $[\mathcal{F}(k), \mathcal{G}_1(k)]$  invoquée par exemple par de Larminat et Raynaud [13]. Il a par contre l'inconvénient d'être instationnaire ce qui rend la méthode, proposée par ces auteurs, difficile à étendre à ce cas.

Si en plus de (1.139), la suite  $|\hat{a}_n|$  (le déterminant de  $\mathcal{F}$ ) est minorée par une valeur strictement positive, (1.140) nous donne un feedback d'état assurant la complète stabilisabilité uniforme de (1.132). Dans ce cas, une loi de commande est obtenue soit par le feedback dynamique (1.148) avec  $\mathcal{X}$  donné par un observateur, soit par un observateur-contrôleur:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{X}}(k+1) &= \mathcal{F}(k)\widehat{\mathcal{X}}(k) + \mathcal{G}_1(k)u(k) + \mathcal{K}(k)[y(k) - \mathcal{H}_1(k)\widehat{\mathcal{X}}(k)] \\ u(k) &= -\mathcal{C}(k)\widehat{\mathcal{X}}(k) + \mathcal{J}(k)u_d(k) \end{aligned} \quad (1.150)$$

où:

- la suite  $\mathcal{K}$  est choisie bornée et telle que (ce qui est toujours possible):

$$\left\| \prod_{i=j+1}^{j+k} [\mathcal{F}(i) - \mathcal{K}(i)\mathcal{H}_1(i)] \right\| \leq a \lambda^k \quad (1.151)$$

- la suite  $\mathcal{C}$  est, par exemple, donnée par (1.140). Nous pouvons vérifier en ligne si son choix est bon puisque:

**Lemme 1.5 (Anderson et Moore [1, Théorème 4.3])** *Les suites  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}_1$  étant bornées, il existe des constantes positives  $a$  et  $\lambda$  avec  $\lambda$  strictement plus petite que 1 telles que, pour tout  $k$  et  $j$ :*

$$\left\| \prod_{i=k}^{k+j} [\mathcal{F}(i) - \mathcal{G}_1(i)\mathcal{C}(i)] \right\| \leq a \lambda^j \quad (1.152)$$

si et seulement si la suite  $P$  définie récursivement ci-dessous est bornée:

$$P(k+1) = [\mathcal{F}(k) - \mathcal{G}_1(k)\mathcal{C}(k)] P(k) [\mathcal{F}(k) - \mathcal{G}_1(k)\mathcal{C}(k)]^t + I \quad (1.153)$$

## 1.4.2 Solutions bornées

Pour établir la bornitude des solutions du système à commander en boucle fermée avec un contrôleur linéaire adaptatif obtenu d'une paramétrisation explicite, nous écrivons une représentation d'état du système (1.131), de son contrôleur (1.148) ou (1.150), par exemple, et de son modèle de perturbation (1.147) (voir des exemples dans [21] et [30]):

$$X(k+1) = F(k)X(k) + G(k)r(k) + \eta(k) \quad (1.154)$$

$$\begin{pmatrix} y(k) \\ u(k) \end{pmatrix} = H(k)X(k+1) \quad (1.155)$$

C'est le système (1.1) avec:

- $r$  une suite bornée, calculée à partir d'une suite de consignes,
- $\eta$  provenant de la perturbation agissant sur le système (1.131) et d'un possible feed-forward dans le contrôleur.

Pour ce système, supposons:

1- il existe deux constantes positives  $f$  et  $\lambda$ ,  $\lambda$  strictement inférieure à 1 et  $f$  supérieure à 1, telles que, pour tous  $k$  et  $j$ :

$$\left\| \prod_{i=k+1}^{k+j} F(i) \right\| \leq f \lambda^j \quad (1.156)$$

2- les suites  $H$  et  $G$  sont bornées:

$$H(k) \leq h, \quad G(k)r(k) \leq g \quad (1.157)$$

3- il existe une constante  $\Gamma_\eta$  et un entier  $d$  tels que:

$$\|\eta(k)\| \leq \Gamma_\eta \sum_{i=k-d}^k \left[ |e(i)| + \|\widehat{\theta}(i) - \widehat{\theta}(i-1)\| s_\mu(i) \right] + \beta_\eta(k) \quad (1.158)$$

où  $\beta_\eta$  est une suite bornée,

4- enfin, il existe des constantes positives:

$$\beta_l, E_l, E_W, E_w, T_l, T_W, T_w, \beta_t, \Gamma_s, \Gamma_p, \mu$$

$\mu$  étant strictement inférieure à 1, et une suite bornée  $\gamma_x$  de limite supérieure  $\Gamma_x$  telles que:

$$\widehat{\theta}(k) \leq \beta_t \quad (1.159)$$

$$\frac{e(k)^2}{\sigma(k)^2} \leq E_l [L(k-1) - L(k)] + E_W^2 \|W(k)\| + E_w^2 \frac{w(k)^2}{\sigma(k)^2} \quad (1.160)$$

$$\|\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)\|^2 \leq T_l [L(k-1) - L(k)] + T_W^2 \|W(k)\| + T_w^2 \frac{w(k)^2}{\sigma(k)^2} \quad (1.161)$$

$$0 \leq L(k) \leq \beta_l \quad (1.162)$$

$$\sup\{1, \mu\sigma(k)\} \leq \sigma(k+1) \leq \mu\sigma(k) + \Gamma_s \|X(k+1)\| + 1 \quad (1.163)$$

$$s_\mu(k+1)^2 = \mu^2 s_\mu(k)^2 + |u(k)|^2 + |y(k)|^2, \quad s_\mu(0) = 0 \quad (1.164)$$

$$s_\mu(k) \leq \Gamma_p \sigma(k) \quad (1.165)$$

$$\|X(k+1)\| \leq \gamma_x(k) \sigma(k) \quad (1.166)$$

### Lemme 1.6

(Extension de [21, Théorème 7] et Transposition de [24, Théorème 2])

*Avec les quatres hypothèses précédentes,*

- Si il existe des constantes  $\beta_W, \gamma_W, \gamma_w, \varepsilon$  et une suite bornée  $\beta_w$  vérifiant:

$$(E_W + \Gamma_p T_W) \gamma_W + \Gamma_p (E_w + \Gamma_p T_w) \sqrt{1 + 2\varepsilon^2 \log \frac{1 + \mu + \Gamma_x \Gamma_s}{\mu}} \gamma_w < \frac{(1-\rho)(\rho-\mu)(\rho-\lambda)^2}{f^2(1+d\rho^{2-d})\Gamma_s \Gamma_l} \quad (1.167)$$

et telles que, pour tous  $k$  et  $l$ :

$$\sum_{i=k+1}^{k+l} \|W(i)\| \leq \beta_W + \gamma_w^2 l \quad (1.168)$$

$$\sum_{i=k+1}^{k+l} \frac{w(i)^2}{\sigma(i)^2} \leq \gamma_w^2 \left[ l + \varepsilon^2 \log \left( \left[ \frac{\sigma(k+l)}{\mu^{l-1}\sigma(k+1)} \right]^2 \right) \right] \sup_{i \in [k+1, k+l]} \left\{ \frac{s_\mu(i)^2 + \frac{\beta_w(i)}{\gamma_w^2}}{\sigma(i)^2} \right\} \quad (1.169)$$

la suite  $X$  est bornée et plus précisément il existe une constante  $x$ , dépendant des  $\limsup$  de  $\beta_\eta$  et  $\beta_w$ , telle que, pour toutes conditions initiales:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|X(k)\| \leq x \quad (1.170)$$

- Si la constante  $g$  est nulle, la suite  $\beta_\eta$  est  $\mu$ -exponentiellement décroissante, la suite  $W$  est sommable,  $\lambda$  est strictement inférieure à  $\mu$  et il existe une suite  $\beta_w$   $\mu$ -bornée et une constante  $\gamma_w$  vérifiant:

$$\frac{\mu^{1-d} f^2 \Gamma_\eta h(d+1) \sqrt{2(E_w^2 + \Gamma_p^2 T_w^2)}}{(\mu - \lambda)^2} \gamma_w < 1 \quad (1.171)$$

et telles que:

$$\mu^k \|w\|_{\mu,k} \leq \beta_w(k) + \gamma_w s_\mu(k) \quad (1.172)$$

la suite  $X$  est de carrés sommables.

Ce résultat technique constitue la clef de voûte de notre étude. Il n'est cependant que qualitatif. La contrainte (1.167) est très restrictive et la particularisation des lois, aussi bien d'adaptation que de commande, pourrait permettre d'obtenir une condition plus précise.

Suivant l'argumentation ébauchée en Introduction, ce Lemme nous permet, avec les différents éléments que nous avons établis, d'énoncer des conditions très générales pour lesquelles la bornitude de toutes les solutions peut être établie. Étudions donc ses hypothèses:

- D'après le Lemme 1.4 par exemple, (1.156) est satisfaite si le modèle adapté vérifie une condition de stabilisabilité complète uniforme. La façon de satisfaire cette condition a été l'objet de nombreuses études:
  - de Larminat et Raynaud [13] proposent deux estimateurs en parallèle, l'un non modifié, l'autre, lié au premier, fournissant le modèle et pouvant subir des sauts pour s'éloigner d'une non stabilisabilité.
  - Middleton et al. [17] proposent plusieurs estimateurs en parallèle, chacun des vecteurs  $\hat{\theta}$  correspondant étant contraint à rester dans un convexe où la condition est satisfaite.
  - Giri et al. [5] ajoutent à la commande un terme proportionnel à  $\sigma$  et gèle le contrôleur sur un intervalle de temps. Ceci assure une détectabilité uniforme de (1.62) et permet la convergence du vecteur des paramètres adapté vers ceux d'un modèle supposé stabilisable.
- (1.158) résulte par exemple de (1.121) et (1.147).
- (1.159) à (1.162) sont données par la Propriété 1.4.
- (1.163) vient de (1.155) et de la définition de  $\sigma$  (1.122).
- (1.164) est la définition de  $s_\mu$ .
- (1.165) n'est rien d'autre que (1.127).
- D'après le Lemme 1.2 et le point 2 de la Propriété 1.3, (1.168) et (1.169) seront satisfaites si il existe une suite de comparaison  $\theta$ , restant dans la suite de compacts  $\underline{Y}$  de la Propriété 1.4, à laquelle est associée un modèle:

$$(A_m(k)S, -B_m(k)) = W_t - (\theta(k)^t P + Q) V_t U \quad (1.173)$$

pour lequel l'erreur de modélisation:

$$d_m(k) = A_m(k, q^{-1})S(q^{-1})y(k) - B_m(k, q^{-1})u(k-1) \quad (1.174)$$

vérifie

soit:

$$\mu^k \|d_m\|_{\mu,k} \leq \beta_\infty(k) + \gamma_\infty s_\mu(k) \quad (1.175)$$

soit:

$$|d_m(k)| \leq \beta_2(k) + \gamma_2 s_\mu(k) \quad (1.176)$$

(1.167) impose alors que la vitesse  $\theta(k) - \theta(k-1)$  de la suite de comparaison soit petite en moyenne et que soit la constante  $\gamma_\infty$  soit la constante  $\gamma_2$  soit petite.

- D'après les des Propriétés 1.2 et 1.3, (1.171) et (1.172) sont satisfaites si la suite  $r$  est nulle, la suite de comparaison, mentionnée ci-dessus, est convergente au sens  $l_1$  et si un modèle interne peut être choisi dans le système de mesure pour annihiler tous les signaux exogènes.

Pour en finir, il nous reste (1.157) et (1.166). (1.166) est la condition d'observabilité de la norme de  $X$  à partir de  $u$  et  $y$  que nous avons mentionnée pour établir la propriété de "petitesse" (1.14) à partir de la propriété (1.24). Considérons l'exemple du contrôleur (1.150). Avec (1.132) et (1.147),  $X$  dans (1.154) est donné par:

$$X(k) = \begin{pmatrix} \mathcal{X}(k) \\ \mathcal{X}(k) - \widehat{\mathcal{X}}(k) \\ \omega(k-1) \\ \vdots \\ \omega(k-n_N) \\ u(k-1) \\ y(k-1) \end{pmatrix} \quad (1.177)$$

$n_N$  étant le degré du polynôme  $N$ . La suite  $H$  est donc trivialement bornée. Par ailleurs, avec  $\theta$  la suite de comparaison introduite au dessus et  $(A_m(k)S, B_m(k))$  le modèle associé,  $\mathcal{X}$  vérifie (1.146) avec:

$$y(k) = [(1 - A_m(k, q^{-1})S(q^{-1}))q]y(k-1) + B_m(k, q^{-1})u(k-1) + d_m(k) \quad (1.178)$$

De plus,  $\omega$  vérifie (1.147) et on a:

$$\mathcal{X}(k+1) - \widehat{\mathcal{X}}(k+1) = (\mathcal{F}(k) - \mathcal{K}(k)\mathcal{H}_1(k))(\mathcal{X}(k) - \widehat{\mathcal{X}}(k)) + (\mathcal{K}(k)\mathcal{H}_2(k) + \mathcal{G}_2(k))\omega(k) \quad (1.179)$$

$$e(k) = w_\theta(k) + (\theta(k-1) - \widehat{\theta}(k-1))^t Z(k) \quad (1.180)$$

Les suites  $\theta$  et  $\widehat{\theta}$  étant bornées, avec le point 2 de la Propriété 1.3, on peut établir: si:

- la suite  $\mathcal{K}$  est choisie pour que  $\lambda$  soit strictement inférieure à  $\mu$  dans (1.151) (toujours possible),
- $d_m$  vérifie (1.176) ( $\gamma_2$  non nécessairement petit)

il existe une constante  $\gamma$  telle que:

$$\|X(k)\| \leq \beta(k) + \gamma s_\mu(k) \quad (1.181)$$

où  $\beta$  est une suite bornée dépendant des conditions initiales de  $y$  et  $u$ , mais de façon  $\mu$ -exponentiellement décroissante s'il en est de même de  $\beta_2$  pour  $d_m$  (voir Propriétés 1.1 et 1.2). L'inégalité (1.166) résulte alors de (1.154) avec (1.157), (1.158) et (1.165).

L'application du Lemme 1.6 nous donne par exemple la réponse suivante à la question de robustesse posée en Introduction:

**Propriété 1.5** *Il existe des contrôleurs linéaires adaptatifs donnant des solutions bornées lorsqu'on les place en boucle fermée avec un système dont les entrées-sorties mesurées satisfont, avec  $d$  une suite bornée:*

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-1) + d(k) \quad (1.182)$$

*A et B étant des polynômes tels qu'on puisse trouver  $\frac{P_m}{P}$  dans  $\mathcal{S}(\mu)$  et  $A_m$  et  $B_m$ , des polynômes de degré  $n_A$  et  $n_B$  dont les coefficients sont arbitraires dans la préimage par la paramétrisation d'un compact  $\Upsilon$ , pour satisfaire soit:*

$$\sup_{|z|=\mu} \left\{ \mu^2 |A(z^{-1}) \frac{P_m(z^{-1})}{P(z^{-1})} - A_m(z^{-1})|^2 + |B(z^{-1}) \frac{P_m(z^{-1})}{P(z^{-1})} - B_m(z^{-1})|^2 \right\} \leq \gamma_\infty^2 \quad (1.183)$$

*soit:*

$$\int_{|z|=\mu} \left( \mu^2 |A(z^{-1}) \frac{P_m(z^{-1})}{P(z^{-1})} - A_m(z^{-1})|^2 + |B(z^{-1}) \frac{P_m(z^{-1})}{P(z^{-1})} - B_m(z^{-1})|^2 \right) \frac{dz}{2i\pi z} \leq \gamma_2^2 \quad (1.184)$$

*le compact  $\Upsilon$ , les entiers  $n_A$  et  $n_B$ , le nombre réel positif  $\mu$ , strictement plus petit que 1, et les deux constantes positives  $\gamma_2$  et  $\gamma_\infty$  étant calculés à partir des paramètres du contrôleur.*

*De plus, si la suite  $d$  est nulle et le signal de consigne est annihilé par un modèle interne, l'erreur de poursuite est de carrés sommables.*

(1.183) et (1.184) caractérisent le type de perturbations autorisées sans perdre la borne tude des solutions. D'après la Section 1.2, cette propriété est donc robuste à tous les effets non modélisés qui peuvent être introduits par un système linéaire sauf des presque non observabilités qui seraient associées à des valeurs propres de module supérieure à  $\mu$ . Bien que non écrit dans cette Propriété, le Lemme 1.6 permet aussi d'établir la robustesse vis à vis d'instationnarités et de certaines non linéarités.

**Exemple:** Pour notre contrôleur réponse pile adaptatif robustifié, on a d'après (1.112)

$$E_w^2 = \frac{1 + \gamma_1}{\gamma_1}, \quad T_w^2 = 2, \quad \Gamma_p = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}}, \quad \Gamma_s = \sqrt{\gamma_1} \quad (1.185)$$

Et, avec (1.7), on remarque que tous les termes  $\hat{\theta}(i) - \hat{\theta}(i-1)$  de (1.158) ne sont pas présents dans ce cas et:

$$\lambda = 0, \quad \Gamma_\eta = R + |\theta_0|, \quad d = 0, \quad f = 1 \quad (1.186)$$

Le Lemme 1.6 nous indique donc que notre contrôleur donnera des solutions bornées si on l'utilise avec un système dont les entrées-sorties mesurées satisfont, avec  $d$  une suite bornée:

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-1) + d(k) \quad (1.187)$$

les polynômes  $A$  et  $B$  vérifiant:

$$\oint_{|z|=\mu} \left( \mu^2 |A(z^{-1}) \frac{P_m(z^{-1})}{P(z^{-1})} - (1 + \theta z^{-1})|^2 + |B(z^{-1}) \frac{P_m(z^{-1})}{P(z^{-1})} - 1|^2 \right) \frac{dz}{2i\pi z} < \quad (1.188)$$

$$< \left[ \frac{1 - \mu^2}{4(R + |\theta_0|)} \right]^2 \frac{\gamma_1}{1 + \gamma_1}$$

avec  $\theta$  dans  $[\theta_0 - R, R + \theta_0]$  et  $\frac{P_m}{P}$  dans  $S(\mu)$

## 1.5 Commande liée à une paramétrisation implicite

Considérons l'exemple d'une commande par

### 1.5.1 Modèle de référence pour système à modèle inverse instable

Choisissons  $B, J, L, M$  et  $R$  des polynômes, paramètres du contrôleur adaptatif, tels que:

- $R - z^{-1}BL$  soit divisible par  $S$  (donné par le système de mesure).
- $R$  et  $M$  soient unitaires.
- $M(z^{-1})$  ait tous ses zéros dans le disque ouvert de rayon  $\mu$ .

Choisissons aussi deux entiers  $n_C$  et  $n_D$  et posons:

$$Y_y = \begin{pmatrix} S \\ \vdots \\ q^{-n_D} S \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_u = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ q^{n_C} \end{pmatrix}, \quad Y(k+1) = Y_y(q^{-1})y(k) + Y_u(q^{-1})u(k) \quad (1.189)$$

Suivant [28] et Gawthrop [4], nous définissons une paramétrisation implicite en prenant le triplet  $(U, V, W)$  tel que:

$$\begin{pmatrix} W \\ V \end{pmatrix} U^{-1} = \frac{M}{\det\{U\}} \begin{pmatrix} R - q^{-1}\mathcal{B}L & -J\mathcal{B} \\ q^{-1}\mathcal{B}Y_y & \mathcal{B}Y_u \end{pmatrix} \quad (1.190)$$

Pour  $\sigma$ , nous prenons simplement la suite (voir [24] pour un autre choix):

$$\sigma(k) = \sup\{1, s_\mu(k)\} \quad (1.191)$$

Avec  $\hat{\theta}$  la suite donnée par la loi d'adaptation étudiée à la Propriété 1.4, la commande est obtenue en résolvant en  $u(k)$ , pour chaque  $k$ , l'équation suivante:

$$\hat{\theta}(k)^t Y(k+1) + L(q^{-1})y(k) + J(q^{-1})u(k) = r(k) - E(k, q^{-1})\omega(k) \quad (1.192)$$

où

- $r$  est la commande du système (mesuré) bouclé,
- $E(k)$  est un polynôme à coefficients bornés indépendamment des solutions, obtenu par exemple en minimisant sous cette contrainte un critère sur  $[1 - q^{-1}\mathcal{B}(q^{-1}) \circ E(k, q^{-1})]\omega(k)$  (voir plus loin),
- $\omega(k) = R(q^{-1})y(k) - q^{-1}\mathcal{B}(q^{-1})[\hat{\theta}(k)^t Y(k+1) + L(q^{-1})y(k) + J(q^{-1})u(k)]$  (1.193)

Enfin, les compacts convexes  $\underline{Y}(k)$  sont choisis de sorte que, pour chaque  $k$  et chaque  $\theta$  dans  $\underline{Y}(k)$ , les polynômes  $\theta^t Y_u + J$  et  $z^{-1}\mathcal{B}$  soient uniformément strictement premiers entre eux.

Indépendamment du système auquel il est appliqué, ce contrôleur a les propriétés suivantes:

- L'erreur  $\omega$  est reliée à l'erreur d'adaptation par:

$$M(q^{-1})\omega(k) = \det\{U(q^{-1})\} e(k) + \delta(k) \quad (1.194)$$

avec:

$$\delta(k) = \det\{U(q^{-1})\}[\hat{\theta}(k-1)^t Z(k)] - M(q^{-1})\mathcal{B}(q^{-1})[\hat{\theta}(k-1)^t Y(k)] \quad (1.195)$$

$$= \det\{U(q^{-1})\}[\hat{\theta}(k-1)^t Z(k)] - \hat{\theta}(k-1)^t[\det\{U(q^{-1})\}Z(k)] + \\ + \hat{\theta}(k-1)^t[M(q^{-1})\mathcal{B}(q^{-1})Y(k)] - M(q^{-1})\mathcal{B}(q^{-1})[\hat{\theta}(k-1)^t Y(k)] \quad (1.196)$$

De plus, utilisant les définitions de  $Y$  et  $Z$ , comme en (1.121), il existe une constante  $\Gamma_f$ , un entier  $d$  et une suite  $\beta_f$ , ne dépendant que de  $n_C$ ,  $n_D$ ,  $\mu$ ,  $S$ ,  $M$ ,  $\mathcal{B}$  et  $U$ , la suite  $\beta_f$  étant  $\mu$ -exponentiellement décroissante et dépendant en plus des conditions initiales de  $Y$  et  $Z$  et de  $\sup_k\{\|\hat{\theta}(k)\|\}$ , tels que:

$$|\delta(k)| \leq \Gamma_f \sum_{i=1}^d \|\hat{\theta}(k-i) - \hat{\theta}(k-i-1)\| s_\mu(k-i) + \beta_f(k) \quad (1.197)$$

- La sortie vérifie:

$$R(q^{-1})y(k) = [1 - q^{-1}\mathcal{B}(q^{-1}) \circ E(k, q^{-1})] \omega(k) + q^{-1}\mathcal{B}(q^{-1})r(k) \quad (1.198)$$

ceci expliquant le choix de  $E(k)$ .

### 1.5.2 Solutions bornées: résultat qualitatif

Soit  $d_m$  l'erreur de modélisation donnée par un modèle instationnaire  $(A_m(k), B_m(k)\mathcal{B})$ :

$$d_m(k) = A_m(k, q^{-1})y(k) - B_m(k, q^{-1})\mathcal{B}(q^{-1})u(k-1) \quad (1.199)$$

où le polynôme  $B_m(k)$  est 1-exponentiellement stable. Par construction du contrôleur, les polynômes  $\hat{\theta}(k)^t Y_u + J$  et  $\mathcal{B}$  étant uniformément strictement premiers entre eux, il existe des polynômes  $\alpha(k)$  et  $\beta(k)$  à coefficients bornés indépendamment des solutions tels que:

$$\alpha(k)(\hat{\theta}(k)^t Y_u + J) + \beta(k)q^{-1}\mathcal{B} = 1 \quad (1.200)$$

Cette équation nous permet d'écrire le système (mesuré) bouclé sous la forme:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc} M & 0 & 0 \\ q^{-1}\mathcal{B} \circ E(k) - 1 & R & 0 \\ \alpha(k) \circ B_m(k) \circ E(k) & \alpha(k) \circ B_m(k) \circ (\hat{\theta}(k)^t Y_u + L) - \beta(k) \circ A_m & B_m(k) \end{array} \right) \begin{pmatrix} \omega(k) \\ y(k) \\ u(k) \end{pmatrix} \\ & = \left( \begin{array}{c} 0 \\ q^{-1}\mathcal{B}(q^{-1}) \\ \alpha(k, q^{-1}) \circ B_m(k, q^{-1}) \end{array} \right) r(k) + \quad (1.201) \\ & + \left( \begin{array}{c} \delta(k) + \det\{U(q^{-1})\}e(k) \\ 0 \\ \left[ \begin{array}{c} [\beta(k)B_m(k) - \beta(k) \circ B_m(k)]q^{-1}\mathcal{B} + \\ + \alpha(k)B_m(k)\hat{\theta}(k)^t Y_u - \alpha(k) \circ B_m(k) \circ \hat{\theta}(k)^t Y_u \end{array} \right] u(k) - \beta(k, q^{-1})d_m(k) \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ecrivant une représentation d'état de ce système avec:

$$X(k) = \begin{pmatrix} \omega(k-1) \\ \vdots \\ y(k-1) \\ \vdots \\ u(k-1) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.202)$$

on obtient l'équation (1.154) où la matrice  $F(k)$ , bloc triangulaire inférieure, vérifie (1.156) d'après nos choix de  $R$ ,  $M$ , des compacts  $\underline{\Upsilon}(k)$  et notre hypothèse sur  $B_m(k)$ . Les autres hypothèses du Lemme 1.6 sont satisfaites si l'erreur  $d_m$  vérifie soit:

$$\mu^k \|d_m\|_{\mu,k} \leq \beta_\infty(k) + \gamma_\infty s_\mu(k) \quad (1.203)$$

soit:

$$|d_m(k)| \leq \beta_2(k) + \gamma_2 s_\mu(k) \quad (1.204)$$

la constante  $\gamma_\infty$  ou  $\gamma_2$  étant suffisamment petite et, avec le point 2 de la Propriété 1.3,  $A_m(k)$  et  $B_m(k)$  variant suffisamment lentement et restant dans une suite de compacts liée à  $\underline{\Upsilon}$  par la paramétrisation. Sous ces conditions les suites  $u$  et  $y$  sont donc bornées et sont même de carrés sommables si la suite  $r$  est nulle,  $A_m$  et  $B_m$  sont constants et (1.203) est vérifiée avec  $\beta_\infty$  une suite  $\mu$ -bornée (voir Propriété 1.2).

Comme pour la commande adaptative à partir d'une paramétrisation explicite, nous avons donc établi que la bornitude de toutes les solutions donnée par cette commande par modèle de référence pour système à modèle inverse instable est préservée en présence de faibles instationnarités, de certaines non linéarités et est robuste au sens des topologies induites par les inégalités (1.203) ou (1.204) [24].

### 1.5.3 Solutions bornées: résultat plus quantitatif

L'une des raisons pour lesquelles l'application du Lemme 1.6 demande des conditions quantitativement trop restrictives est que, par construction, ce résultat cherche à exploiter la caractérisation des effets non modélisés donnée par la Propriété 1.1. Cette caractérisation est du type "boucle ouverte", ne prenant pas en compte la "déformation" des effets non modélisés par le feedback. Dans le cas d'une commande à partir d'une paramétrisation implicite où les paramètres sont en fait ceux du contrôleur, il est possible de prendre en compte (un peu de) cette "déformation"

Supposons que les signaux d'entrées-sorties mesurés sont tels que:

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-1) + d(k) \quad (1.205)$$

où la suite  $d$ , prenant en compte tous les effets non modélisés par les polynômes  $A$  et  $B$  (de degrés arbitraires mais supposés constants pour simplifier les énoncés), est supposée satisfaire:

$$\mu^k \|d\|_{\mu,k} \leq \beta_d(k) + \gamma_d s_\mu(k) \quad (1.206)$$

Pour étudier le système (mesuré) bouclé avec cette hypothèse, nous divisons le polynôme  $RB$  par  $\mathcal{B}$ :

$$RB = \Delta + B_m \mathcal{B} \quad (1.207)$$

Pour fixer les idées, dans la suite,  $\Delta$  sera considéré comme "petit" et  $B_m$   $\mu$ -exponentiellement stable. Posons aussi:

$$\Phi = Y_y q^{-1} B + Y_u A \quad (1.208)$$

Pour tout vecteur  $\theta$  (constant) dans le compact convexe  $\mathfrak{T}$  (constant), l'erreur de modélisation

$$w_\theta(k) = z(k) - Z(k)^t \theta \quad (1.209)$$

vérifie, en prenant  $E$  constant pour simplifier:

$$\begin{aligned} \det\{U(q^{-1})\} B_m(q^{-1}) w_\theta(k) &= \\ &= F_\theta(q^{-1}) [\det\{U(q^{-1})\} e(k) + \delta(k)] + G_\theta(q^{-1}) r(k) + \\ &\quad + \Delta(q^{-1}) M(q^{-1}) [\theta^t Y(k) + J(q^{-1}) u(k-1)] + M(q^{-1}) (\theta^t Y_u(q^{-1}) + J(q^{-1})) d(k) \end{aligned} \quad (1.210)$$

avec:

$$F_\theta = [B_m - q^{-1} BL - (\theta^t \Phi + JA)](1 - q^{-1} BE) \quad (1.211)$$

$$G_\theta = [B_m - q^{-1} BL - (\theta^t \Phi + JA)] M \quad (1.212)$$

Mis à part les perturbations  $\Delta$  et  $d$  et la suite bornée  $r$ , (1.210) exprime  $w_\theta$  en fonction de  $e$  et  $\delta$ . Mais, avec (1.98) et (1.99) données par la loi d'adaptation et (1.197), nous avons inversement une expression de  $e$  et  $\delta$  en fonction de  $w_\theta$ . On a donc une caractérisation boucle fermée des effets non modélisés. Cependant pour mener à bien cette approche, nous sommes amenés à utiliser (1.98) et (1.99) d'une façon différente de celle du Lemme 1.6. Précisément, nous les multiplions par  $\mu^{2k}\sigma(k)^2$  et nous sommes, en remarquant que le terme  $\sum_k [L_\theta(k-1) - L_\theta(k)] \mu^{-2k}\sigma(k)^2$  peut être négligé. En effet, on démontre le résultat technique suivant:

**Lemme 1.7 ([24])** Soit  $\mu$  une constante positive strictement inférieure à 1. Considérons la suite  $x$  définie par:

$$x(k) = \sum_{i=1}^k [L_\theta(i-1) - L_\theta(i)] \frac{\mu^{-2i}\sigma(i)^2}{\mu^{-2k}\sigma(k)^2} \quad (1.213)$$

où  $L_\theta$  est une suite positive bornée et  $\sigma$  est une suite positive telle que la suite  $\mu^{-2k}\sigma(k)^2$  soit croissante et, avec  $c$  une constante positive:

$$\sigma(k) \leq c\sigma(k-1) \quad (1.214)$$

Il existe une constante  $\Gamma$ , dépendant uniquement de  $\mu$ ,  $c$  et  $\sup_k\{L_\theta\}$ , telle que, pour toute constante  $\varepsilon$  positive:

$$x(k) \geq \varepsilon \quad \forall k \in ]K_0, K_1[ \quad (1.215)$$

implique:

$$\sigma(k)^2 \leq \Gamma^{1/\varepsilon} \mu^{2(k-K_0)} \sigma(K_0)^2 \quad \forall k \in ]K_0, K_1[ \quad (1.216)$$

Ainsi, sur les intervalles de temps où le terme discuté n'est pas négligeable au sens de (1.215), la suite  $\sigma$  est majorée par une suite exponentiellement décroissante.

On démontre alors:

**Propriété 1.6 ([24])** *Le polynôme  $R$  étant choisi  $\mu$ -exponentiellement stable, il existe des constantes  $c_1$  à  $c_7$ , dépendant des paramètres du contrôleur et de  $\gamma\{A\}$  et  $\gamma\{B\}$ , telles que le contrôleur par modèle de référence pour système à modèle inverse instable, en boucle fermée avec un système mesuré, vérifiant (1.205) et (1.206), où la suite  $\beta_i$  est bornée, a toutes ses solutions bornées si il existe un vecteur  $\theta$  dans le compact convexe  $\underline{\Sigma}$  vérifiant:*

$$\begin{aligned} & \left[ 1 - \gamma \left\{ \frac{F_\theta}{B_m} \right\} \left( \Gamma_a + c_1 \sqrt{\Gamma_q \Gamma_\theta} \right) \right] \left[ 1 - \gamma \left\{ B_m^{-1} \right\} \left( \gamma \left\{ \frac{\Delta}{B_m} \right\} c_2 + \gamma \left\{ B_m^{-1} \right\} \gamma_d c_3 \right) \right] - \\ & - \gamma \left\{ B_m^{-1} \right\}^2 \left[ \gamma \left\{ \frac{\Delta}{B_m} \right\} c_4 + \gamma \left\{ B_m^{-1} \right\} \gamma_d c_5 \right] \left[ c_6 + \gamma \left\{ \frac{1 - q^{-1}BE}{R} \right\} c_7 \right] > 0 \end{aligned} \quad (1.217)$$

la notation  $\gamma\{A\}$  signifiant:

$$\gamma\{A\} = \sup_{|z|=\mu} \{|A(z^{-1})|\} \quad (1.218)$$

Ce résultat est étendu pour  $\mu$  égal à 1 dans [29]. Dans ce cas, correspondant à une adaptation à gain tendant vers zéro, la commande adaptative est qualitativement aussi robuste que la commande linéaire.

L'inégalité (1.217) met bien en évidence le rôle des paramètres du contrôleur. Ainsi, le polynôme  $E$  doit être choisi selon le critère:

$$\min_E \left\{ \sup_{|z|=\mu} \left\{ \left| \frac{1 - z^{-1}B(z^{-1})E(z^{-1})}{R(z^{-1})} \right| \right\} \right\}$$

les constantes  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_q$  doivent être le plus petit possible (cas d'un système stationnaire)... De plus, (1.217) est moins restrictive que l'inégalité (1.167) et donne une caractérisation assez précise des systèmes mesurés auxquels on peut appliquer notre contrôleur pour avoir la bornitude de toutes les solutions.

**Exemple:** Le contrôleur réponse pile adaptatif robustifié est le contrôleur par modèle de référence pour système à modèle inverse instable obtenu en prenant:

$$S = L = E = Y_u = 0 \quad , \quad R = B = M = J = U = n_d = 1 \quad (1.219)$$

et, d'après (1.130), on a:

$$\Gamma_a^2 = \frac{1 + \gamma_1}{\gamma_1} \quad (1.220)$$

Appliquons-le au système mesuré vérifiant:

$$(1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2}) y(k) = u(k - 1) \quad (1.221)$$

Dans ce cas, on obtient:

$$c_1 = \Delta = \gamma_d = 0 \quad , \quad B_m = 1 \quad , \quad \frac{F_\theta}{B_m} = -(\theta + a_1)q^{-1} - a_2q^{-2} \quad (1.222)$$

et si  $|a_1 + \theta_0|$  est plus petit que  $R$ , on peut choisir  $\theta$  dans le compact convexe  $[\theta_0 - R, \theta_0 + R]$ , tel que:

$$\gamma \left\{ \frac{F_\theta}{B_m} \right\} = \frac{|a_2|}{\mu^2} \quad (1.223)$$

D'après l'inégalité (1.217), toutes les solutions seront bornées si:

$$1 - \frac{|a_2|}{\mu^2} \sqrt{\frac{1 + \gamma_1}{\gamma_1}} > 0 \quad (1.224)$$

Il est intéressant de comparer cette inégalité avec celle obtenue pour le contrôleur réponse pile linéaire:

$$u(k) = -\theta_0 y(k) + r(k) \quad (1.225)$$

Dans ce cas les solutions sont bornées et exponentiellement stables pour toute suite  $r$  si et seulement si:

$$|a_1 + \theta_0| < 1 + a_2 \quad , \quad a_2 < 1 \quad (1.226)$$

Le contrôleur adaptatif est donc presque aussi robuste que le contrôleur linéaire permettant la plus grande incertitude sur  $a_2$  mais demandant alors la connaissance parfaite de  $a_1$ . Cependant le contrôleur linéaire donne bornitude et stabilité alors que nous n'avons établi que la bornitude pour le contrôleur adaptatif.

## 1.6 Conclusion

Les divers résultats énoncés au cours de ce premier chapitre nous assurent l'existence de contrôleurs linéaires adaptatifs implémentables garantissant la bornitude de toutes les solutions lorsqu'on les applique à des systèmes dont un modèle linéaire rationnel stationnaire peut être obtenu en négligeant:

1. des pôles et des zéros stables suffisamment rapides,
2. des zéros instables suffisamment rapides,
3. des presque non-observabilités si elles sont associées à des modes suffisamment rapides,
4. des instationnarités suffisamment lentes en moyenne ou petites en amplitude,
5. des nonlinéarités, dont la distance à une fonction linéaire est bornée.

Comparée à la commande linéaire, la commande linéaire adaptative est plus robuste en ce qui concerne les incertitudes paramétriques et les instationnarités, mais elle n'est pas robuste aux non observabilités associées à des modes trop lents. Rappelons aussi que notre intérêt s'est porté sur la bornitude mais que "solutions bornées" est loin d'être suffisant pour garantir un comportement satisfaisant en pratique. Derrière le mot "borné" peut se cacher des comportements dynamiques extrêmement complexes et inacceptables. En particulier, nous avons prédit, à la Section 1.3, un comportement oscillatoire, prédiction théoriquement confirmé pour certains exemples ([15], Mareels et Bitmead [16], Golden et Ydstie [6]). Dans ce contexte, le deuxième résultat de la Propriété 1.5 est important puisque non seulement les solutions sont bornées mais leur comportement est asymptotiquement satisfaisant. Ce résultat est obtenu grâce à l'utilisation d'un modèle interne. Ceci met en évidence l'avantage de cette technique dans le cas adaptatif et c'est à Middleton et al. [17] que revient la primeur cette remarque. Dans la deuxième partie de ce mémoire, nous établirons une version locale de ce résultat dans un contexte beaucoup plus général.

# Bibliographie

- [1] Anderson B.D.O., Moore J.B.: *Detectability and stabilizability of time-varying discrete-time linear systems*. SIAM J. Control and Optimization. Vol. 19, No. 1, January 1981.
- [2] Egardt B.: *Stability of adaptive controllers*. Springer Verlag. 1979.
- [3] Fuchs J.J.: *On the good use of the spectral radius of a matrix*. IEEE Transactions on Automatic Control, October 1982.
- [4] Gawthrop P.: *Self-tuning PID controllers: Algorithms and implementation*. IEEE Transactions on Automatic Control. March 1986.
- [5] Giri F., M'Saad M., Dugard L., Dion J.-M.: *Robust pole placement indirect adaptive control*. Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing. Vol. 2, N. 2, June 1988.
- [6] Golden M.P., Ydstie B.E.: *Bifurcation in model reference adaptive control systems*. Rapport de: Department of chemical engineering, University of Massachusetts. Soumis pour publication dans Systems & Control Letters. 1988.
- [7] Goodwin G.C., Sin K.S.: *Adaptive filtering, prediction and control*. Prentice-Hall. 1984
- [8] Ikeda M., Maeda H., Kodama S.: *Stabilization of linear systems* SIAM J. Control and Optimization. Vol. 10, No. 4, November 1972.
- [9] Ilchmann A., Nürnenberger I., Schmale W.: *Time-varying polynomial matrix systems*. Int. J. Control, Vol. 40, No. 2, 329-362, 1984.
- [10] Ioannou P., Tao G.: *Dominant richness and improvement of performance of robust adaptive control*. USC Rep. 87-04-01. University of Southern California. Electrical Engineering Systems. April 1987
- [11] Ioannou P., Tsakalis K.: *Robust discrete-time adaptive control*. In *Adaptive and learning systems: theory and applications* ed. Narendra K.S.. Plenum Press. 1986.
- [12] de Larminat P.: *Unconditional stabilization of linear discrete systems via adaptive control*. Systems & Control Letters. Vol. 1, N. 1, July 1981.
- [13] de Larminat P., Raynaud H.-F.: *A robust solution to the admissibility problem in indirect adaptive control without persistency of excitation*. Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing. Vol. 2, N. 2, June 1988.
- [14] Lefschetz S.: *Differential equations: Geometric theory*. Dover. 1977

- [15] Lyaschenko N.Ya.: *On the asymptotic stability of differential systems*. Dokl. Akad. Nauk. SSSR 96, 237-239. 1954.
- [16] Mareels I.M.Y., Bitmead R.R.: *Non-linear dynamics in adaptive control: chaotic and periodic stabilization*. Automatica 22 (1987) 641-655.
- [17] Middleton R., Goodwin G., Hill D., Mayne D.: *Design issues in adaptive control*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 33, N° 1, January 1988.
- [18] Poolla K., Khargonekar P.: *Linear time-varying systems: skew polynomial fractions*. Proceed IEEE Conf. on Decision and Control. 1983.
- [19] Poolla K., Khargonekar P.: *Stabilizability and stable-proper factorizations for linear time-varying systems*. SIAM J. Control and Optimization. Vol. 25, No. 3, May 1987
- [20] Praly L.: *MIMO stochastic adaptive control: stability and robustness*. Rap. CAI A115. Mars 1982.
- [21] Praly L.: *MIMO indirect adaptive control: stability and robustness*. Rap. CAI A118. Décembre 1982.
- [22] Praly L.: *Commande adaptative par modèle de référence: stabilité et robustesse*. Dans *Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse de systèmes et le traitement du signal*. Vol. 3. Editions du C.N.R.S. 1983.  
Nota bene: L'hypothèse L2 du Lemme de l'ANNEXE B doit être changée en:  

$$(n+1-j) \left[ \eta_\phi + \frac{M_\phi}{\sqrt{n+1-j}} \right]$$
- [23] Praly L.: *Approche "entrée-sortie" de la stabilité*. p. 366 dans *Commande adaptative: aspects pratiques et théoriques* Coordonnateurs: Landau I.D. et Dugard L. Masson 1986.
- [24] Praly L.: *Global stability of a direct adaptive control scheme with respect to a graph topology*. In *Adaptive and learning systems: theory and applications* ed. Narendra K.S.. Plenum Press. 1986
- [25] Praly L.: *The almost exact modelling assumption in adaptive linear control*. A paraître dans International Journal of Control.
- [26] Praly L.: *Robust parameter adaptation for adaptive linear control*. En préparation.
- [27] Praly L., España M.: *An example of oscillations in adaptive linear control*. Proceed. 5th Yale Workshop on Applications of adaptive systems theory. Yale University (1987).
- [28] Praly L., Hung S., Rhode D.: *Towards a direct adaptive scheme for a discrete time control of a minimum phase continuous-time system*. Proceed. of the 24th IEEE Conference on Decision and Control. Dec 1985.
- [29] Praly L., Lin S.-F., Kumar P.: *A robust minimum variance controller*. A paraître dans SIAM J. Control and Optimization.
- [30] Praly L., Trulsson E.: *Decentralized indirect adaptive control*. APII 1986- 20 295 315.  
Nota bene: Malgré les apparences, la bornitude établie dans cet article n'est que locale.

- [31] Samson C.: *Problèmes en identification et commande de systèmes dynamiques*. Thèse de Docteur es-Sciences Physiques. Spécialité: Automatique. Université de Rennes I. Série: A, No. d'ordre: 373, No. de Série: 52. 1983
- [32] Tsakalis K., Ioannou P.: *Adaptive control of linear time-varying plants: a new model reference controller structure* Elec. Eng.-Syst. Rep. University of Southern California. August 1987
- [33] Tsakalis K., Ioannou P.: *A new indirect adaptive control scheme for time-varying plants* Elec. Eng.-Syst. Rep. University of Southern California. March 1988.
- [34] Vidyasagar M.: *The graph metric for unstable plants and robustness estimates for feedback stability*. IEEE Transactions on Automatic Control. May 1984.
- [35] Wiemer P., Unbehauen H.: *Decentralized discrete model reference adaptive control*. Proceed. 10th IFAC world congress on automatic control. Vol. 7. 1987

## Chapitre 2

# Etude qualitative des solutions des systèmes linéaires adaptatifs

### 2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de montrer des techniques permettant l'étude du comportement transitoire et du comportement asymptotique des solutions des systèmes linéaires adaptatifs que l'on sait être bornées d'après le chapitre précédent. Les méthodes utilisées pour établir la bornitude des solutions, reposant sur la robustesse de cette propriété pour les systèmes linéaires exponentiellement stables, se révèlent trop imprécises pour cette étude. Ceci tient au fait que, considérant les couplages entre système à commander et contrôleur adapté, d'une part, et loi d'adaptation, d'autre part, comme des perturbations peu structurées, elles ne rendent pas suffisamment compte de leurs effets. D'un autre côté, l'analyse du système bouclé dans son ensemble se révèle très difficile dans le cas général et des dynamiques très complexes ont été mise en évidence même pour des cas très simplifiés (Mareels et Bitmead [12], Golden et Ydstie [5]). Pour venir à bout du problème, nous allons tirer profit de la propriété qu'ont les systèmes linéaires adaptatifs en présence de termes de forçage petits en amplitude. En effet, dans ce cas, un phénomène à deux échelles de temps apparaît localement et les systèmes se comportent comme de petites perturbations de systèmes constitués par une famille de systèmes linéaires. Grâce à cela, nous mettrons en évidence des ensembles limites et des ensembles intégraux et nous étudierons leur attractivité ou répulsivité en appliquant des techniques de perturbations — méthode de Poincaré (Lefschetz [10]), stabilité structurelle des ensembles intégraux hyperboliques (Shub [21], Hirsch, Pugh et Shub [7]), méthode de moyennisation (Sanders et Verhulst [20]).

Precisément, si le système à commander est linéaire, il est possible dans la plupart des cas d'écrire, au moins localement, le système en boucle fermée sous la forme:

$$\left. \begin{array}{rcl} Y(k+1) & = & A(\varphi(k))Y(k) + B(\varphi(k))v(k) \\ \varphi(k+1) & = & \varphi(k) + C(Y(k), \varphi(k), v(k), \gamma(k)) \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

$v$  représente les termes de forçage, signaux exogènes entrant dans le système.  $Y$ , dans  $\mathbb{R}^n$ , est l'état du système à commander, du contrôleur et des filtres.  $\gamma$  représente les paramètres

de réglage de la loi d'adaptation dont l'état est  $\varphi$  dans  $\mathbb{R}^p$   
Par ailleurs, une propriété importante vérifiée dans la plupart des cas par la fonction  $C$  est:

$$C(Y, \varphi, v, \gamma) = \varepsilon^2 C\left(\frac{Y}{\varepsilon}, \varphi, \frac{v}{\varepsilon}, \varepsilon^2 \gamma\right) \quad (2.2)$$

Posant:

$$X = \frac{Y}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad u = \frac{v}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (2.3)$$

cette égalité nous permet de réécrire (2.1) sous la forme:

$$\left. \begin{aligned} X(k+1) &= A(\varphi(k))X(k) + B(\varphi(k))u(k) \\ \varphi(k+1) &= \varphi(k) + \varepsilon C(X(k), \varphi(k), u(k), \varepsilon \gamma(k)) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

C'est un système à deux échelles de temps lorsque  $\varepsilon$  est petit (et ...  $A(\varphi)$  est non critique, et la constante de Lipschitz de  $C$  en  $\varphi$  est bornée, et...).

Pour éviter tous problèmes, nous supposerons dans ce mémoire que les fonctions  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont de classe  $C^2$

**Exemple:** Considérons le contrôleur réponse pile adaptatif "robustifié" avec modèle interne:

$$\left. \begin{aligned} \varsigma(k+1)^2 &= \mu^2 \varsigma(k)^2 + \gamma_1(u_t(k)^2 + y(k)^2) \\ \hat{\theta}_+(k) &= \hat{\theta}(k) + \frac{y_t(k)[y_t(k+1) - u_t(k) - \hat{\theta}(k)y_t(k)]}{\max\{1, \varsigma(k+1)^2\} + \gamma_2 y_t(k)^2} \\ \hat{\theta}(k+1) &= \theta_0 + \min\left\{1, \frac{R}{|\hat{\theta}_+(k) - \theta_0|}\right\}(\hat{\theta}_+(k) - \theta_0) \\ u_t(k) &= -\hat{\theta}(k)y_t(k) + (y_t(k+1) - y(k+1)) + \rho(k) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

où:

- L'indice  $t$  pour une suite  $u$  signifie:

$$u_t(k) = T(q^{-1})u(k) \quad (2.6)$$

avec  $T$ , un polynôme en l'opérateur de retard  $q^{-1}$ , supposé annihiler les signaux exogènes agissant sur le système commandé. Puisque l'ordre du système en boucle fermée est augmenté du degré de  $T$ , pour rester simple, nous prenons:

$$T(q^{-1}) = 1 - tq^{-1} \quad (2.7)$$

$T$  devant annihiler des suites bornées sur  $]-\infty, +\infty[$ , ce choix n'a de sens pratique que pour  $t = 0$  ou  $\pm 1$ .

- $\rho$  est une suite calculée à partir d'une suite de sorties désirées  $y_d$ . Par exemple:

$$\rho(k) = [1 - T(q^{-1}) + \hat{\theta}(k)q^{-1}T(q^{-1})]y_d(k+1) \quad (2.8)$$

- $\mu, \gamma_1, \gamma_2, R$  sont des constantes strictement positives.

- $\theta_0$  est une estimation à priori du pôle du système à commander.

Nous cherchons à comprendre le comportement des solutions du système obtenu en bouclant ce contrôleur avec le système:

$$y(k+1) = a y(k) + u(k) + \delta(k) \quad (2.9)$$

où  $\delta$  est une perturbation exogène. Ce système s'écrit (avec  $\varphi = \hat{\theta} - a$ ):

$$\left. \begin{aligned} y(k+1) &= -\varphi(k)y_t(k) + \delta(k) - t\delta(k-1) + \rho(k) \\ y_t(k+1) &= -\varphi(k)y_t(k) - ty(k) + \delta(k) - t\delta(k-1) + \rho(k) \\ \varsigma(k+1)^2 &= \mu^2\varsigma(k)^2 + \gamma_1 [((\varphi(k) + a)y_t(k) + ty(k) + \rho(k))^2 + y(k)^2] \\ \varphi_+(k) &= \varphi(k) + \frac{y_t(k)[\delta(k) - t\delta(k-1) - \varphi(k)y_t(k)]}{\max\{1, \varsigma(k+1)^2\} + \gamma_2 y_t(k)^2} \\ \varphi(k+1) &= \theta_0 - a + \min\left\{1, \frac{R}{|\varphi_+(k) + a - \theta_0|}\right\}(\varphi_+(k) + a - \theta_0) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Par rapport au premier chapitre nous avons donc changé nos notations de la façon suivante:

1 <sup>er</sup> chapitre	2 <sup>ième</sup> chapitre	
$y_p$	$\longrightarrow$	$y$
$u_p$	$\longrightarrow$	$u$
$u = T u_p$	$\longrightarrow$	$u_t$
$Sy$	$\longrightarrow$	$y_t$

Introduisons la suite de domaines  $\mathcal{D}(k)$  définis par:

$$\mathcal{D}(k) = \left\{ (y, y_t, \varsigma, \varphi) \mid \varsigma \leq 1, |\varphi + a - \theta_0 + y_t \frac{\delta(k) - t\delta(k-1) - \varphi y_t}{1 + \gamma_2 y_t^2}| \leq R \right\} \quad (2.11)$$

Restreint à  $\mathcal{D}(k)$ , le système (2.10) s'écrit:

$$\left. \begin{aligned} y(k+1) &= -\varphi(k)y_t(k) + \delta(k) - t\delta(k-1) + \rho(k) \\ y_t(k+1) &= -\varphi(k)y_t(k) - ty(k) + \delta(k) - t\delta(k-1) + \rho(k) \\ \varphi(k+1) &= \varphi(k) + \frac{y_t(k)[\delta(k) - t\delta(k-1) - \varphi(k)y_t(k)]}{1 + \gamma_2 y_t(k)^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Nous avons omis l'équation en  $\varsigma$  car elle n'influence pas le reste du système restreint à  $\mathcal{D}(k)$  et ses solutions se déduisent facilement de celles de (2.12). Ce système est du type (2.1) et nous permet d'expliquer complètement la dynamique de (2.10) restreint à  $\mathcal{D}(k)$ . Dans la suite, nous supposerons  $R$  et  $(1 - \mu)/\gamma_1$  suffisamment grands et  $|a - \theta_0|$  suffisamment petit pour que  $\mathcal{D}(k)$  soit non vide et les solutions auxquelles nous nous intéresserons soient dans cette suite d'ensembles.

Par ailleurs, on vérifie:

$$\frac{y_t [\delta(k) - t\delta(k-1) - \varphi y_t]}{1 + \gamma_2 y^2} = \varepsilon^2 \frac{\frac{y_t}{\varepsilon} \left[ \frac{\delta(k) - t\delta(k-1)}{\varepsilon} - \varphi \right]}{1 + (\varepsilon^2 \gamma_2) \frac{y^2}{\varepsilon^2}} \quad (2.13)$$

Posons:

$$d(k) = \frac{\delta(k)}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad r(k) = \frac{\rho(k)}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (2.14)$$

et pour simplifier les notations, prenons:

$$\gamma_2 = 1 \quad (2.15)$$

On obtient alors un système du type (2.4):

$$\left. \begin{array}{l} x(k+1) = -\varphi(k)x_t(k) + d(k) - td(k-1) + r(k) \\ x_t(k+1) = -\varphi(k)x_t(k) - tx(k) + d(k) - td(k-1) + r(k) \\ \varphi(k+1) = \varphi(k) + \varepsilon \frac{x_t(k)[d(k) - td(k-1) - \varphi(k)x_t(k)]}{1 + \varepsilon x_t(k)^2} \end{array} \right\} \quad (2.16)$$

Notons enfin que s'il n'y a pas de modèle interne, i. e.  $t = 0$ , le système se simplifie en:

$$\left. \begin{array}{l} x(k+1) = -\varphi(k)x(k) + d(k) + r(k) \\ \varphi(k+1) = \varphi(k) + \varepsilon \frac{x(k)[d(k) - \varphi(k)x(k)]}{1 + \varepsilon x(k)^2} \end{array} \right\} \quad (2.17)$$

Pour étudier le comportement asymptotique des solutions de (2.4), nous allons exhiber des solutions particulières - points d'équilibres, solutions périodiques. Puis, pour comprendre plus globalement le comportement, nous mettrons en évidence des ensembles intégraux de structure plus complexe qui, dans certains cas, sont des sous-variétés intégrales de la variété (in)stable de ces solutions. Ce dernier aspect nous permettra d'étudier la stabilité de ces solutions et d'obtenir une idée de leur bassin d'attraction. Pour mieux comprendre cette approche, nous considérons en premier lieu le cas où  $\varepsilon$  est nul.

## 2.2 Le système “gelé”

Pour  $\varepsilon = 0$ , le système (2.4) est dit gelé.

$$\left. \begin{array}{l} X(k+1) = A(\varphi)X(k) + B(\varphi)u(k) \\ \varphi(k+1) = \varphi(k) = \varphi \end{array} \right\} \quad (2.18)$$

C'est une famille de systèmes linéaires indexée en  $\varphi$  et pour laquelle on sait:

- exhiber les solutions bornées sur  $]-\infty, +\infty[$  pour chaque  $\varphi$  tel que  $A(\varphi)$  n'est pas “critique” pour la suite  $u$  (pas de résonnance, voir Propriété 2.1),
- étudier la stabilité de ces solutions.

Ainsi, prenons le cas où la suite  $u$  est stationnaire ou, plus précisément, solution réelle bornée sur  $]-\infty, +\infty[$  d'une équation aux différences finies, linéaire et à coefficients constants, soit:

$$u(k) = \sum_{i=1}^m u_i z_i^k \quad (2.19)$$

où les  $z_i$  sont des nombres complexes de module égal à 1 et les  $u_i$  sont des vecteurs non nuls à coefficients complexes. Les propriétés des systèmes linéaires nous donnent:

**Propriété 2.1 (Extension de LaSalle [9, Section 13])** *Le système gelé, avec  $u$  donné par (2.19), a une solution bornée pour  $k \in ]-\infty, +\infty[$  admettant  $\varphi$  comme composante si et seulement si, pour chaque  $z_i$ , composante fréquentielle de  $u$ , qui serait valeur propre de  $A(\varphi)$ , le vecteur  $B(\varphi)u$ , correspondant est dans l'image de  $z_i I - A(\varphi)$ .*

*Si cette solution existe, elle s'écrit:*

$$X(k, \varphi) = \sum_{i=1}^m X_i(\varphi) z_i^k + \sum_{j=1}^n \alpha_j A(\varphi)^k V_j(\varphi) \quad (2.20)$$

où:

- les  $X_i(\varphi)$  sont solutions de:

$$(z_i I - A(\varphi)) X_i(\varphi) = B(\varphi) u_i \quad (2.21)$$

- les  $V_j(\varphi)$  sont les vecteurs propres unitaires de  $A(\varphi)$  associés aux valeurs propres sur le cercle unité, s'il en existe, sinon les  $V_j(\varphi)$  sont nuls,
- les  $\alpha_j$  sont des nombres complexes quelconques.

Cette solution est, selon sa composante  $X$ :

- globalement exponentiellement stable si  $A(\varphi)$  a toutes ses valeurs propres dans le disque unité ouvert,
- globalement stable si  $A(\varphi)$  a toutes ses valeurs propres dans le disque unité fermé et les valeurs propres qui seraient sur le cercle unité ont un bloc de Jordan d'ordre 1,
- instable sinon.

L'équation (2.21) définit une famille de multiapplications  $X_i(\varphi)$ . Cependant, si, pour  $\varphi^*$ , aucun des  $z_i$  n'est valeur propre de  $A(\varphi^*)$ , ces multiapplications sont, comme  $A$  et  $B$ , des fonctions de classe  $C^2$  localement autour de  $\varphi^*$ . Dans ce cas, les fonctions définies par:

$$\Xi(k, \varphi) = \sum_{i=1}^m X_i(\varphi) z_i^k \quad (2.22)$$

sont toutes de classe  $C^2$  localement autour de  $\varphi^*$  et uniformément en  $k$ .

**Exemple:** Supposons que, pour le système (2.16), on ait:

$$d(k) = \Re\{dz_d^k\}, \quad r(k) = \Re\{rz_r^k\}, \quad |z_d| = |z_r| = 1 \quad (2.23)$$

alors il y a une solution bornée pour  $k \in ]-\infty, +\infty[$  si et seulement si  $z_d$  et  $z_r$  ne sont pas racines de:

$$z^2 + \varphi z - t\varphi = 0 \quad (2.24)$$

Elle s'écrit:

$$\begin{pmatrix} x(k) \\ x_t(k) \end{pmatrix} = \Re \left\{ \frac{d(1-t\bar{z}_d)}{z_d^2 + \varphi z_d - t\varphi} \begin{pmatrix} z_d \\ z_d - t \end{pmatrix} z_d^k + \frac{r}{z_r^2 + \varphi z_r - t\varphi} \begin{pmatrix} z_r \\ z_r - t \end{pmatrix} z_r^k \right\} + \Re \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -\varphi \\ \lambda(\varphi) \end{pmatrix} \lambda(\varphi)^k \right\} \quad (2.25)$$

où  $\lambda(\varphi)$  est racine de (2.24) et  $\alpha$  est un nombre complexe non nul si et seulement si (lorsque cela a un sens):

$$\varphi = \frac{1}{1+t} \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{1}{t-1} \quad \text{ou} \quad \text{si } t \notin \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[ , \quad \varphi = \frac{-1}{t} \quad (2.26)$$

Cette solution est unique si et seulement si  $\alpha$  est nul. Elle est:

- exponentiellement stable si:

$$t\varphi \in ]-1, 1 - |\varphi|[ \quad (2.27)$$

- stable si:

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{t-1} \quad \text{si } t < \frac{1}{2} \\ \varphi &= \frac{-1}{t} \quad \text{si } t \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ \varphi &= \frac{1}{1+t} \quad \text{si } t > -\frac{1}{2}\end{aligned}\tag{2.28}$$

- exponentiellement instable sinon.

## 2.3 Solutions périodiques

Ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable. *Henri Poincaré*

Les ensembles limites intégraux représentent ce vers quoi les solutions peuvent converger (ou diverger) et expliquent donc les propriétés asymptotiques. Par ordre de complexité, ce sont: point d'équilibre, solution périodique, ... La continuité des fonctions  $A$ ,  $B$  et  $C$  implique:

**Propriété 2.2 ([16, Théorème 2.1])** *Si le système (2.4) a une solution de période  $M$  dont la condition initiale a un point d'accumulation  $(X^*, \varphi^*)$  pour  $\varepsilon$  tendant vers 0, alors  $(X^*, \varphi^*)$  est la condition initiale d'une solution de période  $M$  du système gelé en  $\varphi^*$ , notée  $(X^*(k), \varphi^*)$ . De plus, l'expression:*

$$\sum_{k=0}^{M-1} C(X^*(k), \varphi^*, u(k), 0)$$

est nulle.

Supposons la suite  $\gamma$  périodique de période  $M$  et, comme dans la Section 2.2, que:

$$u(k) = \sum_{i=1}^m u_i z_i^k \tag{2.29}$$

mais, maintenant, les  $z_i$  sont des racines  $M^{\text{ième}}$  de l'unité. Soit  $(X^*(k), \varphi^*)$  une solution de période  $M$  du système gelé. Avec la définition (2.22), la Propriété 2.1 et la périodicité, on a nécessairement:

$$X^*(k) = \Xi(k, \varphi^*) + \sum_{j=1}^n \alpha_j^* A(\varphi^*)^k V_j^* \tag{2.30}$$

où les  $V_j^*$  sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres de  $A(\varphi^*)$ , racines  $M^{\text{ième}}$  de l'unité s'il en existe, sinon les  $\alpha_j^*$  sont nuls. Sous ces hypothèses, la Propriété 2.2 nous indique que, si le système (2.4) a une solution de période  $M$ , restant bornée pour  $\varepsilon$  tendant vers 0, il existe  $(\alpha_j^*, \varphi^*)$  annulant l'expression:

$$E(\alpha_j, \varphi) = \sum_{k=0}^{M-1} C \left( \Xi(k, \varphi) + \sum_{j=1}^n \alpha_j A(\varphi)^k V_j^*, \varphi, u(k), 0 \right) \quad (2.31)$$

**Exemple:** Supposons:

$$z_d^M = z_r^M = 1 \quad (2.32)$$

Dans ce cas, le système gelé, obtenu de (2.16), n'a que des solutions de période multiple de  $M$ . La condition nécessaire d'existence de solution périodique est alors que l'on puisse trouver  $\varphi^*$  et  $\alpha^*$  tels que, avec  $j$ , un nombre entier:

$$\sum_{k=0}^{jM-1} x_t^*(k) (d(k) - td(k-1) - \varphi^* x_t^*(k)) = \sum_{k=0}^{jM-1} x_t^*(k) (x^*(k+1) - r(k)) = 0 \quad (2.33)$$

$$z_r^2 + \varphi^* z_r - t\varphi^* \neq 0 \quad (2.34)$$

$$z_d^2 + \varphi^* z_d - t\varphi^* \neq 0 \quad (2.35)$$

où  $x^*$  et  $x_t^*$  sont donnés par (2.25) avec  $\varphi = \varphi^*$  et  $\alpha = \alpha^*$ . Remarquant que (2.33) n'est rien d'autre qu'un produit scalaire dans  $l_2[0, jM-1]$ , le Théorème de Parseval nous indique que le calcul peut être fait dans le domaine fréquentiel. Avec l'expression (2.25) de  $x_t$ , si  $z_d$ ,  $z_r$  et  $\lambda(\varphi^*)$  sont différents l'un de l'autre et non réels, nous obtenons:

$$\frac{M}{2} \left[ \frac{|d|^2 \Re\{z_d(1-tz_d)\}}{|z_d^2 + \varphi^* z_d - t\varphi^*|^2} - \frac{|r|^2 |z_r - t|^2}{|z_r^2 + \varphi^* z_r - t\varphi^*|^2} \varphi^* - |\alpha^*|^2 \varphi^* \right] = 0 \quad (2.36)$$

et si  $z_d$ ,  $z_r$  ou  $\lambda(\varphi^*)$  est réel,  $|d|^2$ ,  $|r|^2$  ou  $|\alpha^*|^2$  est à multiplier par 2 dans cette expression. Rappelons aussi que  $\alpha^*$  est non nul que si:

$$z^2 + \varphi^* z - t\varphi^* = 0 \quad (2.37)$$

a une racine sur le cercle unité. Par des considérations de degré, on voit que:

- si  $|r||z_r - t|$  est non nul, (2.36) a une solution telle que  $\alpha^*$  est nul,  $\varphi^*$  est du signe de  $\Re\{z_d(1-tz_d)\}$  et le terme de droite de (2.36) a une pente en  $\varphi$  négative en ce point.
- si  $|r|$  est suffisamment petit, (2.36) a une solution telle que  $|\alpha^*|$  est non nul,  $\varphi^*$  est donné par (2.26) et de même signe que  $\Re\{z_d(1-tz_d)\}$ . Notons que seul le module et non l'argument de  $\alpha^*$  est défini.

En particulier, si  $t$  est nul (cas sans modèle interne), en posant:

$$\sigma = \text{signe}(\Re\{z_d\}) \quad (2.38)$$

- pour:

$$\frac{|r|^2}{|d|^2} \geq \frac{\sigma \Re\{z_d\}(1 + \sigma \Re\{z_r\})}{1 + \sigma \Re\{z_d\}} \quad (2.39)$$

(2.36) n'a qu'une solution vérifiant:

$$\alpha^* = 0, \quad 0 \leq \sigma \varphi^* \leq 1 \quad (2.40)$$

- dans le cas contraire, (2.36) a trois solutions:

$$\left( \alpha^* = \pm \sqrt{\frac{|d|^2 \sigma \Re\{z_d\}}{1 + \sigma \Re\{z_d\}} - \frac{|r|^2}{1 + \sigma \Re\{z_r\}}} , \varphi^* = \sigma \right) \text{ et } (\alpha^* = 0, \sigma \varphi^* > 1) \quad (2.41)$$

Dans les deux cas la solution ayant  $\alpha^*$  nul vérifie:

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi}(0, \varphi^*) < 0 \quad (2.42)$$

D'après le Proposition 2.2, l'existence de solutions périodiques pour le système (2.4) est liée à l'existence de zéros de l'expression (2.31). L'étude de l'existence de ces zéros est donc importante. Nous avons vu que, pour notre exemple, celle-ci peut se faire par une étude de degré. Dans [13], nous avons montré que ceci s'étend au cas général d'une commande de type modèle de référence.

Avec des hypothèses supplémentaires de non dégénérescence, (2.31) égale à zéro devient une condition nécessaire. Ainsi, une application du Théorème des Fonctions Implicites nous donne:

**Propriété 2.3 ([16, Extension du Théorème 2.2])** Soit  $(\alpha_j^*, \varphi^*)$  annulant (2.31) et tel que aucun des  $z_i$  n'est valeur propre de  $A(\varphi^*)$ . Posons (avec les définitions rappelées ci-dessus):

$$V^* = \sum_{j=1}^n \alpha_j^* V_j^* \quad (2.43)$$

Si le déterminant suivant est non nul,

$$\begin{vmatrix} A(\varphi^*)^M - I & \frac{\partial A^M}{\partial \varphi}(\varphi^*) \otimes V^* \\ \sum_{i=0}^{M-1} \frac{\partial C}{\partial X}(X^*(i), \varphi^*, u(i), 0) A(\varphi^*)^i & \frac{\partial E}{\partial \varphi}(\alpha_j^*, \varphi^*) \end{vmatrix} \quad (2.44)$$

il existe  $\varepsilon_0$  et une unique application:

$$(X, \varphi) : \mathbb{Z} \times ]-\varepsilon_0, +\varepsilon_0[ \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p,$$

de classe  $C^2$  en  $\varepsilon$ , telle que:

- $(X(k, \varepsilon), \varphi(k, \varepsilon))$  est solution de période  $M$  du système (2.4).
- pour tous  $k$ :

$$X(k, 0) = X^*(k), \quad \varphi(k, 0) = \varphi^* \quad (2.45)$$

- enfin, cette solution est:

- exponentiellement stable si toutes les valeurs propres de  $A(\varphi^*)$  sont dans le disque unité ouvert et toutes les valeurs propres de  $\frac{\partial E}{\partial \varphi}(\alpha_j^*, \varphi^*)$  sont à partie réelle strictement négative,
- instable si l'une des valeurs propres de  $A(\varphi^*)$  est à l'extérieur du disque unité fermé ou l'une des valeurs propres de  $\frac{\partial E}{\partial \varphi}(\alpha_j^*, \varphi^*)$  a sa partie réelle strictement positive.

Il est important de noter que, si un des  $\alpha_j^*$  est non nul,  $(X^*(k), \varphi^*)$ , la solution périodique correspondante du système gelé, est elliptique. Son prolongement en une solution périodique du système adaptatif peut cependant être hyperbolique.

**Exemple:** Appliquons cette propriété au cas  $t$  nul et posons:

$$\sigma = \text{signe}(\Re\{z_d\}) \quad (2.46)$$

Soit  $(\alpha^*, \varphi^*)$  une solution de (2.36),

- si  $\alpha^* = 0$  et  $\varphi^* \neq \sigma$ , le déterminant (2.44) s'écrit:

$$\begin{vmatrix} (-\varphi^*)^M - 1 & 0 \\ * & < 0 \end{vmatrix} \quad (2.47)$$

- si  $\alpha^* = \pm \sqrt{\frac{|d|^2 \sigma \Re\{z_d\}}{1 + \sigma \Re\{z_d\}} - \frac{|r|^2}{1 + \sigma \Re\{z_r\}}}$  et  $\varphi^* = \sigma$ , on a:

$$\begin{vmatrix} 0 & -M(-\varphi^*)^{M-1} \alpha^* \\ -2M\varphi^* \alpha^* & * \end{vmatrix} \quad (2.48)$$

On en déduit que, pour  $\varepsilon$  assez petit, le système a, pour  $t$  nul, une solution de période  $M$  exponentiellement stable si:

$$\frac{|r|^2}{|d|^2} > \frac{\sigma \Re\{z_d\}(1 + \sigma \Re\{z_r\})}{1 + \sigma \Re\{z_d\}} \quad (2.49)$$

instable si:

$$\frac{|r|^2}{|d|^2} < \frac{\sigma \Re\{z_d\}(1 + \sigma \Re\{z_r\})}{1 + \sigma \Re\{z_d\}} \quad (2.50)$$

et que, de plus, dans ce dernier cas, il existe une autre solution de période paire. Toutes ces solutions peuvent être approximées par:

$$\left. \begin{aligned} x(k) &= \Re \left\{ \frac{d}{z_d + \varphi^*} z_d^k + \frac{r}{z_r + \varphi^* z_r} z_r^k + \alpha^* (-\varphi^*)^{k+1} \right\} + O(\varepsilon) \\ \varphi(k) &= \varphi^* + O(\varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

Pour le cas  $t$  non nul, sans faire de calculs, nous pouvons dire:

- si  $\varphi^*$  n'est pas l'une des valeurs (2.26), le déterminant (2.44) est du type (2.47). Il existe donc une solution périodique de période  $M$ . Elle est exponentiellement stable si:

$$t\varphi^* \in ]-1, 1 - |\varphi^*|[ \quad (2.52)$$

- si  $\varphi^*$  est égal à  $\frac{1}{t+1}$  ou  $\frac{1}{t-1}$ ,  $V^*$  étant non nul et la matrice  $A(\varphi^*)^M - I$  étant de rang 1, on peut encore espérer avoir le déterminant (2.44) non nul.
- si  $\varphi^*$  est égal à  $-\frac{1}{t}$ , la matrice  $A(\varphi^*)^M - I$  étant nulle, le déterminant (2.44) est nul. On ne peut conclure à l'existence d'une solution périodique dans ce cas.

## 2.4 Ensembles intégraux

A la section précédente, nous avons mis en évidence des solutions périodiques qui sont des ensembles intégraux de structure très simple. Pour obtenir plus d'informations sur le comportement des solutions du système, nous cherchons maintenant des ensembles intégraux de structure plus complexe et contenant une famille de solutions. On exploite pour cela la propriété des deux échelles de temps:

$\varphi$  évoluant très lentement,  $X$  se rapproche (ou s'éloigne) beaucoup de son "régime" asymptotique (qui dépend de  $\varphi$ ) avant que  $\varphi$  ait bougé de façon significative.

On s'attend donc à trouver des solutions de (2.4) telles que  $X(k)$  s'écrivent en fonction de  $\varphi(k)$ . Il est important de noter à ce point que si cette propriété est vraie, elle n'a rien à voir avec une propriété de stationnarité de la suite  $u$ . Aussi, dans toute cette Section,  $u$  n'est supposée que définie et bornée sur  $]-\infty, \infty[$ .

Soit:

$$\mathcal{S} = \{ \theta \mid |\lambda\{A(\theta)\}| < 1 - \eta \} \quad (2.53)$$

Le système gelé (2.18) a pour chaque  $\varphi$  de  $\mathcal{S}$  une et une seule solution bornée pour  $k$  dans  $]-\infty, +\infty[$ . Elle est globalement exponentiellement stable et s'écrit:

$$M_0(\varphi, k) = \sum_{i=-\infty}^{k-1} A(\varphi)^{k-i} B(\varphi) u(i-1) \quad (2.54)$$

Posons alors:

$$M_0^1(\varphi, k) = M_0(\varphi, k) - \varepsilon \sum_{i=-\infty}^{k-1} A(\varphi)^{k-i} \frac{\partial M_0}{\partial \varphi}(\varphi, i+1) C(M_0(\varphi(i), i), \varphi(i), u(i), 0) \quad (2.55)$$

Pour le système (2.4), on obtient par application de la méthode de la transformée de graphe (Shub [21]):

**Propriété 2.4 ([14, Théorèmes 1 et 2])** Pour tout  $\varepsilon$  suffisamment petit, il existe une fonction de classe  $C^1$ -Lipschitz,

$$M_\varepsilon : \mathcal{S} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.56)$$

telle que:

1

$$\left. \begin{array}{l} X(k) = M_\varepsilon(\varphi(k), k) \\ \varphi(k+1) = \varphi(k) + \varepsilon C(M_\varepsilon(\varphi(k), k), \varphi(k), u(k), \varepsilon \gamma(k)) \end{array} \right\} \quad (2.57)$$

est une solution de (2.4) tant que:  $\varphi(k) \in \mathcal{S}$ .

2- Pour tout  $x$  strictement positif, il existe  $\tau(x)$  tel que, si  $\varepsilon$  est suffisamment petit,  $\tau(x)$  est strictement plus petit que 1 et pour toute solution  $(X(k), \varphi(k))$  de (2.4) on a:

$$\|X(k)\| \leq x \text{ et } \varphi(k) \in \mathcal{S} \implies \left\{ \begin{array}{l} X(k) se rapproche exponentiellement à \\ un taux au moins \tau(x) de M_\varepsilon(\varphi(k), k) \end{array} \right. \quad (2.58)$$

3- Etudier le système (2.4), restreint à ( $\|X(k)\| \leq x$ ,  $\varphi(k) \in \mathcal{S}$ ) est équivalent (au sens équivalence topologique orbitale avec phase asymptotique) à étudier le système triangulaire:

$$\left. \begin{array}{l} X(k+1) = A(\varphi^M(k))X(k) + B(\varphi^M(k))u(k) \\ \varphi^M(k+1) = \varphi^M(k) + \varepsilon C(M_\varepsilon(\varphi^M(k), k), \varphi^M(k), u(k), \varepsilon \gamma(k)) \end{array} \right\} \quad (2.59)$$

4- On peut approximer  $M_\varepsilon$  car, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit,

$$\frac{1}{\varepsilon} [M_\varepsilon(\varphi, k) - M_0(\varphi, k)] \text{ et } \frac{1}{\varepsilon^2} [M_\varepsilon(\varphi, k) - M_0^1(\varphi, k)] \text{ sont bornés sur } \mathcal{S} \times \mathbb{Z} \quad (2.60)$$

L'idée d'utiliser des variétés intégrales pour expliquer le comportement des solutions du système nous est venue lors d'un travail en collaboration avec Petar Kokotovic et Brade Riedle. On trouvera d'ailleurs une autre démonstration de l'existence d'une fonction Lipschitzienne vérifiant les points 1, 2 et 4 dans la thèse de Riedle [18, Théorème 3.3].

**Exemple:** D'après cette Propriété, pour tout  $\varepsilon$  suffisamment petit, on peut trouver deux fonctions  $\chi(\varphi, k, \varepsilon)$  et  $\chi_t(\varphi, k, \varepsilon)$  telles que:

- Pour  $|\varphi|$  inférieur à  $1 - \eta$ , on ait:

$$\begin{pmatrix} \chi(\varphi, k, \varepsilon) \\ \chi_t(\varphi, k, \varepsilon) \end{pmatrix} = \Re \left\{ \frac{d(1-t\bar{z}_d)}{z_d^2 + \varphi z_d - t\varphi} \begin{pmatrix} z_d \\ z_d - t \end{pmatrix} z_d^k + \frac{r}{z_r^2 + \varphi z_r - t\varphi} \begin{pmatrix} z_r \\ z_r - t \end{pmatrix} z_r^k \right\} + O(\varepsilon) \quad (2.61)$$

- Le transitoire de toute solution  $(x, x_t, \varphi)$  est expliqué par l'existence de constantes positives  $\alpha$  et  $\tau$ ,  $\tau < 1$  telles que, si  $|\varphi(k+j)|$  est inférieur à 1 pour tout  $j$  dans  $[0, q]$ , on a, pour tout  $i$  dans  $[0, q]$ :

$$\begin{pmatrix} |x(k+i) - x(\varphi(k+i), k+i, \varepsilon)| \\ + \\ |x_t(k+i) - x_t(\varphi(k+i), k+i, \varepsilon)| \end{pmatrix} \leq \alpha \tau^i \begin{pmatrix} |x(k) - x(\varphi(k), k, \varepsilon)| \\ + \\ |x_t(k) - x_t(\varphi(k), k, \varepsilon)| \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

- Enfin, les solutions de (2.16) peuvent être approximées (avec une erreur tendant exponentiellement vers zéro), tant que leur composante  $\varphi$  reste dans  $[-(1-\eta), 1-\eta]$ , par celles de:

$$\left. \begin{array}{l} x(k+1) = -\varphi(k)x_t(k) + d(k) - td(k-1) + r(k) \\ x_t(k+1) = -\varphi(k)x_t(k) - tx(k) + d(k) - td(k-1) + r(k) \\ \varphi(k+1) = \varphi(k) + \varepsilon \frac{\chi_t(\varphi(k), k, \varepsilon) [d(k) - td(k-1) - \varphi(k)\chi_t(\varphi(k), k, \varepsilon)]}{1 + \varepsilon\chi_t(\varphi(k), k, \varepsilon)^2} \end{array} \right\} \quad (2.63)$$

L'importance de la Propriété 2.4, illustrée par le point 3, est d'exhiber un ensemble intégral, graphe de la fonction  $M_\varepsilon$ , qui étant attractif, nous permet de comprendre le comportement des solutions tant que leur composante  $\varphi$  reste dans  $\mathcal{S}$ . Ainsi, d'après le point 2, les solutions limites que nous avons exhibées à la Section précédente sont dans cet ensemble si  $\varphi^*$  est dans  $\mathcal{S}$ . Elles sont donc aussi solutions de (2.59). Par ailleurs, grâce à la forme triangulaire de (2.59) (et le fait que  $\varphi(k)$  bouge lentement), on peut mettre en évidence deux régimes:

- un mouvement rapide transitoire caractérisé par une convergence exponentielle de la solution vers l'ensemble intégral,
- un mouvement lent asymptotique caractérisé par un déplacement le long de cet ensemble.

**Exemple:** Prenons le cas plus simple où:

$$d(k) = \text{constante}, \quad r(k) = 0 \quad (2.64)$$

Alors, pour toute solution  $(x, \varphi)$ , tant que  $|\varphi|$  reste inférieur à  $1 - \eta$ ,

- $\left| x(k) - \frac{d}{1 + \varphi(k)} - O(\varepsilon) \right|$  décroît exponentiellement,
- l'évolution de  $\varphi$  peut être approximée par:

$$\varphi(k+1) = \varphi(k) + \varepsilon \left( \frac{d}{1 + \varphi(k)} \right)^2 + O(\varepsilon^2) \quad (2.65)$$

et donc, la composante  $\varphi$  de la solution est strictement croissante.

On en conclut que, sous la condition (2.64), aucune solution de (2.17) ne peut satisfaire indéfiniment  $|\varphi(k)| < 1 - \eta$  (voir [4,15] pour une démonstration plus rigoureuse).

Une conséquence directe et importante en pratique de la Propriété 2.4 est:

**Propriété 2.5** Si la suite  $u$  est nulle et la fonction  $C$  vérifie (voir (2.2)):

$$C(Y, \varphi, v, \gamma) = \varepsilon^2 C \left( \frac{Y}{\varepsilon}, \varphi, \frac{v}{\varepsilon}, \varepsilon^2 \gamma \right) \quad (2.66)$$

alors, pour tout  $x$ , si  $\varepsilon$  est suffisamment petit, les solutions telles que pour un instant  $k_0$ , on ait:

$$\| X(k_0) \| \leq x \quad \text{et} \quad \varphi(k_0) \in \mathcal{S} \quad (2.67)$$

vérifient:

- $X(k)$  tends vers zéro exponentiellement,
- $\varphi(k)$  converge vers un point de  $\mathcal{S}$ .

**Exemple:** Supposons que le modèle interne puisse être choisi tel que:

$$d(k) - td(k-1) = 0 \quad , \quad r(k) - tr(k-1) = 0 \quad (2.68)$$

Dans ce cas (2.16) devient:

$$\left. \begin{array}{l} \xi(k+1) = -\varphi(k)x_t(k) \\ x_t(k+1) = -\varphi(k)x_t(k) - t\xi(k) \\ \varphi(k+1) = \varphi(k) + \varepsilon \frac{x_t(k)[d(k) - td(k-1) - \varphi(k)x_t(k)]}{1 + \varepsilon x_t(k)^2} \end{array} \right\} \quad (2.69)$$

avec:

$$\xi(k+1) = x(k+1) - r(k) \quad (2.70)$$

la Propriété 2.5 implique :

Si à l'instant  $k_0$ , on a:

$$|\varphi(k_0)| \leq 1 - \eta \quad (2.71)$$

et  $\varepsilon$  est suffisamment petit (fonction de  $\xi(k_0)$ ,  $x_t(k_0)$  et  $\eta$ ), alors la solution correspondante vérifie:

$x(k+1) - r(k)$  et  $x_t(k)$  tendent exponentiellement vers zéro et  $\varphi(k)$  converge.

La Propriété 2.5 met en évidence l'intérêt d'utiliser un modèle interne, remarque déjà faite avec le Lemme 1.6. Les conditions d'application sont simplement que la loi d'adaptation vérifie (2.2) et qu'il existe un ensemble non vide de  $\theta$  donnant un contrôleur linéaire stationnaire stabilisant le système à commander. Par contre le résultat n'est que local en  $\theta$  et  $\varepsilon$ .

Les Propriétés 2.4 et 2.5 ne s'appliquent que localement en  $\varphi$  puisque les valeurs propres de  $A(\varphi)$  doivent être de module strictement inférieur à 1. Pour des valeurs propres de module supérieur à 1, s'il existe un ensemble intégral, graphe d'une fonction de  $\varphi$ , on peut s'attendre à ce qu'il soit répulsif. Les solutions auraient donc tendance à s'éloigner de cet ensemble. Il pourrait donc sembler intéressant de l'exhiber pour obtenir des informations "non locales" sur ces solutions. L'exemple ci-dessous montre que cet a priori n'est pas toujours exact:

**Exemple:** Prenons le cas plus simple où:

$$d(k) = \text{constante} \quad , \quad r(k) = 0 \quad , \quad t = 0 \quad (2.72)$$

Dans [4,15], nous avons établi l'existence d'une constante strictement positive  $\eta$  telle que, pour  $|\varphi| > 1 + \eta$ , on peut trouver une fonction  $M_\varepsilon$ , bornée, Lipschitzienne dont le graphe est invariant et satisfait:

$$1-\frac{1}{\varepsilon}\left[M_\varepsilon(\varphi) - \frac{d}{1+\varphi}\right] \text{ est borné sur } \{|\varphi| > 1 + \eta\} \quad (2.73)$$

2- pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, il existe  $\tau < 1$  tel que pour toute solution  $(x(k), \varphi(k))$  vérifiant  $|\varphi(k)| > 1 + \eta$ , on ait:

$$|x(k+1) - M_\varepsilon(\varphi(k+1))| \geq \frac{1}{\tau} |x(k) - M_\varepsilon(\varphi(k))| \quad (2.74)$$

On en déduit que, si  $x(k)$  est différent de  $M_\varepsilon(\varphi(k))$ , le rapport signal sur bruit  $\frac{|x(k)|}{|\varphi|}$  augmente. En conséquence [4,15]:

Pour toute solution vérifiant à un instant  $k_0$ :

$$|\varphi(k_0)| > 1 + \eta \text{ et } x(k_0) \neq M_\varepsilon(\varphi(k_0)) \quad (2.75)$$

il existe un instant  $k_1$  tel que:

$$|\varphi(k_1)| < 1 + \eta \quad (2.76)$$

On en conclut que, sous la condition (2.72), aucune solution de (2.17) ne peut satisfaire indéfiniment  $|\varphi(k)| > 1 + \eta$

Bien que ceci n'ait pas été fait, la démonstration de l'existence et des propriétés d'hyperbolité d'ensembles intégraux localement sur des domaines connexes où  $A(\varphi)$  a un nombre constant de valeurs propres de module strictement inférieur à 1 et aucune de module égale à 1, ne devraient pas poser de problèmes techniques. En effet, un tel résultat appartient à la famille des Théorèmes connus sur la persistance sous de petites perturbations des ensembles invariants localement normalement hyperboliques (Hirsch, Pugh et Shub [7], Shub [21]). Techniquement, il pourrait être obtenu en combinant les méthodes de transformée de graphe (Shub [21]) et de diagonalisation par blocs résultant de la dichotomie exponentielle (Coppel [3]). L'exploitation de la propriété de point selle de cet ensemble intégral pour en tirer des informations "non locales" sur les solutions est donc a priori le "point dur" et son intérêt pourrait justifier de nouvelles recherches.

## 2.5 Moyennisation

Nous avons vu, au paragraphe précédent, l'importance du système (2.59). C'est un système triangulaire inférieur:

- Le sous-système en  $X$  est couplé mais il peut être considéré comme un système linéaire lentement variable. Son étude ne pose pas de difficultés théoriques (voir Coppel [3, Proposition 1.5]).

- Le sous-système en  $\varphi$ :

$$\varphi(k+1) = \varphi(k) + \varepsilon D(\varphi(k), k, \varepsilon) \quad (2.77)$$

$$D(\varphi, k, \varepsilon) = C(M_\varepsilon(\varphi, k), \varphi, u(k), \varepsilon\gamma(k)) \quad (2.78)$$

est non couplé. Par contre il est non linéaire et non autonome.

Pour étudier (2.77), nous allons encore tirer profit de la présence du petit paramètre  $\varepsilon$ . Nous avons en effet le résultat suivant, facilement démontré par récurrence et reposant sur les itérations de Picard:

**Lemme 2.1** Soit  $f(\varphi, k)$  une fonction de  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{Z} \times$  dans  $\mathbb{R}^p$ , bornée par  $S$ , de constante de Lipschitz en  $\varphi L_1$  et de constante de Lipschitz en  $\varphi$  de sa différentielle en  $\varphi L_2$ . Le produit de composition des  $I + \varepsilon f(., k)$  vérifie:

$$\left\| \bigcirc_{k=1}^M (I + \varepsilon f(., k)) - \left( I + \varepsilon \sum_{k=1}^M f(., k) \right) \right\| \leq \varepsilon^2 \frac{(1 + \varepsilon L_1)^M - M\varepsilon L_1 - 1}{(\varepsilon L_1)^2} S L_1 \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} \left\| \bigcirc_{k=1}^M (I + \varepsilon f(., k)) - \left[ I + \varepsilon \sum_{k=1}^M \left( f(., k) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varphi}(., k) \sum_{i=1}^{k-1} f(., i) \right) \right] \right\| &\leq \\ &\leq \varepsilon^3 \frac{(2 + \varepsilon L_1)(1 + \varepsilon L_1)^M - (1 + M\varepsilon L_1)^2 - (1 + \varepsilon L_1)}{2(\varepsilon L_1)^3} S (L_1^2 + S L_2) \end{aligned} \quad (2.80)$$

On peut "localiser" ce résultat en multipliant la fonction  $f$  par une fonction caractéristique régularisée (Lemme d'Urysohn).

Pour exploiter cette Propriété, introduisons un changement d'échelle de temps défini par une suite d'entiers  $M_i$  vérifiant:

$$|M_k| \leq M, \quad M_k \geq 0 \text{ pour } k \geq 0, \quad M_k \leq 0 \text{ pour } k \leq 0 \quad (2.81)$$

et par l'application:

$$K \longrightarrow k_K = \sum_{i=0}^K M_i \quad (2.82)$$

Posons:

$$E(\varphi^*, K) = \sum_{i=k_K}^{k_{K+1}-1} D(\varphi^*, k, 0) \quad (2.83)$$

Nous définissons alors le système:

$$\varphi^*(K+1) = \varphi^*(K) + \varepsilon E(\varphi^*(K), K) \quad (2.84)$$

La Propriété 2.6 et la régularité en  $\varepsilon$  de la fonction  $D$  nous permettent de tirer deux conclusions:

- Si  $\varphi(k)$  est solution de (2.77),  $\varphi(k_K)$  est une  $O(\varepsilon^2)$ -pseudo solution (voir Shub [21]) de (2.84), i.e.:

$$\|\varphi(k_{K+1}) - \varphi(k_K) - \varepsilon E(\varphi(k_K), K)\| \leq O(\varepsilon^2) \quad (2.85)$$

Notons que pour obtenir une approximation en  $O(\varepsilon^3)$ , il suffit d'utiliser un développement au premier ordre en  $\varepsilon$  de la fonction  $C$ , de remplacer  $M_\varepsilon$  par  $M_0^1$  donnée en (2.55) et d'utiliser l'approximation (2.80).

- Si (2.84) a une solution hyperbolique restant dans  $\mathcal{S}$ , il en est de même de (2.77). Ceci résulte encore une fois de la propriété de persistance, sous de petites perturbations, des ensembles invariants hyperboliques (Shub [21, Théorème 8.3], Hirsch, Pugh et Shub [7], Lefschetz [10, Theorem VI.7.3, Theorem VII.8.4], [1, Theorem 1.1.4])

Illustrons la propriété de pseudo solution:

**Exemple:** Considérons le cas où  $d$  et  $r$  vérifient (2.23), avec  $z_d$  et  $z_r$  satisfaisant (2.32) (il suffit en fait pour ce qui suit que (2.32) soit vérifié à un  $O(\varepsilon)$  près). Comme, avec (2.36), le système (2.84) s'écrit dans ce cas:

$$\begin{aligned} \varphi^*(K+1) &= \varphi^*(K) + \\ &+ \frac{\varepsilon M}{2} \left[ \frac{|d|^2 \Re\{z_d(1-tz_d)\}}{|z_d^2 + \varphi^*(K)z_d - t\varphi^*(K)|^2} - \frac{|r|^2 |z_r - t|^2}{|z_r^2 + \varphi^*(K)z_r - t\varphi^*(K)|^2} \varphi^*(K) \right] \end{aligned} \quad (2.86)$$

Les solutions de ce système sont croissantes dans le domaine:

$$\left\{ \varphi^* \left| \frac{|d|^2 \Re\{z_d(1-tz_d)\}}{|z_d^2 + \varphi^* z_d - t\varphi^*|^2} - \frac{|r|^2 |z_r - t|^2}{|z_r^2 + \varphi^* z_r - t\varphi^*|^2} \varphi^* > 0 \right. \right\}$$

$\varphi(k_K)$  étant une  $O(\varepsilon^2)$ -pseudo solution, elle est croissante dans le domaine:

$$\left\{ \varphi \left| \frac{|d|^2 \Re\{z_d(1-tz_d)\}}{|z_d^2 + \varphi^* z_d - t\varphi^*|^2} - \frac{|r|^2 |z_r - t|^2}{|z_r^2 + \varphi^* z_r - t\varphi^*|^2} \varphi^* > |O(\varepsilon)| \right. \right\}$$

Pour établir une propriété d'hyperbolicité pour les solutions de (2.84), il suffit d'étudier le linéarisé de ce système le long de ces solutions. Pour cela, la dichotomie exponentielle des systèmes linéaires lentement variables (Coppel [3]) est très utile. Le résultat suivant en est une application:

**Propriété 2.6** ([14, Théorème 3]) Soit  $L_2$  la constante de Lipschitz en  $\varphi^*$  de la différentielle en  $\varphi^*$  de la fonction  $E$ . Considérons l'ensemble  $\mathcal{P}(\varepsilon, \alpha)$ :

$$\mathcal{P}(\varepsilon, \alpha) = \left\{ \varphi^* \left| \begin{array}{l} \text{i)} \left\| \frac{\partial E}{\partial \varphi^*}(\varphi^*, K+1) - \frac{\partial E}{\partial \varphi^*}(\varphi^*, K) \right\| + \varepsilon L_2 \|E(\varphi^*, K)\| \leq \varepsilon \delta < \varepsilon \alpha^2 \\ \text{ii)} \max \left\{ \Re \left\{ \text{val.prop.} \left( \frac{\partial E}{\partial \varphi^*}(\varphi^*, K) \right) \right\} \right\} \leq -\alpha \end{array} \right. \right\} \quad (2.87)$$

Si  $\varepsilon$  est suffisamment petit, tant qu'une solution de (2.77) reste dans  $\mathcal{P}(\varepsilon, \alpha)$ , elle est localement exponentiellement attractive.

Remarquons que le point *i* de (2.87) signifie que le système (2.84) est lentement variable (premier terme du membre de gauche) et que la solution elle-même évolue lentement (deuxième terme). La première condition est réalisée si les suites  $u$  et  $\gamma$  sont  $M$ -périodiques ( $E$  ne dépend pas de  $K$ ). La deuxième l'est au voisinage d'un point d'équilibre de (2.84). Point d'équilibre de (2.84) et cas périodique étaient exactement l'objet de la Propriété 2.3. Ainsi, dans le cas périodique, la fonction  $E$  définie par (2.83) coincide avec la restriction à  $\mathcal{S}$  de celle donnée par (2.31). Et, si  $\varphi^*$  est dans  $\mathcal{S}$  et vérifie:

$$E(\varphi^*, K) = 0, \quad \max \left\{ \Re \left\{ \text{val.prop.} \left( \frac{\partial E}{\partial \varphi^*}(\varphi^*, K) \right) \right\} \right\} \leq -\alpha \quad (2.88)$$

(2.84) a un point fixe dans  $\mathcal{P}(\varepsilon, \alpha)$  et donc (2.77) a une solution  $M$ -périodique exponentiellement stable.

L'étude de conditions sous lesquelles l'ensemble  $\mathcal{P}(\varepsilon, \alpha)$  est non vide a suscité de nombreuses publications [17, 8, 19]. Elles sont pour la plupart reprises dans [1]. En particulier, supposant que les suites  $u$  et  $\gamma$  sont telles qu'il existe  $\varphi^*$  dans  $\mathcal{S}$  vérifiant le point *i* de (2.87), la réalisabilité du point *ii* est liée aux propriétés suivantes:

- la famille (avec (2.78) et (2.83)):

$$\left\{ \frac{\partial C}{\partial X}(M_0(\varphi^*, k), \varphi^*, u(k), 0) \frac{\partial M_0}{\partial \varphi}(\varphi^*, k) + \frac{\partial C}{\partial \varphi}(M_0(\varphi^*, k), \varphi^*, u(k), 0), \quad k \in [0, M-1] \right\}$$

engendre l'espace. Cette propriété est appelée "balayage persistant" dans certains cas. Typiquement, elle résulte d'une "excitation persistente" du signal  $u$  ([1, Théorème 2.7]).

- en plus d'une propriété de "balayage", on a besoin d'une propriété de signe. Dans le cas où la composante  $\varphi$  de la solution à laquelle on s'intéresse est constante, cette propriété de signe résulte, en général, d'une propriété de positivité d'un opérateur linéaire, dite "condition de positivité dépendant des signaux" (voir [1, sections 4.5, 3.4, 3.5]).

En fait tous les résultats que nous venons de présenter sont du type de ceux donnés par la méthode de "moyennisation". En effet, étant donné  $M$ , définissons la suite:

$$\bar{\varphi}(k) = \frac{1}{M} \sum_{i=k}^{k+M-1} \varphi(i) \quad (2.89)$$

Si  $\varphi$  est solution de (2.77),  $|\varphi(k) - \bar{\varphi}(k)|$  est un  $O(\varepsilon)$ . Alors la Propriété 2.6 nous permet de dire que  $\bar{\varphi}$  est  $O(\varepsilon^2)$ -pseudo solution:

$$\left\| \bar{\varphi}(k+1) - \bar{\varphi}(k) - \varepsilon \frac{1}{M} \sum_{i=k}^{k+M-1} D(\bar{\varphi}(k), i, 0) \right\| \leq O(\varepsilon^2) \quad (2.90)$$

C'est à dire que l'évolution de la moyenne de la solution de (2.77) est donnée, à un  $O(\varepsilon^2)$  près, par la moyenne en temps de son second membre.

La méthode de moyennisation a été très étudiée sous de nombreuses variantes et dans différents contextes. Sanders et Verhulst [20] ou Hale [6], pour ne citer qu'eux, font une bonne synthèse de cette méthode appliquée aux systèmes dynamiques déterministes.

Pour les systèmes adaptatifs, la justification de cette méthode dans le contexte stochastique est l'un des objectifs du livre de Benveniste, Metivier et Priouret [2]. Son application est à l'origine des résultats regroupés dans [1], Ljung et Soderström [11] et Benveniste, Metivier et Priouret [2]. Remarquons cependant que ces auteurs n'écrivent pas (2.77) explicitement, mais simplement son approximation obtenue en y remplaçant  $M_\varepsilon$  par  $M_0$ . On peut donc l'écrire sans avoir recours aux résultats de la Section 2.4, sa justification s'obtenant directement en remarquant que  $X(k)$  se rapproche exponentiellement d'un tube de rayon  $O(\varepsilon)$  autour de  $M_0$  puisque:

$$[X(k+1) - M_0(\varphi(k+1), k+1)] = A(\varphi(k)) [X(k) - M_0(\varphi(k), k)] + \Delta(k) \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= [A(\varphi(k+1)) - A(\varphi(k))] M_0(\varphi(k), k) + [B(\varphi(k+1)) - B(\varphi(k))] u(k) + \\ &\quad + A(\varphi(k+1)) [M_0(\varphi(k+1), k+1) - M_0(\varphi(k), k)] \end{aligned} \quad (2.92)$$

où, grâce à la régularité des fonctions,  $\Delta$  est d'ordre  $\varepsilon$ . L'inconvénient est que, n'ayant comme point de départ qu'une approximation, les résultats de stabilité de solutions du système réel ne sont obtenus que si des solutions du système approximant ont des propriétés d'hyperbolicité. En particulier, la Propriété 2.5 n'a pas été obtenue de cette façon.

## 2.6 Conclusion

Dans ce deuxième chapitre, nous avons regroupé un certain nombre d'outils, introduits par les mathématiciens pour étudier les systèmes dynamiques en général. Leur particularisation au cas des systèmes linéaires adaptatifs nous a permis de proposer une méthode d'analyse du comportement des solutions, applicable lorsque les signaux exogènes ont une petite amplitude ou lorsque l'adaptation est forcée à être lente, et pour des signaux exogènes périodiques (ou plus généralement stationnaires au sens  $l_2$ ). Cette méthode se décompose en:

1. étude du système gelé: recherche des solutions périodiques et analyse de leur stabilité,
2. mise en évidence de solutions périodiques du système réel, approximées par des solutions du système gelé,
3. mise en évidence d'ensembles intégraux sous forme de graphe, l'état étant fonction des paramètres,
4. exploitation de l'information donnée par la forme, la localisation et la répulsivité ou attractivité de ces ensembles intégraux,
5. étude du mouvement dans ces ensembles intégraux en utilisant une méthode de moyen-nisation.

L'application de cette méthode à notre exemple élémentaire de contrôleur réponse pile adaptatif, nous a permis de comprendre qualitativement le mécanisme intervenant dans un comportement oscillatoire se traduisant par des bouffées intermittentes des signaux [15,4].

# Bibliographie

- [1] Anderson B.D.O., Bitmead R.R., Johnson C.R., Kokotovic P.V., Kosut R.L., Mareels I.M.Y., Praly L., Riedle B.D.: *Stability of adaptive systems: Passivity and averaging analysis.* MIT Press, 1986.
- [2] Benveniste A., Metivier M., Priouret P.: *Algorithmes adaptatifs et approximations stochastiques: théorie et applications.* Masson, 1987
- [3] Coppel W.A.: *Dichotomies in stability theory.* Lecture Notes in Mat. 629. Springer Verlag 1978.
- [4] España M., Praly L.: *Global dynamic of linear adaptive system: an elementary worked example.* Rapport CAI. Octobre 1988.
- [5] Golden M.P., Ydstie B.E.: *Bifurcation in model reference adaptive control systems.* Rapport de: Department of chemical engineering, University of Massachusetts. Soumis pour publication dans Systems & Control Letters. 1988.
- [6] Hale J.K.: *Oscillations in non linear systems.* Mac Graw-Hill
- [7] Hirsch M.W., Pugh C.C., Shub M.: *Invariant manifolds.* Lecture Notes in Mat. 583. Springer Verlag 1976.
- [8] Kokotovic P., Riedle B., Praly L.: *On a stability criterion for continuous slow adaptation.* Systems & Control Letters 6, 7-14. June 1985.
- [9] LaSalle J. P.: *The stability and control of discrete processes.* Applied mathematical sciences 62. Springer Verlag. 1986.
- [10] Lefschetz S.: *Differential equations: Geometric theory.* Dover 1977
- [11] Ljung L., Soderström T.: *Theory and practice of recursive identification.* MIT Press (1984).
- [12] Mareels I.M.Y., Bitmead R.R.: *Non-linear dynamics in adaptive control: chaotic and periodic stabilization.* Automatica 22 (1987) 641-655.
- [13] Pomet J.-B., Coron J.-M., Praly L.: *About periodic solutions of adaptive systems in presence of periodic forcing terms.* Rapport CAI. Soumis pour publication dans Mathematics for Control, Signals and Systems. Novembre 1987

- [14] Praly L.: *Topological orbital equivalence with asymptotic phase for a two time scales discrete time system*. A paraître dans Mathematics of Control, Signals, and Systems. Springer Verlag.
- [15] Praly L., España M.: *An example of oscillations in adaptive linear control*. Proceed. 5th Yale Workshop on Applications of adaptive systems theory. Yale University (1987).
- [16] Praly L., Pomet J.-B.: *Periodic solutions in adaptive systems: the regular case*. Proceed; 10th IFAC world congress on automatic control. Vol. 10. July 1987
- [17] Praly L., Rhode D.S.: *Local analysis of a one step ahead adaptive controller*. Proceed. 24th IEEE Conference on Decision and Control. December 1985.
- [18] Riedle B.: *Integral manifolds of slow adaptation*. Ph. D. Dissertation., Electrical Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, USA, 1986.
- [19] Riedle B., Praly L., Kokotovic P.: *Examination of the SPR condition in output error parameter estimation*. Automatica V. 22, N. 4, 495-498, 1986.
- [20] Sanders J.A., Verhulst F.: *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. Springer Verlag 1985.
- [21] Shub M.: *Stabilité globale des systèmes dynamiques*. Astérisque 56. Société Mathématique de France. 1978.



## **Annexe A**

### **Compléments techniques sur le chapitre 1**



## A.1 Une norme instationnaire adaptée

Soit  $F(\cdot, k)$  une suite de matrices telle que, pour tout  $k$ ,  $l$  et  $\theta$  (qui peut être un nombre entier):

$$\prod_{j=k+1}^{k+l} \|F(\theta, j)\| \leq f\zeta^l \quad (\text{A.1})$$

où  $f$  et  $\zeta$  sont des constantes positives et  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne. Soit  $\rho$  une constante strictement supérieure à  $\zeta$ , pour chaque  $k$  et  $\theta$ , nous définissons une norme vectorielle  $\|\cdot\|_{\theta, k}$  par:

$$\|X\|_{\theta, k} = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^{-i} \left\| \prod_{j=k+1}^{k+i} F(\theta, j) X \right\| \quad (\text{A.2})$$

**Propriété A.1** Pour tout entier  $k$  et tout  $\theta$ , on a les inégalités suivantes:

$$1. \|X\| \leq \|X\|_{\theta, k} \leq f \frac{\rho}{\rho - \zeta} \|X\| \quad (\text{A.3})$$

$$2. \|F(\theta, k+1) X\|_{\theta, k+1} \leq \left( \rho - \frac{\rho - \zeta}{f} \right) \|X\|_{\theta, k} \quad (\text{A.4})$$

3. Si pour tout  $k$ , on a:

$$\|F(\theta, k) - F(\varphi, k)\| \leq f_1 \|\theta - \varphi\| \quad (\text{A.5})$$

alors:

$$\|X\|_{\theta, k} \leq \left( 1 + \frac{ff_1}{\rho - \zeta} \|\theta - \varphi\| \right) \|X\|_{\varphi, k} \quad (\text{A.6})$$

**Preuve:**

$$1 - \|X\|_{\theta, k} \leq f \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\zeta}{\rho} \right)^i \|X\| \leq f \frac{\rho}{\rho - \zeta} \|X\| \quad (\text{A.7})$$

2- Posons:

$$Y = F(\theta, k+1) X \quad (\text{A.8})$$

On obtient:

$$\|Y\|_{\theta, k+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^{-i} \left\| \prod_{j=k+2}^{k+i+1} F(\theta, j) Y \right\| \quad (\text{A.9})$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \rho^{-i} \left\| \prod_{j=k+1}^{k+i} F(\theta, j) X \right\| \quad (\text{A.10})$$

$$= \rho \sum_{l=1}^{\infty} \rho^{-l} \left\| \prod_{j=k+1}^{k+l} F(\theta, j) X \right\| \quad (\text{A.11})$$

$$= \rho \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \rho^{-i} \left\| \prod_{j=k+1}^{k+i} F(\theta, j) X \right\| - \|X\| \right] \quad (\text{A.12})$$

$$\leq \rho \left( 1 - \frac{\rho - \zeta}{f\rho} \right) \|X\|_{\theta, k} \quad (\text{A.13})$$

3- Les séries étant absolument convergentes, l'inégalité triangulaire nous donne:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \rho^{-i} \left\| \prod_{j=k+1}^{k+i} F(\theta, j) X \right\| &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \rho^{-i} \left\| \prod_{j=k+1}^{k+i} F(\varphi, j) X \right\| + \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\infty} \rho^{-i} \left\| \left[ \prod_{j=k+1}^{k+i} F(\theta, j) - \prod_{j=k+1}^{k+i} F(\varphi, j) \right] X \right\| \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Par ailleurs, on établit par récurrence:

$$\begin{aligned} \left\| \left[ \prod_{j=k+1}^{k+i} F(\theta, j) - \prod_{j=k+1}^{k+i} F(\varphi, j) \right] X \right\| &= \\ &= \left\| \sum_{l=0}^{i-1} \prod_{j=k+l+2}^{k+i} F(\theta, j) [F(\theta, k+l+1) - F(\varphi, k+l+1)] \prod_{j=k+1}^{k+l} F(\varphi, j) X \right\| \\ &\leq \sum_{l=0}^{i-1} f \zeta^{i-l-1} f_1 \|\theta - \varphi\| \left\| \prod_{j=k+1}^{k+l} F(\varphi, j) X \right\| \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

La conclusion vient alors de l'inégalité:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \rho^{-i} \left\| \left[ \prod_{j=k+1}^{k+i} F(\theta, j) - \prod_{j=k+1}^{k+i} F(\varphi, j) \right] X \right\| &\leq \\ &\leq \sum_{l=0}^{\infty} f f_1 \|\theta - \varphi\| \rho^{-l} \left\| \prod_{j=k+1}^{k+l} F(\varphi, j) X \right\| \frac{1}{\rho} \sum_{i=l+1}^{\infty} \left( \frac{\zeta}{\rho} \right)^{i-l-1} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

## A.2 Démonstration du Lemme 1.1

Commençons par remarquer que, grâce à l'hypothèse du Lemme et à la convexité de la fonction  $x^p$  pour  $p \geq 1$ , nous avons:

$$\frac{1}{k} \sum_{i=j+1}^{j+k} \| \theta(i) - \theta(i-1) \| \leq \left( \frac{\beta}{k} + \alpha^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{A.17})$$

et, par ailleurs, comme on peut le vérifier en dérivant en  $\frac{\beta}{k}$ , pour tout  $k$  supérieur ou égal à 1:

$$\left( \frac{\beta}{k} + \alpha^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \alpha + \frac{1}{k} \frac{\beta}{p} \alpha^{1-p} \quad (\text{A.18})$$

Maintenant, posons pour  $i$  dans  $[1, k]$ :

$$\Pi(i) = F[\theta(j+i), j+i] \Pi(i-1) , \quad \Pi(0) = I \quad (\text{A.19})$$

Utilisons la norme (A.2) pour définir:

$$x(i) = \|\Pi(i)\|_{\theta(i+j), i+j} \quad (\text{A.20})$$

Avec les hypothèses du Lemme, la Propriété A.1 nous donne:

$$x(0) = \|I\|_{\theta(j), j} \leq \frac{f\rho}{\rho - \zeta} \quad (\text{A.21})$$

et, par récurrence:

$$\|\Pi(k)\| \leq x(k) \leq x(0) \prod_{i=1}^k \gamma(i) \quad (\text{A.22})$$

avec:

$$\gamma(i) = \left( 1 + \frac{ff_1}{\rho - \zeta} \|\theta(j+i) - \theta(j+i-1)\| \right) \left( \rho - \frac{\rho - \zeta}{f} \right) \quad (\text{A.23})$$

On obtient alors, en utilisant la concavité de la fonction Logarithme:

$$\|\Pi(k)\| \leq \frac{f\rho}{\rho - \zeta} \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \gamma(i) \right)^k \quad (\text{A.24})$$

$$\leq \frac{f\rho}{\rho - \zeta} \left( \rho - \frac{\rho - \zeta}{f} \right)^k \left( 1 + \frac{ff_1}{\rho - \zeta} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|\theta(j+i) - \theta(j+i-1)\| \right)^k \quad (\text{A.25})$$

$$\leq f(k) \left[ \left( \rho - \frac{\rho - \zeta}{f} \right) \left( 1 + \frac{ff_1\alpha}{\rho - \zeta} \right) \right]^k \quad (\text{A.26})$$

en notant la bornitude de la suite  $f$  définie par:

$$\underline{f}(k) = \frac{f\rho}{\rho - \zeta} \left( 1 + \frac{1}{k} \frac{\beta f f_1 \alpha (\rho - \zeta)}{(\rho - \zeta + f f_1 \alpha) p \alpha^p} \right)^k \quad (\text{A.27})$$

### A.3 Démonstration de (1.15)

Choisissons  $\rho$  inférieur à 1, supérieur à  $\tau$  et strictement plus grand que  $\lambda$ . Posons:

$$S(k) = \sum_{i=0}^k \rho^{-2i} \|X(i)\|^2 \quad (\text{A.28})$$

(1.13) nous donne:

$$\begin{aligned} S(k) &\leq \|X(0)\|^2 \frac{c_1 \rho^2}{\rho^2 - \lambda^2} + \frac{c_2 \rho^{-2(k+1)}}{1 - \rho^{-2}} + \gamma \sum_{i=0}^k \rho^{-2i} \sum_{j=0}^{i-1} \lambda^{2(i-1-j)} \|\eta(j)\|^2 \\ &\leq \|X(0)\|^2 \frac{c_1 \rho^2}{\rho^2 - \lambda^2} + \frac{c_2 \rho^{-2(k+1)}}{1 - \rho^{-2}} + \frac{\gamma}{\rho^2 - \lambda^2} \sum_{j=0}^{k-1} \rho^{-2j} \|\eta(j)\|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Avec (1.14) et puisque  $\rho^{2(k-i)}$  est plus grand que  $\tau^{2(k-i)}$ , on obtient:

$$S(k) \leq \|X(0)\|^2 \frac{c_1 \rho^2}{\rho^2 - \lambda^2} + \frac{c_2 \rho^{-2(k+1)}}{1 - \rho^{-2}} + \frac{c_3 \gamma \rho^{-2k}}{(1 - \rho^{-2})(\rho^2 - \lambda^2)} + \frac{\gamma}{\rho^2 - \lambda^2} \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_1(j) S(j) \quad (\text{A.31})$$

Le Lemme de Gronwall nous donne alors deux constantes  $d_1$  et  $d_2$  telles que:

$$S(k) \leq d_1 \|X(0)\|^2 + d_2 \rho^{-2k} + \sum_{j=0}^{k-1} \prod_{i=j+1}^{k-1} \left(1 + \frac{\gamma \gamma_1(i)}{\rho^2 - \lambda^2}\right) \frac{\gamma \gamma_1(j)}{\rho^2 - \lambda^2} (d_1 \|X(0)\|^2 + d_2 \rho^{-2j}) \quad (\text{A.32})$$

Tirant profit de la concavité de la fonction Logarithme, nous avons:

$$\prod_{i=j+1}^{k-1} \left(1 + \frac{\gamma \gamma_1(i)}{\rho^2 - \lambda^2}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{k-j-1} \sum_{i=j+1}^{k-1} \frac{\gamma \gamma_1(i)}{\rho^2 - \lambda^2}\right)^{k-j-1} \quad (\text{A.33})$$

Alors, puisque:

$$\rho^{-2k} \|X(k)\|^2 \leq S(k) \quad (\text{A.34})$$

on voit que la suite  $X$  est bornée si pour tous  $j$  et  $k$ :

$$\rho^2 \left(1 + \frac{1}{k-j-1} \sum_{i=j+1}^{k-1} \frac{\gamma \gamma_1(i)}{\rho^2 - \lambda^2}\right) \leq 1 - \varepsilon \quad (\text{A.35})$$

## A.4 Démonstration de la Propriété 1.1

Soit  $h$  le 2-vecteur réponse impulsionnelle dont la fonction de transfert est:

$$H(z^{-1}) = \left( A_m(z^{-1}) - \frac{P_m(z^{-1})}{P(z^{-1})} A(z^{-1}) \quad , \quad z^{-1} \left[ \frac{P_m(z^{-1})}{P(z^{-1})} B(z^{-1}) - B_m(z^{-1}) \right] \right) \quad (\text{A.36})$$

De même, associons  $g$  à:

$$G(z^{-1}) = \frac{P_m(z^{-1})}{P(z^{-1})} \quad (\text{A.37})$$

L'équation (1.18) et la nullité de  $h(0)$  nous donnent:

$$d_m(k) = \sum_{j=0}^{k-1} h(k-j) \begin{pmatrix} y(j) \\ u(j) \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^k g(k-j) d(j) + \delta(k) \quad (\text{A.38})$$

où  $P(z^{-1})$  ayant tous ses zéros dans le disque ouvert de rayon  $\mu$ ,  $\delta$  est une suite  $\mu$ -exponentiellement décroissante vérifiant:

$$P(q^{-1})\delta(k) = 0 \quad (\text{A.39})$$

À toute suite  $u$  et pour tout instant  $k$ , associons la suite  $u_k$ , définie par:

$$\left. \begin{aligned} u_k(j) &= u(j) && \text{si } k \leq j \\ &= 0 && \text{si } k > j \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.40})$$

On remarque:

$$\sum_{j=0}^{k+1} \mu^{-2j} \left[ \sum_{l=0}^{j-1} h(j-l) \begin{pmatrix} y(l) \\ u(l) \end{pmatrix} \right]^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \sum_{l=1}^j \frac{h(l)}{\mu^l} \mu^{l-j} \begin{pmatrix} y_k(j-l) \\ u_k(j-l) \end{pmatrix} \right]^2 \quad (\text{A.41})$$

La suite  $\begin{pmatrix} y_k \\ u_k \end{pmatrix}$  étant à support fini et la suite  $\mu^{-l} h(l)$  étant sommable, on peut appliquer le Théorème de Parseval pour obtenir:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \sum_{l=1}^j \frac{h(l)}{\mu^l} \mu^{l-j} \begin{pmatrix} y_k(j-l) \\ u_k(j-l) \end{pmatrix} \right]^2 &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-ij\theta) \sum_{l=1}^j \frac{h(l)}{\mu^l} \mu^{l-j} \begin{pmatrix} y_k(j-l) \\ u_k(j-l) \end{pmatrix} \right\|^2 d\theta \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\| \sum_{l=1}^{\infty} \frac{h(l)}{\mu^l} \exp(-il\theta) \sum_{j=0}^k \frac{\exp(-ij\theta)}{\mu^j} \begin{pmatrix} y_k(j) \\ u_k(j) \end{pmatrix} \right\|^2 d\theta \quad (\text{A.43})$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\| H \left( \frac{\exp(-i\theta)}{\mu} \right) \right\| \left\| \sum_{j=0}^k \frac{\exp(-ij\theta)}{\mu^j} \begin{pmatrix} y_k(j) \\ u_k(j) \end{pmatrix} \right\|^2 d\theta \quad (\text{A.44})$$

$$\leq \sup_{|z|=\mu} \left\{ \|H(z^{-1})\| \right\} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\| \sum_{j=0}^k \frac{\exp(-ij\theta)}{\mu^j} \begin{pmatrix} y_k(j) \\ u_k(j) \end{pmatrix} \right\|^2 d\theta \quad (\text{A.45})$$

Appliquant à nouveau le Théorème de Parseval, on en déduit le point 1.

Pour le point 2, l'inégalité de Schwarz nous donne:

$$\left[ \sum_{j=0}^{k-1} h(k-j) \begin{pmatrix} y(j) \\ u(j) \end{pmatrix} \right]^2 \leq \mu^{2k} \sum_{j=0}^{k-1} \left\| \frac{h(k-j)}{\mu^{k-j}} \right\|^2 \sum_{j=0}^{k-1} \mu^{-2j} \begin{pmatrix} y(j) \\ u(j) \end{pmatrix}^2 \quad (\text{A.46})$$

Le résultat est alors obtenu avec le Théorème de Parseval:

$$\sum_{j=0}^{k-1} \left\| \frac{h(k-j)}{\mu^{k-j}} \right\|^2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \frac{h(k-j)}{\mu^{k-j}} \right\|^2 = \oint_{|z|=\mu} \|H(z^{-1})\|^2 \frac{dz}{2i\pi z} \quad (\text{A.47})$$

## A.5 Lemme A.1

**Lemme A.1** Soit  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et  $h$  des suites de réels positifs telles que  $h$  soit décroissante et, pour tout  $k$ , on ait:

$$\sum_{i=0}^k u(i) \leq v(k) + \sum_{i=0}^k w(i) \quad (\text{A.48})$$

Pour tout  $k$ , on a aussi:

$$\sum_{i=0}^k h(i) u(i) \leq \sum_{i=0}^k h(i) v(i) + \sum_{i=0}^k h(i) w(i) \quad (\text{A.49})$$

**Preuve:** Posons (de même pour  $w$ ):

$$U(k) = \sum_{i=0}^k u(i) \quad , \quad U(-1) = 0 \quad (\text{A.50})$$

On a:

$$\sum_{i=0}^k h(i) u(i) = \sum_{i=0}^k h(i) [U(i) - U(i-1)] \quad (\text{A.51})$$

$$= h(k) U(k) + \sum_{i=0}^{k-1} U(i) [h(i) - h(i+1)] \quad (\text{A.52})$$

$$\leq h(k) [v(k) + W(k)] + \sum_{i=0}^{k-1} [v(i) + W(i)] [h(i) - h(i+1)] \quad (\text{A.53})$$

$$\leq \sum_{i=0}^k h(i) v(i) + \sum_{i=0}^k h(i) w(i) \quad (\text{A.54})$$

## A.6 A propos des inégalités (1.24)-(1.27)

**Lemme A.2** 1- Pour tout  $\mu$  plus grand que  $\tau$ ,

$$\tau^k \|d_m\|_{\tau,k} \leq \beta_\infty(k) + \gamma_\infty s_\tau(k) \quad \forall k \quad (\text{A.55})$$

implique pour tout  $\delta$  positif:

$$\mu^k \|d_m\|_{\mu,k} \leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \mu^k \|\beta_\infty\|_{\mu,k} + (1 + \delta) \frac{\mu}{\tau} \gamma_\infty s_\mu(k) \quad \forall k \quad (\text{A.56})$$

2- Soient  $C(k)$  un polynôme instationnaire  $\tau$ -exponentiellement stable et  $D(k)$  un polynôme instationnaire à coefficients bornés. Il existe des constantes  $c, d, \lambda, \lambda$  étant strictement inférieure à  $\tau$ , telles que, pour toute suite  $w$  définie par:

$$C(k, q^{-1}) w(k) = D(k, q^{-1}) d_m(k) \quad (\text{A.57})$$

on ait les implications suivantes:

$$1 \quad \tau^k \|d_m\|_{\tau,k} \leq \beta_\infty(k) + \gamma_\infty s_\tau(k) \quad (\text{A.58})$$

implique

$$\tau^k \|w\|_{\tau,k} \leq \left(\frac{cd\tau}{\tau - \lambda} \beta_\infty(k) + \delta_\infty(k)\right) + \frac{cd\tau}{\tau - \lambda} \gamma_\infty s_\tau(k) \quad (\text{A.59})$$

$$2. \quad |d_m(k)| \leq \beta_2(k) + \gamma_2 s_\tau(k) \quad (\text{A.60})$$

implique

$$|w(k)| \leq \left(cd \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \beta_2(i) + \delta_2(k)\right) + \frac{cd\tau}{\tau - \lambda} \gamma_2 s_\tau(k) \quad (\text{A.61})$$

où  $\delta_\infty$ , suite  $\tau$ -bornée, et  $\delta_2$ , suite  $\tau$ -exponentiellement décroissante, ne dépendent que des conditions initiales de  $w$ .

**Preuve:** 1- On applique le Lemme A.1 en notant que:

\* pour tout  $\delta$  positif, (A.55) implique, pour tout  $k$ :

$$\sum_{i=0}^k \tau^{-2i} d_m(i)^2 \leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \tau^{-2k} \beta_\infty(k) + \frac{1 + \delta}{\tau^2} \gamma_\infty \sum_{i=0}^k \tau^{-2(i-1)} [u(i-1)^2 + y(i-1)^2] \quad (\text{A.62})$$

- la suite  $\tau^{2k} \mu^{-2k}$  est décroissante si  $\mu$  est plus grand que  $\tau$

2- D'après (1.23) et (A.57), on a pour tout  $k$ :

$$|w(k)| \leq c \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \left| \sum_{j=0}^{n_D} D_j(i) d_m(i-j) \right| + \delta(k) \quad (\text{A.63})$$

où  $\lambda$  est strictement plus petit que  $\tau$ ,  $\delta$  est  $\tau$ -exponentiellement décroissante,  $n_D$  est le degré (uniforme) de  $D$  et  $D_j$  est la suite de son  $j^{\text{ème}}$  coefficient. De l'inégalité:

$$\sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \left| \sum_{j=0}^{n_D} D_j(i) d_m(i-j) \right| \leq n_D \sup_{i,j} \{|D_j(i)|\} \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} |d_m(i)| \quad (\text{A.64})$$

on déduit l'existence d'une constante  $d$  telle que:

$$|w(k)| \leq cd \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} |d_m(i)| + \delta(k) \quad (\text{A.65})$$

On obtient alors:

$$\|w\|_{\tau,k} \leq cd \left\| \sum_{i=0}^j \lambda^{j-i} d_m(i) \right\|_{\tau,k} + \|\delta\|_{\tau,k} \quad (\text{A.66})$$

Appliquant l'inégalité de Schwarz, (A.59) résulte de:

$$\sum_{j=0}^k \tau^{-2j} \left| \sum_{i=0}^j \lambda^{j-i} d_m(i) \right|^2 \leq \frac{\tau}{\tau - \lambda} \sum_{j=0}^k \tau^{-2j} \sum_{i=0}^j (\tau \lambda)^{j-i} d_m(i)^2 \quad (\text{A.67})$$

$$\leq \frac{\tau}{\tau - \lambda} \sum_{i=0}^k \tau^{-2i} d_m(i)^2 \sum_{j=i}^k \left[ \frac{\lambda}{\tau} \right]^{j-i} \quad (\text{A.68})$$

$$\leq \frac{\tau^2}{(\tau - \lambda)^2} \sum_{i=0}^k \tau^{-2i} d_m(i)^2 \quad (\text{A.69})$$

et du fait que si  $\delta$  est  $\tau$ -exponentiellement décroissante,  $\tau^k \|\delta\|_{\tau,k}$  est  $\tau$ -bornée.

On établit (A.61) à partir de (A.69) en remarquant:

$$\sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} s_{\tau}(i) = \sum_{i=0}^k \left[ \frac{\lambda}{\tau} \right]^{k-i} \tau^{k-i} s_{\tau}(i) \quad (\text{A.70})$$

$$\leq \frac{\tau}{\tau - \lambda} s_{\tau}(k) \quad (\text{A.71})$$

la suite  $\tau^{-k} s_{\tau}(k)$  étant croissante.

## A.7 Démonstration du Lemme 1.2

Posons:

$$S(k) = \|d_m\|_{\mu,k}^2 = \sum_{i=0}^k \mu^{-2i} d_m(i)^2 \quad (\text{A.72})$$

Utilisant la croissance de  $\mu^{-k}\sigma(k)$  et la positivité de  $S$ , on obtient:

$$\sum_{i=k+1}^{k+l} \left[ \frac{d_m(i)}{\sigma(i)} \right]^2 = \sum_{i=k+1}^{k+l} \frac{\mu^{-2i} d_m(i)^2}{\mu^{-2i} \sigma(i)^2} \quad (\text{A.73})$$

$$= \sum_{i=k+1}^{k+l} \frac{S(i) - S(i-1)}{\mu^{-2i} \sigma(i)^2} \quad (\text{A.74})$$

$$\leq \frac{S(k+l)}{\mu^{2(k+l)} \sigma(k+l)^2} + \sum_{k+1}^{k+l-1} S(i) \left[ \frac{1}{\mu^{-2i} \sigma(i)^2} - \frac{1}{\mu^{-2(i+1)} \sigma(i+1)^2} \right] \quad (\text{A.75})$$

$$\leq \sup_{i \in [k+1, k+l]} \left\{ \frac{S(i)}{\mu^{-2i} \sigma(i)^2} \right\} \left[ 1 + \sum_{i=k+1}^{k+l-1} \frac{\mu^{-2(i+1)} \sigma(i+1)^2 - \mu^{-2i} \sigma(i)^2}{\mu^{-2(i+1)} \sigma(i+1)^2} \right] \quad (\text{A.76})$$

$$\leq \sup_{i \in [k+1, k+l]} \left\{ \frac{S(i)}{\mu^{-2i} \sigma(i)^2} \right\} \left[ 1 + \log \left( \frac{\mu^{-2(k+l)} \sigma(k+l)^2}{\mu^{-2(k+1)} \sigma(k+1)^2} \right) \right] \quad (\text{A.77})$$

La conclusion résulte alors directement de (1.31).

## A.8 Démonstration de la Propriété 1.2

$s_\mu$  en fonction de  $s_{p\mu}$ :

De la définition de  $s_{p\mu}$  on déduit:

$$\mu^k \left\| \begin{array}{c} y_p - y_d \\ u_p \end{array} \right\|_{\mu,k} \leq s_{p\mu}(k+1) + \mu^k \|y_d\|_{\mu,k} \quad (\text{A.78})$$

Par ailleurs, la matrice polynomiale  $\begin{pmatrix} U_y & 0 \\ 0 & U_u \end{pmatrix}$  est  $\mu$ -exponentiellement stable par hypothèse. Avec la bornitude de la suite  $y_d$ , Le Lemme A.2 nous garantie l'existence de constantes  $\gamma$  et  $\beta$  telles que:

$$s_\mu(k+1) = \mu^k \left\| \begin{array}{c} y \\ u \end{array} \right\|_{\mu,k} \leq \beta + \gamma s_{p\mu}(k+1) \quad (\text{A.79})$$

$s_{p\mu}$  en fonction de  $s_\mu$ :

De même, puisque:

$$s_\mu(k+1) = \mu^k \left\| \begin{array}{c} y \\ u \end{array} \right\|_{\mu,k} \quad (\text{A.80})$$

et la matrice:

$$\begin{pmatrix} U_y - V_y T & -q^{-1} W_y \\ V_u & W_u \end{pmatrix}$$

est  $\mu$ -exponentiellement stable, il existe  $\gamma$  et une suite  $\delta_\infty$   $\mu$ -bornée telles que:

$$\mu^k \left\| \begin{array}{c} y_p - y_d \\ T u_p \end{array} \right\|_{\mu,k} \leq \delta_\infty(k) + \gamma s_\mu(k+1) \quad (\text{A.81})$$

Donc, si  $s_\mu$  tend vers zéro, il en est de même de  $y_p - y_d$  et  $T u_p$ . Enfin, notre conclusion est une conséquence directe de l'hypothèse (1.35) puisqu'elle permet d'écrire:

$$\mu^{-k} s_{p\mu}(k+1) = \left\| \begin{array}{c} y_p \\ u_p \end{array} \right\|_{\mu,k} \leq \mu^{-k} \beta_u + (1 + \gamma_u) \left[ \left\| \begin{array}{c} y_p - y_d \\ T u_p \end{array} \right\|_{\mu,k} + \|y_d\|_{\mu,k} \right] \quad (\text{A.82})$$

**Point 2:**

Avec les expressions de  $A$  et  $B$  données en (1.40), on obtient:

$$A(q^{-1})y(k) - B(q^{-1})u(k-1) = \Delta(q^{-1})T(q^{-1}) [d(k) - A_p(q^{-1})y_d(k)] \quad (\text{A.83})$$

où:

$$\Delta = U_y - V_y T + q^{-1} V_u W_y \quad (\text{A.84})$$

Le résultat énoncé est donc une conséquence directe de la Propriété 1.1.

## A.9 Démonstration de la Propriété 1.3

Notons tout d'abord que d'après (1.53),  $A_m(k)$  et  $S$  étant unitaires,  $y(k) - d_m(k)$  est une combinaison linéaire (finie) de  $u(k-i)$ ,  $y(k-i)$ ,  $i \geq 1$ . Donc,  $y(k)$  et, par ailleurs,  $u(k-1)$  vérifient aussi une inégalité du type (1.54) ou (1.55). Il en est de même de  $z$  et  $Z$  d'après le Lemme A.2,  $\det\{U\}$  étant  $\mu$ -exponentiellement stable.

Par ailleurs, d'après (1.56), (1.57) et (1.53), on a:

$$w_\theta(k) = \sum_{i=0}^k h_p(k, i) d_m(i) + \sum_{i=1}^k h_\Delta(k, i) \begin{pmatrix} y(i-1) \\ u(i-1) \end{pmatrix} + \delta(k) \quad (\text{A.85})$$

où  $\delta$  vérifie:

$$\det\{U(q^{-1})\} \delta(k) = 0 \quad (\text{A.86})$$

La propriété de  $\det\{U\}$  implique l'existence d'une constante positive  $\lambda$ , strictement plus petite que  $\mu$ , telle que les suites:

$$\sum_{i=0}^k \left[ \frac{h_p(k, i)}{\lambda^{k-i}} \right]^2 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^k \left[ \frac{\|h_\Delta(k, i)\|}{\lambda^{k-i}} \right]^2$$

sont bornées.

Si (1.54) est vérifiée, on a:

$$\begin{aligned} \mu^k \|w_\theta\|_{\mu, k} &\leq \sqrt{\sum_{i=0}^k \mu^{2(k-i)} \left[ \sum_{j=0}^i h_p(i, j) d_m(j) \right]^2} + \\ &\quad + \sqrt{\sum_{i=0}^k \mu^{2(k-i)} \left[ \sum_{j=0}^i h_\Delta(i, j) \begin{pmatrix} y(i-1) \\ u(i-1) \end{pmatrix} \right]^2} + \sqrt{\sum_{i=0}^k \mu^{2(k-i)} \delta(i)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

L'inégalité de Schwarz et la définition (1.60) nous donnent:

$$\sum_{i=0}^k \mu^{2(k-i)} \left[ \sum_{j=0}^i h_p(i, j) d_m(j) \right]^2 \leq \sum_{i=0}^k \mu^{2(k-i)} \left[ \sum_{l=0}^i \left( \frac{h_p(i, l)}{\lambda^{i-l}} \right)^2 \sum_{j=0}^i \lambda^{2(i-j)} d_m(j)^2 \right] \quad (\text{A.88})$$

$$\leq \sum_{j=0}^k \mu^{2(k-j)} d_m(j)^2 \left[ \sum_{i=j}^k \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{2(i-j)} \sum_{l=0}^i \left( \frac{h_p(i, l)}{\lambda^{i-l}} \right)^2 \right] \quad (\text{A.89})$$

$$\leq \gamma_p^2 \sum_{j=0}^k \mu^{2(k-j)} d_m(j)^2 \quad (\text{A.90})$$

De la même façon, on obtient:

$$\sum_{i=0}^k \mu^{2(k-i)} \left[ \sum_{j=0}^i h_\Delta(i, j) \begin{pmatrix} y(i-1) \\ u(i-1) \end{pmatrix} \right]^2 \leq \gamma_\Delta^2 \sum_{j=1}^k \mu^{2(k-j-1)} [u(j-1)^2 + y(j-1)^2] \quad (\text{A.91})$$

On en déduit (1.58) avec la définition de  $s_\mu$  et (1.54).

Maintenant, si (1.55) est vérifiée, on obtient:

$$\begin{aligned} |w_\theta(k)| \leq & \sum_{i=0}^k |h_p(k, i)| \beta_2(i) + \gamma_2 \sum_{i=0}^k |h_p(k, i)| s_\mu(i) + \\ & + \sum_{i=0}^k \|h_\Delta(k, i)\| \begin{vmatrix} y(i-1) \\ u(i-1) \end{vmatrix} + |\delta(k)| \end{aligned} \quad (\text{A.92})$$

Avec l'inégalité de Schwarz et la définition de  $s_\mu$ , on déduit:

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{i=0}^k |h_p(k, i)| s_\mu(i) \right]^2 \leq & \sum_{i=0}^k \left[ \frac{|h_p(k, i)|}{\lambda^{i-k}} \right]^2 \sum_{i=0}^k \lambda^{2(k-i)} \sum_{j=0}^{i-1} \mu^{2(i-j-1)} [u(j)^2 + y(j)^2] \\ \leq & \gamma_p^2 s_\mu(k)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

On a aussi,  $s_\lambda$  étant majorée par  $s_\mu$ :

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{i=1}^k \|h_\Delta(k, i)\| \begin{vmatrix} y(i-1) \\ u(i-1) \end{vmatrix} \right]^2 \leq & \sum_{i=1}^k \left[ \frac{\|h_\Delta(k, i)\|}{\lambda^{k-i}} \right]^2 \sum_{i=1}^k \lambda^{2(k-i)} [u(i-1)^2 + y(i-1)^2] \\ \leq & \gamma_\Delta^2 s_\mu(k)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.95})$$

(1.59) en résulte.

## A.10 Démonstration du Lemme 1.3

Quelques identités pour commencer:

1- De la définition (1.67), on obtient:

$$M(k-1)^{-1} K(k) = \frac{a(k) \bar{Z}(k)}{\bar{Z}(k)^t M(k-1) \bar{Z}(k)} \quad (\text{A.97})$$

$$\bar{Z}(k)^t K(k) = a(k) \quad (\text{A.98})$$

$$K(k)^t M(k-1)^{-1} K(k) = \frac{a(k)^2}{\bar{Z}(k)^t M(k-1) \bar{Z}(k)} \quad (\text{A.99})$$

2- Les définitions (1.81) et (1.86), nous donnent aussi:

$$\bar{Z}(k)^t [\hat{\theta}_+(k-1) - \theta(k-1)] = \bar{w}_\theta(k) - \bar{e}(k) \quad (\text{A.100})$$

$$\bar{Z}(k)^t [\hat{\theta}_+(k-1) - \theta(k-1)] = \bar{w}_\theta(k) - (1-a(k)) \bar{e}(k) \quad (\text{A.101})$$

Utilisant la notation (1.82), on obtient alors de (1.65):

$$\begin{aligned} [\hat{\theta}_+(k-1) - \theta(k-1)]^t M(k-1)^{-1} [\hat{\theta}_+(k-1) - \theta(k-1)] &= \\ = L_\theta(k-1) + \frac{2a(k)\bar{e}(k)(\bar{w}_\theta(k) - \bar{e}(k))}{\bar{Z}(k)^t M(k-1) \bar{Z}(k)} + \frac{a(k)^2 \bar{e}(k)^2}{\bar{Z}(k)^t M(k-1) \bar{Z}(k)} \end{aligned} \quad (\text{A.102})$$

Maintenant, on remarque que (1.68) implique, en utilisant le Lemme d'Inversion Matricielle et (1.67):

$$M_+(k-1)^{-1} \leq M(k-1)^{-1} [I - b(k)K(k)\bar{Z}(k)^t]^{-1} \quad (\text{A.103})$$

$$\leq M(k-1)^{-1} + \frac{a(k)b(k)}{1-a(k)b(k)} \frac{\bar{Z}(k)\bar{Z}(k)^t}{\bar{Z}(k)^t M(k-1) \bar{Z}(k)} \quad (\text{A.104})$$

Avec la notation (1.83), nous avons établi:

$$\begin{aligned} [\hat{\theta}_+(k-1) - \theta(k-1)]^t M(k-1)^{-1} [\hat{\theta}_+(k-1) - \theta(k-1)] &\geq \\ \geq L_{\theta+}(k-1) - \frac{a(k)b(k)(\bar{Z}(k)^t [\hat{\theta}_+(k-1) - \theta(k-1)])^2}{[1-a(k)b(k)][\bar{Z}(k)^t M(k-1) \bar{Z}(k)]} \end{aligned} \quad (\text{A.105})$$

On a donc:

$$\begin{aligned} L_{\theta+}(k-1) &\leq L_\theta(k-1) + \frac{a(k)}{\bar{Z}(k)^t M(k-1) \bar{Z}(k)} \times \\ &\times \left[ 2\bar{e}(k)[\bar{w}_\theta(k) - \bar{e}(k)] + a(k)\bar{e}(k)^2 + \frac{b(k)}{1-a(k)b(k)} [\bar{w}_\theta(k) - (1-a(k))\bar{e}(k)]^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.106})$$

(1.88) en résulte en regroupant les termes.

Pour établir (1.89), nous observons que (1.65) nous donne directement:

$$\|\hat{\theta}_+(k-1) - \hat{\theta}(k-1)\|^2 \leq \frac{a(k)^2 \bar{Z}(k)^t M(k-1)^2 \bar{Z}(k)}{[\bar{Z}(k)^t M(k-1) \bar{Z}(k)]^2} \bar{e}(k)^2 \quad (\text{A.107})$$

Le résultat vient alors de la majoration de  $M$  donnée par (1.69).

2- Remarquons l'inégalité suivante:

$$[\hat{\theta}(k) - \theta(k) + W_\theta(k)]^t M(k)^{-1} [\hat{\theta}(k) - \theta(k) + W_\theta(k)] = L_\theta(k) + 2W_\theta(k)^t M(k)^{-1} [\hat{\theta}(k) - \theta(k)] + W_\theta(k)^t M(k)^{-1} W_\theta(k) \quad (\text{A.108})$$

$$\geq L_\theta(k) - 2\sqrt{L_\theta(k)} \frac{\|W_\theta(k)\|}{\sqrt{\lambda_{\min}\{M_i\}}} + \frac{\|W_\theta(k)\|^2}{\lambda_{\max}\{M_s\}} \quad (\text{A.109})$$

Posons:

$$\hat{\theta}_{++}(k-1) = \Pi_r(k) \hat{\theta}_+(k-1) + V_r(k) \quad (\text{A.110})$$

D'après (1.66) et (1.85), nous avons:

$$\hat{\theta}(k) - \theta(k) + W_\theta(k) = \Pi_m(k) [\hat{\theta}_{++}(k-1) - \theta(k-1)] \quad (\text{A.111})$$

Pour continuer, nous remarquons que (1.69) implique au sens des formes quadratiques:

$$\Pi_m(k)^t M(k)^{-1} \Pi_m(k) \leq \pi_m(k)^2 M_+(k-1)^{-1} \quad (\text{A.112})$$

On en déduit:

$$[\hat{\theta}(k) - \theta(k) + W_\theta(k)]^t M(k)^{-1} [\hat{\theta}(k) - \theta(k) + W_\theta(k)] \leq \pi_m(k)^2 [\hat{\theta}_{++}(k-1) - \theta(k-1)]^t M_+(k-1)^{-1} [\hat{\theta}_{++}(k-1) - \theta(k-1)] \quad (\text{A.113})$$

La conclusion vient de la définition (1.84).

(1.91) s'obtient facilement. D'après nos définitions, nous avons les égalités suivantes:

$$\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}_+(k-1) = \Pi_m(k) [\Pi_r(k) \hat{\theta}_+(k-1) + V_r(k)] + V_m(k) - \hat{\theta}_+(k-1) \quad (\text{A.114})$$

$$= \Pi_m(k) [\hat{\theta}_+(k-1) + U_r(k)] + V_m(k) - \hat{\theta}_+(k-1) \quad (\text{A.115})$$

$$= U_r(k) + [\Pi_m(k) - I] [\hat{\theta}_+(k-1) + U_r(k)] + V_m(k) \quad (\text{A.116})$$

Enfin, notons que:

$$U_r(k)^t M_+(k-1)^{-1} [2(\hat{\theta}_+(k-1) - \theta(k-1)) + \alpha(k) U_r(k)] \leq 0 \quad (\text{A.117})$$

implique:

$$[\alpha(k) - 1] U_r(k)^t M_+(k-1)^{-1} U_r(k) \leq -U_r(k)^t M_+(k-1)^{-1} [2(\hat{\theta}_+(k-1) - \theta(k-1)) + U_r(k)] \quad (\text{A.118})$$

$$\leq -[\pi_r(k)^2 - 1] L_{\theta+}(k-1) \quad (\text{A.119})$$

On obtient la dernière inégalité du Lemme en utilisant l'hypothèse sur  $\alpha$  et les propriétés de la matrice  $M_+$ .

## A.11 Démonstration de la Propriété 1.4

Cette Propriété peut être établie à partir du Lemme 1.3 par une suite de remarques:

1- Posons:

$$A = \frac{1 - ab + |1 - b|\sqrt{1 - ab}}{(2 - a - b)} \quad (\text{A.120})$$

$$B = \frac{(2 - a - b)(1 - ab)}{1 - ab + |1 - b|\sqrt{1 - ab}} \quad (\text{A.121})$$

Si  $a$  et  $b$  sont positifs et leur somme est strictement plus petite que 2, pour tout réel  $x$ , on a:

$$(A - b)x^2 + 2|1 - b|x + (2 - a - b - B) \leq 0 \quad (\text{A.122})$$

le rapport  $A/B$  étant le plus petit vérifiant cette inégalité. On en déduit:

$$\begin{aligned} b(k)\bar{w}_\theta(k)^2 + 2|1 - b(k)||\bar{w}_\theta(k)||\bar{e}(k)| - [2 - a(k) - b(k)]\bar{e}(k)^2 &\leq \\ &\leq A(k)\bar{w}_\theta(k)^2 - B(k)\bar{e}(k)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.123})$$

Par ailleurs, (1.95) implique pour tout  $k$ :

$$\frac{1}{\bar{Z}(k)^t M(k-1) \bar{Z}(k)} \frac{a(k)}{1 - a(k)b(k)} A(k) \leq \Gamma_q \quad (\text{A.124})$$

et:

$$\frac{B(k)}{A(k)} \geq \frac{1}{\Gamma_a^2} \quad (\text{A.125})$$

2-  $L_\theta$  est bornée: Les suites  $\hat{\theta}$  et  $\theta$  étant dans le compact  $\Upsilon$  et la suite  $M^{-1}$  vérifiant (1.69), il existe une constante  $\Lambda$ , ne dépendant que de  $\Upsilon$  et  $\lambda_{\min}\{M_i\}$ , telle que pour tout  $k$ :

$$\sqrt{L_\theta(k)} \leq \Lambda \quad (\text{A.126})$$

3- Avec (1.96) et ces deux premières remarques, on déduit du Lemme 1.3:

$$\begin{aligned} L_\theta(k) &\leq L_\theta(k-1) + \Gamma_q \bar{w}_\theta(k)^2 + 2 \frac{\Lambda}{\sqrt{\lambda_{\min}\{M_i\}}} \|W_\theta(k)\| - \\ &\quad - [1 - \pi_r(k)^2] L_{\theta+}(k-1) - \frac{\Gamma_q \bar{e}(k)^2}{\Gamma_a^2} \end{aligned} \quad (\text{A.127})$$

4-  $\pi_r$  est inférieur à 1: Par définition,  $\hat{\theta}(k+1)$  est la projection de  $\hat{\theta}_+(k)$ , selon la distance induite par  $M_+(k)^{-1}$ , sur le compact convexe  $\underline{\Upsilon}(k+1)$ . De (1.84) et (1.87), il suit que  $\pi_r$  vérifie:

$$\pi_r(k+1)^2 = \frac{[\hat{\theta}(k+1) - \theta(k)]^t M_+(k)^{-1} [\hat{\theta}(k+1) - \theta(k)]}{[\hat{\theta}_+(k) - \theta(k)]^t M_+(k)^{-1} [\hat{\theta}_+(k) - \theta(k)]} \quad (\text{A.128})$$

$\pi_r(k+1)$  est donc trivialement égal à 1, si  $\hat{\theta}_+(k)$  appartient à  $\underline{\Upsilon}(k+1)$ . Dans le cas contraire les propriétés de la convexité et de la projection impliquent que, pour tout  $\theta$  dans  $\underline{\Upsilon}(k+1)$ , on ait:

$$[\hat{\theta}(k+1) - \theta]^t M_+(k)^{-1} [\hat{\theta}(k+1) - \theta] \leq [\hat{\theta}_+(k) - \theta]^t M_+(k)^{-1} [\hat{\theta}_+(k) - \theta] \quad (\text{A.129})$$

et:

$$[\hat{\theta}(k+1) - \hat{\theta}_+(k)]^t M_+(k)^{-1} [\theta - \hat{\theta}(k+1)] \geq 0 \quad (\text{A.130})$$

D'où la conclusion, la suite de comparaison  $\theta$  étant prise dans  $\underline{\Upsilon}(k+1)$ .

5- Nous avons établi (1.98), avec:

$$\Gamma_W \leq 2 \frac{\Lambda}{\sqrt{\lambda_{\min}\{M_i\}}} \quad (\text{A.131})$$

6- Puisque:

$$U_r(k) = \hat{\theta}(k) - \hat{\theta}_+(k-1) \quad (\text{A.132})$$

d'après (1.92) dans le Lemme 1.3, définissons  $\alpha$  par:

$$\alpha(k) = -2 \frac{[\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}_+(k-1)]^t M_+(k-1)^{-1} [\hat{\theta}_+(k-1) - \theta(k-1)]}{[\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}_+(k-1)]^t M_+(k-1)^{-1} [\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}_+(k-1)]} \quad (\text{A.133})$$

On voit alors que l'inégalité (A.130) implique:

$$\alpha(k) \geq 2 \quad (\text{A.134})$$

On obtient ainsi de (1.93):

$$\|\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}_+(k-1)\|^2 \leq \lambda_{\max}\{M_s\} (1 - \pi_r(k)^2) L_{\theta+}(k-1) \quad (\text{A.135})$$

Enfin, l'inégalité:

$$\begin{aligned} \|\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)\|^2 &\leq 2\lambda_{\max}\{M_s\} \times \\ &\times \left[ \frac{\|\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}_+(k-1)\|^2}{\lambda_{\max}\{M_s\}} + \frac{c\Gamma_a^2 \Gamma_q \|\hat{\theta}_+(k-1) - \hat{\theta}(k-1)\|^2}{\Gamma_q c\Gamma_a^2 \lambda_{\max}\{M_s\}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.136})$$

nous permet d'obtenir, avec (A.127), (1.94) et (1.89):

$$\begin{aligned} L_\theta(k) \leq & L_\theta(k-1) + \Gamma_q \bar{w}_\theta(k)^2 + 2 \frac{\Lambda}{\sqrt{\lambda_{\min}\{M_t\}}} \|W_\theta(k)\| - \\ & - \frac{1}{2 \lambda_{\max}\{M_s\} \sup\left\{1, \frac{c \Gamma_a^2}{\Gamma_q}\right\}} \|\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)\|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.137})$$

D'où (1.99), avec:

$$\Gamma_\theta \leq 2 \lambda_{\max}\{M_s\} \sup\left\{1, \frac{c \Gamma_a^2}{\Gamma_q}\right\} \quad (\text{A.138})$$

7- Enfin (1.97) résulte trivialement de la définition de  $L_\theta$ .

## A.12 A propos du Lemme 1.4

Démonstration de (1.134):

Avec  $\Psi_i$  défini en (1.137), on calcule:

$$[I - q^{-1}\mathcal{F}(k)] \circ \left[ \sum_{i=0}^l q^{-i} \Psi_i(k) \right] = \sum_{i=0}^l q^{-i} \Psi_i(k) - \sum_{i=0}^l q^{-(i+1)} \mathcal{F}(k+i) \Psi_i(k) \quad (\text{A.139})$$

$$= \sum_{i=0}^l q^{-i} \Psi_i(k) - \sum_{i=0}^l q^{-(i+1)} [\Psi_{i+1}(k) - R_i(k)] \quad (\text{A.140})$$

$$= I - q^{-(l+1)} \Psi_{l+1}(k) + \sum_{i=0}^l q^{-(i+1)} R_i(k) \quad (\text{A.141})$$

Par ailleurs, de l'égalité pour tout  $i$ :

$$[I - q^{-1}\mathcal{F}(k)] \circ \left[ \sum_{j=0}^i q^{-j} \prod_{n=0}^{j-1} \mathcal{F}(k+n) \right] = I - q^{-(i+1)} \prod_{n=0}^i \mathcal{F}(k+n) \quad (\text{A.142})$$

on obtient:

$$\begin{aligned} [I - q^{-1}\mathcal{F}(k)] \circ \left[ \sum_{j=0}^{l-i-1} q^{-j} \prod_{n=0}^{j-1} \mathcal{F}(k+n) \right] \circ q^{-1}\mathcal{G}_1(k) \circ q^{-i}\mathcal{Y}_i(k) &= \\ &= q^{-1}\mathcal{G}_1(k) \circ q^{-i}\mathcal{Y}_i(k) - q^{-(l+1)} \prod_{n=i+1}^l \mathcal{F}(k+n) \mathcal{G}_1(k+i) \mathcal{Y}_i(k) \end{aligned} \quad (\text{A.143})$$

Maintenant, remarquons que (1.137) implique:

$$\Psi_{l+1}(k) = \prod_{n=0}^l \mathcal{F}(k+n) + \sum_{i=0}^l \prod_{j=i+1}^l \mathcal{F}(k+j) R_i(k) \quad (\text{A.144})$$

et donc, avec (1.133):

$$\sum_{i=0}^l \prod_{n=i+1}^l \mathcal{F}(k+n) \mathcal{G}_1(k+i) \mathcal{Y}_i(k) = \Psi_{l+1}(k) + R_l(k) \quad (\text{A.145})$$

D'où:

$$\begin{aligned} [I - q^{-1}\mathcal{F}(k)] \circ \sum_{i=0}^l \left[ \sum_{j=0}^{l-i-1} q^{-j} \prod_{n=0}^{j-1} \mathcal{F}(k+n) \right] \circ q^{-1}\mathcal{G}_1(k) \circ q^{-i}\mathcal{Y}_i(k) &= \\ &= \sum_{i=0}^l q^{-1}\mathcal{G}_1(k) \circ q^{-i}\mathcal{Y}_i(k) - q^{-(l+1)} \Psi_{l+1}(k) - q^{-(l+1)} R_l(k) \end{aligned} \quad (\text{A.146})$$

Soustrayant (A.146) de (A.139), utilisant l'équation (1.135) de  $C(k)$  et la nullité de  $R_l$ , nous obtenons enfin:

$$[I - q^{-1}\mathcal{F}(k)] \circ C(k, q^{-1}) = I + \sum_{i=0}^{l-1} q^{-(i+1)} R_i(k) - q^{-1}\mathcal{G}_1(k) \circ \sum_{i=0}^l q^{-i}\mathcal{Y}_i(k) \quad (\text{A.147})$$

D'où le choix de  $D(k)$ .

### Démonstration de (1.138) à partir de (1.140):

Posons:

$$\Gamma(k) = \sum_{i=k}^{k+l} \left[ \prod_{j=i+1}^{k+l} \mathcal{F}(j) \mathcal{G}_1(i) \right] \left[ \prod_{j=i+1}^{k+l} \mathcal{F}(j) \mathcal{G}_1(i) \right]^t \quad (\text{A.148})$$

Avec l'hypothèse (1.139) et la définition (1.142) de  $P$ , nous obtenons:

$$\Gamma(k) \geq \left[ \prod_{j=k}^{k+l} \mathcal{F}(j) \right] P(k) \left[ \prod_{j=k}^{k+l} \mathcal{F}(j) \right]^t \geq \lambda^{2l} \Gamma(k) \geq \nu \lambda^{2l} I \quad (\text{A.149})$$

Les suites  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{F}^{-1}$  étant bornées par hypothèses, on en déduit que  $P^{-1}$  est une suite bornée de matrices définies positives. La suite  $C$  dans (1.140) est donc bien définie. De plus, la suite  $P$  vérifie:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= \frac{[\mathcal{F}(k)P(k)\mathcal{F}(k)^t - \mathcal{G}_1(k)\mathcal{G}_1(k)^t]}{\lambda^2} + \\ &\quad + \lambda^{2l} \left[ \prod_{j=k+l+1}^{k+1} \mathcal{F}(j)^{-1} \mathcal{G}_1(k+l+1) \right] \left[ \prod_{j=k+l+1}^{k+1} \mathcal{F}(j)^{-1} \mathcal{G}_1(k+l+1) \right]^t \end{aligned} \quad (\text{A.150})$$

done:

$$\mathcal{F}(k)^t \left[ P(k+1) + \frac{\mathcal{G}_1(k)\mathcal{G}_1(k)^t}{\lambda^2} \right]^{-1} \mathcal{F}(k) \leq \lambda^2 P(k)^{-1} \quad (\text{A.151})$$

Par ailleurs, l'expression (1.140) nous permet d'écrire:

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}(k) - \mathcal{G}_1(k)\mathcal{C}(k)]^t P(k+1)^{-1} [\mathcal{F}(k) - \mathcal{G}_1(k)\mathcal{C}(k)] &= \mathcal{F}(k)^t P(k+1)^{-1} \mathcal{F}(k) - \\ &\quad - \mathcal{F}(k)^t [\eta(k) (2 - \eta(k)\mathcal{G}_1(k)^t P(k+1)^{-1} \mathcal{G}_1(k))] (P(k+1)^{-1} \mathcal{G}_1(k) \mathcal{G}_1(k)^t P(k+1)^{-1}) \mathcal{F}(k) \end{aligned} \quad (\text{A.152})$$

Utilisant (1.141) puis le Lemme d'Inversion Matricielle, on déduit:

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}(k) - \mathcal{G}_1(k)\mathcal{C}(k)]^t P(k+1)^{-1} [\mathcal{F}(k) - \mathcal{G}_1(k)\mathcal{C}(k)] &\leq \\ &\leq \mathcal{F}(k)^t \left[ P(k+1)^{-1} - \frac{P(k+1)^{-1} \mathcal{G}_1(k) \mathcal{G}_1(k)^t P(k+1)^{-1}}{\lambda^2 + \mathcal{G}_1(k)^t P(k+1)^{-1} \mathcal{G}_1(k)} \right] \mathcal{F}(k) \end{aligned} \quad (\text{A.153})$$

$$\leq \mathcal{F}(k)^t \left[ P(k+1) + \frac{\mathcal{G}_1(k)\mathcal{G}_1(k)^t}{\lambda^2} \right]^{-1} \mathcal{F}(k) \quad (\text{A.154})$$

Avec (A.151), nous concluons enfin, pour tout  $k$ :

$$[\mathcal{F}(k) - \mathcal{G}_1(k)\mathcal{C}(k)]^t P(k+1)^{-1} [\mathcal{F}(k) - \mathcal{G}_1(k)\mathcal{C}(k)] \leq \lambda^2 P(k)^{-1} \quad (\text{A.155})$$

(1.138) en résulte en itérant cette inégalité et tirant profit des bornes supérieure et inférieure de la suite  $P$

## A.13 Démonstration du Lemme 1.6: Bornitude

Remarquons tout d'abord que (1.163), (1.166) et la bornitude de  $\gamma_x$  impliquent l'existence d'une constante  $c$  telle que:

$$\sigma(k+1) \leq c\sigma(k) \quad (\text{A.156})$$

On en déduit qu'il n'y a pas d'explosion en temps fini. On peut donc supposer, avec  $\delta$  une constante aussi petite que l'on veut que:

$$\forall k \geq k_0, \quad \gamma_x(k) \leq \Gamma_x + \delta \quad (\text{A.157})$$

On a alors:

$$c = 1 + \mu + \Gamma_s(\Gamma_x + \delta^2) \quad (\text{A.158})$$

Pour n'avoir une dépendance que en fonction des lim sup des suites  $\beta_\eta$  et  $\beta_w$ , nous imposons aussi à  $k_0$  de vérifier:

$$\forall k \geq k_0 : \beta_\eta(k) \leq 2 \limsup_{i \rightarrow \infty} \beta_\eta(i) = \overline{\beta_\eta}, \quad \beta_w(k) \leq 2 \limsup_{i \rightarrow \infty} \beta_w(i) = \overline{\beta_w} \quad (\text{A.159})$$

Dans la suite, pour simplifier les notations nous prendrons  $k_0$  comme origine des temps

Maintenant, avec la norme norme instationnaire (A.2) adaptée à  $F$  où  $\rho$  est choisi strictement plus grand que  $\mu$  et  $\lambda$ , posons:

$$x(k) = \|X(k)\|_{k-1} \quad (\text{A.160})$$

Avec les propriétés de cette norme, partant de (1.156) et de (1.164), on obtient de (1.154), (1.157), (1.158) et (1.165):

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &\leq \gamma x(k) + \alpha_1 \left[ \Gamma_\eta \sum_{i=k-d}^k [\bar{e}(i) + \Gamma_p \|\hat{\theta}(i) - \hat{\theta}(i-1)\|] \sigma(i) + g + \overline{\beta_\eta} \right] \\ \sigma(k+1) &\leq \Gamma_s x(k+1) + \mu \sigma(k) + 1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.161})$$

avec:

$$\gamma = \rho - \frac{\rho - \lambda}{f}, \quad \alpha_1 = \frac{f\rho}{\rho - \lambda} \quad (\text{A.162})$$

Une représentation d'état de ces inégalités est:

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ \sigma(k+1) \\ \vdots \\ \sigma(k-d+1) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \gamma & \varepsilon(k) & \varepsilon(k-1) & \dots & \varepsilon(k-d) \\ \Gamma_s \gamma & \mu + \Gamma_s \varepsilon(k) & \Gamma_s \varepsilon(k-1) & \dots & \Gamma_s \varepsilon(k-d) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ \sigma(k) \\ \vdots \\ \sigma(k-d) \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \alpha_1(g + \overline{\beta_\eta}) \\ 1 + \Gamma_s \alpha_1(g + \overline{\beta_\eta}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.163})$$

avec:

$$\varepsilon(k) = \alpha_1 \Gamma_\eta \left( \bar{e}(k) + \Gamma_p \| \hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1) \| \right) \quad (\text{A.164})$$

Pour étudier ce système, nous posons:

$$V(k) = x(k) + \sum_{i=0}^d a_i \sigma(k-i) \quad (\text{A.165})$$

où:

$$a_0 = \frac{\rho - \gamma}{\gamma \Gamma_s}, \quad a_1 = a_0(\rho - \mu), \quad a_{i+1} = \rho a_i \quad (\text{A.166})$$

On obtient:

$$V(k+1) = \left( \rho + \sum_{i=0}^d \frac{\rho}{\gamma} \frac{\varepsilon(k-i)}{a_i} \right) V(k) + a_0 + \frac{\rho}{\gamma} \alpha_1(g + \overline{\beta_\eta}) \quad (\text{A.167})$$

Par ailleurs, avec (1.163) et (1.166), on a:

$$a_0 \sigma(k) = V(k) - x(k) - \sum_{i=0}^d a_i \sigma(k-i) \quad (\text{A.168})$$

$$\leq V(k) - \left[ \alpha_1(\Gamma_x + \delta) \mu^{-1} + \sum_{i=0}^d a_i \mu^{-1} \right] \sigma(k) \quad (\text{A.169})$$

On en déduit que  $\sigma(k)$  est grand lorsque  $V(k)$  est grand. Pour toute constante  $\delta$  strictement positive, on peut donc choisir une constante  $V_0$  telle que:

$$\forall k \geq K_0 : V(k) \geq V_0 \implies \frac{\beta_w(k)}{\sigma(k)^2} \leq \delta^2 \quad (\text{A.170})$$

Soit donc un intervalle  $]K_0, K_1[$ ,  $K_1$  pouvant être infini, tel que:

$$V(K_0) < V_1 , \quad V(K_1) < V_0 , \quad V(k) \geq V_0 \quad \forall k \in ]K_0, K_1[ \quad (\text{A.171})$$

où on pose:

$$V_1 = \begin{cases} V_0 & \text{si } K_0 \neq 0 \\ \sup\{V_0, V(0)\} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.172})$$

Pour tout  $k$  dans  $]K_0, K_1[$ , on obtient:

$$\begin{aligned} V(k+1) &\leq \rho^{k-K_0} \prod_{j=K_0}^k \left( 1 + \sum_{i=0}^d \frac{\varepsilon(j-i)}{\gamma a_i} \right) V_1 \\ &+ \left( a_0 + \frac{\rho}{\gamma} \alpha_1 (g + \bar{\beta}_n) \right) \sum_{j=K_0+1}^k \rho^{k-j} \prod_{i=j+1}^k \left( 1 + \sum_{l=0}^d \frac{\varepsilon(i-l)}{\gamma a_l} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.173})$$

La concavité de la fonction Logarithme nous donne:

$$\prod_{i=j+1}^k \left( 1 + \sum_{l=0}^d \frac{\varepsilon(i-l)}{\gamma a_l} \right) \leq \left( 1 + \frac{1}{k-j} \sum_{i=j+1}^k \sum_{l=0}^d \frac{\varepsilon(i-l)}{\gamma a_l} \right)^{k-j} \quad (\text{A.174})$$

$$\leq \left( 1 + \frac{1}{k-j} \sum_{i=j+1-d}^k \varepsilon(i) \sum_{l=0}^d \frac{1}{\gamma a_l} \right)^{k-j} \quad (\text{A.175})$$

$$\leq \left( 1 + \frac{\Gamma_s(1+d)}{(\rho-\gamma)(\rho-\mu)} \frac{1}{k-j} \sum_{i=j+1-d}^k \varepsilon(i) \right)^{k-j} \quad (\text{A.176})$$

Etudions donc la somme des  $\varepsilon$ . De part leur définition, on a pour tout  $j$  et  $k$ :

$$\sum_{i=j+1}^k \varepsilon(i) = \alpha_1 \Gamma_\eta \sum_{i=j+1}^k [\bar{e}(i) + \Gamma_p \|\hat{\theta}(i) - \hat{\theta}(i-1)\|] \quad (\text{A.177})$$

$$\leq a_1 \Gamma_\eta \sqrt{k-j} \left[ \sqrt{\sum_{i=j+1}^k \bar{e}(i)^2} + \Gamma_p \sqrt{\sum_{i=j+1}^k \|\hat{\theta}(i) - \hat{\theta}(i-1)\|^2} \right] \quad (\text{A.178})$$

Or (1.160), (1.162), (1.169), (A.156) et (A.171) impliquent pour tout  $j$  dans  $[K_0, K_1 - 1[$  et  $k$  dans  $]K_0, K_1[$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=j+1}^k \bar{e}(i)^2 &\leq E_l \beta_l + E_W^2 \beta_W + \\ &+ \left[ E_W^2 \gamma_W^2 + E_w^2 \left( 1 + 2\varepsilon^2 \log \frac{c}{\mu} \right) (\gamma_w^2 \Gamma_p^2 + \delta^2) \right] (k-j) \end{aligned} \quad (\text{A.179})$$

Une expression identique peut être obtenue pour la somme des  $\|\hat{\theta}(i) - \hat{\theta}(i-1)\|$  à partir de (1.161). Notons aussi que la suite  $W$  étant bornée d'après (1.168) et la suite  $\frac{w}{\sigma}$  étant bornée d'après (1.169) et (1.165), il existe des constantes  $E$  et  $\Theta$  telles que, pour tout  $k$ :

$$\frac{w(k)}{\sigma(k)} \leq E \quad , \quad \|\widehat{\theta}(k) - \widehat{\theta}(k-1)\| \leq \Theta \quad (\text{A.180})$$

On en conclut que pour tout  $j$  dans  $[K_0, 1, K_1 - 1]$  et  $k$  dans  $]K_0, K_1[$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i=j+1-d}^k \varepsilon(i) &\leq \alpha_1 \Gamma_\eta d(E + \Gamma_p \Theta) + \\ &+ \alpha_1 \Gamma_\eta \sqrt{k-j} \left[ \sqrt{E_l \beta_l + E_W^2 \beta_W} + \Gamma_p \sqrt{T - l\beta - l + T_W^2 \beta_W} \right] + \\ &+ \alpha_1 \Gamma_\eta (k-j) \left[ (E_W + \Gamma_p T_W) \gamma_W + (E_w + \Gamma_p T_w) (\Gamma_p \gamma_w + \delta) \sqrt{1 + 2\varepsilon^2 \log \frac{c}{\mu}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.181})$$

Comme pour tout  $\alpha$  et  $\delta$  positifs, on a:

$$2\sqrt{k-j} \leq \delta(k-j) + \frac{1}{\delta} \quad , \quad \log(\alpha + \delta) \leq \log(\alpha) + \frac{\delta}{\alpha} \quad (\text{A.182})$$

il existe des constantes  $S$  et  $\tau$  telles que, pour  $\delta$  strictement plus petit que 1:

$$\sum_{i=j+1-d}^k \varepsilon(i) \leq S + \tau(k-j) \quad (\text{A.183})$$

où, utilisant (A.158):

$$\begin{aligned} \tau &= +\Gamma \delta + \\ &+ \alpha_1 \Gamma_\eta \left[ (E_W + \Gamma_p T_W) \gamma_W + (E_w + \Gamma_p T_w) (\Gamma_p \gamma_w + \delta) \sqrt{1 + 2\varepsilon^2 \log \frac{1 + \mu + \Gamma_s \Gamma_s}{\mu}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.184})$$

Nous avons donc établi:

$$\prod_{i=j+1}^k \left[ 1 + \sum_{l=0}^d \frac{\varepsilon(i-l)}{\gamma a_l} \right] \leq \left[ 1 + \frac{S}{k-j} \frac{\Gamma_s(1+d)}{(\rho-\gamma)(\rho-\mu)} + \frac{\Gamma_s(1+d)}{(\rho-\gamma)(\rho-\mu)} \tau \right]^{k-j} \quad (\text{A.185})$$

$$\leq C \left[ 1 + \frac{\Gamma_s(1+d)}{(\rho-\gamma)(\rho-\mu)} \tau \right]^{k-j} \quad (\text{A.186})$$

en notant  $C$  la borne supérieure de:

$$\left( 1 + \frac{1}{k-j} \frac{S \Gamma_s(1+d)}{(\rho-\gamma)(\rho-\mu) + \tau \Gamma_s(1+d)} \right)^{k-j} \quad (\text{A.187})$$

Posant alors:

$$\varrho = \rho \left( 1 + \frac{\Gamma_s(1+d)}{(\rho-\gamma)(\rho-\mu)} \tau \right) \quad (\text{A.188})$$

nous pouvons enfin exprimer  $V(k+1)$  en fonction de  $V_1$  sous la forme:

$$V(k+1) \leq C \left[ \varrho^{k-K_0} V_1 + \left( \frac{\rho - \gamma}{\gamma \Gamma_s} + \frac{\rho}{\gamma} \alpha_1 (g + \overline{\beta}_\eta) \right) \frac{\varrho^{k-K_0} - 1}{\varrho - 1} \right] \quad (\text{A.189})$$

Mais, d'après (1.167),  $\delta$  peut être choisi tel que  $\varrho$  soit strictement plus petit que 1, d'où:

$$V(k+1) \leq C \left[ \varrho^{k-K_0} V_1 + \left( \frac{\rho - \gamma}{\gamma \Gamma_s} + \frac{\rho}{\gamma} \alpha_1 (g + \overline{\beta}_\eta) \right) \frac{1}{1 - \varrho} \right] \quad (\text{A.190})$$

Comme, par définition, si  $k$  n'est pas nul ou dans un intervalle du type  $]K_0, K_1[$ , on a:

$$V(k) \leq V_0 \quad (\text{A.191})$$

Nous avons établi:

1. si  $V(0)$  est inférieur à  $V_0$ , nous avons pour tout  $k$ :

$$V(k) \leq C \left[ V_0 + \left( \frac{\rho - \gamma}{\gamma \Gamma_s} + \frac{\rho}{\gamma} \alpha_1 (g + \overline{\beta}_\eta) \right) \frac{1}{1 - \varrho} \right] \quad (\text{A.192})$$

2. si  $V(0)$  est supérieur à  $V_0$ , le problème se pose si on ne peut trouver  $K_1$  (fini) tel que:

$$V(K_1) \leq V_0 \quad (\text{A.193})$$

Dans cette circonstance, nous avons pour tout  $k$ :

$$V(k) \leq C \left[ \varrho^k V(0) + \left( \frac{\rho - \gamma}{\gamma \Gamma_s} + \frac{\rho}{\gamma} \alpha_1 (g + \overline{\beta}_\eta) \right) \frac{1}{1 - \varrho} \right] \quad (\text{A.194})$$

Il existe donc  $k_1$  tel que, pour tout:

$$\forall k \geq k_1, \quad V(k) \leq 2C \left( \frac{\rho - \gamma}{\gamma \Gamma_s} + \frac{\rho}{\gamma} \alpha_1 (g + \overline{\beta}_\eta) \right) \frac{1}{1 - \varrho} \quad (\text{A.195})$$

En conclusion, avec  $k_0$  un entier défini en (A.157), nous avons montré l'existence d'une constante  $x$ , indépendante des conditions initiales, telle que pour tout  $k$  supérieur à  $k_0$ , nous avons:

$$\|X(k)\| \leq x(k) \leq V(k) \leq x \quad (\text{A.196})$$

## Remarques

Le Lemme 1.6 s'étend facilement au cas où (1.154) est modifié en:

$$X(k+1) = F(\hat{\theta}(k), k) X(k) + G(k) r(k) + \eta(k) \quad (\text{A.197})$$

où:

1. il existe deux constantes positives  $f$  et  $\lambda$ ,  $\lambda$  strictement inférieure à 1 et  $f$  supérieure à 1, telles que, pour tout  $\theta$  dans le compact  $\Upsilon$  et tous  $k$  et  $j$ :

$$\left\| \prod_{i=k+1}^{k+j} F(\theta, i) \right\| \leq f \lambda^j \quad (\text{A.198})$$

2. il existe une constante  $f_1$  telle que pour tous  $\theta_1$  et  $\theta_2$  dans le compact  $\Upsilon$  et tout  $k$ :

$$\|F(\theta_1, k) - F(\theta_2, k)\| \leq f_1 \|\theta_1 - \theta_2\| \quad (\text{A.199})$$

3. pour tout  $k$ ,  $\hat{\theta}(k)$  appartient au compact  $\Upsilon$

En effet, il suffit dans ce cas de prendre:

$$x(k) = \|X(k)\|_{\hat{\theta}(k-1), k-1} \quad (\text{A.200})$$

Utilisant les propriétés de la norme instationnaire adaptée et (1.166), nous obtenons:

$$x(k+1) \leq \gamma \left( 1 + \frac{f f_1}{\rho - \lambda} \|\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)\| \right) x(k) + \quad (\text{A.201})$$

$$+ \alpha_1 \left[ \Gamma_\eta \sum_{i=k-d}^k [\bar{e}(i) + \Gamma_p \|\hat{\theta}(i) - \hat{\theta}(i-1)\|] \sigma(i) + g + \overline{\beta_\eta} \right]$$

$$\leq \gamma x(k) + \frac{\alpha_1 \gamma f f_1 (\Gamma_x + \delta)}{\rho - \lambda} \|\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)\| \sigma(k-1) + \quad (\text{A.202})$$

$$+ \alpha_1 \left[ \Gamma_\eta \sum_{i=k-d}^k [\bar{e}(i) + \Gamma_p \|\hat{\theta}(i) - \hat{\theta}(i-1)\|] \sigma(i) + g + \overline{\beta_\eta} \right]$$

La suite de la démonstration est identique.

## A.14 Démonstration du Lemme 1.6: Convergence

Nous utilisons les mêmes notations que pour la Section A.13. En particulier ici,  $\lambda$  étant strictement inférieur à  $\mu$ , nous choisissons  $\rho$  égal à  $\mu$  pour définir la norme instationnaire adaptée. Ceci implique que  $\gamma$  est aussi inférieur à  $\mu$ .

Partons de l'inégalité (A.161) où nous remarquons que nos hypothèses impliquent la nullité de la constante  $g$ . Appliquant la formule de variations des constantes, nous obtenons:

$$x(j) \leq \gamma^j x(0) + \sum_{i=0}^j \gamma^{j-i-1} \nu(i) + \alpha_1 \sum_{i=0}^j \gamma^{j-i-1} \beta_\eta(i). \quad (\text{A.203})$$

en posant:

$$\nu(k) = \alpha_1 \Gamma_\eta \sum_{i=k-d}^k [\bar{e}(i) + \Gamma_p \|\hat{\theta}(i) - \hat{\theta}(i-1)\|] \sigma(i) \quad (\text{A.204})$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{j=0}^k \mu^{-2j} x(j)^2} &\leq x(0) \sqrt{\sum_{j=0}^k \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{2j}} + \sqrt{\sum_{j=0}^k \mu^{-2j} \left(\sum_{i=0}^{j-1} \gamma^{j-1-i} \nu(i)\right)^2} + \\ &+ \alpha_1 \sqrt{\sum_{j=0}^k \mu^{-2j} \left(\sum_{i=0}^{j-1} \gamma^{j-1-i} \beta_\eta(i)\right)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.205})$$

On remarque que pour toute suite  $u$ , si  $\gamma$  est inférieur à  $\mu$ , on a pour tout  $k$ :

$$\sum_{j=0}^k \mu^{-2j} \left(\sum_{i=0}^{j-1} \gamma^{j-1-i} u(i)\right)^2 \leq \frac{1}{(\mu-\gamma)^2} \sum_{i=0}^{k-1} \mu^{-2i} u(i)^2 \quad (\text{A.206})$$

Par ailleurs, d'après (1.172), (1.164), (1.157), (1.155) et les propriétés de la norme instationnaire adaptée, on a:

$$\|w\|_{\mu,k} \leq \mu^{-k} \beta_w(k) + \gamma_w h \sqrt{\sum_{j=0}^k \mu^{-2j} x(j)^2} \quad (\text{A.207})$$

La suite  $\beta_w$  étant  $\mu$ -bornée et la suite  $\beta_\eta$  étant  $\mu$ -exponentiellement décroissante, nous avons établi l'existence d'une constante  $C_1$  telle que:

$$\|w\|_{\mu,k} \leq c_1 + \frac{\gamma_w h}{\mu-\gamma} \|\nu\|_{\mu,k-1} \quad (\text{A.208})$$

La suite  $\mu^{-2k} \sigma(k)^2$  étant croissante, le Lemme A.1 nous montre que pour toutes suites  $u$  et  $v$ , on a l'implication suivante:

$$\|u\|_{\mu,k} \leq C + \|v\|_{\mu,k} \quad \forall k \quad (\text{A.209})$$

implique pour toute constante  $\delta$  strictement positive:

$$\sum_{j=0}^k \frac{u(j)^2}{\sigma(j)^2} \leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \frac{C^2}{\sigma(0)^2} + (1 + \delta) \sum_{j=0}^k \frac{v(j)^2}{\sigma(j)^2} \quad \forall k \quad (\text{A.210})$$

Ceci nous permet d'écrire:

$$\sum_{j=0}^k \frac{w(j)^2}{\sigma(j)^2} \leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \frac{C_1^2}{\sigma(0)^2} + (1 + \delta) \frac{\gamma_w^2 h^2}{(\mu - \gamma)^2} \sum_{j=0}^k \frac{\nu(j)^2}{\sigma(j)^2} \quad (\text{A.211})$$

Evaluons donc la somme des  $\frac{\nu(j)^2}{\sigma(j)^2}$ . D'après la définition de  $\nu$  et utilisant la croissance de  $\mu^{-2j} \sigma(j)^2$ , nous obtenons:

$$\frac{\nu(j)^2}{\sigma(j)^2} \leq 2(d+1) \alpha_1^2 \Gamma_\eta^2 \mu^{-2d} \sum_{i=0}^d \bar{e}(j-i)^2 + \Gamma_p^2 \|\hat{\theta}(j-i) - \hat{\theta}(j-i-1)\|^2 \quad (\text{A.212})$$

La sommabilité de  $W$ , (1.160), (1.161) et (1.162) nous donnent alors l'existence d'une constante  $C_2$  telle que:

$$\sum_{j=0}^k \frac{\nu(j)^2}{\sigma(j)^2} \leq C_2 + 2(d+1)^2 \alpha_1^2 \Gamma_\eta^2 \mu^{-2d} (E_w^2 + \Gamma_p^2 T_w^2) \sum_{j=0}^k \frac{w(j)^2}{\sigma(j)^2} \quad (\text{A.213})$$

Avec (A.211),  $\delta$  pouvant être arbitrairement petit, ceci montre que la suite  $\frac{\nu}{\sigma}$  est de carrés sommables si:

$$\frac{\gamma_w^2 h^2}{(\mu - \gamma)^2} 2(d+1)^2 \alpha_1^2 \Gamma_\eta^2 \mu^{-2d} (E_w^2 + \Gamma_p^2 T_w^2) < 1 \quad (\text{A.214})$$

Avec la valeur de  $\gamma$  donnée par la norme instationnaire adaptée, cette inégalité est la condition (1.171).

Maintenant, la suite  $\sigma$  étant minorée par 1, la suite  $\mu^{-2j} \sigma(j)^2$  tend de façon monotone vers l'infini, le Lemme de Kronecker (Goodwin et Sin [1, Lemma D.5.5]) nous donne:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^k \mu^{-2j} \nu(j)^2}{\mu^{-2k} \sigma(k)^2} = 0 \quad (\text{A.215})$$

Mais, d'après (1.163), (A.205) et (A.206), il existe une constante  $C_3$  telle que:

$$\mu^{-k} \sigma(k) \leq C_3 + \frac{\mu^{-(k+1)}}{1-\mu} + \frac{\Gamma_s}{\mu - \gamma} \|\nu\|_{\mu,k} \quad (\text{A.216})$$

On en déduit que la suite  $\sigma$  est bornée et donc que la suite  $\nu$  est de carrés sommables. Le résultat de la Propriété en résulte en écrivant les inégalités (A.205) et (A.206) avec  $\mu$  égal à 1.

#### Remarques

Voir la Remarque à la fin de la section A.13.

## Bibliographie

- [1] Goodwin G.C., Sin K.S.: *Adaptive filtering, prediction and control*. Prentice-Hall. 1984.

## A.15 Démonstration de (1.181)

D'après (1.177) et la définition de  $s_\mu$ , on a:

$$\|X(k)\| \leq \|\mathcal{X}(k)\| + \|\mathcal{X}(k) - \widehat{\mathcal{X}}(k)\| + \sum_{i=1}^{n_N} |\omega(k-i)| + s_\mu(k) \quad (\text{A.217})$$

$\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{G}_2$  étant bornée dans (1.179), avec (1.151), il existe une constante  $a_1$  telle que:

$$\|\mathcal{X}(k) - \widehat{\mathcal{X}}(k)\| \leq a \lambda^k \|\mathcal{X}(0) - \widehat{\mathcal{X}}(0)\| + a_1 \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-i-1} |\omega(i)| \quad (\text{A.218})$$

Avec (1.146), la bornitude de  $\widehat{\theta}$  et la définition de  $s_\mu$ , il existe une constante  $a_2$  telle que:

$$\|\mathcal{X}(k)\| \leq |y(k)| + |\omega(k)| + a_2 s_\mu(k) \quad (\text{A.219})$$

La bornitude de  $\theta$ , (1.178) et (1.176) nous donnent:

$$|y(k)| \leq a_3 s_\mu(k) + \beta_2(k) \quad (\text{A.220})$$

Nous avons donc établi l'existence de constantes  $b_1$  à  $b_3$  telles que:

$$\|X(k)\| \leq b_1 s_\mu(k) + b_2 \lambda^k \|\mathcal{X}(0) - \widehat{\mathcal{X}}(0)\| + b_3 \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} |\omega(i)| + \beta_2(k) \quad (\text{A.221})$$

Pour majorer  $\omega$ , utilisons (1.147), (1.180), la bornitude de  $\theta - \widehat{\theta}$  et (1.121). Nous obtenons, avec la propriété de croissance de  $\mu^{-k} s_\mu(k)$ , l'existence de constantes  $c_1$ ,  $c_2$  et  $\rho$ ,  $\rho$  étant strictement comprise entre  $\lambda$  et  $\mu$ , telles que:

$$|\omega(i)| \leq \sum_{j=0}^i \rho^{i-j} [c_1 s_\mu(j) + c_2 |w_\theta(j)| + \beta_1(j)] \quad (\text{A.222})$$

où  $\beta_1$  est  $\mu$ -exponentiellement décroissante et dépend des conditions initiales.  $\rho$  étant strictement inférieure à  $\mu$ , (1.59) de la Propriété 1.3 et la croissance de  $\mu^{-j} s_\mu(j)$  nous assurent l'existence de constantes  $c_3$  et  $c_4$  telles que:

$$|\omega(i)| \leq c_3 s_\mu(i) + \beta_3(i) + c_2 \sum_{j=0}^i \rho^{i-j} \sum_{l=0}^j |h_p(j, l)| \beta_2(l) \quad (\text{A.223})$$

où  $\beta_3$  est  $\mu$ -exponentiellement décroissante et dépend des conditions initiales. On en déduit l'existence de constantes  $d_1$  à  $d_3$  telles que:

$$\|X(k)\| \leq d_1 s_\mu(k) + d_2 \lambda^k \|\mathcal{X}(0) - \widehat{\mathcal{X}}(0)\| + d_3 \sum_{i=0}^k \rho^{k-i} \beta_2(i) + \beta_4(k) \quad (\text{A.224})$$

où  $\beta_4$  est  $\mu$ -exponentiellement décroissante et nous avons utilisé le fait que les zéros de  $\det\{U\}$  étant dans le disque ouvert de rayon  $\mu$ , les constantes  $\lambda$  et  $\rho$  peuvent aussi être choisies telles que  $h_p(j, l) \lambda^{l-j}$  soit bornée. On a donc établi (1.181) avec,  $\rho$  étant strictement inférieure à  $\mu$ :

$$\beta(k) = d_2 \lambda^k \|\mathcal{X}(0) - \widehat{\mathcal{X}}(0)\| + d_3 \sum_{i=0}^k \rho^{k-i} \beta_2(i) + \beta_4(k) \quad (\text{A.225})$$

## A.16 Démonstration de la Propriété 1.5

Pour établir cette Propriété, nous proposons le “placeur de pôles” adaptatif obtenu de la façon suivante:

1. Nous choisissons un système de mesure tel que (1.35) soit vérifiée.
2. Nous définissons une paramétrisation explicite en choisissant  $n_A, n_B, P, Q, N$  et  $U$
3. Nous choisissons un compact  $\Upsilon$  tel que, pour tout  $\theta$  dans  $\Upsilon$ , les polynômes  $A_m S$  et  $B_m$  soit strictement premiers entre eux, avec:

$$(A_m S, -B_m) = W_t - (\theta^t P + Q) V_t \quad (A.226)$$

4. Nous choisissons une loi d’adaptation satisfaisant les hypothèses de la Propriété 1.4 et nous prenons:

$$\sigma(k) = \sup\{1, s_\mu(k)\} \quad (A.227)$$

5. Nous choisissons un polynôme  $R(k)$  tel que la matrice compagnon de  $R(k)N$  vérifie le Lemme 1.5.
6. Pour chaque  $k$ , nous résolvons en  $C(k)$  et  $D(k)$  l’équation polynomiale:

$$(C(k), D(k)) \left( W_t - (\hat{\theta}(k)^t P + Q) V_t \right)^t = R(k) \quad (A.228)$$

C’est un système linéaire. En fait quelques itérations d’une méthode itérative sont suffisantes [1].

- 7 La commande est donnée par:

$$C(k, q^{-1}) u(k) + D(k, q^{-1}) y(k) = \quad (A.229)$$

$$= E(k, q^{-1}) \left[ W_t(q^{-1}) - (\hat{\theta}(k)^t P + Q) V_t(q^{-1}) \right] \begin{pmatrix} y(k) \\ u(k-1) \end{pmatrix} + F(k, q^{-1}) r(k)$$

$r$ , suite supposée bornée, sera la commande du système bouclé. Les polynômes  $E(k)$  et  $F(k)$  sont choisis à coefficients bornés et pouvant dépendre de  $\hat{\theta}$ , mais de façon au moins Lipschitzienne.

### Démonstration:

*Première étape: (1.169) est satisfaite:*

D’après les Propriétés 1.1 et 1.2, tout modèle  $(A_m S, B_m)$  donne une erreur de modélisation  $d_m$  vérifiant, avec  $\beta_\infty$  et  $\beta_2$  des suites bornées:

- soit:

$$\mu^k \|d_m\|_{\mu,k} \leq \beta_\infty(k) + \gamma_\infty s_\mu(k) \quad (\text{A.230})$$

• soit:

$$|d_m(k)| \leq \beta_2(k) + \gamma_2 s_\mu(k) \quad (\text{A.231})$$

D'après la Propriété 1.3 et le Lemme 1.2, l'inégalité (1.169) est donc satisfaite avec  $\gamma_w$  proportionnel à  $\gamma_2$  ou  $\gamma_\infty$ . On pourrait même prendre un modèle instationnaire  $(A_m(k)S, B_m(k))$ . Il faudrait alors ajouter à  $\gamma_w$  un terme quantifiant cette instationnarité. Les contraintes résultent en fait des limitations que nous introduisons sur  $\gamma_w$  (et  $\gamma_W$  dans le cas instationnaire) dans (1.169) (et (1.168)) et du fait que nous voulons une suite  $\theta$ , solution de:

$$(A_m(k)S, -B_m(k)) = W_t - (\theta(k)^t P + Q) V_t \quad (\text{A.232})$$

pouvant servir de suite de comparaison pour la Propriété 1.4, i.e.  $\theta(k)$  appartient  $\mathfrak{T}(k)$ . Dans le cas stationnaire, ceci signifie que les coefficients de  $A_m$  et  $B_m$  doivent être dans la préimage par l'application définie par (A.232).

*Deuxième étape: les hypothèses du Lemme 1.6 sont satisfaites:*

D'après ce qui précède, nous pouvons supposer l'existence d'une suite de comparaison (constante pour un modèle stationnaire)  $\theta$  telle que:

- $\theta(k)$  appartient  $\mathfrak{T}(k)$ ,
- la suite des erreurs de modélisation associée  $w_\theta$  vérifie (1.169). Ceci implique que la suite  $\frac{w_\theta}{\sigma}$  est bornée et, suivant la Propriété 1.4, il en est de même de  $\frac{e}{\sigma}$ ,  $e$  étant l'erreur d'adaptation.

Posons alors:

$$(\widehat{A}_m(k)S, -\widehat{B}_m(k)) = W_t - (\widehat{\theta}(k)^t P + Q) V_t U \quad (\text{A.233})$$

le système bouclé est décrit par:

$$\begin{pmatrix} N(q^{-1}) & 0 & 0 \\ -1 & \widehat{A}_m(k, q^{-1})S(q^{-1}) & -\widehat{B}_m(k, q^{-1})q^{-1} \\ E(k, q^{-1}) & D(k, q^{-1}) & C(k, q^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{d}_m(k) \\ y(k) \\ u(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det\{U(q^{-1})\} e(k) + \delta(k) \\ 0 \\ F(k, q^{-1}) r(k) \end{pmatrix} \quad (\text{A.234})$$

avec la suite  $\delta$  donnée par (1.116) et satisfaisant (1.121). On en déduit:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc} N(q^{-1}) & 0 & 0 \\ 0 & R(k, q^{-1})N(q^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & R(k, q^{-1})N(q^{-1}) \end{array} \right) \begin{pmatrix} \widehat{d}_m(k) \\ y(k) \\ u(k) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ C(k, q^{-1}) - \widehat{B}_m(k, q^{-1})E(k, q^{-1}) \\ -[D(k, q^{-1}) + \widehat{A}_m(k, q^{-1})S(q^{-1})E(k, q^{-1})] \end{pmatrix} (\det\{U(q^{-1})\} e(k) + \delta(k)) + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{B}_m(k, q^{-1})N(q^{-1}) \\ \widehat{A}_m(k, q^{-1})S(q^{-1})N(q^{-1}) \end{pmatrix} F(k, q^{-1})r(k) + \Delta(k) \end{aligned} \quad (\text{A.235})$$

où  $\Delta$  résulte de la non commutativité des opérateurs instationnaires. Une écriture explicite est sans aucun intérêt. Remarquons seulement que  $\Delta$  contient des termes tels:

$$(\widehat{B}_m(k, q^{-1})N(q^{-1}) \circ E(k, q^{-1}) - \widehat{B}_m(k, q^{-1})N(q^{-1})E(k, q^{-1})) \widehat{d}_m(k)$$

ou

$$(C(k, q^{-1})N(q^{-1}) \circ \widehat{A}_m(k, q^{-1})S(q^{-1}) - C(k, q^{-1})N(q^{-1})\widehat{A}_m(k, q^{-1})S(q^{-1})) y(k)$$

et:

1. L'application associant  $C(k)$ ,  $D(k)$  et  $E(k)$  à  $\widehat{\theta}(k)$  est Lipschitzienne.
2. La suite  $\frac{\det\{U(q^{-1})\} e + \delta}{\sigma}$  étant bornée et  $N$  étant  $\mu$ -exponentiellement stable, la relation entre  $s_\mu$  et  $\sigma$  et le point 2.2 du Lemme A.2 impliquent l'existence d'une constante  $\gamma$  et d'une suite  $\beta$  dont la  $\limsup$  ne dépend pas des conditions initiales telles que:

$$|\widehat{d}_m(k)| \leq \beta(k) + \gamma s_\mu(k) \quad (\text{A.236})$$

3. Par définition  $u(k)$  et  $y(k)$  sont majorées par  $s_\mu(k+1)$ .

$\Delta(k)$  vérifient donc une inégalité du type:

$$\|\Delta(k)\| \leq \Gamma_\Delta \sum_{i=0}^d \|\widehat{\theta}(k-i) - \widehat{\theta}(k-i-1)\| s_\mu(k-i) + \beta_\Delta(k) \quad (\text{A.237})$$

où  $\beta_\Delta$  est une suite bornée et sa  $\limsup$  ne dépend pas des conditions initiales.

Considérons alors l'état  $X$ :

$$X(k) = \begin{pmatrix} \widehat{d_m}(k-1) \\ \vdots \\ \widehat{d_m}(k-n_N) \\ y(k-1) \\ \vdots \\ y(k-n_N-n_R) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-n_N-n_R) \end{pmatrix} \quad (\text{A.238})$$

Ceci nous permet d'obtenir une représentation d'état du type (1.154) où:

- (1.156) est vérifiée grâce au choix de  $N$  et  $R$ .
- (1.155) et (1.157) résultent de la bornitude de  $\widehat{\theta}$  et  $r$  et de la régularité de l'application associant  $C(k)$ ,  $D(k)$  et  $F(k)$  à  $\widehat{\theta}$ .
- (1.158) vient du fait que les composantes de  $\eta$  sont celles de  $\Delta$  ou  $\delta$ .
- (1.159) à (1.162) sont données par la Propriété 1.4.
- (1.163) à (1.165) sont données par le choix que nous avons fait pour  $s_\mu$  et  $\sigma$ .
- (1.166) vient de (A.236).

## Bibliographie

- [1] Praly L.: *MIMO indirect adaptive control: stability and robustness*. Rap. CAI A118. Décembre 1982.

## A.17 Démonstration du Lemme 1.7

Définissons une suite  $\mathcal{L}$  de la façon suivante:

$$\mathcal{L}(k) = L_\theta(k+1) + x(k+1) \quad (\text{A.239})$$

$$= L_\theta(k+1) + \sum_{i=1}^{k+1} [L_\theta(i-1) - L_\theta(i)] \frac{\mu^{-2i}\sigma(i)^2}{\mu^{-2(k+1)}\sigma(k+1)^2} \quad (\text{A.240})$$

$$= \frac{\mu^{-2(k+1)}\sigma(k+1)^2}{\mu^{-2(k+1)}\sigma(k+1)^2} \mathcal{L}(k-1) + \left[ 1 - \frac{\mu^{-2(k+1)}\sigma(k+1)^2}{\mu^{-2(k+1)}\sigma(k+1)^2} \right] L_\theta(k) \quad (\text{A.241})$$

La suite  $L_\theta$  étant bornée et la suite  $\mu^{-2k}\sigma_\mu(k)^2$  étant croissante, la suite  $\mathcal{L}$  est aussi bornée:

$$\mathcal{L}(k) \leq \sup_i \{L_\theta(i)\} \quad (\text{A.242})$$

Maintenant, l'hypothèse:

$$x(k) \geq \varepsilon \quad \forall k \in ]K_0, K_1[ \quad (\text{A.243})$$

est équivalente à:

$$\mathcal{L}(k-1) - L_\theta(k) \geq \varepsilon \quad \forall k \in ]K_0, K_1[ \quad (\text{A.244})$$

Utilisant l'hypothèse (1.214), on a donc pour tout  $k$  dans  $]K_0, K_1[$ :

$$\mathcal{L}(k-1) - \mathcal{L}(k) \geq \varepsilon \frac{\mu^{-2(k+1)}\sigma(k+1)^2 - \mu^{-2(k)}\sigma(k)^2}{\mu^{-2(k+1)}\sigma(k+1)^2} \quad (\text{A.245})$$

$$\geq \varepsilon \left( \frac{\mu}{c} \right)^2 \frac{\mu^{-2(k+1)}\sigma(k+1)^2 - \mu^{-2k}\sigma(k)^2}{\mu^{-2k}\sigma(k)^2} \quad (\text{A.246})$$

La bornitude de  $\mathcal{L}$  et la somme de ces inégalités nous donnent pour tout  $k$  dans  $]K_0, K_1[$ :

$$\sum_{i=K_0+1}^k \frac{\mu^{-2(k+1)}\sigma(k+1)^2 - \mu^{-2k}\sigma(k)^2}{\mu^{-2k}\sigma(k)^2} \leq \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{c}{\mu} \right)^2 \sup_i \{L_\theta(i)\} \quad (\text{A.247})$$

Mais la suite  $\mu^{-2k}\sigma_\mu(k)^2$  étant croissante, ceci implique:

$$\log \frac{\mu^{-2k}\sigma(k)^2}{\mu^{-2(K_0+1)}\sigma(K_0+1)^2} \leq \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{c}{\mu} \right)^2 \sup_i \{L_\theta(i)\} \quad (\text{A.248})$$

D'où, avec (1.214):

$$\sigma(k)^2 \leq \mu^{2(k-K_0)} \sigma(K_0)^2 \frac{c}{\mu} \exp \left( \left( \frac{c}{\mu} \right)^2 \sup_i \{L_\theta(i)\} \right) \quad \forall k \in ]K_0, K_1[ \quad (\text{A.249})$$

## A.18 Démonstration de la Propriété 1.6

La démonstration de cette Propriété est assez fastidieuse et demande un certain nombre de préliminaires.

**Préambule:**

- Nous noterons  $\eta$  toute suite scalaire ou vectorielle  $\mu$ -exponentiellement décroissante.
- Rappelons l'égalité:

$$\left\| q^{-1} \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} \right\|_{\mu,k} = \mu^{-k} s_\mu(k) \quad (\text{A.250})$$

- Pour simplifier les notations, nous poserons par exemple:

$$\frac{F_\theta}{B_m}(q^{-1}) u(k) = \sum_{i=0}^k h(k-i) u(i) \quad (\text{A.251})$$

où  $h$  est la réponse impulsionnelle dont la fonction de transfert est  $\frac{F_\theta(z^{-1})}{B_m(z^{-1})}$

- D'après (Desoer et Vidyasagar [1]), utilisant la notation (1.218), on a l'inégalité suivante entre normes  $l_2(\mu)$ :

$$\left\| \frac{F_\theta}{B_m} u \right\|_{\mu,k} \leq \gamma \left\{ \frac{F_\theta}{B_m} \right\} \|u\|_{\mu,k} \quad (\text{A.252})$$

En particulier, puisque:

$$Y(k) = (Y_y(q^{-1}), Y_u(q^{-1})) \left[ q^{-1} \begin{pmatrix} y(k) \\ u(k) \end{pmatrix} \right] \quad (\text{A.253})$$

on a:

$$\|Y\|_{\mu,k} \leq \gamma \{(Y_y, Y_u)\} \mu^{-k} s_\mu(k) \quad (\text{A.254})$$

- Notons enfin le résultat technique suivant:

**Lemme A.3** Soit  $\Sigma$  et  $x$  deux suites définies par:

$$\Sigma(k) = \sqrt{\sup \left\{ 0, \sum_{i=1}^k [L_\theta(i-1) - L_\theta(i)] \frac{\mu^{-2i} \sigma(i)^2}{\mu^{-2k} \sigma(k)^2} \right\}} \quad (\text{A.255})$$

$$x(k) = \sum_{i=0}^{k-1} h(k, i) [\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(i)]^t Y(i+1) \quad (\text{A.256})$$

Si l'inégalité (1.99) est satisfaite avec  $W_\theta$  nulle et:

$$\|Y\|_{\mu,k} \leq \gamma \mu^{-k} s_\mu(k) \quad (\text{A.257})$$

alors on a:

$$\|x\|_{\mu,k} \leq \gamma g\{h\} \left[ \sqrt{\Gamma_\theta} \Sigma(k) \mu^{-k} \sigma(k) + \sqrt{\Gamma_q \Gamma_\theta} \|w_\theta\|_{\mu,k} \right] \quad (\text{A.258})$$

avec la notation:

$$g\{h\} = \inf_{\lambda \leq \mu} \left\{ \frac{\mu^3}{\mu^2 - \lambda^2} \sup_{j \leq k} \left\{ \sum_{i=0}^{j-1} \left( \frac{h(j, i)}{\lambda^{j-i}} \right)^2 \right\} \right\} \quad (\text{A.259})$$

**Preuve:** Par application de l'inégalité de Schwarz, on obtient:

$$x(j)^2 = \left[ \sum_{i=0}^{j-1} h(j, i) Y(i+1)^t \sum_{l=i+1}^j (\hat{\theta}(l) - \hat{\theta}(l-1)) \right]^2 \quad (\text{A.260})$$

$$= \left[ \sum_{i=0}^{j-1} \frac{h(j, i)}{\lambda^{j-i}} \lambda^{j-i} Y(i+1)^t \sum_{l=i+1}^j \frac{\hat{\theta}(l) - \hat{\theta}(l-1)}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{l-i}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{l-i} \right]^2 \quad (\text{A.261})$$

$$\leq \sum_{i=0}^{j-1} \left[ \frac{h(j, i)}{\lambda^{j-i}} \right]^2 \sum_{i=0}^{j-1} \left[ \left( \lambda^{j-i} Y(i+1)^t \right)^2 \sum_{l=i+1}^j \left( \frac{\hat{\theta}(l) - \hat{\theta}(l-1)}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{l-i}} \right)^2 \sum_{l=i+1}^j \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{2(l-i)} \right] \quad (\text{A.262})$$

$$\leq \frac{\mu^2}{\mu^2 - \lambda^2} \sum_{i=0}^{j-1} \left[ \frac{h(j, i)}{\lambda^{j-i}} \right]^2 \sum_{l=1}^j \left[ \|\hat{\theta}(l) - \hat{\theta}(l-1)\|^2 \sum_{i=0}^{l-1} \lambda^{2(j-i)} \mu^{2(l-i)} \|Y(i+1)\|^2 \right] \quad (\text{A.263})$$

Comme on a aussi:

$$\sum_{j=0}^k \mu^{-2j} \left[ \sum_{l=1}^j \left( \|\hat{\theta}(l) - \hat{\theta}(l-1)\|^2 \sum_{i=0}^{l-1} \lambda^{2(j-i)} \mu^{2(l-i)} \|Y(i+1)\|^2 \right) \right] \leq \sum_{l=1}^k \left( \|\hat{\theta}(l) - \hat{\theta}(l-1)\|^2 \sum_{i=0}^{l-1} \mu^{-2(i+1)} \|Y(i+1)\|^2 \mu^2 \sum_{j=l}^k \left[ \frac{\lambda}{\mu} \right]^{2(j-l)} \right) \quad (\text{A.264})$$

$$\leq \frac{\mu^4}{\mu^2 - \lambda^2} \sum_{l=1}^k \|\hat{\theta}(l) - \hat{\theta}(l-1)\|^2 \|Y\|_{\mu,l}^2 \quad (\text{A.265})$$

L'inégalité (1.99), nous donne le résultat désiré.  $\square$

### Démonstration:

Première étape: une majoration de  $\|w_\theta\|_{\mu,k}$ :

De (1.210), nous obtenons:

$$w_\theta(k) = \frac{F_\theta}{B_m}(q^{-1}) \left[ e(k) + \frac{1}{\det\{U\}}(q^{-1}) \delta(k) \right] + \eta(k) + \frac{G_\theta}{\det\{U\}B_m}(q^{-1}) r(k) \quad (\text{A.266})$$

$$+ \frac{\Delta M}{\det\{U\}B_m}(q^{-1}) [\theta^t Y(k) + J(q^{-1}) u(k-1)] + \frac{M}{\det\{U\}B_m}(q^{-1}) [\theta^t Y_u(q^{-1}) + J(q^{-1})] d(k)$$

Evaluons la norme  $l_2(\mu)$  de chacun des termes de cette somme:

1- D'après la Propriété (1.98) donnée par la loi d'adaptation et sachant que la suite  $W$  est nulle ici, nous obtenons, avec la notation (A.255):

$$\|e\|_{\mu,k} \leq \frac{\Gamma_a}{\sqrt{\Gamma_q}} \Sigma(k) \mu^{-k} \sigma(k) + \Gamma_a \|w_\theta\|_{\mu,k} \quad (\text{A.267})$$

2- D'après (1.195) où:

$$Z(k) = \frac{MB}{\det\{U\}}(q^{-1}) Y(k) + \eta(k) \quad (\text{A.268})$$

on obtient:

$$\frac{1}{\det\{U\}}(q^{-1}) \delta(k) = \sum_{i=0}^{k-1} h(k-i) [\hat{\theta}(k-1) - \hat{\theta}(i-1)]^t Y(i) + \hat{\theta}(k-1)^t \eta(k) \quad (\text{A.269})$$

en notant  $h$  la réponse impulsionnelle dont la fonction de transfert est  $\frac{M(z^{-1})\mathcal{B}(z^{-1})}{\det\{U(z^{-1})\}}$

Appliquant le Lemme A.3 et puisque,  $\hat{\theta}$  étant bornée, la norme  $l_2(\mu)$  de  $\hat{\theta}(k-1)^t \eta(k)$  est bornée, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\det\{U\}}(q^{-1}) \delta \right\|_{\mu,k} &\leq \\ &\leq g \left\{ \frac{MB}{\det\{U\}} \right\} \gamma \{ (Y_y, Y_u) \} \left[ \sqrt{\Gamma_\theta} \Sigma(k) \mu^{-k} \sigma(k) + \sqrt{\Gamma_q \Gamma_\theta} \|w_\theta\|_{\mu,k} \right] + C_1 \end{aligned} \quad (\text{A.270})$$

3- La suite  $r$  étant bornée, il existe une constante  $R$  telle que:

$$\left\| \frac{G_\theta}{\det\{U\}B_m}(q^{-1}) r \right\|_{\mu,k} \leq R \mu^{-k} \quad (\text{A.271})$$

4- Puisque:

$$\theta^t Y(k) + J(q^{-1}) u(k-1) = [\theta^t Y_y(q^{-1}), \theta^t Y_u(q^{-1}) + J(q^{-1})] \left[ q^{-1} \begin{pmatrix} y(k) \\ u(k) \end{pmatrix} \right] \quad (\text{A.272})$$

on a:

$$\|\theta^t Y(k) + J(q^{-1}) u(k-1)\|_{\mu,k} \leq \gamma \left\{ (\theta^t Y_y, \theta^t Y_u + J) \right\} \mu^{-k} s_\mu(k) \quad (\text{A.273})$$

De toutes ces inégalités, on déduit:

$$\begin{aligned} \|w_\theta\|_{\mu,k} &\leq \gamma \left\{ \frac{F_\theta}{B_m} \right\} \left[ \frac{\Gamma_a}{\sqrt{\Gamma_q}} + g \left\{ \frac{MB}{\det\{U\}} \right\} \gamma \{(Y_y, Y_u)\} \sqrt{\Gamma_\theta} \right] \Sigma(k) \mu^{-k} \sigma(k) + \\ &\quad + \gamma \left\{ \frac{F_\theta}{B_m} \right\} \left[ \Gamma_a + g \left\{ \frac{MB}{\det\{U\}} \right\} \gamma \{(Y_y, Y_u)\} \sqrt{\Gamma_q \Gamma_\theta} \right] \|w_\theta\|_{\mu,k} + \\ &\quad + C_2 + R \mu^{-k} + \\ &\quad + \gamma \left\{ \frac{\Delta M}{\det\{U\} B_m} \right\} \gamma \left\{ (\theta^t Y_y, \theta^t Y_u + J) \right\} \mu^{-k} s_\mu(k) + \\ &\quad + \gamma \left\{ \frac{M}{\det\{U\} B_m} (\theta^t Y_u + J) \right\} \gamma_d \mu^{-k} s_\mu(k) + \beta \mu^{-k} \end{aligned} \quad (\text{A.274})$$

où nous avons utilisé (1.206) et la bornitude de  $\beta_d$ . Posons alors:

$$\gamma_1 = \gamma \left\{ \frac{F_\theta}{B_m} \right\} \left[ \frac{\Gamma_a}{\sqrt{\Gamma_q}} + g \left\{ \frac{MB}{\det\{U\}} \right\} \gamma \{(Y_y, Y_u)\} \sqrt{\Gamma_\theta} \right] \quad (\text{A.275})$$

$$\gamma_2 = \Gamma_a + g \left\{ \frac{MB}{\det\{U\}} \right\} \gamma \{(Y_y, Y_u)\} \sqrt{\Gamma_q \Gamma_\theta} \quad (\text{A.276})$$

$$\gamma_3 = \gamma \left\{ (\theta^t Y_y, \theta^t Y_u + J) \right\} \gamma \left\{ \frac{M}{\det\{U\}} \right\} \quad (\text{A.277})$$

$$\gamma_4 = \gamma \left\{ \frac{M}{\det\{U\} B_m} (\theta^t Y_u + J) \right\} \quad (\text{A.278})$$

Nous avons établi:

$$\begin{aligned} \left[ 1 - \gamma_2 \gamma \left\{ \frac{F_\theta}{B_m} \right\} \right] \|w_\theta\|_{\mu,k} &\leq \\ &\leq \gamma_1 \Sigma(k) \mu^{-k} \sigma(k) + \left[ \gamma_3 \gamma \left\{ \frac{\Delta}{B_m} \right\} + \gamma_4 \gamma_d \right] \mu^{-k} s_\mu(k) + C_2 + \Gamma_1 \mu^{-k} \end{aligned} \quad (\text{A.279})$$

*Deuxième étape: le système bouclé:*

Réunissant (1.194), (1.198), (1.192) et (1.205), on obtient:

$$y(k) = \frac{1 - q^{-1} \mathcal{B} E}{R}(q^{-1}) \omega(k) + \frac{q^{-1} \mathcal{B}}{R}(q^{-1}) r(k) + \eta(k) \quad (\text{A.280})$$

$$\omega(k) = \frac{\det\{U\}}{M}(q^{-1}) \left[ e(k) + \frac{1}{\det\{U\}}(q^{-1}) \delta(k) \right] + \eta(k) \quad (\text{A.281})$$

$$[\hat{\theta}(k)^t Y_u(q^{-1}) + J(q^{-1})] u(k) = r(k) - [\hat{\theta}(k)^t Y_y(q^{-1}) + L(q^{-1})] y(k) - E(q^{-1}) \omega(k) \quad (\text{A.282})$$

$$B_m(q^{-1}) q^{-1} \mathcal{B}(q^{-1}) u(k) = R(q^{-1}) A(q^{-1}) y(k) - \Delta(q^{-1}) u(k-1) - R(q^{-1}) d(k) \quad (\text{A.283})$$

Et, les polynômes  $\hat{\theta}(k)^t Y_u + J$  et  $\mathcal{B}$  étant uniformément strictement premiers entre eux, il existe  $\bar{\alpha}(k)$  et  $\bar{\beta}(k)$ , des polynômes à coefficients bornés, tels que, pour chaque  $k$ :

$$\bar{\alpha}(k)(\hat{\theta}(k)^t Y_u + J) + \bar{\beta}(k)B_m q^{-1} \mathcal{B} = B_m \quad (\text{A.284})$$

Ceci nous permet d'écrire le système bouclé sous la forme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{q^{-1}\mathcal{B}E - 1}{R}(q^{-1}) & 1 & 0 \\ \frac{\bar{\alpha}(k)E}{B_m}(q^{-1}) & \frac{\bar{\alpha}(k) \circ [\hat{\theta}(k)^t Y_y + L] - \bar{\beta}(k)RA}{B_m}(q^{-1}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega(k) \\ y(k) \\ u(k) \end{pmatrix} = \eta(k) + \quad (\text{A.285})$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{q^{-1}\mathcal{B}}{R}(q^{-1}) \\ \frac{\bar{\alpha}(k)}{B_m}(q^{-1}) \end{pmatrix} r(k) + \begin{pmatrix} \frac{\det\{U\}}{M}(q^{-1}) \left[ e(k) + \frac{1}{\det\{U\}}(q^{-1})\delta(k) \right] \\ 0 \\ \delta'(k) - \frac{\bar{\beta}(k)\Delta}{B_m}(q^{-1})u(k-1) - \frac{\bar{\beta}(k)R}{B_m}(q^{-1})d(k) \end{pmatrix}$$

où:

$$\delta'(k) = \frac{\hat{\theta}(k)^t [\bar{\alpha}(k)Y_u] - \bar{\alpha}(k) \circ [(\hat{\theta}(k)^t Y_u)](q^{-1})u(k)}{B_m} \quad (\text{A.286})$$

et, utilisant le Lemme A.3, on a:

$$\|\delta'\|_{\mu,k} \leq \gamma \{Y_u\} g \left\{ \frac{\bar{\alpha}(k)}{B_m} \right\} \left[ \sqrt{\Gamma_\theta} \Sigma(k) \mu^{-k} \sigma(k) + \sqrt{\Gamma_q \Gamma_\theta} \|w_\theta\|_{\mu,k} \right] \quad (\text{A.287})$$

Posons alors:

$$\gamma_5 = \gamma \left\{ \left( \frac{\frac{1-q^{-1}\mathcal{B}E}{R}}{\frac{\bar{\alpha}(k) \circ (\hat{\theta}(k)^t Y_y + L) - \bar{\beta}(k)RA}{B_m} \frac{1-q^{-1}\mathcal{B}E}{R}} - \frac{\bar{\alpha}(k)E}{B_m} \right) \right\} \quad (\text{A.288})$$

$$\gamma_6 = \gamma \left\{ \left[ \frac{\bar{\alpha}(k) \circ (\hat{\theta}(k)^t Y_y + L) - \bar{\beta}(k)RA}{B_m} \frac{1-q^{-1}\mathcal{B}E}{R} - \frac{\bar{\alpha}(k)E}{B_m} \right] \circ \beta(k) \right\} \quad (\text{A.289})$$

$$\gamma_7 = \gamma \left\{ \frac{\bar{\alpha}(k) \circ (\hat{\theta}(k)^t Y_y + L) - \bar{\beta}(k)RA}{B_m} \frac{1-q^{-1}\mathcal{B}E}{R} - \frac{\bar{\alpha}(k)E}{B_m} \right\} \quad (\text{A.290})$$

$$\gamma_8 = \gamma \{Y_u\} g \left\{ \frac{\bar{\alpha}(k)}{B_m} \right\} \sqrt{\Gamma_\theta} \quad (\text{A.291})$$

$$\gamma_9 = \gamma \{Y_u\} g \left\{ \frac{\bar{\alpha}(k)}{B_m} \right\} \sqrt{\Gamma_q \Gamma_\theta} \quad (\text{A.292})$$

$$\gamma_{10} = \gamma \left\{ \left[ \frac{\bar{\alpha}(k) \circ (\hat{\theta}(k)^t Y_y + L) - \bar{\beta}(k)RA}{B_m} \frac{1-q^{-1}\mathcal{B}E}{R} - \frac{\bar{\alpha}(k)E}{B_m} \right] \circ \frac{\bar{\beta}(k)R}{B_m} \right\} \quad (\text{A.293})$$

Nous obtenons:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{c} y \\ u \end{array} \right\|_{\mu,k} &\leq C_3 + \Gamma_2 \mu^{-k} + \gamma_5 \gamma_2 \left[ \frac{1}{\sqrt{\Gamma_q}} \Sigma(k) \mu^{-k} \sigma(k) + \|w_\theta\|_{\mu,k} \right] + \\ &+ \gamma_6 \gamma \left\{ \frac{\Delta}{B_m} \right\} \mu^{-k} s_\mu(k) + \gamma_7 \left[ \gamma_8 \Sigma(k) \mu^{-k} \sigma(k) + \gamma_9 \|w_\theta\|_{\mu,k} \right] + \gamma_{10} \gamma_d \mu^{-k} s_\mu(k) \end{aligned} \quad (\text{A.294})$$

Utilisant la relation entre  $s_\mu$  et la norme  $l_2(\mu)$  de  $u$  et  $y$  et le résultat de la première étape, on obtient:

$$\begin{aligned} \left[ 1 - \gamma_2 \gamma \left\{ \frac{F_\theta}{B_m} \right\} \right] \mu^{-k} s_\mu(k+1) &\leq C_4 + \Gamma_3 \mu^{-k} + \\ &+ \left[ \gamma_1 (\gamma_5 \gamma_2 + \gamma_7 \gamma_9) + \left( 1 - \gamma_2 \gamma \left\{ \frac{F_\theta}{B_m} \right\} \right) (\gamma_5 \gamma_2 + \gamma_7 \gamma_8) \right] \Sigma(k) \mu^{-k} \sigma(k) + \\ &+ \left[ \gamma_3 (\gamma_5 \gamma_2 + \gamma_7 \gamma_9) + \left( 1 - \gamma_2 \gamma \left\{ \frac{F_\theta}{B_m} \right\} \right) \gamma_6 \right] \gamma \left\{ \frac{\Delta}{B_m} \right\} \mu^{-k} s_\mu(k) + \\ &+ \left[ \gamma_4 (\gamma_5 \gamma_2 + \gamma_7 \gamma_9) + \left( 1 - \gamma_2 \gamma \left\{ \frac{F_\theta}{B_m} \right\} \right) \gamma_{10} \right] \gamma_d \mu^{-k} s_\mu(k) \end{aligned} \quad (\text{A.295})$$

*Conclusion:*

Notons:

1. La suite  $\Sigma$  est bornée (voir la démonstration du Lemme 1.7).
2. La constante  $C_4$ , résultant des normes  $l_2(\mu)$  des suites  $\eta$ , prend en compte tous les effets des conditions initiales.
3. Par définition, on a:

$$\sup \{1, s_\mu(k)\} = \sigma(k) \quad (\text{A.296})$$

L'inégalité (A.295) nous montre donc que l'hypothèse:

$$1 - \gamma_2 \gamma \left\{ \frac{F_\theta}{B_m} \right\} > 0 \quad (\text{A.297})$$

implique l'existence d'une constante  $c$  telle que, pour tout  $k$ :

$$\sigma(k+1) \leq c \sigma(k) \quad (\text{A.298})$$

De plus, il existe un instant  $k_0$ , pris comme origine des temps dans la suite, tel que, pour tout  $k$  supérieur à  $k_0$ , cette constante  $c$  peut être prise indépendante des conditions initiales et, par ailleurs,  $C_4 \mu^k$  est inférieur à une constante donnée. Nous pouvons donc utiliser le résultat du Lemme 1.7. Par ailleurs, la suite  $\mu^{-k} \sigma(k)$  étant croissante, l'inégalité (A.295) nous donne aussi:

$$\begin{aligned} &\left[ \left( 1 - \gamma_2 \gamma \left\{ \frac{F_\theta}{B_m} \right\} \right) \left( \mu - \gamma_6 \gamma \left\{ \frac{\Delta}{B_m} \right\} - \gamma_{10} \gamma_d \right) - \left( \gamma_3 \gamma \left\{ \frac{\Delta}{B_m} \right\} + \gamma_4 \gamma_d \right) (\gamma_5 \gamma_2 + \gamma_7 \gamma_9) \right] \sigma(k) \leq \\ &\leq C_5 \mu^k + \Gamma_3 + \left[ \gamma_1 (\gamma_5 \gamma_2 + \gamma_7 \gamma_9) + \left( 1 - \gamma_2 \gamma \left\{ \frac{F_\theta}{B_m} \right\} \right) (\gamma_5 \gamma_2 + \gamma_7 \gamma_8) \right] \Sigma(k) \sigma(k) \end{aligned} \quad (\text{A.299})$$

Donc, il existe une constante  $S_0$ , indépendante des conditions initiales, telle que:

$$\Sigma(k) \leq \varepsilon \quad (\text{A.300})$$

implique:

$$\sigma(k) \leq S_0 \quad (\text{A.301})$$

où:

$$\varepsilon = \frac{\left(1 - \gamma_2 \gamma \left\{ \frac{F_k}{B_m} \right\}\right) \left(\mu - \gamma_6 \gamma \left\{ \frac{\Delta}{B_m} \right\} - \gamma_{10} \gamma_d\right) - \left(\gamma_3 \gamma \left\{ \frac{\Delta}{B_m} \right\} + \gamma_4 \gamma_d\right) (\gamma_5 \gamma_2 + \gamma_7 \gamma_9)}{2 \left[ \gamma_1 (\gamma_5 \gamma_2 + \gamma_7 \gamma_9) + \left(1 - \gamma_2 \gamma \left\{ \frac{F_k}{B_m} \right\}\right) (\gamma_5 \gamma_2 + \gamma_7 \gamma_9) \right]} \quad (\text{A.302})$$

Considérons donc un intervalle  $]K_0, K_1[, K_1$  pouvant être infini, tel que:

$$\sigma(K_0) \leq S_1 , \quad \sigma(K_1) \leq S_0 , \quad \forall k \in ]K_0, K_1[ : \sigma(k) > S_0 \quad (\text{A.303})$$

où on pose:

$$S_1 = \begin{cases} S_0 & \text{si } K_0 \neq 0 \\ \sup \{S_0, \sigma(0)\} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.304})$$

L'implication précédente, nous permet d'écrire:

$$\Sigma(k) \geq \varepsilon , \quad \forall k \in ]K_0, K_1[ \quad (\text{A.305})$$

Appliquant le Lemme 1.7, il existe une constante  $\Gamma$ , indépendante des conditions initiales, telle que:

$$\sigma(k) \leq \Gamma S_1 \mu^{k-K_0} , \quad \forall k \in ]K_0, K_1[ \quad (\text{A.306})$$

Cette décroissance exponentielle implique que  $K_1$  est fini. On en déduit l'existence d'un instant  $\bar{k}_0$  tel que:

$$\sigma(k) \leq \Gamma S_0 , \quad \forall k > \bar{k}_0 \quad (\text{A.307})$$

où, rappelons-le,  $\Gamma$  et  $S_0$  ne dépendent pas des conditions initiales et la stricte positivité de  $\varepsilon$  définie en (A.302) est suffisante pour obtenir cette inégalité.

## Bibliographie

- [1] Desoer C.A., Vidyasagar M.: *Feedback systems: Input-output properties*. Academic Press. 1975.



## **Annexe B**

### **Compléments techniques sur le chapitre 2**



## B.1 Démonstration de la Propriété 2.1

Le résultat de stabilité étant bien connu (Goodwin et Sin [1, Lemma B.3.1]), concentrons notre attention sur le résultat d'existence.

### Condition suffisante:

On vérifie facilement avec (2.21) que  $X(k, \varphi)$ , donnée par (2.20) est solution de (2.18).

### Condition nécessaire:

Remarquons tout d'abord que (2.18) peut s'écrire, en supposant l'équation et la dépendance en  $\varphi$  pour simplifier les notations:

$$\begin{pmatrix} U(k+1) \\ X(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z & 0 \\ BT & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(k) \\ X(k) \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

avec:

$$Z = \text{diag}(z_i) \quad , \quad U(k) = \begin{pmatrix} u_1 z_1(k) \\ \vdots \\ u_m z_m(k) \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{I} = (I \dots I) \quad (\text{B.2})$$

et nous devons nous intéresser aux solutions dont chaque composante de  $U$  est non nulle. Appelons  $\mathcal{A}$  la matrice du système (B.1). D'après LaSalle [1, Section 8], les solutions de ce système définies et bornées sur  $]-\infty, +\infty[$  s'écrivent nécessairement:

$$Y(k) = \sum_j \lambda_j^k Y_j \quad (\text{B.3})$$

où  $\lambda_j$  est valeur propre de module égal à 1 de  $\mathcal{A}$  et  $Y_j$  est un vecteur propre associé. Les valeurs propres de  $\mathcal{A}$  étant celles de  $Z$  et de  $A$ , deux cas sont à considérer:

1.  $\lambda_j = z_i$  est valeur propre de  $Z$ : Dans ce cas, le vecteur propre associé s'écrit:

$$Y_j = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ u_i \\ 0 \\ \vdots \\ X_i \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

avec  $X_i$  vérifiant:

$$\begin{pmatrix} z_i & 0 \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ X_i \end{pmatrix} = z_i \begin{pmatrix} u_i \\ X_i \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

$Bu_i$  doit donc être dans l'image de  $z_i I - A$ .

2.  $\lambda_j$  est valeur propre de  $A$ : Dans ce cas, le vecteur propre associé s'écrit:

$$Y_j = \begin{pmatrix} : \\ 0 \\ V_j \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

avec:

$$AV_j = \lambda_j V_j \quad (\text{B.7})$$

(2.20) est alors obtenu en écrivant la composante  $X$  de (B.3).

## Bibliographie

- [1] Goodwin G.C., Sin K.S.: *Adaptive filtering, prediction and control*. Prentice-Hall. 1984.
- [2] LaSalle J. P.: *The stability and control of discrete processes*. Applied mathematical sciences 62. Springer Verlag. 1986.

## B.2 Démonstration de la Propriété 2.2

D'après les propriétés de régularité des fonctions  $A$ ,  $B$  et  $C$ , pour tout  $k$  fini,  $(X(k), \varphi(k))$ , solution de (2.4) issue de  $(X(0), \varphi(0))$  est une fonction continue de  $(X(0), \varphi(0), \varepsilon)$ . Notons  $(X(k, \varepsilon), \varphi(k, \varepsilon))$  la solution périodique de période  $M$  donnée en hypothèse. Considérons une suite de valeurs  $\varepsilon$ , tendant vers zéro, telle que  $(X(0, \varepsilon), \varphi(0, \varepsilon))$  converge vers  $(X^*, \varphi^*)$ . Pour tout  $k$ ,  $(X(k, \varepsilon), \varphi(k, \varepsilon))$  converge aussi et, par continuité, converge vers une solution périodique de période  $M$  du système gelé. La deuxième partie de la Propriété est alors une conséquence directe de la continuité de la fonction  $C$ , vu que pour tout  $\varepsilon$  non nul, on a:

$$0 = \frac{\varphi(M, \varepsilon) - \varphi(0, \varepsilon)}{\varepsilon} \quad (\text{B.8})$$

$$= \sum_{k=0}^{M-1} C(X(k, \varepsilon), \varphi(k, \varepsilon), u(k), \varepsilon \gamma(k)) \quad (\text{B.9})$$

### B.3 Démonstration de la Propriété 2.3

#### Existence de solutions périodiques:

Pour démontrer l'existence de solutions périodiques, nous appliquons la méthode proposée originellement par Poincaré pour l'étude des systèmes critiques ( Miller et Michel [5]).

Les suites  $u$  et  $\gamma$  étant périodiques de période  $M$ ,  $(X(k, \varepsilon), \varphi(k, \varepsilon))$  est une solution de période  $M$  du système (2.4) si et seulement si  $(X(0, \varepsilon), \varphi(0, \varepsilon))$  est un point fixe de l'application  $T_M$  qui associe à  $(X, \varphi)$  la valeur  $(X(M), \varphi(M))$  de la solution de (2.4) à l'instant  $M$  partant d'une condition initiale  $(X(0), \varphi(0))$  égale à  $(X, \varphi)$  (Arnold [1, Théorème 3.28, Assertion 1]):

$$(X(M), \varphi(M)) = T_M(X(0), \varphi(0), \varepsilon) \quad (\text{B.10})$$

Au lieu de chercher des points fixes de  $T_M$ , on peut de façon équivalente, pour  $\varepsilon$  non nul, chercher des zéros de  $Z_M$ , l'application définie par:

$$Z_M(X, \varphi, \varepsilon) = \begin{pmatrix} Z_{Mx}(X, \varphi, \varepsilon) \\ Z_{M\varphi}(X, \varphi, \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \frac{I}{\varepsilon} \end{pmatrix} \circ [T_M(X, \varphi, \varepsilon) - I] \quad (\text{B.11})$$

soit:

$$Z_M(X(0), \varphi(0), \varepsilon) = \begin{pmatrix} X(M) - X(0) \\ \sum_{k=0}^{M-1} C(X(k), \varphi(k), u(k), \varepsilon\gamma(k)) \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$Z_M$ , étant la composition de  $M$  applications de classe  $C^2$ , est aussi de classe  $C^2$

Par hypothèse, nous savons que  $(X^*, \varphi^*, 0)$  est un zéro de  $Z_M$ , avec  $X^*$  vérifiant, selon (2.30):

$$X^* = \Xi(0, \varphi^*) + \sum_{j=1}^n \alpha_j^* V_j^* \quad (\text{B.13})$$

Vue la propriété de régularité de l'application  $Z_M$ , nous pouvons appliquer le Théorème des Fonctions Implicites pour obtenir l'existence et la régularité de zéros pour  $\varepsilon$  non nul. En particulier, notre résultat sera établi si:

$$\det \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial Z_{Mx}}{\partial X}(X^*, \varphi^*, 0) & \frac{\partial Z_{Mx}}{\partial \varphi}(X^*, \varphi^*, 0) \\ \frac{\partial Z_{M\varphi}}{\partial X}(X^*, \varphi^*, 0) & \frac{\partial Z_{M\varphi}}{\partial \varphi}(X^*, \varphi^*, 0) \end{pmatrix} \right\} \neq 0 \quad (\text{B.14})$$

Pour calculer ce déterminant, utilisant la notation (2.43), nous introduisons une nouvelle variable:

$$\mathcal{X} = X - \Xi(0, \varphi) - V^* \quad (\text{B.15})$$

Aucun des  $z_i$  n'étant valeur propre de  $A(\varphi^*)$ ,  $\Xi(k, \varphi)$  est une application de classe  $C^2$  localement autour de  $\varphi^*$  et uniformément en  $k$ . Ceci nous permet de décomposer, sans perte de régularité, l'application  $Z_M$  en:

$$(X, \varphi, \varepsilon) \longrightarrow (\mathcal{X}, \varphi, \varepsilon) \longrightarrow Z_M(\Xi(0, \varphi) + V^* + \mathcal{X}, \varphi, \varepsilon) \quad (\text{B.16})$$

Le déterminant (B.14) est alors le produit des déterminants des différentielles des deux applications dans cette décomposition.

La différentielle de la première application en  $(X^*, \varphi^*, 0)$  est:

$$\begin{pmatrix} I & -\frac{\partial \Xi}{\partial \varphi}(0, \varphi^*) \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (\text{B.17})$$

Appelant  $Z_M$ , la deuxième application, nous remarquons les égalités:

$$Z_M(\mathcal{X}, \varphi^*, 0) = \begin{pmatrix} (A(\varphi^*)^M - I) \mathcal{X} \\ \sum_{k=0}^{M-1} C(\Xi(k, \varphi^*) + A(\varphi)^k [\mathcal{X} + V^*], \varphi^*, u(k), 0) \end{pmatrix} \quad (\text{B.18})$$

$$Z_M(0, \varphi, 0) = \begin{pmatrix} (A(\varphi)^M - I) V^* \\ \sum_{k=0}^{M-1} C(\Xi(k, \varphi) + A(\varphi)^k V^*, \varphi, u(k), 0) \end{pmatrix} \quad (\text{B.19})$$

Avec la définition (2.31), sa différentielle en  $(0, \varphi^*, 0)$  est donc:

$$\begin{pmatrix} A(\varphi^*)^M - I & \frac{\partial A^M}{\partial \varphi}(\varphi^*) \otimes V^* \\ \sum_{k=0}^{M-1} \frac{\partial C}{\partial \mathcal{X}}(\Xi(k, \varphi^*) + A(\varphi^*)^k V^*, \varphi^*, u(k), 0) A(\varphi^*)^k & \frac{\partial E}{\partial \varphi}(\alpha_j^*, \varphi^*) \end{pmatrix} \quad (\text{B.20})$$

D'où notre résultat.

### Stabilité:

D'après Arnold [1, Théorème 3.28, Assertion 2], une solution périodique de période  $M$  a les mêmes propriétés de (in)stabilité que le point fixe correspondant de l'application  $T_M$ . Par ailleurs, appliquant le Théorème de Lyapunov (LaSalle [4, Théorème 7.1]), des conditions suffisantes de (in)stabilité de ce point fixe sont données par la position des valeurs propres de la différentielle de  $T_M$  en ce point. Étudions donc la matrice  $\nabla T_M(X^*, \varphi^*, 0)$  dans le cas où  $A(\varphi^*)$  n'a pas de valeurs propres sur le cercle unité ( $V^*$  est nul):

Premièrement, nous remarquons qu'avec les propriétés de régularité des applications  $T_M$ ,  $X(k, \varepsilon)$  et  $\varphi(k, \varepsilon)$ , nous pouvons utiliser le Lemme d'Hadamard (Aubin et Ekeland [2]) pour démontrer l'existence d'une fonction  $\Delta(\varepsilon)$ , bornée au voisinage de zéro et satisfaisant:

$$\nabla Z_M(X(0, \varepsilon), \varphi(0, \varepsilon), \varepsilon) = \nabla Z_M(X^*, \varphi^*, 0) + \varepsilon \Delta(\varepsilon) \quad (\text{B.21})$$

Deuxièmement, la matrice  $\nabla T_M$  est équivalente à:

$$I + S = \begin{pmatrix} I & -\frac{\partial \Xi}{\partial \varphi} \\ 0 & I \end{pmatrix} \nabla T_M \begin{pmatrix} I & \frac{\partial \Xi}{\partial \varphi} \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (\text{B.22})$$

Enfin,  $\nabla T_M$  étant reliée à  $\nabla Z_M$  par (B.11),  $\nabla Z_M$  pouvant être calculée à partir de la décomposition (B.16), en utilisant (B.20) et (B.17), nous obtenons:

$$S(X(0, \varepsilon), \varphi(0, \varepsilon), \varepsilon) = \begin{pmatrix} A(\varphi^*)^M - I + \varepsilon \Delta_1(\varepsilon) & \varepsilon \Delta_2(\varepsilon) \\ \varepsilon \Delta_3(\varepsilon) & \varepsilon \frac{\partial E}{\partial \varphi}(\alpha_j^*, \varphi^*) + \varepsilon^2 \Delta_4(\varepsilon) \end{pmatrix} \quad (\text{B.23})$$

où les quatre fonctions  $\Delta_i(\varepsilon)$  sont bornées au voisinage de zéro. Maintenant, d'après Kokotovic [3, Lemma 1], puisque  $A(\varphi^*)^M - I$  est non singulière, il existe une fonction  $L(\varepsilon)$ , bornée sur un voisinage de zéro, telle que  $S$  soit équivalente à (omettant l'argument  $\varepsilon$ ):

$$\begin{pmatrix} A(\varphi^*)^M - I + \varepsilon(\Delta_1 + \varepsilon L \Delta_3) & 0 \\ \varepsilon \Delta_3 & \varepsilon \frac{\partial E}{\partial \varphi}(\alpha_j^*, \varphi^*) + \varepsilon^2(\Delta_4 - \Delta_3 L) \end{pmatrix} \quad (\text{B.24})$$

On en conclut que les valeurs propres de  $\nabla T_M(X^*, \varphi^*, 0)$  sont:

$$\lambda \left\{ A(\varphi^*)^M \right\} + o(1), \quad 1 + \varepsilon \Re \left\{ \lambda \left\{ \frac{\partial E}{\partial \varphi}(\alpha_j^*, \varphi^*) \right\} \right\} + o(\varepsilon) \quad (\text{B.25})$$

où  $o(1)$  et  $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}$  sont des fonctions continues de  $\varepsilon$ , tendant vers zéro lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro.

## Bibliographie

- [1] Arnold V.I.: *Ordinary differential equations*. MIT Press. 1978.
- [2] Aubin J.-P., Ekeland I.: *Applied non linear analysis*. John Wiley & Sons. 1984.
- [3] Kokotovic P.V.: *A Riccati equation for block-diagonalization of ill-conditioned systems*. IEEE Transactions on Automatic Control. December 1975.
- [4] LaSalle J. P.: *The stability and control of discrete processes*. Applied mathematical sciences 62. Springer Verlag. 1986.
- [5] Miller R.K., A.N. Michel A.N.: *Ordinary differential equations*. Academic Press. 1982.

## B.4 Démonstration de la Propriété 2.5

Cette Propriété est une conséquence directe du point 3 de la Propriété 2.4. Il suffit en effet de remarquer que (2.2) implique:

$$C(0, \varphi, 0, \gamma) = 0 \quad (\text{B.26})$$

On vérifie alors facilement que la fonction  $M_\epsilon$  de la Propriété 2.4 peut être prise égale à 0. Dans ce cas, le système (2.59) n'est rien d'autre que le système gelé (2.18). La conclusion résulte de [1, Lemma 6]).

## Bibliographie

- [1] Praly L.: *Topological orbital equivalence with asymptotic phase for a two time scales discrete time system.* A paraître dans Mathematics of Control, Signals, and Systems. Springer Verlag.

## B.5 Démonstration du Lemme 2.1

### Démonstration de (2.79)

Démontrons cette inégalité par récurrence. Définissons  $\Sigma$ ,  $\Pi$  et  $\Delta$  par:

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^n f(\cdot, k) \quad (\text{B.27})$$

et:

$$I + \varepsilon \Pi_n = \bigcirc_{k=1}^n (I + \varepsilon f(\cdot, k)) \quad (\text{B.28})$$

$$= I + \varepsilon \Sigma_n + \varepsilon^2 \Delta_n \quad (\text{B.29})$$

Appelons  $\sigma$ ,  $\pi$  et  $\delta$  leur norme Euclidienne. On a:

$$\delta_1 = 0 \quad (\text{B.30})$$

$$\pi_n \leq \sigma_n + \varepsilon \delta_n \quad (\text{B.31})$$

De plus, les fonctions  $f$  étant bornées par  $S$  et de constante de Lipschitz  $L_1$  en  $\varphi$ , on obtient:

$$\sigma_n \leq n S \quad (\text{B.32})$$

$$\|f(\cdot + \varepsilon \Pi_n, n+1) - f(\cdot, n+1)\| \leq \varepsilon L_1 (\sigma_n + \varepsilon \delta_n) \quad (\text{B.33})$$

Maintenant, d'après nos définitions:

$$[I + \varepsilon f(\cdot, n+1)] \circ [I + \varepsilon \Pi_n] = \\ = I + \varepsilon \Pi_n + \varepsilon f(\cdot + \varepsilon \Pi_n, n+1) \quad (\text{B.34})$$

$$= I + \varepsilon \Sigma_{n+1} + \varepsilon^2 \left[ \Delta_n + \frac{f(\cdot + \varepsilon \Pi_n, n+1) - f(\cdot, n+1)}{\varepsilon} \right] \quad (\text{B.35})$$

Donc, on obtient par récurrence:

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n + \frac{f(\cdot + \varepsilon \Pi_n, n+1) - f(\cdot, n+1)}{\varepsilon} \quad (\text{B.36})$$

On en déduit:

$$\delta_{n+1} \leq \delta_n + L_1 (\sigma_n + \varepsilon \delta_n) \quad (\text{B.37})$$

$$\leq (1 + \varepsilon L_1) \delta_n + n L_1 S \quad (\text{B.38})$$

D'où:

$$\delta_n \leq \frac{(1 + \varepsilon L_1)^n - n \varepsilon L_1 - 1}{(\varepsilon L_1)^2} L_1 S \quad (\text{B.39})$$

### Démonstration de (2.80)

$\Pi$ ,  $\Sigma$ ,  $\pi$  et  $\sigma$  étant définies ci-dessus, posons:

$$\Xi_n = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\cdot, k) \sum_{i=1}^{k-1} f(\cdot, i) \quad (\text{B.40})$$

et:

$$I + \varepsilon \Pi_n = I + \varepsilon \Sigma_n + \varepsilon^2 \Xi_n + \varepsilon^3 \Delta_n \quad (\text{B.41})$$

Soit  $\varsigma$  et  $\delta$  leur norme Euclidienne. Utilisant les propriétés des fonctions  $f$ , on obtient:

$$\varsigma_n \leq \frac{n(n-1)}{2} S L_1 \quad (\text{B.42})$$

et:

$$\begin{aligned} & \|f(\cdot + \varepsilon \Pi_n, n+1) - f(\cdot, n+1) - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\cdot, n+1) \Sigma_n\| \leq \\ & \leq \|f(\cdot + \varepsilon \Pi_n, n+1) - f(\cdot + \varepsilon \Sigma_n, n+1)\| + \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

$$+ \| [f(\cdot + \varepsilon \Sigma_n, n+1) - f(\cdot, n+1)] - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\cdot, n+1) \Sigma_n \|$$

$$\leq L_1 \left[ \varepsilon^2 \varsigma_n + \varepsilon^3 \delta_n \right] + \left\| \int_0^1 \left[ \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\cdot + \lambda \varepsilon \Sigma_n, n+1) - \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\cdot, n+1) \right] d\lambda \varepsilon \Sigma_n \right\| \quad (\text{B.44})$$

$$\leq L_1 \left[ \varepsilon^2 \varsigma_n + \varepsilon^3 \delta_n \right] + \varepsilon^2 \frac{L_2 \sigma_n^2}{2} \quad (\text{B.45})$$

$$\leq \varepsilon^3 L_1 \delta_n + \varepsilon^2 \frac{n^2}{2} S [L_1^2 + S L_2] \quad (\text{B.46})$$

Maintenant, d'après nos définitions, nous avons:

$$(I + \varepsilon f(\cdot, n+1)) \circ (I + \varepsilon \Pi_n) = I + \varepsilon \Pi_n + \varepsilon f(\cdot + \varepsilon \Pi_n, n+1) \quad (\text{B.47})$$

$$= I + \varepsilon \Sigma_{n+1} + \varepsilon^2 \Xi_{n+1} + \quad (\text{B.48})$$

$$+ \varepsilon^3 \left[ \Delta_n + \frac{f(\cdot + \varepsilon \Pi_n, n+1) - f(\cdot, n+1) - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\cdot, n+1) \Sigma_n}{\varepsilon^2} \right]$$

et, donc, par récurrence:

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n + \frac{f(\cdot + \varepsilon \Pi_n, n+1) - f(\cdot, n+1) - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\cdot, n+1) \Sigma_n}{\varepsilon^2} \quad (\text{B.49})$$

Nous avons établi que la norme de l'erreur vérifie:

$$\delta_{n+1} \leq [1 + \varepsilon L_1] \delta_n + \frac{n^2}{2} S [L_1^2 + S L_2] \quad (\text{B.50})$$

$$\leq \frac{(2 + \varepsilon L_1)(1 + \varepsilon L_1)^{n+1} - [(n+1)\varepsilon L_1 + 1]^2 - (1 + \varepsilon L_1)}{2(\varepsilon L_1)^3} S [L_1^2 + S L_2] \quad (\text{B.51})$$

## **Annexe C**

### **Articles relatifs au chapitre 1**



## **C.1 MIMO indirect adaptive control: stability and robustness**

Rapport CAI A118. Décembre 1982.



MIMO INDIRECT ADAPTIVE CONTROL : STABILITY  
AND ROBUSTNESS

Laurent PRALY  
CAI - Ecole des Mines  
35, rue Saint Honoré  
77305 FONTAINBLEAU (France)

December 1982



ABSTRACT : We present an indirect adaptive control scheme. At each stage, it involves identification of a linear model within a prescribed class (this model must lie in a prescribed sphere and it has imposed degree of the numerator polynomial matrix and imposed column degrees of a column proper denominator polynomial matrix), followed by a computation of the feedback matrices to match a priori given poles and on line optimized zeros. Inherent to the a priori class of models, there are residuals between the true plant and this linear model. Our procedure takes into account residuals which are bounded from above by the norm of the input-output signals. In this way we encompass some problems of higher order plant, time variation effects, nonlinearities or ill-modeled disturbances. This allows us to state robust boundedness of input-output signals. However this result needs an extra assumption which may be phrased in terms of a left-prime ness property of the identified model.



## I - INTRODUCTION

During the last years, major steps have been taken in the theoretical development of adaptive control systems.

For direct schemes, global boundedness of single input single output minimum phase systems has been established for both continuous time [1], [2], [3] [6], [27] and discrete time systems [3], [4], [5]. The asymptotic behaviour has been studied in [6] and the extension to the multivariable case has been provided in [7]. Moreover an existence theorem established in [11] gives some insight into the boundedness of direct schemes for non minimum phase systems.

For indirect schemes, for single input single output systems and under an assumption about the stabilizability of the identified model, boundedness has been established for discrete time systems in [8], [22], [24] and for continuous time systems in [9]. The asymptotic behaviour (for the minimum phase case) has been studied in [10] and the extension to the multivariable case has been provided in [14], [18]. Moreover the question of stabilizability is discussed in [12], [13].

However all these results are stated for linear time invariant systems with known order and well modeled disturbances. Here we do use a linear model but we want to take into account that the true plant may be of higher order (even infinite), may contain non linearities and time variations, and may be subject to ill-modeled plant and measurement disturbances.

More precisely, consider a MIMO system for which at time  $n$ , we note  $u_n$  the control input vector in  $\mathbb{R}^m$  and  $y_n$  the output vector in  $\mathbb{R}^l$ . We define a linear model by choosing integers  $N_a$ ,  $N_b$  and a matrix  $\theta$  such that the modeled output  $\hat{y}_n$  is given as :

$$\hat{y}_n = \theta^t \Phi_n \quad (1)$$

where  $\Phi_n$  is the following block vector

$$\Phi_n^t = (y_{n-1}^t \dots y_{n-N_a}^t u_n^t \dots u_{n-N_b}^t) \quad (2)$$

We call residuals the error  $w_n$  between the true output  $y_n$  and the modeled output  $\hat{y}_n$  :

$$w_n = y_n - \theta^t \Phi_n \quad (3)$$

The issue we want to address in this paper can be formulated as follows : what assumptions about  $w_n$  are sufficient to ensure boundedness of adaptive control schemes in practical use ? In other words how robust is the boundedness with respect to residuals ?

Some interesting results have been obtained in the continuous time case : in [9] Kreisselmeier shows the existence of stable domains for an indirect scheme using relatively weak assumptions. In [15], these domains are made explicit for a direct scheme in the case when fast modes are neglected. In [17], Rohrs et al. show the necessity of modifying classical adaptation laws. In the discrete time case we have shown [11], [21] that some direct schemes yield global boundedness when :

$$\|w_n\| \leq \epsilon \max\{\Phi, \sum_{i=0}^N \| \Phi_{n-i} \| \} \quad (4)$$

where  $\Phi$  is some positive constant,  $N$  is a fixed integer which depends on the true plant,  $\epsilon$  is defined from the expected closed loop characteristics. Here, the same kind of boundedness property is stated for an indirect scheme for discrete time systems (see also [23]). However an extra condition of left-primeness of the identified model will be needed.

Among the works we are aware of, very few MIMO indirect schemes have been presented. Let us mention Prager et al [14] which propose an on-line pole placement technique but without proving boundedness and with a strong restriction put on the model structure. Here we study the scheme presented in [18]. It is based on an on-line pole placement and a zero optimization design. It requires a restriction about the model structure which is weaker than in [14].

Section II is devoted to the statement of the robustness problem. In Section III, we describe our indirect control scheme. The algorithm and its properties are given in section IV and V. Finally in section VI we state our boundedness theorem and we draw conclusions.

## II - THE ROBUSTNESS PROBLEM

In order to motivate the formulation of this robustness problem we first offer an example of a system which would enter in this forthcoming framework.

### II-1. An example.

Let the output of the true system be defined as :

$$y_n = T_n^t \varphi_n + f_n(\varphi_n) + \omega_n \quad (5)$$

where  $\varphi_n$  is the following block vector

$$\varphi_n^t = (y_{n-1}^t \dots y_{n-N_a}^t u_n^t \dots u_{n-N_b}^t) \quad (6)$$

-  $T_n$  is a time varying matrix which represents a linear component of the system.

-  $f_n$  is a time varying non linear function which represents a non linear component of the system.

-  $\omega_n$  is a sequence of vectors which represents an unstructured component.

When compared with the a priori linear model defined in the introduction, we get the residuals as :

$$w_n = \Delta T_n^t \varphi_n + f_n(\varphi_n) + \omega_n \quad (7)$$

let suppose that :

$$\|\Delta T_n\| < \delta_1 \quad (8)$$

$$\|\omega_n\| < \eta_1 \quad (9)$$

$$\|f_n(\varphi_n)\| < \delta_2 \|\varphi_n\| + \eta_2 \quad (10)$$

Inequality (8), together with the presence of a strictly positive integer  $N$  in (6), means that some fast poles or zeros are neglected in the

model.

Inequality (9) requires the uniform boundedness of the unstructured disturbances  $w_n$ .

Inequality (10) implies that the non linearity is linearly dominated with respect to the input-output signals.

With these assumptions, we get :

$$\frac{\|w_n\|}{\|\varphi_n\|} \leq (\delta_1 + \delta_2) + \frac{(b_1 + b_2)}{\|\varphi_n\|} = \delta + \frac{b}{\|\varphi_n\|} \quad (11)$$

Therefore a possible assumption for the residuals is that when normalized by the input-output signals, they are uniformly bounded from above.

However this property involves  $\|\varphi_n\|$  which is unknown for our model (since  $N$  is unknown). Then let us introduce a sequence of positive real numbers  $s_n$  as follows :

$$s_n = \lambda s_{n-1} + \max\{s, \|\Phi_n\|\} \quad (12)$$

where  $\lambda$  and  $s$  verify

$$0 < \lambda < 1, \quad s > 0 \quad (13)$$

Noting that

$$\|\varphi_n\| \leq \sum_{i=0}^N \|\Phi_{n-i}\| \leq \frac{s_n}{\lambda^N} \quad (14)$$

we readily get

$$\frac{\|w_n\|}{s_n} \leq \frac{b}{s} + \frac{\delta}{\lambda^N} \quad (15)$$

and since  $s$  can be chosen arbitrarily large the bound of this "normalized" residue mainly depends on  $\delta$ .

For this system a robustness problem would be : given the linear model  $(N_a, N_b, \theta)$ , find a linear control law such that this  $\delta$  may be strictly positive.

Let us now come back to our general framework and formulate an assumption about the residuals in order to state our robustness problem.

## III.2. The robustness problem

We need two additional definitions :

mean  $\eta$ -smallness : Let  $\mathcal{A}_{S,K}(s_n)$  be the set of pairs of integers  $(q,k)$  such that :

$$\mathcal{A}_{S,K}(s_n) = \{(q,k) | k > K ; \forall n \in [q, q+k], s_n \geq S\}$$

Note that :

$$s_1 < s_2, k_1 < k_2 \Rightarrow \mathcal{A}_{S_2, K_2}(s_n) \subset \mathcal{A}_{S_1, K_1}(s_n) \quad (16)$$

A sequence  $v_n$  of bounded positive real numbers is said to have the property of mean  $\eta$ -smallness relatively to  $s_n$  if :

$$\exists (S, K) : \forall (q, k) \in \mathcal{A}_{S, K}(s_n) \Rightarrow \frac{1}{k} \sum_{n=q+1}^{q+k} v_n \leq \eta \quad (17)$$

In words : for any time interval of length larger than  $K$  where  $s_n$  remains above some threshold  $S$ , the average of  $v_n$  becomes smaller than  $\eta$ .

other model representation : Let us introduce the classical equivalent formulation of (3) : following the block decomposition of  $\Phi_n$ , we decompose  $\theta$  as :

$$\theta^t = (-A^1 \dots - A^N) u_n + B^0 \dots B^N b \quad (18)$$

Then (3) can be rewritten as :

$$A(b) y_n = B(b) u_n + w_n \quad (19)$$

where  $A(b)$  (resp.  $B(b)$ ) is a polynomial matrix with matricial coefficient  $A^i$  (resp.  $B^i$ ).

$A(0)$  is equal to the identity matrix  
 $b$  is the backward shift operator

$$b u_n = u_{n-1} \quad (20)$$

Assumption HS about the true system : Given  $N_b$ ,  $(N_i)_{1 \leq i \leq l}$  with

$$N_a = \max_{1 \leq i \leq l} \{N_i\} \quad (21)$$

Given a matrix  $\theta_0$  and a positive scalar  $\rho_0$ , we suppose that :

- There exists relatively left prime polynomial matrices  $A(b)$ ,  $B(b)$  such that:
  - $A(b)$  is column proper (always possible) with  $N_i$  as its  $i^{\text{th}}$  column degree (i.e.  $N_i$  is the maximal effective autoregressive order of the  $i^{\text{th}}$  output).
  - $B(b)$  has degree  $N_b$ .
  - $A(0)$  is equal to the identity matrix.
- which is made up of the matricial coefficients of  $A(b)$ ,  $B(b)$  (see (18)) satisfies :

$$\|\theta - \theta_0\| \leq \rho_0 \quad (22)$$

- The residuals corresponding to this model satisfy :

$$w_n = y_n - \theta^t \Phi_n \quad (23)$$

$$\frac{\|w_n\|}{s_n} \leq w \quad (24)$$

$\frac{\|w_n\|^2}{s_n}$  has the property of mean  $\eta_w^2$  - smallness relatively to  $s_n$ , with  $s_n$  as defined by (12).

Remark : (22) means that  $\theta$  is assumed to be bounded with a known bound.

We are now in a position to formulate our robustness problem :

the robustness problem : find a control law such that :

(i) under assumption HS :

$\exists \eta > 0 : \forall \eta_w < \eta \Rightarrow u_n, y_n$  are uniformly bounded.

(ii) if there are no residuals the output  $y_n$  tracks some reference output  $y_n^*$  as "well" as possible.

Note that ultimately our assumption and our problem are on the magnitude of the "normalized" residuals. As apparent from (23), these residuals depend on the true system on the one hand and on the class of models on the other hand. As a matter of fact,  $\theta$  involved in (23) is unknown. Only its existence within the specified class is required.

The property of boundedness of the "normalized" residuals are more likely to hold for larger  $N_a, N_b$  but this increases the complexity of on-line computations. This choice of  $(N_a, N_b)$  is to be made off-line in our approach using all a priori knowledge about the true system. Then the role of the explicit identification algorithm is to search that  $\theta$  within the specified class for which the normalized residuals are less (i.e.  $n_w$  is the smallest one). On the one hand, the role of the control algorithm would be to influence the value of  $\eta$  so that the inequality  $n_w < \eta$  mentioned in the statement of the robustness problem would hold, that is the regulation property. On the other hand the control algorithm has to force the output of the system to take some reference output, that is the tracking property with its inherent problems of delays and non minimum phase (see [25]).

### III - AN INDIRECT ADAPTIVE CONTROL SCHEME

As a stepping stone to our adaptive scheme, let us first look at the linear control problem.

#### III.1. A linear pole placement and zero optimization control law

Supposing temporarily that  $A(b)$ ,  $B(b)$  are known, from assumption HS, it follows that there exists two polynomial matrices  $C(b)$ ,  $D(b)$  such that :

$$\det \begin{pmatrix} A(b) & -bB(b) \\ D(b) & C(b) \end{pmatrix} = r(b) \quad (25)$$

where  $\det$ . denotes the determinant and  $r(b)$  is an arbitrary polynomial (see [18]). The implication of the above is that if the input  $u_{n+1}$  is generated by the feedback control law :

$$C(b)u_{n+1} = -D(b)y_n + r(b)E(b)y_n^* - F(b)w_n \quad (26)$$

where  $E(b)$ ,  $F(b)$  are arbitrary polynomial matrices and  $y_n^*$  is the output reference, then the resulting closed-loop system has the characteristic polynomial  $r(b)$ .

More precisely, using the general comparison principle technique [19] or the same technique as the one used in appendix C, one can prove the following theorem :

Theorem 1 : If :

HS holds, but with  $A(b)$ ,  $B(b)$  known  
 $r(b)$  is a strictly stable polynomial  
 $y_n^*$  is bounded.

Then the feedback control law (26) solves the first part of our robustness problem. This makes this problem meaningful.

Note that  $E(b)$ ,  $F(b)$  are arbitrary in (26) and can be chosen to solve the second part of the robustness problem : let us look at the closed-loop equations .

Let  $X(b)$ ,  $bB_1(b)$ ,  $Y(b)$ ,  $A_1(b)$  be polynomial given by the adjoint matrix as follows :

$$\begin{pmatrix} X(b) & bB_1(b) \\ -Y(b) & A_1(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(b) & -bB(b) \\ D(b) & C(b) \end{pmatrix} = r(b) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (27)$$

Then with (19), (26) we have :

$$r(b)y_n = (X(b)-bB_1(b)F(b))w_n + r(b)B_1(b)E(b)y_{n-1}^* \quad (28)$$

Therefore  $F(b)$  may be chosen in order to reduce the residuals  $w_n$  by getting the matrix  $(X(b)-bB_1(b)F(b))$  as close as possible to the null matrix and  $E(b)$  may be chosen to get  $bB_1(b)E(b)$  as close as possible to the identity matrix. Simply looking at the static gains we can take

$$F(b) = F = C(1)B^+ \quad (29)$$

$$E(b) = E = [D(1) + C(1)B^+A(1)] \frac{1}{r(1)} \quad (30)$$

where  $B^+$  is a pseudo inverse of  $B(1)$ .

### III.2. An indirect adaptive control law

Since in fact  $A(b)$ ,  $B(b)$  are unknown, the previous control law is implemented at each time  $n$  in three main steps :

1 - On-line identification of the linear model (5) or (19) (see section IV). This gives time varying polynomial matrices  $A_n(b)$ ,  $B_n(b)$  and an a posteriori error  $\epsilon_n$  :

$$A_n(b)y_n = B_n(b)u_n + \epsilon_n \quad (31)$$

2 - 1. On-line computation of polynomial matrices  $C_n(b)$ ,  $D_n(b)$  as solutions of:

$$\det \begin{pmatrix} A_n(b) & -bB_n(b) \\ D_n(b) & C_n(b) \end{pmatrix} = r(b) \quad (32)$$

From a practical point of view, one may just use an approximation procedure as discussed in section V.

2.2 - On-line optimization to get the polynomial matrices  $F_n(b)$ ,  $E_n(b)$ .

3 - Computation of the next control  $u_{n+1}$

$$C_n(b)u_{n+1} = -D_n(b)y_n + E_n(b)r(b)y^*_n - F_n(b)e_n \quad (33)$$

In the SISO case this algorithm reduces to that of Goodwin and Sin [8] (except for step 2.2).

In the following, we make these steps more explicit.

#### IV - MODEL IDENTIFICATION

Looking at assumption HS and at the robustness problem suggests to use an estimation procedure which roughly minimizes  $\left( \frac{\|\varepsilon_n\|}{s_n} \right)^2$ . We propose the following algorithm :

$$v_n = y_n - \theta_{n-1}^t \Phi_n \quad (34)$$

$$\varepsilon_n = \frac{s_n}{\mu_n s_n^2 + v_n^t P_{n-1} \Phi_n} \quad (35)$$

$$\theta_{\frac{n-1}{2}} = \theta_{n-1} + \varepsilon_n P_{n-1} \Phi_n v_n^t \quad (36)$$

$$P_{\frac{n-1}{2}} = P_{n-1} - \varepsilon_n P_{n-1} \Phi_n \Phi_n^t P_{n-1} \quad (37)$$

$$\theta_n = \theta_0 + \min\{1, \frac{P_n}{\|\theta_{\frac{n-1}{2}} - \theta_0\|}\}(\theta_{\frac{n-1}{2}} - \theta_0) \quad (\text{projection}) \quad (38)$$

$$P_n \geq P_{\frac{n-1}{2}} \quad (\text{regularization}) \quad (39)$$

where  $s_n$  is defined by (12)

(39) means that  $P_n$  is any positive definite matrix greater than  $P_{\frac{n-1}{2}}$  and such that :

$$0 < \Lambda_0 \leq \lambda_{\min} P_n \leq \lambda_{\max} P_n \leq \Lambda_1 \quad (40)$$

For instance, we can take

$$P_n = \beta_n P_{\frac{n-1}{2}} + (1-\beta_n) \Lambda_1 I \quad (41)$$

with

$$0 < \beta < \beta_n < t = \frac{\Lambda_0}{\Lambda_1} \quad (42)$$

•  $\alpha_n$ ,  $\mu_n$ ,  $\rho_n$  are chosen such that

$$0 < \alpha < \alpha_n < 1 \quad (43)$$

$$0 < \mu < \mu_n < M \quad (44)$$

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \rho_0 \leq \rho_n \leq \rho, \quad \rho_{n-1} - \rho_n \leq \tau \| \theta_{n-\frac{1}{2}} - \theta_n \| \quad (45)$$

This algorithm is essentially the least squares algorithm with regularization by the projection (38) and the inequality (39). Note that (45) explicitly involves assumption HS (see (22)) and the presence of  $s_n$  in  $\varepsilon_n$  (35) takes the properties of the residuals into account.

Let  $\varepsilon_n$  be defined as in (31) or equivalently as :

$$\varepsilon_n = y_n - \theta_n^T \phi_n \quad (46)$$

the properties of this algorithm are summarized in the following theorem :

Theorem 2 : with assumption HS, the sequence  $\{\theta_n\}$  as defined by (34)-(39) has the following properties :

$$I\ 1 : \| \theta_n - \theta \| \leq M_0$$

$$I\ 2 : \frac{\| \varepsilon_n \|}{s_n} \leq M_\varepsilon$$

I 3 :  $\frac{\| \varepsilon_n \|}{s_n}$  has the property of mean  $\eta_\varepsilon$ -smallness relatively to  $s_n$ , with

$$\eta_\varepsilon \leq L_\varepsilon \eta_w \quad (47)$$

I 4 :  $\| \theta_n - \theta_{n-1} \|$  has the property of mean  $\eta_\theta$  - smallness relatively to  $s_n$ , with

$$\eta_\theta \leq L_\theta \eta_w \quad (48)$$

## V - CONTROL COMPUTATION

### V.1. Properties of the determinantal equation

Using fairly standard techniques about polynomial matrices (see [18] or [26]), one can prove the following :

Theorem 3 : If :

$A(b)$ ,  $B(b)$  are relatively left-prime.

$A(b)$  is column proper with  $N_i$  as its  $i^{\text{th}}$  column degree.

$N_b$  is the degree of  $B(b)$ .

$$\deg r(b) \leq \sum_{i=1}^l N_i + mN_b = d \quad (49)$$

$$r(0) = 1, \quad A(0) = I \quad (50)$$

Then there exists polynomial matrices  $D(b)$ ,  $C(b)$  such that :

The  $i^{\text{th}}$  column degree of  $D(b)$  is strictly less than  $N_i$ .

The degree of  $C(b)$  is less than or equal to  $N_b$

$C(0)$  is equal to the identity matrix

$$\det \begin{pmatrix} A(b) & -bB(b) \\ D(b) & C(b) \end{pmatrix} = r(b) \quad (51)$$

---

In the following  $C(b)$ ,  $D(b)$  are taken as given by this theorem.

Let us introduce the following block decomposition

$$(D(b) \ C(b)) = \begin{pmatrix} \bar{D}(b) & \bar{C}(b) \\ d(b) & c(b) \end{pmatrix} \quad (52)$$

where  $d(b)$ ,  $c(b)$  are polynomial row vectors. A consequence of theorem 3 is that  $(d(b) \ c(b))$  has  $d$  unknown coefficients and that :

Corollary 1 : If  $A(b)$ ,  $B(b)$  are relatively left prime, there exists a pair  $(\bar{D}(b), \bar{C}(b))$  such that the pair  $\left( \begin{pmatrix} A(b) \\ \bar{D}(b) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -bB(b) \\ \bar{C}(b) \end{pmatrix} \right)$

is relatively left prime. Moreover, for any left prime pair  $(\bar{D}(b), \bar{C}(b))$ , the pair  $\left( \begin{pmatrix} A(b) \\ \bar{D}(b) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -bB(b) \\ \bar{C}(b) \end{pmatrix} \right)$  has a generic occurrence to be left prime.

On the other hand, the expansion of (51) with respect to  $(d(b) \quad c(b))$  gives a linear system equivalent to (51), we note it :

$$\mathcal{A} \chi = \mathcal{B} \quad (53)$$

where  $\chi$  is a vector in  $\mathbb{R}^d$  which includes the coefficients of the coordinates of  $d(b)$ ,  $c(b)$ .

$\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{B}$ ) is a matrix (resp. a vector) which includes the coefficients of  $r(b)$  and of the minors of :

$$\begin{pmatrix} A(b) & -b \ B(b) \\ \bar{D}(b) & \bar{C}(b) \end{pmatrix}$$

We have :

Corollary 2 : If  $A(b)$ ,  $B(b)$  are as supposed in theorem 3, then there exists submatrices  $\bar{D}(b)$ ,  $\bar{C}(b)$  such that  $\mathcal{A}$  is a square invertible matrix.

---

#### V.2. Algorithm 1 (exact procedure)

With the previous properties, we propose the following algorithm :  
 1 - Choose left prime polynomial submatrices  $\bar{D}_n(b)$ ,  $\bar{C}_n(b)$  such that the matricial coefficient  $\frac{\bar{C}_n}{\bar{D}_n} b$  of highest power in  $\bar{C}_n(b)$  is full rank.

For instance :

$$\bar{C}_n(b) = \bar{C}_{n-1}(b) \quad , \quad \bar{D}_n(b) = \bar{D}_{n-1}(b) \quad (54)$$

2 - Compute  $\mathcal{A}_n$ ,  $\mathcal{B}_n$ .

3 - Compute  $d_n(b)$ ,  $c_n(b)$  as

$$\chi_n = \mathcal{A}_n^{-1} \mathcal{B}_n \quad (55)$$

To give the properties of this algorithm, let us introduce the following block matrix :

$$\Phi_n^t = (D_n^0 \ \dots \ D_n^{N_a-1} \ I \ C_n^1 \ \dots \ C_n^{N_b}) \quad (56)$$

Theorem 4 : If we have :

$$\|\mathcal{Q}_n\| < A \quad (57)$$

$$\|\mathcal{B}_n\| < B \quad (58)$$

$$|\det \mathcal{Q}_n| > a \quad (59)$$

then the sequence  $\{\Phi_n\}$  given by (54), (55) has the following properties :

$$C1 : \|\Phi_n\| \leq M_\Phi$$

C2 : Moreover, there exists an integer  $K_\Phi$  such that for any pair  $(q, k)$  such that :

$$k > K_\Phi, \frac{1}{k} \sum_{n=q+1}^{q+k} \|\mathcal{Q}_n - \mathcal{Q}_{n-1}\| + \|\mathcal{B}_n - \mathcal{B}_{n-1}\| \leq \eta \quad (60)$$

then

$$\frac{1}{k} \sum_{n=q+1}^{q+k} \|\Phi_n - \Phi_{n-1}\| \leq \eta_\Phi = L_\Phi \eta$$

$M_\Phi, L_\Phi$  are positive constants which depend on  $A, B, a$ .

---

Proof : It is easily derived from the fact that the entries of  $\tilde{\mathcal{Q}}_n^{-1}$  are rational functions of the entries of  $\mathcal{Q}_n$  (see [18]).

Since  $\tilde{\mathcal{D}}_n(b), \tilde{\mathcal{C}}_n(b)$  are chosen and the fact that  $\mathcal{Q}_n, \mathcal{B}_n$  are polynomial functions of the entries of  $\theta_n$ , we see that (57), (58) are consequences of the boundedness of  $\theta_n$  (It in theorem 2) and (60) is a consequence of T1, T4, C1.

Therefore this algorithm essentially requires the invertibility of  $\mathcal{Q}_n$ . However, using a classical continuity argument we have the following result (see [18]):

Theorem 5 : With assumption H3, there exists  $\bar{\rho}$ , such that if :

$$\|\theta_n - \theta\| < \bar{\rho} \quad (61)$$

then there exists submatrices  $\bar{D}(b)$ ,  $\bar{C}(b)$  such that taking

$$\bar{D}_n(b) = \bar{D}(b), \bar{C}_n(b) = \bar{C}(b)$$

yields :

$$|\det Q_n| > 0 \quad (62)$$

---

To complete the statement, note that with the identification algorithm (see II) (61) will hold if :

$$M_0 < \bar{\rho} \quad (63)$$

i.e. if the identification algorithm starts sufficiently close to the assumed model  $\theta$ .

On the other hand, from (35), (36), (38) we see that the entries of  $\theta_{n-\frac{1}{2}}$  are linear in  $\alpha_n$  with

$$\alpha_n = 0 \Rightarrow \theta_{n-\frac{1}{2}} = \theta_{n-1} \quad (64)$$

and the entries of  $\theta_n$  are linear in  $\rho_n$  with :

$$\rho_n = 0 \Rightarrow \theta_n = \theta_0 \quad (65)$$

Hence, if (54) is used in the algorithm to compute  $\phi_n$ ,  $\det Q_{n-\frac{1}{2}}$  is a polynomial in  $\alpha_n$  and  $\det Q_n$  is a polynomial in  $\rho_n$ . As a consequence we have that if :

$$\det Q_{n-1} \neq 0, \det Q_0 \neq 0 \quad (66)$$

then we can find  $\alpha_n$  in  $[\alpha, 1]$  and  $\rho_n$  in  $[\frac{A_1}{A_0}, \rho_0, \rho]$  such that

$$\det Q_n \neq 0 \quad (67)$$

This means that (55) can always be computed.

However this technique does not prevent  $\liminf_{n \rightarrow \infty} |\det Q_n|$  from being null which is not allowed by (59). Therefore assumption (59) cannot be derived

from our identification procedure and requires an extra condition for our boundedness study to be developed.

In order to reduce the computational complexity of algorithm ; with its problem of finding  $\alpha_n, \rho_n$ , we propose an other algorithm.

### V.3. Algorithm ? (approximation procedure)

1 - Choose left prime polynomial submatrices  $\bar{D}_n(b), \bar{C}_n(b)$  with a full rank  $\bar{C}_n^{N_0}$ .

2 - Compute  $\mathcal{Q}_n, \mathcal{B}_n$ .

3 - Compute  $\alpha_n(b), \rho_n(b)$  as (see [20]) :

$$\chi_n = \chi_{n-1} - \mathcal{C}_n(\mathcal{Q}_n \chi_{n-1} - \mathcal{B}_n) \quad (68)$$

where for instance  $\mathcal{C}_n$  is taken as :

$$\mathcal{C}_n = \mathcal{Q}_n^t \frac{1}{t_n + \text{trace } \mathcal{Q}_n} \mathcal{Q}_n \quad t_n \geq 0 \quad (69)$$

Note that the value of  $\chi_n$  as computed by (68) does not exactly solve (32) in general. Then let  $r_n(b)$  be defined as

$$r_n(b) = \det \begin{pmatrix} A_n(b) & -bB_n(b) \\ D_n(b) & C_n(b) \end{pmatrix} \quad (70)$$

We have :

$$\deg r_n(b) \leq d \quad (71)$$

Let  $R_n$  (resp  $R$ ) be a vector in  $R^d$  whose coordinates are the coefficients of  $r_n(b)$  (resp.  $r(b)$ ). Using the equivalence between (51) and (53), we have that :

$$\|\mathcal{Q}_n \chi_n - \mathcal{B}_n\| = \|R_n - R\| \quad (72)$$

The properties of this algorithm are :

Theorem 6 : If we have :

$$\|\sigma_n\| < A \quad (73)$$

$$\|\sigma_n\| < B \quad (74)$$

$$\sum_{i=1}^n \prod_{j=i}^n \left(1 - \frac{\lambda_{\min} \sigma_j^T \sigma_j}{t_j + \text{trace } \sigma_j^T \sigma_j}\right) < M_1 \quad (75)$$

$$\forall i, \sum_{k=i}^n \prod_{j=i}^k \left(1 - \frac{\lambda_{\min} \sigma_j^T \sigma_j}{t_j + \text{trace } \sigma_j^T \sigma_j}\right) < M_2 \quad (76)$$

Then the sequence  $\{\phi_n\}$  as defined by (54), (68), (69) has the following properties :

$$C1 : \|\phi_n\| \leq M_\phi$$

C2 : Moreover, there exists an integer  $K_c$ , such that for any pair  $(q, k)$  such that :

$$k > K_c, \frac{1}{k} \sum_{n=q+1}^{q+k} \|\sigma_n - \sigma_{n-1}\| + \|\sigma_n - \sigma_{n-1}\| \leq \eta$$

then

$$\frac{1}{k} \sum_{n=q+1}^{q+k} \|\phi_n - \phi_{n-1}\| \leq \eta_\phi = L_\phi \eta$$

$$\frac{1}{k} \sum_{n=q+1}^{q+k} \|R_n - R\| \leq \eta_R = L_R \eta$$

$M_\phi, L_\phi, L_R$  are positive constants which depend on  $A, B, M_1, M_2$

Proof : See appendix B.

Note that the condition of strict invertibility required by algorithm 1 is here substituted for a condition of some "mean" strict invertibility. However as for algorithm 1, this condition is an extra condition to be added for our boundedness study.

Note also that if  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\theta_n - \theta_{n-1}\| = 0$ , then algorithms 1 and 2 yield

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n - \phi_{n-1}\| = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|R_n - R\| = 0.$$

#### V.4. Choice of $E_n(b)$ , $F_n(b)$

A simpler choice can be as follows :

1 - Compute a bounded pseudo inverse  $B_n^+$  of  $B_n(1)$  as :

$$\text{Min} \|I - B_n(1)B_n^+\| \quad (77)$$

over all bounded  $B_n^+$ .

2 - Take

$$E_n(b) = E_n = C_n(1)B_n^+A_n(1) + D_n(1) \quad (78)$$

$$F_n(b) = F_n = C_n(1)B_n^+ \quad (79)$$

However in what follows we only assume the following two conditions :

$$\begin{cases} C_3 : & F_n(b) = \sum_{i=0}^{N_f} p_n^i b^i \\ & E_n(b) = \sum_{i=0}^{N_e} E_n^i b^i \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_4 : & \|p_n^i\| \leq M_f \\ & \|E_n^i\| \leq M_e \end{cases}$$

Therefore much more sophisticated procedure for the computation of  $E_n(b)$ ,  $F_n(b)$  are allowed.

#### V.5. Feedback control law

With (33), (46), (56) the next control  $u_{n+1}$  is implicitly given as

$$e_n = y_n - \theta_n^t \Phi_n \quad (80)$$

$$\Phi_{n+1}^t = E_n(b) r(b) y_n^* - F_n(b) e_n \quad (81)$$

## VI-ROBUST BOUNDEDNESS THEOREM

Theorem 7 : Let  $u_n, y_n$  be sequences of vectors which satisfy (80), (81).

If :

.I1-I4, C1-C4 hold

. $r(b)$  (which appears in C2) is strictly stable.

. $y_n^*$  is bounded.

then :

$$\exists n > 0 : \forall (\eta_r, \eta_\theta, \eta_\phi, \eta_\varepsilon) : H_r \eta_r + H_\theta \eta_\theta + H_\phi \eta_\phi + H_\varepsilon \eta_\varepsilon \leq n$$

$\Rightarrow u_n, y_n$  are uniformly bounded

where  $H_r, H_\theta, H_\phi, H_\varepsilon$  are positive increasing functions of  $M_\theta, M_\phi, M_f$ , and  $n$  only depends on  $r(b)$  and  $\lambda$  (in (12)).

---

Proof : see appendix C.

Note that : . I1-I4 are derived from the identification algorithm and assumption HS (see theorem 2).

. C3-C4 can always be satisfied.

. if (59) (resp(75), (76)) holds, then C1-C2 are derived from I1-I4 (see theorem 4 (resp. theorem 6)).

.  $\eta_r, \eta_\theta, \eta_\phi$  and  $\eta_\varepsilon$  can be expressed linearly in terms of  $\eta_w$  (see theorem 2, 5 or 6).

Then theorem 7 gives :

$\exists n : H\eta_w \leq n \Rightarrow u_n, y_n$  are uniformly bounded.

Where  $H$  depends essentially on  $M_\theta, M_\phi, M_f$  and the invertibility of  $\sigma_n$  and is independant of  $\eta_w$ .

Therefore we have established the following :

Corollary 3 : If :

Assumption HS holds

$r(b)$  is strictly stable.

$\theta_n$  is given by (34)-(39).

$\psi_n$  is given by (54), (55) (resp. (54), (68), (69)).

Inequality (59) (resp. (75), (76)) is satisfied

$E_n(b), F_n(b)$  satisfy C3, C4.

$u_{n+1}$  is given by (33).

Then the first part of the robustness problem is solved.

---

On the other hand, the behaviour of this scheme is studied in [18], when the residuals  $w_n$  are bounded. In particular if there are no residuals we have (compare with (28)) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r(b)(y_n - B_{1n}(b)E_n(b)y^*_{n-1}) = 0$$

where  $B_{1n}(b)$  is computed from  $A_n(b)$ ,  $B_n(b)$ ,  $C_n(b)$ ,  $D_n(b)$  as in (27) and  $E_n(b)$  may chosen to get  $b B_{1n}(b)E_n(b)$  as close as possible to the identity matrix.

Then we conclude that our indirect adaptive scheme completely solves the robustness problem up to some extra condition. This condition has been phrased in terms of (59) or ((75), (76)) i.e. in terms of some left-primeness property of the identified model. However theorem 5 claims that (59) or ((75), (76)) hold if the identification algorithm starts in a neighbourhood of the assumed model given by HS. Hence our indirect adaptive pole placement algorithm is at least a local solution to the robustness problem.

#### Conclusion

An indirect adaptive control scheme has been presented. It involves at each time identification of the unknown model matrices followed by the computation of the adaptive feedback matrices. It is based on an on-line pole placement and zero optimization technique for a linear model which lies in a prescribed sphere and has prescribed degree of the numerator polynomial matrix and prescribed column degrees of a column proper denominator polynomial matrix. We called residuals an additive term on the output of this model to account for discrepancies between this model and the true system output. This system might be nonlinear or linear but not necessarily time invariant and possibly of higher order (or degrees) than the rational model. It might also be corrupted by bounded disturbances. Our assumption about these residuals is essentially that for some unknown values of the model matrices the ratio of the residual norm over the signals norm is bounded. Then we proved a boundedness theorem. However this theorem requires an extra condition, namely a left-primeness property of the identified

model matrices. This assumption has been already made for the unknown model referred to above, and it will be met for the identified values too if the identification starts close enough to this unknown model.

Although as mentionned in the introduction, this algorithm solves the open question of robust boundedness of a MIMO indirect scheme, it needs further developpments to get around the extra condition. Another point which has not yet been completely explored is the on-line zero optimization allowed by the tracking and regulation polynomials  $E(b)$  and  $F(b)$ .

At last let us emphasize the technique used here to prove the robust boundedness. It relies upon a state representation of the nonlinear time varying system given by the adaptive scheme

#### Acknowledgement

The author wishes to thank Dr. G. Cohen for many stimulating discussions and valuable comments on the original manuscript.

## REFERENCES

---

- [1] A.S. MORSE "Global stability of parameter adaptive control system". IEEE Trans AC. June 1980.
- [2] K.S. NARENDRA, Y.H. LIN, L.S. VALAVANI, "Stable adaptive controller design - Part II, Proof of stability", IEEE Trans.AC, June 1980.
- [3] B. EGARDT, "Stability of adaptive controllers". Lecture notes in Control and Information Sciences n°20. Springer Verlag 1979.
- [4] K.S. NARENDRA, Y.H. LIN, "Stable discrete adaptive control". IEEE Trans AC, June 1980.
- [5] G.C. GOODWIN, P.S. RAMADGE, P.E. CAINES, "Discrete time Multivariable adaptive control". IEEE Trans. AC, June 1980.
- [6] G.C. GOODWIN, K.S. SIN, K.K. SALUJA. "Stochastic adaptive control and prediction - the general delay colored noise case". IEEE Trans. AC, October 1980.
- [7] G.C. GOODWIN, R.S. LONG, "Generalization of results on multivariable adaptive control" - 19th IEEE CDC - December 1980.
- [8] G.C. GOODWIN, K.S. SIN, "Adaptive control of non minimum phase systems" - IEEE Trans.AC, April 1981.
- [9] G. KREISSELMEIER, "On adaptive state regulation". IEEE Trans AC, February 1982.
- [10] J.J. FUCHS., "Indirect stochastic adaptive control : the general delay colored noise case", IEEE Trans.AC, April 1982.
- [11] L. PRALY., "Towards a direct adaptive control scheme for general disturbed MIMO systems". INRIA Conf. Versailles, December 1982.
- [12] M. REDJAH., "Commande adaptative de systèmes Multivariables. Application à la commande d'un turbo-alternateur". Thesis Diss. CAI-Ecole des Mines, Fontainebleau, France, May 1982.
- [13] PH. DE LARMINAT., "On the stabilizability condition in indirect adaptive control". 6th IFAC symp. on Identification and system parameter estimation, june 1982.
- [14] D.L. PRAGER, P.E. WELLSTEAD., "Multivariable pole-assignment self tuning regulators". Proc. IEE Vol. 128, n°1. January 1980.
- [15] P. IOANNOU, P.KOKOTOVIC., "Singular perturbations and robust redesign of adaptive control". 21st IEEE CDC, Orlando, December 1982.

- [16] K.S. NARENDRA, B.B. PETERSON., "Bounded error adaptive control". IEEE Trans Ac, December 1982.
- [17] C.E. ROHRS, L. VALAVANI, M. ATHANS, G. STEIN, "Robustness of adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics." 21st IEEE CDC December 1982.
- [18] L. PRALY, M. REDJAH., "An indirect adaptive control scheme for stochastic MIMO systems". CAI-Ecole des Mines, Fontainebleau. Presented at 21st IEEE CDC. December 1982.
- [19] V. LAKSHMIKANTHAM, S. LEELA., "Differential and integral inequalities". Academic Press. Mathematics in science and engineering.
- [20] A.S. HOUSEHOLDER., "The theory of matrices in Numerical Analysis". Blaisdell.
- [21] L. PRALY., "Commande adaptative par modèle de référence : stabilité et robustesse". Edited in "Outils et Modèles Mathématiques pour l'analyse des systèmes l'automatique, et le traitement du Signal" Vol.3, 1983, Edition du CNRS, Paris.
- [22] C. SAMSON., "An adaptive L.Q. controller for non minimum phase systems". Int. J. of Control, 1982, vol. 35, n°1.
- [23] L. PRALY., "Commande adaptative indirecte multivariable : stabilité et robustesse". Presented at Colloque national du CNRS. Belle Ile. France. September 1982.
- [24] B. EGARDT, C. SAMSON., "Stable adaptive control of non-minimum phase systems". Systems and Control letters, vol. 2, n°3, October 1982.
- [25] L. PRALY., "Closed loop transfer functions and internal stability". 20th IEEE,CDC December 1981.
- [26] J. FEINSTEIN, Y. BARNESS. "The solution of the matrix polynomial equation  $A(s)X(s)+B(s)Y(s) = C(s)$ ". ACC 1982.
- [27] G. KREISSELMAYER, K.S. NARENDRA . "Stable model reference adaptive control in the presence of bounded disturbances". IEEE Trans Ac, December 1982.

APPENDIX A

---

OUTLINE OF PROOF OF THEOREM 2

---

The technique used here is by now standard and we only point out the major steps :

Let  $V_n$  be defined as follows :

$$V_n = \text{trace } (\theta_n - \theta)^t p_n^{-1} (\theta_n - \theta) \quad (A.1)$$

From (3), (34)-(45) the following relations are deduced :

$$V_{n-\frac{1}{2}} = V_{n-1} + \frac{\varepsilon_n}{1 - \varepsilon_n \Phi_n^t p_{n-1} \Phi_n} \|w_n\|^2 - \varepsilon_n \|v_n\|^2 \quad (A.2)$$

$$V_n \leq V_{n-\frac{1}{2}} \quad (A.3)$$

$$\|\theta_n - \theta\| \leq (p_n + p_0) = M_0 \quad (A.4)$$

(A.4) directly gives I1 and with (40) yields the boundedness of  $V_n$ . Then (A.2), (A.3) give

$$\left( \frac{\|v_n\|}{s_n} \right)^2 \leq \frac{M+A_1}{\mu} (V_{n-1} - V_n) + \frac{\mu+A_1}{\mu} \left( \frac{\|w_n\|}{s_n} \right)^2 \quad (A.5)$$

Therefore  $\frac{\|v_n\|}{s_n}$  is bounded

$$\left( \frac{\|v_n\|}{s_n} \right)^2 \leq 2 \frac{M+A_1}{\mu} \cdot p_0^2 \left( 1 + \frac{A_0}{A_1} \right)^2 + \frac{1}{A_0} + \frac{\mu+A_1}{\mu} w^2 \quad (A.6)$$

and  $\left( \frac{\|v_n\|}{s_n} \right)^2$  has the property of mean- $\eta_v^2$  smallness relatively to  $s_n$  with

$$\eta_v^2 \leq 2 \frac{\mu+A_1}{\mu} \eta_w^2 \quad (A.7)$$

To get I2-I4, we just need to note that

$$\|\theta_n - \theta_{n-\frac{1}{2}}\| \leq \|\theta_{n-\frac{1}{2}} - \theta_{n-1}\| (1+\tau) \leq \frac{A_1}{\mu+A_0} \frac{\|v_n\|}{s_n} \quad (A.9)$$

$$\frac{\|\varepsilon_n\|}{s_n} \leq \frac{\|v_n\|}{s_n} \left(1 - g_n^{-1} p_{n-1}^1 \Phi_n + g_n \|\Phi_n\|_+ \|p_{n-1} \Phi_n\|\right) \quad (\text{A.9})$$

$$\leq \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \frac{\|v_n\|}{s_n} \quad (\text{A.10})$$

APPENDIX B

OUTLINE OF PROOF OF THEOREM 6

Theorem 6 can readily be proved by noting that :

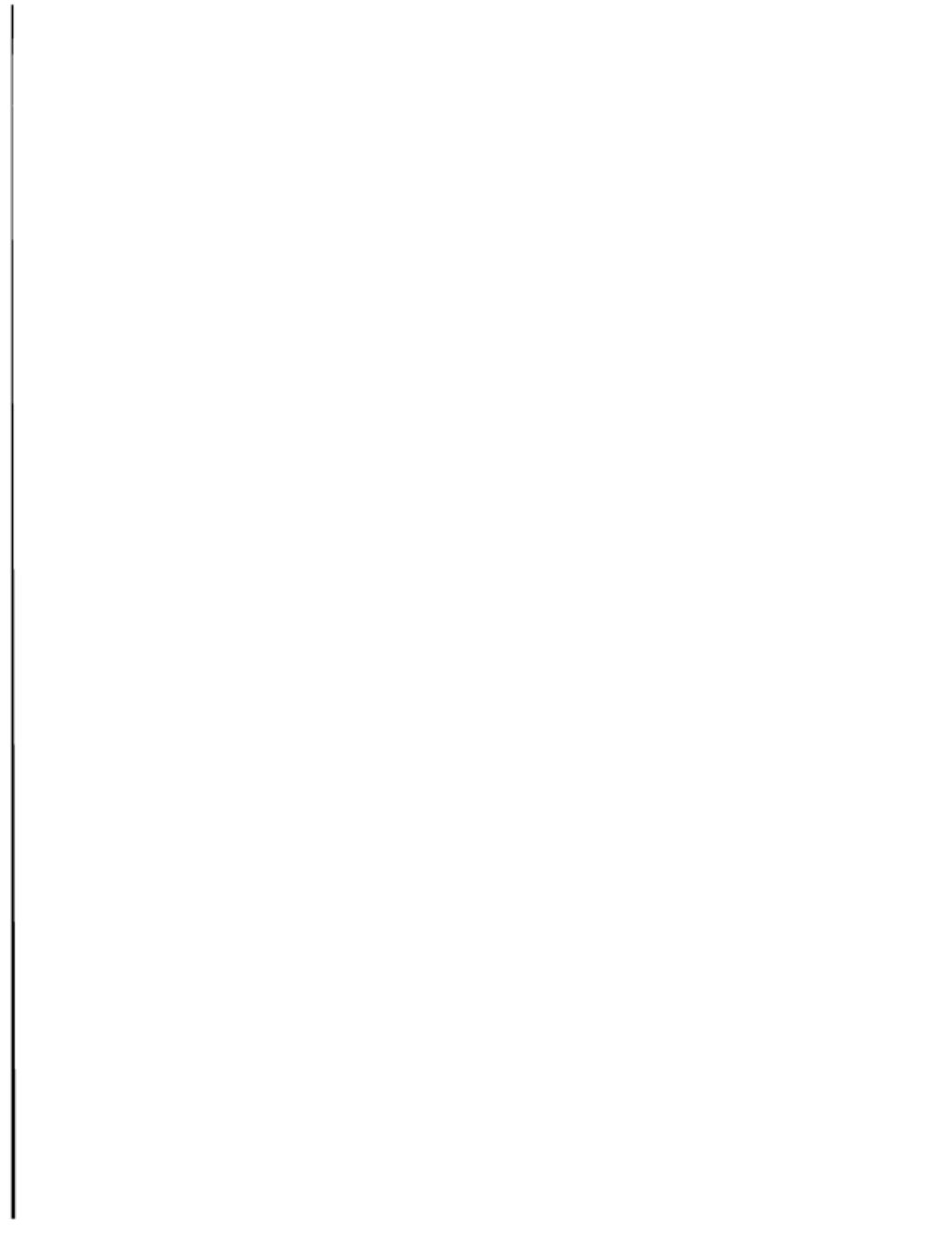
$$\chi_n = (I - C_n \alpha_n) \dots (I - C_1 \alpha_1) \chi_0 + \sum_{i=2}^n (I - C_n \alpha_n) \dots (I - C_i \alpha_i) c_{i-1} \beta_{i-1} + C_n \beta_n \quad (B.1)$$

$$\alpha_n \chi_n - \beta_n = \begin{cases} (I - C_n \alpha_n) \dots (I - C_{q+1} \alpha_{q+1}) (\alpha_q \chi_q - \beta_q) \\ + \sum_{i=q+1}^n (I - C_n \alpha_n) \dots (I - C_i \alpha_i) [(\alpha_i - \alpha_{i-1}) \chi_{i-1} - (\beta_i - \beta_{i-1})] \end{cases} \quad (B.2)$$

$$\chi_n - \chi_{n-1} = C_n (\alpha_{n-1} \chi_{n-1} - \beta_{n-1}) + C_n [(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \chi_{n-1} - (\beta_n - \beta_{n-1})] \quad (B.3)$$

$$\| I - C_n \alpha_n \| \leq 1 - \frac{\lambda_{\min} \alpha_n}{t_n + \text{trace } A_n^T A_n} \quad (B.4)$$

$$\| I - C_n \alpha_n \| \leq 1 - \frac{\lambda_{\min} \alpha_n}{t_n + \text{trace } \bar{\sigma}_n^T \bar{\sigma}_n} \quad (B.5)$$



## APPENDIX C

### PROOF OF THEOREM 7

Introduction : Here we follow the scheme introduced in [18] which essentially relies upon the following lemma :

Lemma 1 : If  $a_n, b_n$  are sequences of positive real numbers such that :

$$L1 : \forall n, 0 < a_{n+1} \leq (\gamma + b_n) a_n + M \quad 0 < \gamma < 1$$

$$L2 : \forall n, b_n \leq M_b$$

L3 :  $b_n$  has the property of mean  $\eta_b$  - smallness relatively to  $a_n$ , with

$$\eta_b < 1 - \gamma$$

then  $a_n$  is bounded

Proof : Let  $K, S$  be given by assumption L3 (see section II.3), and let  $n_0^-$  be the first integer  $n > 0$  such that

$$a_{n_0^-} \geq S \tag{C.1}$$

Note that if  $n_0^-$  does not exist,  $a_n$  is bounded.

We introduce two increasing sequences of stopping time recursively defined as follows (see fig.1) :

$$n_i^+ = \begin{cases} \min \{n/h > n_i^-, a_n < S\} & \text{if the set is non empty} \\ +\infty & \text{if not} \end{cases} \tag{C.2}$$

$$n_i^- = \begin{cases} \min \{n/h > n_{i-1}^+, a_n \geq S\} & \text{if } n_{i-1}^+ \text{ is finite} \\ +\infty & \text{if not} \end{cases} \tag{C.3}$$

Let  $I$  be the set of indices  $i$  such that  $n_i^+$  is finite. We have built a partition of the set of integers  $\mathbb{N}$  as

$$\Omega = [0, n_0^-] \cup_{i \in I} \{[n_i^-, n_i^+]\} \cup [n_i^+, n_{i+1}^-] \quad (c.4)$$

To get our conclusion, it is sufficient to show that  $a_n$  is bounded from above on each of those time intervals by a bound independant of this interval

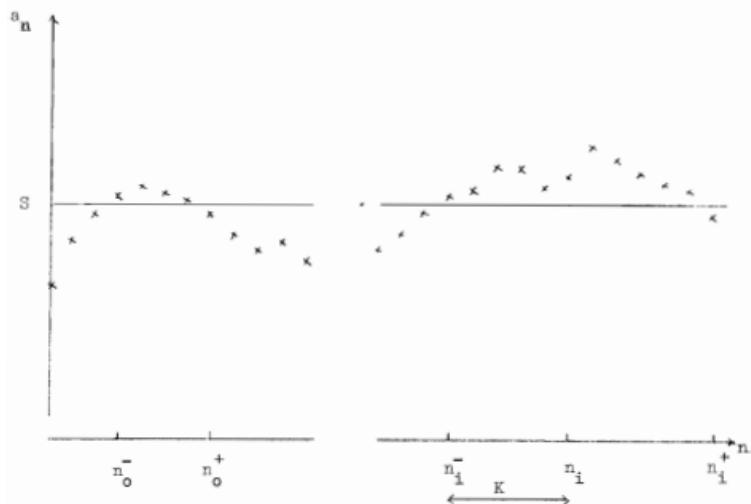


Fig. 1

Using L1, L2 and definitions, we readily have that

$$\forall n \in [0, n_0^-], a_n \leq \max\{a_0, S\} \quad (c.5)$$

$$\forall i \in I, \forall n \in [n_i^+, n_{i+1}^-], a_n < S \quad (c.6)$$

$$\forall i \in I, a_{n_i^-} < AS + M_a, A = (Y + M_b) \quad (c.7)$$

Moreover from L1, we get

$$\forall n > n_i^-, a_{n+1} \leq \left( \prod_{j=n_i^--1}^n c_j \right) a_{n_i^-} + \left( 1 + \sum_{j=n_i^-}^n \left( \prod_{i=j}^n c_i \right) \right) M_a \quad (c.8)$$

$$c_j = Y + b_j \quad (c.9)$$

But the definition of  $n_i^-$  yields

$$a_{n_i^-} < S, c_{n_i^-} \leq A \quad (c.10)$$

then

$$\forall n > n_i^-, a_{n+1} \leq \left( \prod_{j=n_i^--1}^n c_j \right) AS + \left( 1 + \sum_{j=n_i^-}^n \left( \prod_{i=j}^n c_i \right) \right) M_a \quad (c.11)$$

And for any  $n$  and any  $j$  we have

$$\prod_{i=j}^n c_i = \exp \left( \sum_{i=j}^n \log c_i \right) \leq \exp \left( \sum_{i=j}^n (c_{i-1}) \right) \quad (c.12)$$

then with L3, let

$$\xi = \exp - (1 - Y - n_b) < 1 \quad (c.13)$$

L2, L3 yield

$$\begin{aligned} \forall n \in [n_i^-, n_i^+], \forall j \in [n_i^-, n_i^+], j \leq n \\ n-j+1 > K \Rightarrow \prod_{i=j}^n c_i \leq \xi^{n-j+1} \\ n-j+1 \leq K \Rightarrow \prod_{i=j}^n c_i \leq A^K \end{aligned} \quad (c.14)$$

let

$$n_i^- = n_i^+ + K$$

from (c.7), (c.11), (c.14) we get

$$\begin{aligned} \forall n \in [n_i^-, n_i^+] &[ \\ a_{n+1} &\leq A^K (AS + KM_a) + M_a \end{aligned} \quad (c.15)$$

And if  $n_i^- < n_i^+$  we have

$$\begin{aligned} \forall n \in [n_i^-, n_i^+] &[ \\ a_{n+1} &\leq \xi^{n-n_i^-+1} AS + \left(1 + \sum_{j=n_i^-}^{n-K} \xi^{n-j+1} + \sum_{j=n-K+1}^n A^K\right) M_a \end{aligned} \quad (c.16)$$

Therefore we have obtained that

$$\begin{aligned} \forall n \in [n_i^-, n_i^+] &[ \\ a_{n+1} &\leq AS + \left(1 + \frac{1}{1-\xi} + KA^K\right) M_a \end{aligned} \quad (c.17)$$

Then with (c.5), (c.6), (c.7), (c.15), (c.17) we may conclude that  $a_n$  is bounded.

Lemma 2 : Let  $s_n$  be a sequence of strictly positive real numbers such that :

$$s_n \geq \lambda s_{n-1}, \quad 0 < \lambda < 1$$

and let  $d$  be an integer.

Then for any sequence of positive real numbers  $c_n$  we have the following property :

$$\frac{c_n}{s_n^n} \leq M_c \Rightarrow \sum_{i=0}^d \frac{c_{n-i}}{s_n^n} \leq \frac{1 - \lambda^{(d+1)}}{1 - \lambda} \quad \frac{1}{\lambda^d} M_c$$

Moreover if  $\frac{c_n}{s_n}$  has the property of mean  $\eta_c$ -smallness relatively to  $s_n$  then  $\sum_{i=0}^{d-1} \frac{c_i}{s_n^i}$  has the property of mean  $\eta_c'$ -smallness relatively to  $s_n$  with

$$\eta_c' = \frac{2(d+1)}{\lambda^d} \eta_c$$

Proof : it is readily obtained from the property of  $s_n$ .

Outline of the proof of theorem 7 with the intent to use lemma 1, we will proceed in four steps :

step 1 : We deduce L1 from a state representation  $\Psi_n$  of equations (80), (81), and taking

$$s_n = \begin{vmatrix} \|\Psi_n\| \\ n \\ s_n \end{vmatrix}$$

$\bullet b_n$  a function of  $\theta_n - \theta_{n-1}$ ,  $\phi_n - \phi_{n-1}$ ,  $R_n - R$ ,  $\theta_n$ ,  $\phi_n$ .

step 2 : L2 is a direct consequence from the boundedness of  $\theta_n$ ,  $\phi_n$ .

step 3 : In order to get L3, we state that when  $s_n$  is growing at a high level so is  $s_n$ .

Here we use the link between  $s_n$  and  $\Psi_n$ .

step 4 : L3 is directly deduced from the properties of mean  $\eta$ -smallness of  $\|\theta_n - \theta_{n-1}\|$  and  $\frac{\|\varepsilon_n\|}{s_n}$ .

First step (L1) : Let  $X_n(b)$ ,  $Y_n(b)$ ,  $B_{1n}(b)$ ,  $A_{1n}(b)$  be polynomial matrices given by the adjoint matrix of

$$\begin{pmatrix} A_n(b) & -bB_n(b) \\ D_n(b) & C_n(b) \end{pmatrix}$$

as follows :

$$\begin{pmatrix} X_n(b) & bB_{1n}(b) \\ -Y_n(b) & A_{1n}(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n(b) & -bB_n(b) \\ D_n(b) & C_n(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (C.18)$$

With definitions (2), (18), (56), we apply (C.18) to the vector  $(y_n^t, u_{n+1}^t)^t$  or equivalently to equations (80), (81) :

$$\sum_{i=0}^{N_x} X_n^i (y_{n-i} - \theta_n^t \phi_{n-i}) + \sum_{i=0}^{N_b} B_{1n}^i \phi_n^t \phi_{n-i} = r_n(b) y_n \quad (C.19)$$

$$- \sum_{i=0}^{N_y} Y_n^i (y_{n-i} - \theta_n^t \phi_{n-i}) + \sum_{i=0}^{N_a} A_{1n}^i \phi_n^t \phi_{n+i-i} = r_n(b) u_{n+1} \quad (C.20)$$

where  $X_n^i, Y_n^i, B_{1n}^i, A_{1n}^i$  are the matricial coefficients and  $N_x, N_y, N_b, N_a$  are the time varying degrees of the polynomial matrices  $X_n(b), Y_n(b), B_{1n}(b), A_{1n}(b)$ .

Using their definition from the adjoint matrix we have :

$$\max \{N_x, N_y, N_a, N_b\} < \sum_{i=1}^l N_i + m N_b = d \quad (C.21)$$

and using  $C_1, C_2$ .

$$\max(\|X_n^i\|, \|Y_n^i\|, \|B_{1n}^i\|, \|A_{1n}^i\|) < M_x = L_x \bar{M}_0^{-1} M_\phi^m \quad (C.22)$$

where  $L_x$  is a positive constant which only depends on  $l, m, N_a, N_b$  and

$$\bar{M}_0 = M_0 + \|\theta\| \quad (C.23)$$

Now, with (80), (81), (C.19), (C.20) yield

$$r_n(b) y_n = \begin{cases} + X_n(b) e_n + \sum_{i=1}^{N_x} X_n^i (\theta_{n-i} - \theta_n^t)^t \phi_{n-i} \\ + \sum_{i=0}^{N_b} B_{1n}^i (E_{n-i-1}(b) r(b) y_{n-i}^* - F_{n-i-1}(b) e_{n-i-1}) + \sum_{i=0}^{N_b} B_{1n}^i (\phi_n - \phi_{n-i-1})^t \phi_{n-i} \end{cases} \quad (C.24)$$

$$r_n(b) u_{n+1} = \begin{cases} - Y_n(b) e_n + \sum_{i=1}^{N_y} Y_n^i (\theta_n - \theta_{n-i})^t \phi_{n-i} \\ + \sum_{i=0}^{N_a} A_{1n}^i (E_{n-i-1}(b) r(b) y_{n-i}^* - F_{n-i-1}(b) e_{n-i-1}) + \sum_{i=1}^{N_a} A_{1n}^i (\phi_n - \phi_{n-i-1})^t \phi_{n+i-1} \end{cases} \quad (C.25)$$

We introduce a new vector  $\Psi_n$  made up of the coordinates of  $\Phi_n, \dots, \Phi_{n-d}$  and defined as follows :

$$\Psi_n^t = (y_{n-1}^t \dots y_{n-N_a-d}^t u_n^t \dots u_{n-N_b-d}^t) \quad (c.26)$$

Now (c.24), (c.25) may be written in a state space form :

$$\Psi_{n+1} = (F + \Delta F_n) \Psi_n + G_n Y_n^* + H_n \Delta_n \quad (c.27)$$

where

•  $F$  is a companion matrix of  $(r(b))^2$

•  $\Delta F_n$  incorporates the following differences :

$$(R - R_n), X_n^i(\theta_n - \theta_{n-i}), Y_n^i(\theta_n - \theta_{n-i}), A_{1n}^i(\phi_n - \phi_{n-i}), B_{1n}^i(\phi_n - \phi_{n-i-1})$$

•  $G_n$  includes the coefficients of the entries of  $B_{1n}^i E_{n-i-1}(b) r(b)$ ,  $A_{1n}^i E_{n-i}(b) r(b)$ .

•  $Y_n^*$  is a vector defined as follows

$$Y_n^* = (y_n^* \dots y_{n-e}^*)^t \quad (c.28)$$

where, using C3 :

$$e \leq 2d + N_e + 1 \quad (c.29)$$

•  $H_n$  includes the coefficients of the entries of

$$X_n(b), Y_n(b), B_{1n}^i F_{n-i-1}(b), A_{1n}^i F_{n-i}(b)$$

•  $\Delta_n$  is a vector defined as follows

$$\Delta_n^t = (\epsilon_1^t \dots \epsilon_{n-f}^t) \quad (c.30)$$

where using C3.

$$f \leq d + N_f + 1 \quad (c.31)$$

Now with the strict stability of  $r(b)$ , there exists a consistent norm such that (see p. 46 of [20])

$$\|p\| \leq \sigma < 1 \quad (c.32)$$

Hence using this norm (which is time invariant)

$$\|\Psi_{n+1}\| \leq (\sigma + \|\Delta F_n\|) \|\Psi_n\| + \|G_n\| \cdot \|Y_n^*\| + \|H_n\| \cdot \|\Delta_n\| \quad (c.33)$$

but with help of norm equivalence in finite dimensional vector space, we have :

$$\|\Delta F_n\| \leq \|R_n - R\| + \begin{cases} \max_{0 \leq i \leq d} \{\|X_n^i\|, \|Y_n^i\|\} \sum_{i=1}^d \|\theta_n - \theta_{n-i}\| \\ \max_{0 \leq i \leq d} \{\|B_{1n}^i\|, \|A_{1n}^i\|\} \sum_{i=1}^{d+1} \|\phi_n - \phi_{n-i}\| \end{cases} \quad (c.34)$$

$$\|G_n\| \leq \max_{\substack{0 \leq i \leq d \\ 0 \leq j \leq N}} \{\|B_{1n}^i\| \cdot \|B_{n-i-1}^j\|, \|A_{1n}^i\| \cdot \|B_{n-i}^j\|\} \quad (c.35)$$

$$\|H_n\| \leq \max_{\substack{0 \leq i \leq d \\ 0 \leq j \leq N_f}} \{\|X_n^i\|, \|Y_n^i\|, \|B_{1n}^i\| \cdot \|P_{n-i-1}^j\|, \|A_{1n}^i\| \cdot \|P_{n-i}^j\|\} \quad (c.36)$$

$$\|\Delta_n\| \leq \sum_{i=0}^f \|\epsilon_{n-i}\| \quad (c.37)$$

Note that using lemma 2 and I2, I3, we have

$$\cdot \frac{\|\Delta_n\|}{s_n} \leq \frac{1-\lambda^{(f+1)}}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^f} \quad M_\epsilon = M_\epsilon^* \quad (c.38)$$

$$\cdot \frac{\|\Delta_n\|}{s_n} \text{ has the property of mean } n^* \text{-smallness relatively to } s_n, \text{ with}$$

$$n^* \epsilon = \frac{2(f+1)}{\lambda^f} \cdot n_\epsilon \quad (c.39)$$

Moreover with (C.22), C4 and the boundedness of  $\|y_n^*\|$  (C.34)-(C.36) may be reduced to :

$$\|\Delta F_n\| \leq \|R_n - R\| + M_x \left( \sum_{i=1}^d \|\theta_n - \theta_{n-i}\| + \sum_{i=1}^{d+1} \|\Phi_n - \Phi_{n-i}\| \right) \quad (C.40)$$

$$\|G_n\| \leq \|Y_n^*\| \leq M_x M_e Y^* = M_1 \quad (C.41)$$

$$\|H_n\| \leq M_x M_f = M_2 \quad (C.42)$$

Then (C.33) yields

$$\|\Psi_{n+1}\| \leq (\sigma + \|\Delta F_n\|) \|\Psi_n\| + M_2 \|\Delta_n\| + M_1 \quad (C.43)$$

let us join the definition (12) of  $s_n$  to this inequality to get the following system :

$$\begin{aligned} \|\Psi_{n+1}\| &\leq (\sigma + \|\Delta F_n\|) \|\Psi_n\| + M_2 \frac{\|\Delta_n\|}{s_n} s_n + M_1 \\ s_n &= \max \{s, \|\Phi_n\|\} + \lambda s_{n-1} \end{aligned} \quad (C.44)$$

But we have

$$\|\Phi_n\| \leq \|\Psi_n\| \quad (C.45)$$

then

$$s_n \leq \|\Psi_n\| + \lambda s_{n-1} + s \quad (C.46)$$

Therefore (C.44), with (C.38) yields

$$\begin{aligned} \|\Psi_{n+1}\| &\leq (\sigma + \|\Delta F_n\| + M_2 \frac{\|\Delta_n\|}{s_n}) \|\Psi_n\| + \lambda M_2 \frac{\|\Delta_n\|}{s_n} s_{n-1} + M_1 \\ s_n &\leq \|\Psi_n\| + \lambda s_{n-1} + s \end{aligned} \quad (C.47)$$

To simplify notations, let

$$s_1^n = \|\Delta F_n\| + M_2 \frac{\|\Delta_n\|}{s_n} \quad (C.48)$$

$$s_2^n = \lambda M_2 \frac{\|\Delta_n\|}{s_n} \quad (C.49)$$

Since

$$\lambda < 1, \sigma < 1 \quad (\text{c.50})$$

We can choose positive constants  $p_1, p_2$  such that :

$$\sigma \max \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} \end{pmatrix} \leq \gamma < 1 \quad (\text{c.51})$$

Moreover we have

$$\sigma \max \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1^n & \delta_2^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} \end{pmatrix} \leq \delta_1^n + \frac{p_1}{p_2} \delta_2^n = b_n \quad (\text{c.52})$$

With this notation, (c.47) yields :

$$(p_1^2 \|\psi_{n+1}\|^2 + p_2^2 s_n^2)^{1/2} \leq (\gamma + b_n)(p_1^2 \|\psi_n\|^2 + p_2^2 s_{n-1}^2)^{1/2} + M_4 \quad (\text{c.53})$$

Thus if we let :

$$a_{n+1}^2 = p_1^2 \|\psi_{n+1}\|^2 + p_2^2 s_n^2 \quad (\text{c.54})$$

$$b_n = \|\Delta F_n\| + (1 + \frac{\lambda p_1}{p_2}) M_2 \frac{\|\Delta_n\|}{s_n} \quad (\text{c.55})$$

we have established I1.

Second step (I2) : Since  $\|\theta_n\|, \|\phi_n\|$  are bounded (using I1, C1) and  $R_n$  is a multilinear function of  $\theta_n, \phi_n$ , (138), (c.40), yield the boundedness of  $b_n$  :

$$b_n \leq M_b \quad (\text{c.56})$$

Third step : From definitions (2), (12), (c.26), we have

$$\|\psi_n\| \leq \sum_{i=0}^d \|\phi_{n-i}\| \leq \frac{1}{\lambda^d} s_n \quad (\text{c.57})$$

As a conclusion we have

$$\mathcal{J}_{\mathbb{B}, K}(a_n) \subset \mathcal{J}_{S, K}(s_n) \quad (c.59)$$

with

$$\mathbb{B} = \left( \frac{p_1}{\lambda^d} + \frac{p_2}{\lambda} \right) S \quad (c.60)$$

Fourth step (L3) : From (c.55) we get

$$\forall q, \forall k \geq d$$

$$\sum_{n=q+d}^{q+k} b_n = \sum_{n=q+d}^{q+k} \|\Delta p_n\| + (1+\lambda \frac{p_1}{p_2}) M_2 \sum_{n=q+d}^{q+k} \frac{\|\Delta n\|}{s_n} \quad (c.61)$$

But with help of (c.40), we have

$$\sum_{n=q+d}^{q+k} \|\Delta p_n\| < \begin{cases} \sum_{n=q+1}^{q+k} \|R_n - R\| + d^2 M_x \sum_{n=q+1}^{q+k} \|\theta_n - \theta_{n-1}\| \\ (d+1)^2 M_x \sum_{n=q+1}^{q+k} \|\psi_n - \psi_{n-1}\| + M_x \|\psi_q - \psi_{q-1}\| \end{cases} \quad (c.62)$$

and with C1 :

$$\forall v_1 > 0, \exists K_1 : \forall k > K_1 \Rightarrow \frac{M_x}{k} \|\psi_q - \psi_{q-1}\| \leq v_1, \quad \forall q \quad (c.63)$$

and with the boundedness of  $b_n$  :

$$\forall v_2 > 0, \exists K_2 : \forall k > K_2 \Rightarrow \frac{1}{k} \sum_{n=q+1}^{q+d} b_n \leq \frac{d M_b}{k} \leq v_2, \quad \forall q \quad (c.64)$$

Now with I3 (resp. I4) and lemma 2 we have  $(K_\epsilon, S_\epsilon)$  (resp.  $(K_0, S_0)$ ) for the property of mean  $\eta'_\epsilon$  (resp.  $\eta_0$ )-smallness relatively to  $s_n$  and with C2 we have  $K_c$ . Then let

$$K = \max \{K_1, K_2, K_\epsilon, K_0, K_c, d\}. \quad (c.65)$$

We have with (16) :

$$v(q,k) \in \mathcal{A}_{S,K}(s_n)$$

$$\sum_{n=q+d}^{q+k} b_n \leq k \times \begin{cases} \eta_r + d^2 M_x \eta_\theta + (d+1)^2 M_x \eta_\psi \\ + M_x v_1 + (1 + \lambda \frac{p_1}{p_2}) M_2 \eta_\epsilon \end{cases} \quad (c.67)$$

Then with (c.59), (c.60), I3, I4, c2, we get

$$v(q,k) \in \mathcal{A}_{S,K}(a_n) : \frac{1}{k} \sum_{n=q+1}^{q+k} b_n \leq \eta_b \quad (c.68)$$

with, using (c.39), (c.42)

$$\eta_b = v_2 + \eta_r + d^2 M_x \eta_\theta + (d+1)^2 M_x \eta_\psi + M_x v_1 + (1 + \lambda \frac{p_1}{p_2}) M_x M_f \frac{2(f+1)}{\lambda^f} \eta_\epsilon \quad (c.69)$$

But we may take

$$M_x v_1 + v_2 \leq \frac{1-\gamma}{2} \quad (c.70)$$

Hence using Lemma 1 we get our conclusion :

Conclusion : There exists  $\eta = \frac{1-\gamma}{2}$  such that for any  $(\eta_\epsilon, \eta_\theta, \eta_\psi, \eta_r)$  such that

$$\eta_r + d^2 M_x \eta_\theta + (d+1)^2 M_x \eta_\psi + (1 + \lambda \frac{p_1}{p_2}) M_x M_f \frac{2(f+1)}{\lambda^f} \eta_\epsilon \leq \eta \quad (c.71)$$

then  $y_n$  and  $u_n$  are bounded.

Recall that :  $p_1, p_2$  only depend on  $\lambda, \sigma$

$$M_x = L_x \bar{M}_\theta^l M_\psi^n \quad (c.72)$$

where  $L_x$  depends on  $l, m, N_a, N_b$ .

## **C.2 The almost exact modelling assumption in adaptive linear control**

A paraître dans International Journal of Control



**Ecole Nationale Supérieure Des Mines De Paris.  
Centre d'Automatique et Informatique.**

35 Rue Saint Honoré, 77305 Fontainebleau Cedex, France  
Tel: (1) 64 22 48 21 Telex: Minefon 694 736 Fax: (1) 64 22 39 03

**THE ALMOST EXACT MODELLING ASSUMPTION  
IN ADAPTIVE LINEAR CONTROL**

*Laurent Praly*

February 9, 1988



## 1. Introduction

Modern adaptive controllers guarantee boundedness (may be not stability) of all the solutions when placed in feedback with a physical process for which the main sufficient property is:

*Let  $n_A, n_B, \mu, \gamma$  be two integers and two positive real numbers respectively, obtained from the adaptive controller, with  $\gamma$  strictly positive and  $\mu$  strictly smaller than 1, the physical process input-output signals satisfy:*

$$|A(q^{-1})y(t) - B(q^{-1})u(t-1)| \leq \gamma s(t) + \beta(t) \\ s(t)^2 = \mu^2 s(t-1)^2 + u(t-1)^2 + y(t-1)^2 \quad (A)$$

*where  $\beta$  is a bounded sequence and  $A, B$  are polynomials in the unit delay operator  $q^{-1}$  whose coefficients, in  $\mathbb{R}^{n_A} \times \mathbb{R}^{n_B}$  respectively, are arbitrary but lie in a compact set given by the controller.*

Assumption (A) is unusual compared with those used in linear system theory, such as singular perturbations or norm restricted multiplicative or additive uncertainties, for example. The topic of this report is to discuss the meaning of this assumption, to study what class of physical processes can be represented this way and to see how it is related to more standard approaches.

The main aspect of assumption (A) is the fact that it involves two components available to the designer:

- the collection of the input-output signals ( $u, y$ ) which is the only way the physical process is known,
- the model ( $A, B$ ), element of a parameterized family of mathematical dynamical systems.

This parameterized family of dynamical systems is chosen for providing an adequate description of the physical process without being excessively complicated. But this limited complexity and the idealization of representing a physical process by a mathematical dynamical system lead to the inability of explaining exactly the output signals from the input signals. Consequently approximation is involved and motivates assumption (A). This assumption is meant to qualify if not to quantify the allowable misfit between this limited complexity idealization and the physical process as it is observed from its input-output signals.

A fundamental factor affecting this misfit is the way the input-output signals we are trying to relate, are measured. For instance if the mean values are the only measurements, a (may be nonlinear) gain will be sufficient for explaining the input-output relation. Let  $u_p, y_p$  be the physical process input output sequences respectively. From these "primitive" signals, we define measurements  $z$  as the signals given by:

$$U_z(q^{-1}) z(t) = V_z(q^{-1}) y_p(t) - W_z(q^{-1}) u_p(t) \quad (2)$$

where  $U_z, V_z, W_z$  are respectively prime polynomials,  $U_z$  is monic (i.e.  $\lim_{z \rightarrow \infty} U_z(z^{-1}) = 1$ ) and "exponentially stable". In other words,  $z$  is the output of an exponentially stable completely reachable finite dimensional time invariant linear system with inputs the physical process input-output signals. In particular we define a measured input sequence  $w$ , by:

$$U_u(q^{-1})u(t) = V_u(q^{-1})y_p(t) - W_u(q^{-1})u_p(t) \quad (3)$$

where in this case  $W_u$  is monic to allow the computation of  $u_p$  by:

$$W_u(q^{-1})u_p(t) = V_u(q^{-1})y_p(t) - U_u(q^{-1})u(t) \quad (4)$$

Similarly, we define a measured output sequence  $y$  by:

$$U_y(q^{-1})y(t) = V_y(q^{-1})y_p(t) - W_y(q^{-1})u_p(t-1) \quad (5)$$

Note the delay in  $u_p$ . The roles of  $(U_u, V_u, W_u)$  and  $(U_y, V_y, W_y)$  will be precised by studying the misfit between the process limited complexity idealization and the physical process itself.

In Section 2, we define the model, our process limited complexity idealization. In Section 3, we give a mathematical description of physical processes candidate for satisfying assumption (A). In Section 4, we propose a measurement system aiming at making the measured process to satisfy (A) effectively. Then Section 5 summarizes our results by introducing the notion of almost exactly modelled processes and by giving their properties. Finally, we give in Section 6 some notes and references related to our topic.

## 2. Model

The model is an idealization of the physical process input-output relation. It is used for the design of the adaptive control law and for the evaluation of the "ideal" closed loop system behavior. We have mentioned our choice of the model as an element of a parameterized family of mathematical dynamical systems. But, both the parameter fitting problem and the control law design impose a limited complexity system. The model is consciously only an approximate process description. Typically for realizing the compromise between admissible complexity and better approximation, we prefer a model of a pragmatic mathematical nature motivated by the input-output relation representation more than a deduction from known basic physical laws motivated by the description of the mechanisms involved in this relation. Even more, in the adaptive control context, the input-output relation needs only to be represented as far as it is sufficient for meeting the control objective at each time.

Typically, the model is a discrete time linear time invariant finite dimensional system, leading to an adaptive linear controller. Noticing that unobservable modes do not modify the input-output signals, complete observability can be assumed. There are many equivalent ways to represent such a system. With the

complexity minimality requirement, we prefer canonical forms among which the more convenient for our specific application happens to be the:

**Backward shift operator observable representation:** With  $u$ ,  $y$  the measured input output signals respectively, we describe the model by:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + C(q^{-1})v(t) \quad (1)$$

$A$ ,  $B$ ,  $C$  are polynomials in  $q^{-1}$   $A$ ,  $C$  being monic and  $C$  exponentially stable. We use  $u(t-1)$  instead of  $u(t)$  to express the necessary delay present somewhere in the closed-loop system. The model family of dynamical systems among which we are looking for our model is completely determined by choosing  $n_A, n_B, n_C$  the degrees of  $A$ ,  $B$ ,  $C$  respectively. Within this family, a model is obtained by (may be implicitly) choosing the polynomial coefficients.

-  $v$  is an extra sequence needed to fully explain the measured output  $y$  from the measured input  $u$ . Namely  $C(q^{-1})v(t)$  is the part of  $y(t)$  which cannot be explained from the only knowledge of  $\{y(\tau), u(\tau), \tau < t\}$ . In fact the correct definition of  $v$  is:

Given the model polynomial  $A$ ,  $B$ ,  $C$  on the one hand and the measured input-output signals on the other hand,  $v$  is defined by:

$$C(q^{-1})v(t) = A(q^{-1})y(t) - B(q^{-1})u(t-1) \quad (2)$$

Consequently  $v$  depends on the model and is called the modelling error. We can think of our model as being a good model if all the meaningful information of the input-output relation has been extracted. This means that knowledge of  $\{y(\tau), u(\tau), v(\tau), \tau < t\}$  should give no information on the actual value  $v(t)$ . We will say (in a very loose sense) that  $v$  is unpredictable. We could appeal to the stochastic framework to precise this notion (see Goodwin and Sin [11]):

$v$  is said unpredictable if  $v$  is a sequence of integrable random variables on a probability space such that if  $F(t)$  is the increasing sequence of sub- $\sigma$ -fields generated by  $\{v(\tau), u(\tau), y(\tau), \tau \leq t\}$ , we have:

$$E(v(t)/F(t-1)) = 0 \quad a.s. \quad (3)$$

$$E(v(t)^2/F(t-1)) < +\infty \quad a.s. \quad (4)$$

Unfortunately, in practice, the approximation inherent with any modelling implies the inability of reaching this absolute property of unpredictability. To be more pragmatic, it is sufficient to define a property related to an objective and expressing the idea that this particular objective can still be achieved. Assumption (A) in the Introduction has been proved to be sufficient for replacing this unpredictability

property as far as the boundedness problem is concerned. However, it is known to be insufficient for more specific performance problems.

### 3. Process

To allow a mathematical description to encompass more physical phenomena, weaker structures must be used. Typically inequalities replace equalities. Looking for a wider class of physical processes candidate for satisfying assumption (A), we consider those which are linearly dominated systems characterized as follows:

**Definition 1:** Let  $\mu$  be a given positive constant strictly smaller than 1, a process with input  $u_p$ , output  $y_p$  is said to be a linearly dominated system if  $y_p$  can be scaled, namely, if there exist a bounded sequence  $\beta$ , depending on the initial conditions and a positive constant  $\gamma$  such that for any input sequence  $u_p$ , we have at each time  $t$ :

$$|y_p(t)| \leq \gamma s_p(t) + \beta(t) \quad (1)$$

where  $s_p$  is defined by:

$$s_p(t)^2 = \sum_{i=0}^{t-1} \mu^{2(t-i-1)} (|y_p(i)|^2 + |u_p(i)|^2) = \mu^2 s_p(t-1)^2 + (|y_p(t-1)|^2 + |u_p(t-1)|^2) \quad (2)$$

Inequality (1) expresses that the output at time  $t$  can be bounded in terms of the past inputs-outputs weighted by a forgetting factor. Formally, the square of the process output is dominated by the output of  $\frac{\gamma^2 q^{-1}}{1 + (\mu^2 - \gamma^2)q^{-1}}$  with the square of the process input as input. This process representation is unusual, but it has been shown to be well adapted to our topic. To get a better grip of this definition, let us state several properties:

**Property 1:** Any discrete time linear time invariant finite dimensional system is a linearly dominated system for any  $\mu$ ,  $0 < \mu < 1$ , where the corresponding  $\beta$  sequence can be chosen  $\mu$ -exponentially decaying.

**Proof:** Choose any  $\mu$ ,  $0 < \mu < 1$ . From the canonical structure theorem, this system can be represented in the following state-space form:

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} u_p(t) \quad (3)$$

$$y_p(t) = (0 \ 0 \ C_3) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \quad (4)$$

where the pair  $(A_{33}, C_3)$  is completely observable, the eigenvalues of  $A_{22}$  are in the open disk of radius  $\mu$ . From the complete observability property, we can find  $K$  such that the eigenvalues of  $(A_{33}-KC_3)$  are in the open disk of radius  $\mu$ . Then let us consider the following non minimal representation of (3), (4) with  $\hat{x}_3(0) = 0$ :

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ \hat{x}_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33}-KC_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{33}-KC_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \hat{x}_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_3 & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

With the properties of  $A_{22}$ ,  $A_{33}-KC_3$ , there exist positive constants  $\alpha, \lambda$  with  $\lambda < \mu$ , such that, with  $\|\cdot\|$  denoting the euclidian norm:

$$\left\| \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{23} \\ 0 & A_{33}-KC_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33}-KC_3 \end{pmatrix}^n \right\| \leq \alpha \lambda^n \quad \forall n \geq 0 \quad (6)$$

Hence applying the variation of constants formula and taking the euclidian norm, we obtain for some positive constants  $\gamma_1, \beta_1$ :

$$\left\| \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \right\| \leq \beta_1 \lambda^t \left\| \begin{pmatrix} x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} \right\| + \gamma_1 \sum_{n=0}^{t-1} \lambda^{t-1-n} (|u_p(n)|^2 + |y_p(n)|^2)^{\frac{n}{2}} \quad (7)$$

With the Cauchy-Schwarz inequality, we obtain:

$$\sum_{n=0}^{t-1} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{t-1-n} \mu^{t-1-n} (|u_p(n)|^2 + |y_p(n)|^2)^{\frac{n}{2}} \leq \left( \sum_{n=0}^{t-1} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{2(t-1-n)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=0}^{t-1} \mu^{2(t-1-n)} (|u_p(n)|^2 + |y_p(n)|^2) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

$$\leq \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - \lambda^2}} s_p(t) \quad (9)$$

The result follows with (4). >

**Remark 1:** On our way of proving this property, we have established that the state components which are either in the observable subspace or in the unobservable subspace but with an "unobservable" pole

strictly smaller than  $\mu$ , can be scaled by  $s_p$

$$\left| \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \right| \leq \gamma s_p(t) + \beta(t) \quad (10)$$

For this reason,

**Definition 2:** We call  $s_p(t)$  a scaling signal for the system.

Its main property is its availability from the process input-output signals. As soon as  $\mu$  is given, we do know how to compute  $s_p(t)$  and therefore have the possibility of scaling all the signals in the process. In order to prove that this scaling property extends to measurements given by time varying systems, let us prove the following Lemma:

**Lemma 1:** Let  $w$  be a sequence scaled by  $s_p$ , let  $C(t)$  be a monic and exponentially  $\mu$ -stable time varying polynomial. The sequence  $v$  defined by:

$$C(t, q^{-1})v(t) = w(t) \quad (11)$$

is scaled by  $s_p$  with a sequence  $\beta$   $\mu$ -exponentially decaying if the same holds for  $w$ .

**Proof:** Since  $C(t)$  is monic and exponentially  $\mu$ -stable, there exist positive constants  $\beta_1$  (depending on the initial conditions),  $\gamma_1$ ,  $\lambda_1$  and  $\lambda$ ,  $\lambda_1 < \lambda < \mu$ , such that, for any sequence  $w$

$$|w(t)| \leq \beta_1 \lambda_1^t + \gamma_1 \sum_{i=s}^t \lambda_1^{t-i} |w(i)| \quad (12)$$

But, since  $w$  can be scaled by  $s_p$ , there exist  $\gamma$  and a bounded sequence  $\beta$  such that:

$$|v(t)| \leq \beta_1 \lambda_1^t + \gamma_1 \sum_{i=s}^t \lambda_1^{t-i} (\gamma s_p(i) + \beta(i)) \quad (13)$$

The conclusion follows since,  $\mu^{-2t} s_p(t)^2$  being an increasing sequence, the Cauchy-Schwarz inequality yields:

$$\sum_{i=s}^t \lambda_1^{t-i} s_p(i) \leq \left( \sum_{i=0}^t \left( \frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^{2(t-i)} \right)^{\frac{1}{2}} \mu^t \left( \sum_{i=0}^t \frac{\lambda^{2(t-i)}}{\mu^{2(t-i)}} \mu^{-2i} s_p(i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

$$\leq \frac{\lambda \mu}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)^{\frac{1}{2}} (\mu^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} s_p(t) \quad (15)$$

and:

$$\mu^{-t} \sum_{i=0}^t \lambda_1^{t-i} \beta(i) \leq \sup_i \left\{ \frac{\beta(i)}{\mu^i} \right\} \sum_{i=0}^t \left( \frac{\lambda_1}{\mu} \right)^{t-i} \leq \frac{\mu}{\mu - \lambda_1} \sup_i \left\{ \frac{\beta(i)}{\mu^i} \right\} > \quad (16)$$

**Property 2:** Let  $u_p, y_p$  be respectively the input and output of a linearly dominated system, let  $A_p(t), B_p(t), C_p(t)$  be any time varying polynomials with bounded coefficients,  $C_p(t)$  monic and exponentially  $\mu$ -stable. The measurement  $v$  defined by:

$$C_p(t, q^{-1})v(t) = A_p(t, q^{-1})y_p(t) - B_p(t, q^{-1})u_p(t-1) \quad (17)$$

is scaled by  $s_p$ , namely, there exist some constant  $\gamma$  and bounded sequence  $\beta$ , independant of  $u_p, y_p$ , such that:

$$|v(t)| \leq \gamma s_p(t) + \beta(t) \quad (18)$$

Moreover,  $\beta$  is a  $\mu$ -exponentially decaying sequence if the same holds for the system.

**Proof:** < Since  $u_p$  and  $y_p$  are scaled by  $s_p$  and the coefficients of  $A_p(t), B_p(t)$  are bounded,  $w$  defined by:

$$w(t) = A_p(t, q^{-1})y_p(t) - B_p(t, q^{-1})u_p(t-1) \quad (19)$$

is scaled by  $s_p$ . The conclusion follows with Lemma 1. >

**Property 3:** For a process with  $u_p, y_p$  as input and output respectively, if there exist time varying polynomials  $A_p(t), B_p(t), C_p(t)$  with bounded coefficients and  $A_p(t)$  and  $C_p(t)$  monic, such that the measurement  $v$ , given by:

$$C_p(t, q^{-1})v(t) = A_p(t, q^{-1})y_p(t) - B_p(t, q^{-1})u_p(t-1) \quad (20)$$

satisfies for some constant  $\gamma$ , some bounded sequence  $\beta$  and some  $\mu$ ,  $0 \leq \mu < 1$ :

$$|v(t)| \leq \gamma s_p(t) + \beta(t) \quad (21)$$

then the process is a linearly dominated system.

**Proof:** < Since  $A_p(t)$  is monic, (20) can be rewritten in:

$$y_p(t) = [q(1-A_p(t, q^{-1}))]y_p(t-1) + B_p(t, q^{-1})u_p(t-1) + C_p(t, q^{-1})v(t) \quad (22)$$

which means that  $y_p(t)$  is a (finite) linear combination, with bounded coefficients, of terms which can be bounded in terms of  $s_p(t)$ . The conclusion follows readily. >

**Remark 2:** i) With Properties 2 and 3, we see that if a particular measurement  $v_\sigma$ , given by some triple  $(A_{p\sigma}(t), B_{p\sigma}(t), C_{p\sigma}(t))$  is scaled by  $s_p$ , then any measurement  $v$  given by  $(A_p(t), B_p(t), C_p(t))$  is scaled by  $s_p$  if the coefficients of these time varying polynomials are bounded and  $C_p(t)$  is exponentially  $\mu$ -stable.

ii) One could propose an alternative definition of linearly dominated systems:

A process is a linearly dominated system if one can find some time varying polynomials  $A_p(t)$ ,  $B_p(t)$ ,  $C_p(t)$  with bounded coefficients,  $C_p(t)$  exponentially  $\mu$ -stable and  $A_p(t)$ ,  $C_p(t)$  monic, such that for the measurement  $v$  given by:

$$C_p(t, q^{-1})v(t) = A_p(t, q^{-1})y(t) + B_p(t, q^{-1})u_p(t-1) \quad (23)$$

there exist a constant  $\gamma$  and a bounded sequence  $\beta$  satisfying:

$$|v(t)| \leq \gamma s_p(t) + \beta(t) \quad (24)$$

This definition is more attractive for the similarity of equation (23) and the model equation (2.1). Unfortunately it is in fact very ambiguous for the arbitrariness of the triple of polynomials  $(A_p(t), B_p(t), C_p(t))$ . Using one triple instead of another would simply change  $\beta$  and  $\gamma$ .

It is also worth noticing that though (23) and (2.1) can be similar, replacing the unpredictability property of  $v$  for the model, by inequality (24) for the process allows us to encompass much more effects. We illustrate this aspect by mean of examples.

**Example 1: bounded disturbance:** Let the process be described by:

$$y_p(t) = -ay_p(t-1) + bu_p(t-2) + n(t) \quad |(n(t))| \leq \beta \quad (25)$$

Clearly (23), (24) are satisfied by choosing:

$$A_p(q^{-1}) = 1 + aq^{-1} \quad B_p(q^{-1}) = bq^{-1} \quad C_p(q^{-1}) = 1 \quad (26)$$

$$\mu > 0 \quad \gamma = 0 \quad v(t) = n(t)$$

Also, we can check that we have a linearly dominated system. Indeed:

$$s_p(t)^2 \geq |y_p(t-1)|^2 + \mu^2 |u_p(t-2)|^2 \quad (27)$$

and (1) is satisfied since:

$$|y_p(t)|^2 \leq 3(a^2|y_p(t-1)|^2 + b^2|u_p(t-2)|^2 + |n(t)|^2) \quad (28)$$

$$|y_p(t)| \leq \sqrt{3} \operatorname{Max}\{|a|, |b|\} s_p(t) + \beta\sqrt{3} \quad (29)$$

Remark that  $\beta$  is a constant in this case.

**Example 2: infinite dimensional system:** Let the process be described by:

$$y_p(t) = -ay_p(t-1) + bu_p(t-2) + \sum_{i=3}^t (a_i y_p(t-i) + b_i u_p(t-i)) \quad (30)$$

where the infinite impulse responses  $a_i, b_i$  satisfy, for all  $i$  and with  $\lambda < 1$ :

$$|a_i \lambda^{-i}| \leq \epsilon \quad |b_i \lambda^{-i}| \leq \epsilon \quad (31)$$

Let us take:

$$A_p(q^{-1}) = 1 + aq^{-1} \quad B_p(q^{-1}) = bq^{-1} \quad C_p(q^{-1}) = 1 \quad , \quad \lambda < \mu < 1 \quad (32)$$

we get:

$$v(t) = \sum_{i=0}^t (a_i y_p(t-i) + b_i u_p(t-i)) \quad (33)$$

Hence:

$$\|v(t)\| \leq \epsilon \sum_{i=0}^t \lambda^i (|y_p(t-i)| + |u_p(t-i)|) \quad (34)$$

$$\leq \epsilon \left( \sum_{i=0}^t \frac{\lambda}{\mu} \right)^{2i} (2 \sum_{i=0}^t \mu^{2i} (|y_p(t-i)|^2 + |u_p(t-i)|^2))^{1/2} \quad (35)$$

where we have used the Cauchy-Schwarz inequality in the last step. It follows that (24) holds with:

$$\gamma = \epsilon \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - \lambda^2}} \quad \beta = 0 \quad (34)$$

**Example 3: non linearities:** Let the process be described by:

$$y_p(t) = ay_p(t-1) + \frac{bu_p(t-2)^3}{1+u_p(t-2)^2} \quad (37)$$

We notice that the nonlinear function:

$$f(u) = \frac{u^3}{1+u^2} \quad (38)$$

is linearly dominated since:

$$|f(u) - u| \leq \frac{1}{2} \quad (39)$$

This linear domination property of  $f$  implies that of the process. Taking:

$$A_p(q^{-1}) = 1 + aq^{-1} \quad B_p(q^{-1}) = bq^{-1} \quad C_p(q^{-1}) = 1 \quad (40)$$

yields:

$$v(t) = \frac{bu_p(t-2)}{1+u_p(t-2)^2} \quad (41)$$

And (24) holds with:

$$\gamma = 0 \quad \beta = \frac{|b|}{2} \quad (42)$$

Another very important property of linearly dominated systems is that, when placed in feedback with a linearly dominated controller, the signals cannot grow faster than exponentially. Namely:

**Property 4:** Let  $u_p$  be the input of a linearly dominated system with output  $y_p$  and be such that, with  $\beta_c$  a bounded sequence:

$$|u_p(t)| \leq \gamma_c (s_p(t) + |y_p(t)|) + \beta_c(t) \quad (43)$$

There exists a constant  $M$  and a bounded sequence  $\alpha$  such that:

$$s_p(t) \leq M s_p(t-1) + \alpha(t) \quad (44)$$

**Remark 3:** With arguments similar to those used in the proof of Property 3, we can see that (43) holds if the input  $u_p$  is given by:

$$R(t, q^{-1})u_p(t) = -S(t, q^{-1})y_p(t) + T(t, q^{-1})u_m(t) \quad (45)$$

where  $R(t)$ ,  $S(t)$ ,  $T(t)$  are time varying polynomials with bounded coefficients,  $R(t)$  is monic and  $u_m$  is a bounded set point sequence.

**Proof:** < With (1), (2) and (43), we get easily:

$$s_p(t)^2 \leq s_p(t-1)^2 (\mu^2 + 2\gamma_c^2(1+3\gamma_c^2) + 3\gamma_c^2) + 2\beta_c(t)^2(1+3\gamma_c^2) + 3\beta_c(t)^2 \quad (46)$$

The conclusion follows taking the square root. >

Up to now, we have established that a linearly dominated system can incorporate a wide class of phenomena and is characterized by the existence of an (available) scaling signal. Let us now study linearly dominated systems in terms of the Graph Topology, i.e. the weakest topology in which feedback exponential  $\mu$ -stability is defined on open neighborhoods of time invariant linear systems and closed loop transfer functions are continuous (see Vidyasagar [24]). Though the general scope of this report prevents us from pursuing too far this topic, this will allow us to relate the results, obtained for adaptive linear controllers, to those obtained for time invariant linear controllers.

First we notice that, may be up to a change of  $\beta$  in (24), one can add to  $v(t)$  in (23) (with  $(A_p, B_p, C_p)$  time invariant), any  $\mu$ -exponentially decaying sequence  $\delta(t)$  satisfying:

$$C_p(q^{-1})\delta(t) = 0 \quad (47)$$

This justifies to rewrite (23) in:

$$v(t) = P(q)y_p(t) - Q(q)u_p(t-1) \quad (48)$$

where  $P$ ,  $Q$  are exponentially  $\mu$ -stable proper fractions,  $P$  being monic. This type of representation in

terms of stable fractions is called the factorization approach and gives the context in which one can define the Graph Topology. For this topology, a basic neighborhood of a system represented by  $(P, Q)$  is simply defined by the set:

$$V((P, Q)), \epsilon = \left\{ (P_1, Q_1) / \sup_{|z| \geq \mu} \left\{ |P_1(z) - P(z)|^2 + \mu^{-2} |Q_1(z) - Q(z)| \right\} < \epsilon^2 \right\} \quad (49)$$

**Property 5:** Given  $\mu, \gamma$  and  $A_p, B_p, C_p$  polynomials in  $q^{-1}$ .  $A_p, C_p$  monic.  $C_p$  exponentially  $\mu$ -stable. the set of linear time invariant finite dimensional systems whose input-output signals satisfy for some  $\mu$ -exponentially decaying sequence  $\beta$ :

$$C_p(q^{-1})v(t) = A_p(q^{-1})y_p(t) - B_p(q^{-1})u_p(t-1) \quad (50)$$

$$|v(t)| < \gamma s_p(t) + \beta(t) \quad (51)$$

contains the open neighborhouod  $V(\frac{A_p}{C_p}, \frac{B_p}{C_p}, \frac{\gamma}{\mu})$  of the Graph Topology of exponential  $\mu$ -stability.

**Proof:** The main point of this proof is to notice that for any  $P$  exponentially  $\mu$ -stable proper fraction, we have, as a consequence of Plancherel Theorem (with zero initial conditions):

$$\sum_{t=0}^T \mu^{-2t} |P(z)u(t)|^2 \leq \sup_{|z| \geq \mu} \left\{ |P(z)|^2 \right\} \sum_{t=0}^T \mu^{-2t} |u(t)|^2 \quad (52)$$

Then let  $P - Q$  be defined by:

$$P(q) = \frac{A_p(q^{-1})}{C_p(q^{-1})} \quad Q(q) = \frac{B_p(q^{-1})}{C_p(q^{-1})} \quad (53)$$

and consider  $V((P, Q), \frac{\gamma}{\mu})$ . Our proof will be established if any process in this neighborhouod satisfies (50), (51). Hence let  $(P_1, Q_1)$  represent such a process i.e. its output is obtained by:

$$P_1(q)y_p(t) = Q_1(q)u_p(t-1) \quad (54)$$

With (50),  $v$  is defined by:

$$v(t) = P(q)y_p(t) - Q(q)u_p(t-1) \quad (55)$$

$$= (P(q) - P_1(q))y_p(t) - Q_1(q)u_p(t-1) \quad (56)$$

In the following, we assume zero initial conditions. As already mentionned, the only consequence of this assumption would be a modification of  $\beta$  (thanks to the exponential  $\mu$ -stability with  $\mu < 1$ ). We notice that  $P$  and  $P_1$  being monic,  $q(P - P_1)$  is proper. Then applying a 2-dimensional version of inequality (52), we get:

$$\sum_{t=0}^T \mu^{-2t} |v(t)|^2 \leq \sup_{|z| \geq \mu} \left\{ |P(z) - P_1(z)|^2 + \mu^{-2} |Q(z) - Q_1(z)|^2 \right\} \sum_{t=0}^{T-1} \mu^{-2t} (|y_p(t)|^2 + |u_p(t)|^2) \quad (57)$$

Since  $(P_1, Q_1)$  belongs to  $\mathbf{V}([P, Q], \frac{\gamma}{\mu})$ , with (49), we get:

$$\mu^{-2T} |v(T)|^2 \leq \sum_{t=0}^T \mu^{-2T} |v(t)|^2 < (\frac{\gamma}{\mu})^2 \sum_{t=0}^{T-1} \mu^{-2t} (|y_p(t)|^2 + |u_p(t)|^2) \quad (58)$$

The conclusion follows multiplying by  $\mu^{2T} >$

With this fact, we have established that if a property holds for a set of systems satifying (50), (51), it is preserved in presence of, we say is robust to, any (sufficiently small) linear time invariant perturbation for which linear feedback exponential  $\mu$ -stability is preserved and closed loop transfer function remain continuous.

It is important to notice the role of  $\mu$  in the above analysis. In property 1, we have remarked that state components in an unobservable subspace associated with an eigenvalue larger or equal in modulus to  $\mu$  may not be scaled by  $s_p$ . However as mentionned earlier unobservability does not affect input-output signals. It is not the case of unreachability. This property corresponds to the existence of common factor of  $A_p$  and  $B_p$  in (51) or of both the numerator and denominator of  $P$  and  $Q$  in (48). Since  $P - Q$  must be exponentially  $\mu$ -stable, in our framework, we cannot consider as a small perturbation the fact of introducing a nearly unreachable mode corresponding to an eigenvalue larger or equal to  $\mu$ . This point will be illustrated in the following Section.

#### 4. Misfit between Model and Process and the Measurement System.

The process is known to be a linearly dominated system as defined by (3.1). However based on some complexity consideration we fix the degrees  $n_A, n_B, n_C$  and therefore define the model family of Section 2. Is it possible to find a model of the process within this class? More precisely, is it possible to determine the coefficients of  $A, B, C$  such that the measurement  $v$ , given by:

$$C(q^{-1})v(t) = A(q^{-1})y(t) - B(q^{-1})u(t-1) \quad (1)$$

where  $u, y$  are measured input and output respectively, can be an "unpredictable" sequence in the sense of (2.3) - (2.4) for example?

For instance, let us consider the process described by:

$$(1-(\lambda + \epsilon g_1)q^{-1})(1+aq^{-1}-\epsilon a_1q^{-2})y_p(t) = (1-(\lambda + \epsilon g_2)q^{-1})(-\epsilon b_1 + bq^{-1}-\epsilon b_2q^{-2})u_p(t-1) + n(t) \quad (2)$$

where  $n(t)$  is a sequence bounded by  $\beta_1$ . If  $\epsilon$  were very small and  $|\lambda| < 1$  so that stable cancellation could occur, one would like to take a simpler model defined by:

$$A(q^{-1}) = 1 + \epsilon a q^{-1} \quad B(q^{-1}) = b q^{-1} \quad C(q^{-1}) = 1 \quad (3)$$

taking the measured input-output equal to the process input-output. In fact, in doing so, we neglect:

- the nearly unreachable mode corresponding to the nearly cancellable  $\lambda + \epsilon g_1 - \lambda + \epsilon g_2$  pole-zero pair,

the fast stable pole  $\frac{\epsilon a_1}{a}$

the fast stable zero  $\frac{\epsilon b_2}{b}$

- and we represent the fast unstable zero  $\frac{b}{\epsilon b_1}$  by a pure delay.

For this model,  $v$  is given by:

$$v(t) = (1+aq^{-1})y_p(t) - bq^{-1}u_p(t-1) \quad (4)$$

Hence with (2), we obtain:

$$\begin{aligned} (1-\lambda q^{-1})v(t) &= \epsilon[(g_1(1+aq^{-1}-\epsilon a_1q^{-2})+a_1(1-\lambda q^{-1})q^{-1})y_p(t-1) + \\ &\quad + (g_2(\epsilon b_1-bq^{-1}+\epsilon b_2q^{-2})-(b_1+b_2q^{-2})(1-\lambda q^{-1}))u_p(t-1)] + n(t) \end{aligned} \quad (5)$$

Choosing  $\mu > |\lambda|$ , we can apply Property 3.2 and obtain existence of a constant  $\gamma$  and a bounded sequence  $\beta$  such that:

$$|v(t)| \leq \gamma s_p(t) + \beta(t) \quad (6)$$

The constraint  $\mu > |\lambda|$  illustrates the last remark of the previous Section: for our analysis to apply, the neglected nearly unreachable modes must be associated with eigenvalues strictly less than  $\mu$ .

As predicted at the end of Section 2, the "unpredictability" property is not satisfied. Instead, with (6), we have a "scaling" property. However, as mentioned in the Introduction, as far as boundedness is concerned, this scaling property is sufficient provided the associated  $\gamma$  is sufficiently small. Hence the question: the model family being chosen in (3), how can we reduce  $\gamma$  (without increasing  $s_p$ )?

An answer is obtained from the general principle:

"To process data by a system with limited possibilities, they should be formatted according to these possibilities"

In our case formatting is obtained by the measurement. The main idea, we wish to develop now, is to consider the possibility of transforming the process by feedback, by-pass and filtering in order to allow a better fit between this transformed process, called the measured process, and an a priori fixed complexity model.

For specificity, in the above example, assume that  $\lambda$  is known and  $n(t)$  is constant:

$$(1-q^{-1})n(t) = 0 \quad (7)$$

We choose the following model (still two parameters):

$$A(q^{-1}) = (1+aq^{-1})(1-q^{-1}) \quad B(q^{-1}) = bq^{-1} \quad C(q^{-1}) = 1 \quad (8)$$

and the following measurements:

$$u(t) = \frac{(1-\lambda q^{-1})(1-q^{-1})}{1-\lambda} u_p(t) \quad y(t) = \frac{(1-\lambda q^{-1})}{1-\lambda} y_p(t) \quad (9)$$

Now,  $v$  is given by:

$$v(t) = (1+aq^{-1})(1-q^{-1})y(t) - bq^{-1}u(t-1) \quad (10)$$

and with (2), it satisfies:

$$\begin{aligned} v(t) = & \epsilon(1-q^{-1})[ (g_1(1+aq^{-1}-\epsilon a_1q^{-2}) + a_1(1-\lambda q^{-1})q^{-1}) y_p(t-1) \\ & + (g_2(\epsilon b_1 - bq^{-1} + \epsilon b_2q^{-2}) - (b_1 + b_2q^{-2})(1 - \lambda q^{-1})) u_p(t-1) ] \end{aligned} \quad (11)$$

Hence  $v(t)$  no more depends on  $n(t)$  or  $\left\{ u_p(r), y_p(r), n(t), r \leq t-1 \right\}$  but only on  $\left\{ y_p(t-1), \dots, y_p(t-4), u_p(t-1), \dots, u_p(t-4) \right\}$ . In particular this means that if the input-output signals were large in the past, say at time  $t-5$ , then, in the former case,  $v(t)$  is influenced by those large terms (though weighted by  $\lambda^5$ ). In the latter case, this influence is removed.

Notice that our measurement procedure is a disguised way of reintroducing complexity in the model. However the model incorporates free parameters to be adapted on line, whereas the measurement system do not.

In the general case, the measured input-output signals are:

$$\begin{pmatrix} U_y(q^{-1}) & y(t) \\ U_u(q^{-1}) & u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_y(q^{-1}) & q^{-1}W_y(q^{-1}) \\ V_u(q^{-1}) & W_u(q^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_p(t) \\ u_p(t) \end{pmatrix} \quad (12)$$

and, given  $(A, B, C)$  as an element of the model family, we obtain its associated modelling error  $v$  by:

$$C(q^{-1})v(t) = A(q^{-1})y(t) - B(q^{-1})u(t-1) \quad (13)$$

The problem of choosing this element being taken care by the adaptation law, here, we are interested in choosing the measurement system for any possible model. A first objective is clearly:

**Objective 1:**  $v$  should be made as "unpredictable" as possible. Practically, the process effects which cannot be represented or we choose not to represent by the model should be made as unobservable as possible by the measurement system. Or equivalently, the measured signals should be as insensitive as possible to the unmodelled effects.

To understand how this can be achieved, let us assume that the process is exactly a finite dimensional linear time invariant observable system, i.e.:

$$A_p(q^{-1})y_p(t) = B_p(q^{-1})u_p(t-1) \quad (14)$$

for some polynomials  $A_p, B_p$ , with  $A_p$  monic. In this case, the measured input-output signals are related by:

$$(A_p(q^{-1}) - q^{-1}B_p(q^{-1})) \begin{pmatrix} -W_u(q^{-1}) & q^{-1}W_y(q^{-1}) \\ -V_u(q^{-1}) & V_y(q^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_y(q^{-1}) & 0 \\ 0 & U_u(q^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = 0 \quad (15)$$

That is:

$$\bar{A}(q^{-1})y(t) = \bar{B}(q^{-1})u(t-1) \quad (16)$$

where:

$$\bar{A} = (-A_p W_u + q^{-1}B_p V_u)U_y \quad (17)$$

$$\bar{B} = (-A_p W_y + q^{-1}B_p V_y)U_u \quad (18)$$

Hence:

- the measurement  $y$ , obtained by bypassing the process, may be used to move and/or add zeros.
  - the measurement  $u$ , obtained by a feedback around the process, may be used to move and/or add poles.
- Clearly, reduced complexity models may be obtained by conjunction of both measurements leading to stable pole-zero cancellation. However, by the same way, this shows the drawback of this measurement system, namely, the possibility of creating an unstable pole-zero cancellation. In such (very unlikely) case, the measured process is not stabilizable even if the process is.

An other objective, assigned to the measurement system, is:

**Objective 2:** The control law will be designed for the model to impose some properties to its input-output signals i.e. to the measured signals. The measurement system should be such that these properties are transferred to the actual process input-output signals. The least requirement is: "*boundedness of  $u, y$ " implies "*boundedness of  $u_p, y_p$ "**

Let us see how these objectives can be met.

About objective 1, typically the unmodelled effects are divided into two components: unmodelled dynamics and exogenous signals.

The unmodelled dynamics prevent the restricted complexity model from fitting the process frequency response at all frequencies. On the other hand, in objective 2, we are usually interested in the properties of the input-output signals only in a restricted frequency range. Practically, we may define this frequency range as a finite set of values given by the zeros of a monic polynomial  $D$  with all its zeros on the unit circle. Then objective 2 may be:  $y(t)$  and  $y_p(t)$  should have same amplitude and phase at each frequency given by a zero of  $D$  and this whatever the corresponding amplitude and phase of  $u_p$  may be. Invoking linearity of the measurement system and Fourier decomposition, we write this objective in:

$$\forall u_p \text{ s.t. } D(q^{-1})u_p(t) = 0 \quad D(q^{-1})y(t) = D(q^{-1})y_p(t) = 0 \Rightarrow y(t) = y_p(t) \quad (19)$$

For example, if we choose:

$$D(q^{-1}) = 1 - q^{-1} \quad (20)$$

(19) implies equality of the d.c. components of  $y$  and  $y_p$

We have the following property:

**Property 1:** Let  $U_y$  and  $D$  be relatively prime then (19) is satisfied if there exist two polynomials  $\bar{V}_y$ ,  $\bar{W}_y$  such that:

$$U_y = V_y + \bar{V}_y D \quad W_y = \bar{W}_y D \quad (21)$$

**Proof:** < We have:

$$U_y(q^{-1})(y(t) - y_p(t)) = -\bar{V}_y(q^{-1})D(q^{-1})y_p(t) - q^{-1}\bar{W}_y(q^{-1})D(q^{-1})u_p(t) \quad (22)$$

Hence:

$$\begin{aligned} D(q^{-1})y(t) &= D(q^{-1})y_p(t) = D(q^{-1})u_p(t) = 0 \\ \Rightarrow U_y(q^{-1})(y(t) - y_p(t)) &= D(q^{-1})(y(t) - y_p(t)) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

But  $D$  and  $U_y$  being relatively prime there exist two polynomials  $\alpha, \beta$  such that:

$$\alpha D + \beta U_y = 1 \quad (24)$$

Applying this operator identity to  $y(t) - y_p(t)$  gives the result with (23). >

With this property, choosing  $U_y$  exponentially stable, we can rewrite the measurement  $y$  in (up to the addition of an exponentially decaying sequence):

$$y(t) = \left( 1 - \frac{\bar{V}_y(q^{-1})D(q^{-1})}{U_y(q^{-1})} \right) y_p(t) - \frac{\bar{W}_y(q^{-1})}{U_y(q^{-1})} D(q^{-1}) u_p(t-1) \quad (25)$$

This expression can be understood as follows:

Interpret  $(1 - \frac{\bar{V}_y D}{U_y})$  and  $\frac{\bar{V}_y D}{U_y}$  as pass band filters in the frequency range of interest and its complementary respectively. Then we have  $y = y_p$  in the bandwidth of  $(1 - \frac{\bar{V}_y D}{U_y})$  and  $\bar{V}_y y = -q^{-1} \bar{W}_y u_p$  in its complementary. Writing a model for  $y$ , this allows us to fit model and process in the bandwidth. But outside the fitting may also be obtained trivially by choosing  $\bar{W}_y, \bar{V}_y$  so that  $\frac{z^{-1} \bar{W}_y}{\bar{V}_y}$  is simply the model transfer function.

Let us now treat the problem of corrupting exogenous signals. Among these signals the one which will prevent  $v$  from being unpredictable are those strongly autocorrelated and in particular the sequences  $n$ , solution of (i.e. the purely deterministic component in the Wold stationnary process decomposition (Ash and Gardner [3]):

$$E(q^{-1})n(t) = 0 \quad (26)$$

where  $E$  is monic with all its zeros on the unit circle.

For specificity, let us assume that the process can be described by:

$$A_p(q^{-1})y_p(t) = B_p(q^{-1})u_p(t-1) + n(t) \quad (27)$$

with  $A_p$  monic and  $n$  satisfying (26). We wish to remove the dependance of (i.e. to decouple)  $y_p$  on  $n$

According to objective 2, this should be made at least in the frequency range of interest. But if  $y_p$  equals  $y$  in this frequency range, it is sufficient to decouple the measured signal  $y$  from  $n$

Since:

$$\begin{pmatrix} U_y(q^{-1})y(t) \\ U_n(q^{-1})n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_y(q^{-1}) & q^{-1}W_y(q^{-1}) \\ V_n(q^{-1}) & W_n(q^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_p(t) \\ u_p(t) \end{pmatrix} \quad (28)$$

Proceeding as in (15), (27) can be rewritten in:

$$\bar{A}(q^{-1})y(t) = \bar{B}(q^{-1})u(t-1) + \Delta(q^{-1})n(t) \quad (29)$$

where  $\Delta$  is the determinant:

$$\Delta = q^{-1}V_n W_y - V_y W_n \quad (30)$$

**Property 2:** Assume that (27) holds. Given  $u$ , any sequence  $y$ , solution of (29) for some  $n$  satisfying (26), is also solution for any other  $n$  satisfying (26) iff there exists a polynomial  $\bar{\Delta}$  such that

$$\Delta = \bar{\Delta}E \quad (31)$$

**Proof:** < If:

With (29) and (31), we obtain readily:

$$\bar{A}(q^{-1})y(t) = \bar{B}(q^{-1})u(t-1) + \bar{\Delta}(q^{-1})E(q^{-1})n(t) = \bar{B}(q^{-1})u(t-1) \quad (32)$$

Only if:

Let  $n_1, n_2$  be sequences satisfying (26). The same sequence  $y$  being obtained for  $n_1, n_2$ , we have:

$$\bar{A}(q^{-1})y(t) = \bar{B}(q^{-1})u(t-1) + \Delta(q^{-1})n_1(t) = \bar{B}(q^{-1})u(t-1) + \Delta(q^{-1})n_2(t) \quad (33)$$

This implies:

$$\Delta(q^{-1})(n_1(t) - n_2(t)) = 0 \quad (34)$$

In particular choosing for  $n_2$  the zero sequence, we have established:

$$\forall n_1 \text{ s.t. } E(q^{-1})n_1(t) = 0 \quad \Delta(q^{-1})n_1(t) = 0 \quad (35)$$

The conclusion follows. >

With (29) and Property 3.1, we have also established:

**Property 3:** If the process is any linear system which can be described by (27), with a corrupting exogenous signal  $n$  satisfying (26), then, choosing the measurement system so as to satisfy (31), the measured process is a linearly dominated system. More precisely, for any  $\mu, 0 < \mu < 1$ , there exist a constant  $\gamma$  and a  $\mu$ -exponentially decaying sequence  $\beta$  such that:

$$|y(t)| \leq \gamma s(t) + \beta(t) \quad (36)$$

with:

$$s(t)^2 = \sum_{i=0}^{t-1} \mu^{2(t-1-i)} (|y(i)|^2 + |u(i)|^2) \quad (37)$$

In practice  $E$  is unknown, but with objective 2, restricting our interest to the frequency range defined by  $D$ , we take:

$$E = D \quad (38)$$

With Property 1, this yields:

$$\bar{\Delta}D = \Delta = q^{-1}V_*\bar{W}_yD - U_y W_* + \bar{V}_y W_* D \quad (39)$$

Consequently  $D$  should divide  $U_y W_*$ . But, choosing  $U_y$  exponentially stable, we have to take:

$$W_* = \bar{W}_* D \quad (40)$$

In these conditions, the measurement  $u$  may be rewritten in:

$$\bar{W}_*(q^{-1})D(q^{-1})u_p(t) = U_*(q^{-1})u(t) - V_*(q^{-1})y_p(t) \quad (41)$$

This expression can be seen as an application of the Internal Model Principle:

"The polynomial acting on the process input in the control law should have in factor the annihilating polynomial of both the set point and the exogenous disturbances"

In objective 2, we have mentionned also that the measurement system should imply the process signal boundedness from the measured signal boundedness.

We know now:

$$\begin{pmatrix} \bar{\Delta}(q^{-1})y_p(t) \\ \bar{\Delta}(q^{-1})D(q^{-1})u_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{W}_*(q^{-1}) & q^{-1}\bar{W}_y(q^{-1}) \\ -V_*(q^{-1}) & U_y(q^{-1}) - \bar{V}_y(q^{-1})D(q^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_*(q^{-1})y(t) \\ U_*(q^{-1})u(t) \end{pmatrix} \quad (42)$$

Hence, if  $u, y$  are bounded, so are  $\bar{\Delta}y_p, \bar{\Delta}Du_p$ . And if  $\bar{\Delta}$  is exponentially stable,  $y_p$  and  $Du_p$  are bounded. Therefore:

**Property 4:** Assume that  $V_y, W_y, W_*$  satisfies (21),(40), if  $q^{-1}V_*\bar{W}_y - V_y\bar{W}_*$  is exponentially stable then  $y_p$  is bounded whenever  $u, y$  are bounded. Moreover  $u_p$  is bounded if  $D$  is chosen such that  $u_p$  is bounded whenever  $y_p$  and  $Du_p$  are bounded.

**Remark 1:** To understand this last assumption, notice that if the process is completely described by:

$$A_p(q^{-1})y_p(t) = B_p(q^{-1})u_p(t-1) + n(t) \quad (43)$$

with  $A_p$  monic and  $n$  bounded, then the condition holds if  $B_p$  and  $D$  are relatively prime. Indeed in this case, there exist two polynomials  $\alpha, \beta$  such that, with  $D$  monic:

$$\alpha q^{-1}B_p + \beta D = 1 \quad (44)$$

Hence:

$$u_p(t) = \alpha(q^{-1})A_p(q^{-1})y_p(t) + \beta(q^{-1})D(q^{-1})u_p(t) - \alpha(q^{-1})n(t) \quad (45)$$

from which the condition follows.

In fact, pushing a bit further we have:

**Property 5:** i) Assume that  $V_y, W_y, W_u$  satisfy (21) – (40) if  $q^{-1}V_u \bar{W}_y - V_y \bar{W}_u$  is exponentially  $\mu$ -stable then there exist a  $\mu$ -exponentially decaying sequence  $\beta_p$  (depending on the initial conditions) and a constant  $\gamma_p$  such that:

$$\left( \sum_{i=s}^{t-1} \mu^{2(t-i-s)} |y_p(i)|^2 \right)^{1/2} \leq \gamma_p s(t) + \beta_p(t) \quad (46)$$

with  $s$  defined in (37). Moreover if  $D$  is chosen such that:

$$\left( \sum_{i=s}^{t-1} \mu^{2(t-i-s)} |u_p(i)|^2 \right)^{1/2} \leq \gamma_u \left( \sum_{i=s}^{t-1} \mu^{2(t-i-s)} (|y_p(i)|^2 + |D(q^{-1})u_p(i)|^2) \right)^{1/2} + \beta_u(t) \quad (47)$$

for some positive constant  $\gamma_u$  and bounded sequence  $\beta_u$  (depending on the initial conditions), then there exist a bounded sequence  $\beta_p$  (depending on the initial conditions) and a constant  $\gamma_p$  such that:

$$s_p(t) \leq \gamma_p s(t) + \beta_p(t) \quad (48)$$

ii) If  $U_p, U_u$  are exponentially  $\mu$ -stable, there exist a bounded sequence  $\beta$  and a constant  $\gamma$  such that:

$$s(t) \leq \gamma s_p(t) + \beta(t) \quad (49)$$

**Remark 2:** i) (48) and (49) show that  $s$  and  $s_p$  can be exchanged. In particular, we can use  $s$ , computed in terms of measured signals, instead of  $s_p$  as scaling signal (see Remark 3.1).

ii) Again notice that (47) holds if (43) holds and  $B_p$  and  $D$  are relatively prime.

**Proof:** < i) From (42), we notice that we can write:

$$y_p(t) = \left( \frac{\bar{W}_u(q^{-1})U_y(q^{-1})}{\bar{\Delta}(q^{-1})} - q^{-1} \frac{\bar{W}_y(q^{-1})U_u(q^{-1})}{\bar{\Delta}(q^{-1})} \right) \begin{pmatrix} y(t) \\ u(t) \end{pmatrix} + \delta(t) \quad (50)$$

with the sequence  $\delta$  satisfying:

$$\bar{\Delta}(q^{-1})\delta(t) = 0 \quad (51)$$

From the assumption on  $\bar{\Delta}$ ,  $\delta$  is  $\lambda$ -exponentially decreasing for some  $\lambda < \mu$  and:

$$\sup_{|z| \geq \mu} \left\{ \left| \left| \frac{\bar{W}_u(z^{-1})U_y(z^{-1})}{\bar{\Delta}(z^{-1})} - z^{-1} \frac{\bar{W}_y(z^{-1})U_u(z^{-1})}{\bar{\Delta}(z^{-1})} \right| \right| \right\} \leq \infty \quad (52)$$

With (3.52), this proves the existence of a constant  $\gamma_p$ , such that:

$$\sum_{i=0}^{t-1} \mu^{-2i} |y_p(i) - \delta(i)|^2 \leq \frac{\gamma_p^2}{2} \sum_{i=0}^{t-1} \mu^{-2i} (|y(i)|^2 + |u(i)|^2) = \mu^{-2(t-1)} \frac{\gamma_p^2}{2} s(t)^2 \quad (53)$$

(46) follows readily since:

$$y_p(i)^2 \leq 2(y_p(i) - \delta(i))^2 + 2\delta(i)^2 \quad (54)$$

and:

$$\mu^{-t} \left( \sum_{i=0}^{t-1} \mu^{2(t-i-1)} |\delta(i)|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\mu} \sup_i \left\{ \frac{|\delta(i)|}{\lambda^i} \right\} \left( \sum_{i=0}^{t-1} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{2i} \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\mu \cdot \lambda} \sup_i \left\{ \frac{|\delta(i)|}{\lambda^i} \right\} \quad (55)$$

With exactly the same procedure an inequality equivalent to (46) can be obtained for  $D u_p$ , i.e.:

$$\left( \sum_{i=s}^{t-1} \mu^{-2(t-1-i)} |D(q^{-1})u_p(i)|^2 \right)^{1/2} \leq \bar{\gamma}_s s(t) + \bar{\beta}_s(t) \quad (56)$$

for some constant  $\bar{\gamma}_s$  and  $\mu$ -exponentially decaying sequence  $\bar{\beta}_s$ . Then (48) follows with (47) and the definition of  $s_p$  in (3.2).

ii) is established in the same way from (14) with  $U_p$  or  $U_s$  playing the same role as  $\bar{\Delta}$ .

Finally, let us treat the typical case where objective 2 is written as a tracking problem. Namely, we want to impose the following property to the process output:

$$y_p(t) = y_d(t) \quad (57)$$

where  $y_d$  is a desired known output sequence. Again, relaxing this objective to be met in a frequency range, we suppose:

$$D(q^{-1})y_d(t) = 0 \quad (58)$$

With in mind the idea of transforming the tracking problem into a regulation problem and applying Properties 1 to 5, we modify the measurement system into:

$$\begin{pmatrix} U_p(q^{-1})y(t) \\ U_s(q^{-1})u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_p(q^{-1}) & \bar{V}_p(q^{-1})D(q^{-1}) & q^{-1}\bar{W}_p(q^{-1})D(q^{-1}) \\ V_s(q^{-1}) & \bar{W}_s(q^{-1})D(q^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_p(t) & y_s(t) \\ u_p(t) & \end{pmatrix} \quad (59)$$

We have:

**Property 6:** i) Let us assume that the process is any linear system which can be described by (27) with  $A_p$  monic and a corrupting exogenous signal  $n$  satisfying (26). If the measurement system is given by (59) with  $y_d$  satisfying (58), then the measurement system is a linearly dominated system. More precisely, for

any  $\mu$ ,  $0 < \mu < 1$ , there exist a constant  $\gamma$  and a  $\mu$ -exponentially decaying sequence  $\beta$  such that:

$$|y(t)| \leq \gamma s(t) + \beta(t) \quad (60)$$

with  $s$  given by (37).

ii) If  $q^{-1}V_s \bar{W}_s - V_p \bar{W}_s$  is exponentially  $\mu$ -stable then there exist a  $\mu$ -exponentially decaying sequence  $\beta_p$  (depending on the initial conditions) and a constant  $\gamma_p$  such that:

$$\left( \sum_{i=0}^{t-1} \mu^{2(t-i)} |y_p(i) - y_d(i)|^2 \right)^{1/2} \leq \gamma_p s(t) + \beta_p(t) \quad (61)$$

with  $s$  defined in (37). Moreover if  $y_d$  is bounded and  $D$  is chosen such that (47) holds then there exist a bounded sequence  $\beta_p$  (depending on the initial conditions) and a constant  $\gamma_p$  such that:

$$s_p(t) \leq \gamma_p s(t) + \beta_p(t) \quad (62)$$

**Proof:** i) As for Property 3, this follows from Property 3.1 and the fact that (27), (59) imply an equation of the type:

$$\bar{A}(q^{-1})y(t) = \bar{B}(q^{-1})u(t-1) + \Delta(q^{-1})(n(t) - A_p(q^{-1})y_d(t)) \quad (63)$$

with  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  some polynomials and:

$$\Delta = \bar{\Delta}D \quad (64)$$

ii) follows exactly as in Property 5, noticing that:

$$|y_p(i)|^2 \leq 2(|y_p(i) - y_d(i)|^2 + |y_d(i)|^2) \quad > \quad (65)$$

With Properties 1 to 6, we have proposed a solution to meet objectives 1 and 2. Let us complete this introduction to the notion of measured process by the following remarks.

**Remark 3:** i) With Properties 1, 2, if  $V_s$  is zero,  $\bar{A}$ , defined in (17), can be divided by  $D$ . This leads to write the model family as the set of triple  $(AD, B, C)$  with  $D$  given by the control objective.

ii) The notion of measured input is also helpful for dealing with actuator limitations such as amplitude and/or speed constraints. For this, we introduce a distinction between (linearly) computed inputs and (factual) inputs. Precisely, let  $u_c(t)$  be the computed measured input as computed by the controller at time  $t$ , whereas  $u(t)$  is the actual measured input as sent back to the controller at time  $t$ . Similarly, let  $u_{pc}$ ,  $u_p$  be the computed and actual process input respectively. We decompose the polynomial  $W_s$  into:

$$W_s = W_{ss} - q^{-1}W_s' \quad (66)$$

where  $W_{ss}$  is monic and exponentially stable. Its zeros characterize the so called "tracking mode". We

choose to relate computed and actual inputs by:

$$W_{us}(q^{-1})u_{pc}(t) = V_u(q^{-1})y_p(t) + W_u'(q^{-1})u_p(t-1) - u_c(t) - [q(U_u(q^{-1})-1)]u(t-1) \quad (67)$$

$$u_p(t) = f(u_{pc}(t)) \quad (68)$$

$$u(t) = W_{us}(q^{-1})(u_{pc}(t) - u_p(t)) + u_c(t) \quad (69)$$

where  $f$  describes the actuator limitations. We can check that:

$$f(u_{pc}) = u_{pc} \Rightarrow u = u_c \quad u_p = u_{pc} \quad (70)$$

And on the other hand, if  $f$  is not the identity, this decomposition guarantees that  $u$ ,  $u_{pc}$  are bounded if  $u_c$ ,  $u_p$ ,  $y_p$  are bounded.

iii) More generally, the concept of the measurement  $u$  can be extended so as to allow linearization of some nonlinearities by feedback.

## 5. Almost Exact Modelling

With the previous Sections, we are now motivated for introducing the main definition of this report. Given the integers  $n_A$ ,  $n_B$ ,  $n_C$  and given a real  $\mu$ ,  $0 \leq \mu < 1$ , we define a model family as the set of triple  $(A, B, C)$  of polynomials with degree  $n_A$ ,  $n_B$ ,  $n_C$  respectively, with  $A$ ,  $C$  monic and  $C$  exponentially  $\mu$ -stable.

**Definition 1:** We say that a process can be almost exactly modelled if one can find a model within this model family such that the modelling error given by the measured signals is scaled by  $s$  obtained from these signals. Namely, there exist a positive constant  $\gamma$ , a bounded sequence  $\beta$ , depending only on the initial conditions, and  $(A, B, C)$ , an element of the model family, such that the process output  $y_p$  satisfies, for any process input  $w_p$

$$\|v(t)\| \leq \gamma s(t) + \beta(t) \quad (1)$$

where:

$$s(t)^2 = \sum_{i=0}^{t-1} \mu^{2(t-1-i)}(|u(i)|^2 + |y(i)|^2) = \mu^2 s(t-1)^2 + |u(t-1)|^2 + |y(t-1)|^2 \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} U_y(q^{-1})y(t) \\ U_u(q^{-1})u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_y(q^{-1}) & q^{-1}W_y(q^{-1}) \\ V_u(q^{-1}) & W_u(q^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_p(t) - y_d(t) \\ u_p(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$C(q^{-1})v(t) = A(q^{-1})y(t) - B(q^{-1})u(t-1) \quad (4)$$

or respectively, if Properties 4.1, 4.2 are applied with  $E=D$  and  $V_u=0$ :

$$C(q^{-1})v(t) = A(q^{-1})D(q^{-1})y(t) - B(q^{-1})u(t-1) \quad (4')$$

where  $y_d$  is a bounded sequence given by the control objective.

#### Comments:

1- Following Properties 4.1 to 4.6,  $U_u$ ,  $V_u$ ,  $W_u$  and  $U_y$ ,  $V_y$ ,  $W_y$  may be chosen as:

$$V_y = U_y - \bar{V}_y D \quad W_y = \bar{W}_y D \quad , \quad W_u = \bar{W}_u D \quad (5)$$

where, to obtain process signal boundedness from measured signal boundedness, it is sufficient to choose  $U_u$ ,  $U_y$ ,  $V_y$ ,  $\bar{W}_y$ ,  $-q^{-1}V_u$ ,  $\bar{W}_u$  exponentially  $\mu$ -stable monic polynomials and  $D$  satisfying (4.47) of Property 4.5. However, as explained in Remark 4.3, if  $V_u$  is zero, the model family should be the set of triple  $(AD, B, C)$ .

2- Using Remark 5.2 and Property 3.2, we know that inequality (1) holds for linearly dominated systems as defined in Definition 3.1 and for which Property 3.1 and Examples 3.1 to 3.3 are illustrations.

3- With Remark 3.2, we see that if a process can be almost exactly modelled, then we can use in (4) time varying polynomials  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ , with bounded coefficients and, conversely, if (4) and (1) hold for time varying polynomials, they hold for time invariant polynomials. In particular, we can always impose  $C(t)=1$ . Using one triple or another changes the constant  $\gamma$  and the sequence  $\beta$ . And this possibility of modifying  $\gamma$  is crucial for meeting assumption (A) in the Introduction. However, restrictions have to be imposed on the time variations. For example:

$$A(t, q^{-1}) = 1 - \frac{y(t)(y(t-1) + a(t)u(t-1))}{y(t-1)^2 + u(t-1)^2} q^{-1} \quad B(t, q^{-1}) = \frac{y(t)(u(t-1) - a(t)y(t-1))}{y(t-1)^2 + u(t-1)^2} \quad C(t, q^{-1}) = 1 \quad (6)$$

give a zero modelling error. But not only this model is non causal and may have unbounded coefficients, but also its time variations may be very large. Actual proofs of boundedness of all the solutions ask for constraints on these time variations.

4- With Properties 4.6.i and 3.2, we know that  $\beta$  in (1) is a  $\mu$ -exponentially decaying sequence if the measurement system (3) is chosen according to (5),  $y_d$  satisfies:

$$D(q^{-1})y_d(t) = 0 \quad (7)$$

and if the process input-output relation is given by:

$$A_p(q^{-1})y_p(t) = B_p(q^{-1})u_p(t-1) + n(t) \quad (8)$$

with  $A_p, B_p$  polynomials,  $A_p$  being monic and  $n$  a bounded sequence satisfying:

$$D(q^{-1})n(t) = 0 \quad (9)$$

5- With Property 4.6.ii, we know that  $y_p - y_d$  tends to zero if the same holds for  $s$

6- With Property 3.4, we know that if a linear time varying controller with bounded coefficients is placed in feedback with this almost exactly modelled process, then the signals cannot grow faster than exponentially.

7- With Property 3.5, we know that all the linear time invariant systems belonging to the neighborhood  $V((\frac{A}{C}, \frac{B}{C}), \frac{\gamma}{\mu})$  of the Graph Topology of exponential  $\mu$ -stability satisfy (1).

8- Since on the one hand, we expect a better fit between model and measured process (3) and on the other hand the properties of the measured signals can be transferred to the physical process signals, using Properties 4.1 to 4.6, it is sufficient to develop the theory for the measured process. However, recall that an unfortunate choice of the measurement system may render the measured process not stabilizable.

9- From the Introduction, we know adaptive controllers which, in closed loop with the measured process guarantee boundedness of all the solutions if the corresponding process is almost exactly modelled by the model family with a constant  $\gamma$  imposed by the controller. As mentioned in Section 2, this establishes that the scaling property is sufficient to replace for this boundedness problem the unpredictability property. Moreover, with Property 3.4, this also establishes that boundedness of all the solutions is a robust property with respect to the Graph Topology of exponential  $\mu$ -stability for linear systems.

## 6. Notes and References

As far as we are aware of, the first proofs of boundedness of all the solutions under assumption (A) have been given in (Praly [17]) (see also Praly [18]) and (Praly [20]) for indirect and direct schemes respectively. First extensions to time varying models can be found in (de Larminat [14]) and (Tsakalis and Ioannou [23]) for indirect schemes and direct schemes respectively.

However, though bounded, the solutions may be unstable and/or correspond to very bad performances. This has been observed by Egardt [7] and Anderson [1] for example and some elementary cases have been analyzed by Mareels and Bitmead [15] and Praly and Espana [21]. On the other hand, Goodwin and Sin [11] prove that good, if not optimal, performances are obtained for "ideal" systems, i.e. those leading to unpredictable modelling errors.

The problem of modelling from process signals only is not particular to adaptive control. It has motivated Willems [25] for defining dynamical systems as a family of time series.

We have introduced the class of systems which can be almost exactly modelled. For such systems, closed loop solution boundedness is established. We have shown that this way of representing unmodelled dynamics encompasses the more classical singular perturbations (Kokotovic et al. [13]) or norm bounded additive or multiplicative uncertainties (Vidyasagar [24]). However, for linear systems, these latter two uncertainty representations have also the advantage of allowing us the study of performances.

The measurement system introduced in this report is only a formalization and a synthesis of many fixes used in almost each implementation of adaptive and even linear controllers (see Harris and Billings [12] and Astrom and Wittenmark [4]). They have also been motivated theoretically. For example, among many others:

- Clarke and Gawthrop [6] have introduced by-pass to round the unstable zero problem (see also M'Saad et al. [16]).

Bar-Kana [5], Gawthrop [9] and Riedle and Kokotovic [22] have proposed by-pass to counteract the effects of unmodelled dynamics.

- Elliott and Goodwin [8] and Gawthrop [9] have proposed to use the internal model idea to take care of deterministic disturbances. Goodwin et al. [10] have proved that, in presence of unmodelled dynamics (but no unmodelled extraneous disturbance), this achieves asymptotic optimal performances.

Astrom and Wittenmark [4] have described how a measured input allows us to handle actuators limitations.

An important fix not represented in this measured system is the adaptation signal filtering when it is different from the control signal filtering (see Anderson et al. [2] and Egardt [7]).

The almost exact modelling assumption has been relaxed in the two following ways:

- 1- To guarantee closed loop solution boundedness, it is sufficient that, instead of (5.1), the mean value of

the scaled modelling error be smaller than  $\gamma$  when the mean is taken on a time interval on which  $s$  is always larger than  $S$  and of length larger than  $T$ . Precisely (see Praly [19]):

There exist a positive real  $S$  and an integer  $T$  such that for any  $(t, r)$  in  $I_{S,T}(s)$ , we have:

$$\sum_{i=t+1}^{t+r} \left| \frac{v(i)}{s(i)} \right| \leq \gamma r \quad (1)$$

where:

$$I_{S,T}(s) = \left\{ (t, r) \mid r \geq T \text{ and } \forall i \in [t, t+r], s(i) \geq S \right\} \quad (2)$$

2- Since (5.1) has to be satisfied by a fixed element of the model family, for all process inputs  $u_p$ , the constant  $\gamma$  needed to satisfy this global property may be very large. In fact, most of the above results would hold even if the model were allowed to depend on the process input, provided that the polynomial coefficients are bounded uniformly in this process input. Unfortunately, such an assumption is meaningless as long as the process input is not precised. On the other hand, in practice, it would be sufficient to satisfy (1) for the actual process input. The possibility of working with a model or a bound  $\gamma$  related to an input is offered when studying the system around some particular solutions. This is the objective of the "local analysis" (see Anderson et al. [2]).

- [1] Anderson B.D.O.: "Adaptive systems, lack of persistency of excitation and bursting phenomena" Automatica, Vol. 21, No. 3, 247-258, 1985.
- [2] Anderson B.D.O., Bitmead R.R., Johnson C.R., Kokotovic P.V., Kosut R.L., Mareels I.M.Y., Praly L., Riedle B.D.: "Stability of adaptive systems: passivity and averaging analysis". MIT Press. 1986.
- [3] Ash R.B., Gardner M.F.: "Topics in stochastic processes". Academic Press 1975.
- [4] Astrom K.J., Wittenmark B.: "Computer controlled systems: theory and design" Prentice Hall 1984.
- [5] Bar-Kana I.: "On parallel feedforward and simplified adaptive control" Proc. 2nd IFAC workshop on adaptive systems in control and signal processing. Lund. July 1986.
- [6] Clarke D.W., Gawthrop P.J.: "Self-tuning control". IEE Proc., 126, 633-640, 1979.
- [7] Egardt B.: "Stability of adaptive controllers" Lecture notes in control and information sciences. Springer-Verlag, 1979.

- [8] Elliott H., Goodwin G.C.: "Adaptive implementation of the internal model principle". Proc. 23rd IEEE Conference on decision and control. December 1984.
- [9] Gawthrop P.J.: "Continuous time self tuning control". Research studies press. John Wiley, 1987.
- [10] Goodwin G.C., Hill D.J., Mayne D.Q., Middleton R.H.: "Adaptive robust control: convergence, stability and performance". Proc. 25th IEEE Conference on decision and control. December 1986.
- [11] Goodwin G.C., Sin K.S.: "Adaptive filtering prediction and control" Prentice Hall, 1984.
- [12] Harris C.J., Billings S.A., Editors: "Self tuning and adaptive control: theory and applications" Peter Peregrinus, 1981.
- [13] Kokotovic P., Khalil H.K., O'Reilly J.: "Singular perturbation methods in control: analysis and design". Academic Press 1986.
- [14] de Larminat P.: "Une solution robuste au probleme de la stabilisabilite dans la commande adaptative indirecte passive" Colloque commande adaptative aspects pratiques et theoriques. Grenoble. Novembre 1984.  
see also: Landau I., Dugard L.: "Commande adaptative: aspects theoriques et pratiques" Masson, 1986.
- [15] Mareels I.Y.M., Bitmead R.R.: "Non linear dynamics in adaptive control: chaotic and periodic stabilization" Automatica, Vol. 22, No. 6, 641-655, 1986.
- [16] M'Saad M., Ortega R., Landau I.: "Adaptive controllers for discrete time systems with arbitrary zeros: an overview" Automatica, Vol. 21, No. 4, 413-423, 1985.
- [17] Praly L.: "MIMO stochastic adaptive control: stability and robustness" CAI Rep A115, March 1982.
- [18] Praly L.: "Commande adaptative indirecte multivariable: stabilité et robustesse" Colloque national du CNRS. Belle-Ile. September 1982.
- [19] Praly L.: "MIMO indirect adaptive control: stability and robustness" CAI Rep A118, December 1982.
- [20] Praly L.: "Commande adaptative par modèle de référence: stabilité et robustesse" Outils et

modèles mathématiques pour l'analyse des systèmes, l'automatique, et le traitement du signal, Vol. 3, Editions du CNRS. Paris. 1983.

[21] Praly L., Espana M.: "An example of oscillations in adaptive linear control" Proc. 5th Yale workshop on Applications of adaptive systems theory. May 1987.

[22] Riedle B.D., Kokotovic P.V.: "Stability analysis of an adaptive system with unmodelled dynamics" Int. J. Control, 1985, Vol. 41, No. 2, 389-402.

[23] Tsakalis K., Ioannou P.: "Adaptive control of linear time varying plants" Proc. 2nd IFAC workshop on adaptive systems in control and signal processing. Lund. July 1986.

[24] Vidyasagar M.: "Control system synthesis: a factorisation approach" MIT Press 1985.

[25] Willems J.C.: "From time series to linear system":

"Part I: finite dimensional linear time invariant systems". Automatica, Vol. 22, No. 5, 561-580, 1986.

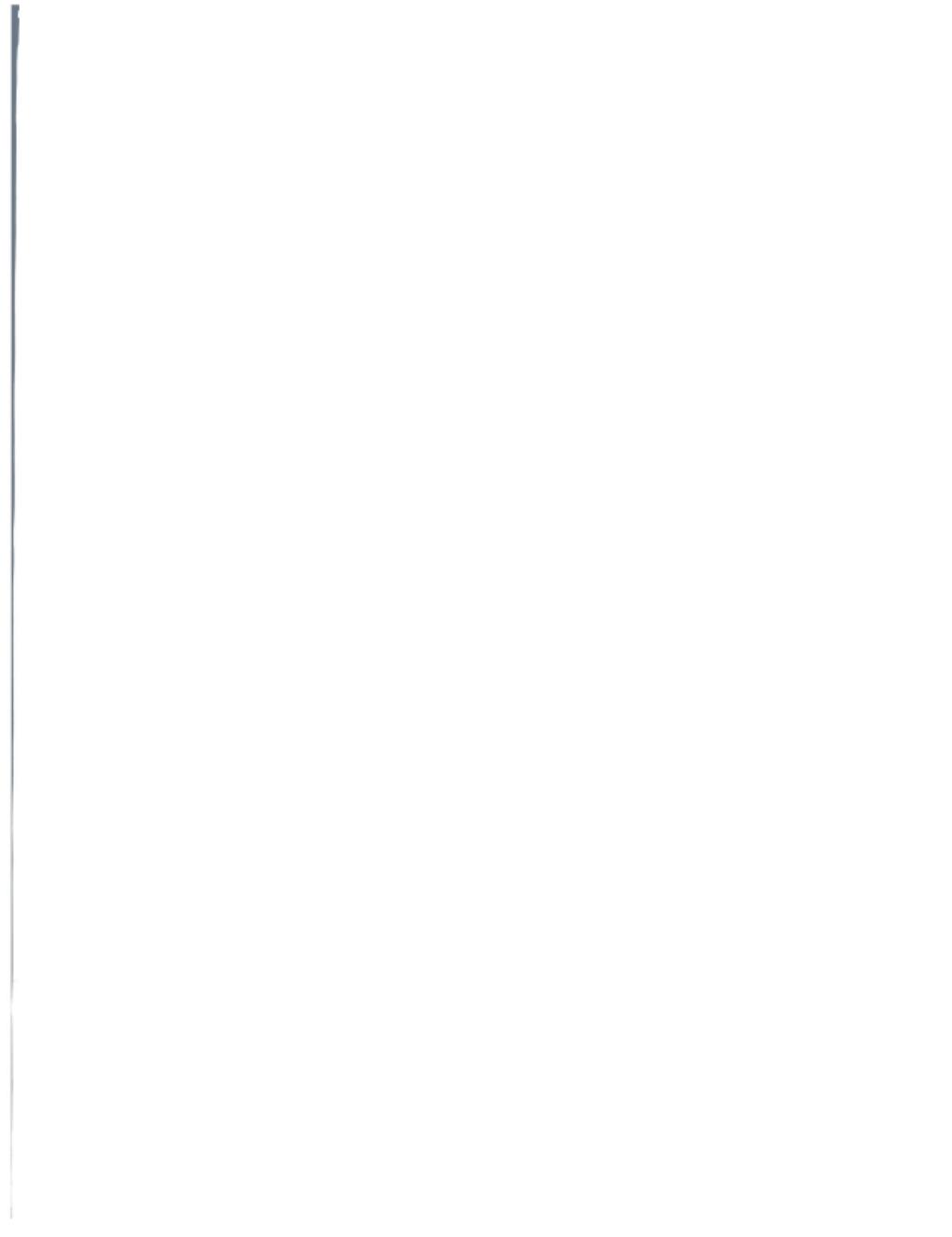
"Part II: exact modelling". Automatica, Vol. 22, No. 6, 675-694, 1986.

"Part III: Approximate modelling". Automatica, vol. 23, No. 1, 87-115, 1987.



## **Annexe D**

### **Articles relatifs au chapitre 2**



## D.1 On the global dynamics of adaptive systems: an elementary worked example

Ecrit en collaboration avec *Martin España*. Rapport CAI. Octobre 1988.



Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris  
Centre d'Automatique et Informatique  
Section Automatique

35 Rue Saint Honoré, 77305 Fontainebleau Cedex, France  
Tel: (1) 64 22 48 21 Telex: Minefon 694 736 Fax: (1) 64 22 39 03

**On the global dynamics of adaptive systems:  
an elementary worked example**

*Martin España  
Laurent Praly*



# 1 Introduction

## 1.1 Background

Boundedness of all the solutions of adaptive linear systems is now a well established property under realistic assumptions. However boundedness is not sufficient. For implementation, we need also to know the sensitivity of the solutions with respect to their initial conditions, their stability, their transient and asymptotic behavior, ... In brief, we would like to know the phase portrait of the adaptive system. This problem has received much less attention than the boundedness problem. For the time being, essentially local results have been obtained. They are approximately all contained in (Ljung, Soderstrom, 1984), (Anderson et al., 1986), (Riedle, 1986) and (Benveniste et al., 1987). Some heuristic description of the global behavior has also been given (see Egardt (1979) for example).

In this paper, we analyze the phase portrait of a simple adaptive linear discrete time system and explain some non-local behavior of the solutions. Though particular to our example, more general conclusions can be obtained since we use mathematical tools as integral sets (Praly (1985, 1986), Riedle, Kokotovic (1986)), existence of periodic solutions (Ljung (1977), Bodson et al. (1986), Praly, Pomet (1987)) which have been shown to be applicable in more general situations.

## 1.2 Problem Formulation

We consider the following plant:

$$y(t) = ay(t-1) + u(t-1) + d \quad (1)$$

with the proportional adaptive feedback law:

$$\theta(t) = \theta(t-1) + \frac{y(t-1)(y(t)-r)}{1+y^2(t-1)} \quad (2)$$

$$u(t) = -\theta(t)y(t) + r \quad (3)$$

$d$  is an unknown disturbance ;  $r$  is a reference signal. The adaptation law corresponds to the projection algorithm studied by Goodwin and Sin (1984). As shown in that reference, when  $d$  is zero but  $r$  is not zero,  $(\theta(t), y(t))$  converges globally exponentially to  $(a, r)$ .

The system (1), (2), (3) in its closed loop form is as follows (with  $\psi = \theta - a$ ):

$$\left. \begin{aligned} y(t+1) &= -\psi(t)y(t) + d + r \\ \psi(t+1) &= \psi(t) + \frac{y(t)(d - \psi(t)y(t))}{1+y^2(t)} \end{aligned} \right\} \quad (\Sigma_1)$$

It must be noted that the proportional adaptive feedback law may not be used as it is written in (2), (3). In practice, several fixes are added (dead zone or leakage (Egardt, 1979), normalization (Praly, 1983), internal model principle (Elliott, Goodwin, 1984), filtering (Anderson, et al., 1986) ...). However, if those fixes are not appropriately chosen, a qualitatively similar behavior may be observed for these more intricate cases, as for our simplified example (Praly, 1988). This motivates our interest in describing the dynamical behavior of the system  $\Sigma_1$  when  $d$  is not zero. For the sake of simplicity the external signals  $(r, d)$  are chosen constant.

A transformed version of  $\Sigma_1$  by means of the change of variables

$$x = y/d \quad ; \quad \psi = \psi \quad ; \quad \alpha = r/d \quad (4)$$

valid for  $d$  non zero, is:

$$\left. \begin{aligned} x(t+1) &= -\psi(t)x(t) + 1 + \alpha \\ \psi(t+1) &= \psi(t) + d^2 \frac{x(t)(1 - \psi(t)x(t))}{1 + d^2 x^2(t)} \end{aligned} \right\} \quad (\Sigma)$$

The transformed version  $\Sigma$  will be instrumental for our analysis of  $\Sigma_1$ . This transformation puts in relief the role played, in the qualitative behavior of the solutions, by the reference-to-disturbance energy relationship  $\alpha$ , called by Narendra and Annaswamy (1986) "persistent excitation of the reference relative to the disturbance". Notice also that  $d^2$  controls the adaptation speed of the algorithm. Moreover, for any  $\alpha$ , if  $d$  goes to zero,  $r$  and  $y$  go to zero and  $d$  close to zero in  $\Sigma$  has the same effect as  $y$  close to zero in  $\Sigma_1$ .

The objective of this paper is to explain the phase portrait of the solutions of the adaptive system  $\Sigma$ , seen as a map on the plane  $(\psi, x)$ . More precisely, we wish to understand why, as shown by simulations, for small values of  $|d|$ , the behavior of the solutions of  $\Sigma$  is characterized by the following facts:

- Exponential growth of the  $x$ -component modulus in the "instability" set:  $\{|\psi| > 1\}$ .
- Exponential decrease of the  $\psi$ -component modulus in the set:  $\{|x| \text{ large}, |\psi| > 1\}$ .
- Exponential decrease of the  $x$ -component modulus in the "stability" set:  $\{|\psi| < 1\}$ .
- Possible drift of the parameter  $\psi$  leading a solution from the "stability" set to the "instability" set.
- When d does not occur, a globally attractive equilibrium exists and coincides with the desired working conditions.

Stages a to c are very short in time. When stage d occurs, these four stages are the decomposition of an oscillatory behavior. Moreover, under some conditions, stage d may be performed very slowly. In such a case, two successive occurrences of stages a to c are separated by a very long period of time. The resulting intermittent phenomenon (Pomeau, Manville, 1980), when observed from the  $x$ -component, suggested the name "bursting" to some authors. Anderson (1985) specifically defines this notion as corresponding to reference signals not frequency rich enough as to allow accurate determination of the involved parameters. Jaïdane-Saïdane and Macchi (1988) have proposed an heuristic explanation of this behavior and attributed to it a "self-stabilizing" property implying bounded signals of closed loop adaptive linear system. The general validity of the last conclusion has, however, been

already criticized by Egardt (1979) who has established that bounded perturbations and reference signals may produce unbounded outputs unless the parameters remain bounded.

Here, we show that the "bursting" phenomenon is the projection on some components of oscillatory solutions. Also, these nonlinear oscillations may subsist and even unbounded solutions may take place if the reference, though persistently exciting, has not enough energy. A similar conclusion, concerning only the unbounded solutions, has been drawn by Narendra and Annaswamy (1986) in the continuous time domain.

We arrive to these conclusions by giving a geometrical explanation of facts a to e described above. This is done by applying the well-established technique of graph transform (Shub, 1978) and showing the existence of two graphs which are invariant by  $\Sigma$  locally on their domain of definition. The first one is repellent and allows us to explain fact a. The second one is attractive and allows us to explain facts c, d and e. Finally, fact b results from fact a, when the disturbance  $d$  becomes negligible with respect to the  $x$ -component. These locally invariant graphs are easily computed when the  $\psi$ -component remains constant ( $d = 0$ ). Indeed, in such a case, one can check that the graph  $\{(\psi, h(\psi))\}$  is invariant by  $\Sigma$  and has exactly the properties associated with stages a and c when:

$$h(\psi) = \frac{(1 + \alpha)}{1 + \psi}, \quad \forall \psi \neq -1 \quad (5)$$

This graph defines the so-called "frozen parameter invariant set". It seems reasonable to expect that, when  $|d|$  is not zero but still small, locally invariant graphs still exist and can be approximated by  $h$ . The idea of using locally invariant sets or more generally locally integral sets has been introduced by Riedle and Kokotovic (1986) and Praly (1985, 1986). However, their existence was used to explain the adaptive linear systems restricted to the "stability" set:  $\{|\psi| < 1\}$  and locally with respect to the  $x$ -components.

### 1.3 Organization of the paper

Some critical elements – fixed points and periodic solutions – of the system  $\Sigma$  are considered in Section 2. In Section 3, we establish existence and properties of locally invariant sets. Critical elements and locally invariant sets are combined in section 4 to obtain theoretical results on the system global dynamics. These results are interpreted in Section 5. Concluding remarks are given in Section 6.

## 2 Equilibrium point and period-2 solutions

One can easily verify that  $\Sigma$  has a fixed point if and only if  $\alpha$  is non zero, it is unique if and only if  $\alpha$  is not equal to  $-1$ .

$$x = \alpha = r/d \quad ; \quad \psi = \frac{1}{\alpha} = d/r. \quad (6)$$

In terms of the original system, this equilibrium corresponds to the output equal to the reference signal. The control objective is thus perfectly achieved. In order to study the local behavior of the system near its equilibrium, we consider the Jacobian matrix of  $\Sigma$  at this point:

$$J = \begin{pmatrix} -1/\alpha & -\alpha \\ -\frac{d^2}{1+d^2\alpha^2} & \frac{1}{1+d^2\alpha^2} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Denoting by  $S, P$  the sum and product respectively of the eigenvalues of  $J$ , we have:

$$P = -1/\alpha \quad ; \quad S = P + 1 - \frac{d^2}{P^2 + d^2} \quad (A) \quad (8)$$

Notice that  $P$  is (up to the sign) the disturbance-to-reference ratio. In terms of  $S, P$ , exponential stability of the equilibrium point is given by:

$$1 - S + P > 0 \quad (B) \quad ; \quad 1 + S + P > 0 \quad (C) \quad ; \quad 1 - P > 0 \quad (D) \quad (9)$$

and the eigenvalues are real if:

$$S^2 - 4P \geq 0 \quad (E) \quad (10)$$

The equilibrium point is exponentially stable if and only if the disturbance-to-reference ratio belongs to the interval  $(-1, -P_1)$ , with  $P_1$  the unique solution of:

$$2(P+1) = \frac{d^2}{P^2 + d^2} \quad (11)$$

Consequently, unless  $\frac{d}{r}$  belongs to  $(-1, -P_1)$ , the “desired working conditions” do not correspond to a stable equilibrium point. Of particular interest are the points of intersection of curves (A) and (E). They correspond to the transition from real to complex eigenvalues and vice versa. They all occur for  $\alpha$  negative and depending only on  $d$ , there may be up to six such intersections. Then, for  $\alpha$  negative, one may have a stable ( $\alpha < -1$ ) or an unstable ( $\alpha > -1$ ) equilibrium point, and a node or a focus depending on  $d^2$ . For  $P = 1$  the Hopf condition is satisfied (see (Iooss, 1979)) and, for this particular value the whole  $\psi$ -axis is a set of fixed points, implying a global bifurcation. For  $\alpha$  positive, we have either a stable node ( $1/\alpha < -P_1$ ) or a saddle ( $1/\alpha > -P_1$ ). When  $P$  crosses the value  $P_1$ , an eigenvalue passes through  $-1$  and a stable period-2 solution may bifurcate (see (Arnold (1983) and Iooss (1979)) from the stable fixed point while the latter becomes unstable. This motivates our interest in looking for period-2 solutions.

A solution  $(\psi(t), x(t))$  is periodic with period 2 if and only if  $\psi(0) = \psi(2)$ ,  $x(0) = x(2)$  or equivalently for  $d$  non zero if  $(\psi(0), x(0))$  is solution of:

$$\begin{aligned} F_\psi(x, \psi, d) &\stackrel{\text{def}}{=} -(\psi + d^2\phi)(-\psi x + 1 + \alpha) + (1 + \alpha - x) &= 0 \\ F_x(x, \psi, d) &\stackrel{\text{def}}{=} \phi + \frac{(-\psi x + 1 + \alpha)[1 - (\psi + d^2\phi)(-\psi x + 1 + \alpha)]}{1 + d^2(-\psi x + 1 + \alpha)^2} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

with:

$$\phi = \frac{x(1-\psi x)}{(1+d^2x^2)} \quad (13)$$

For  $d = 0$ , the system (12) has 3 solutions:

$$(\psi_0 = \alpha^{-1}, x_0 = \alpha) ; \quad \left( \psi_{1,2} = 1, x_{1,2} = \frac{1+\alpha \pm \sqrt{1-\alpha^2}}{2} \right) \quad (14)$$

The first one is the equilibrium point; the two others exist if and only if the disturbance-to-reference ratio  $1/\alpha$  is larger (in modulus) than 1. We remark:

**Lemma 1 (Existence of periodic solutions):**

A necessary condition for  $(\psi_{per}(t, d), x_{per}(t, d))$  to be a period-T solution of  $\Sigma$  which remains bounded as  $d$  goes to 0, is that the accumulation point of its initial condition be one of the 3 points in (14).

**Proof:** see (Praly, Pomet (1987)). □

To show that the existence of zeros for (14) is also sufficient for having period-2 solutions, we apply the Implicit Function Theorem with the fact that the following Jacobian matrix of (12) is non-singular for  $|\alpha| < 1$ :

$$\partial F(x_{1,2}; \psi_{1,2}; 0) = \begin{bmatrix} 0 & \pm\sqrt{1-\alpha^2} \\ \mp\sqrt{1-\alpha^2} & * \end{bmatrix} \quad (15)$$

where the (2,2)-term is unimportant. Compared with our discussion on the stability of the fixed point of  $\Sigma$ , we notice that, when  $|d|$  is small enough, the period-2 solutions exist not only when an eigenvalue of  $J$  in (7) passes through -1 ( $\alpha \approx -1$ ), but also when a pair of conjugate eigenvalues of  $J$  crosses the unit circle when  $\alpha = -1$ . The latter corresponds to a global bifurcation

To summarize, we have:

**Theorem 1 (Critical elements):**

- i) The system  $\Sigma$  has a unique fixed point for all  $r/d$  different from 0 or -1. It is the solution of the control objective. It is exponentially stable for  $d/r$  in  $(-1, -P_1)$  and exponentially unstable for  $d/r$  outside  $[-1, -P_1]$
- ii) For any  $\alpha = r/d$ ,  $|r/d| < 1$  one can find a strictly positive constant  $d_0$ , such that for all  $d, |d| \leq d_0$  there exist two locally unique period-2 solutions which can be approximated by:

$$\psi = 1 - \frac{\alpha d^2}{2} \frac{1 + \alpha \mp \sqrt{1 - \alpha^2}}{2} + O(d^4) ; \quad x = \frac{1 + \alpha \pm \sqrt{1 - \alpha^2}}{2} + O(d^2) \quad (16)$$

These solutions are foci, exponentially stable for  $r/d$  strictly positive, exponentially unstable for  $r/d$  strictly negative with a pseudo period:

$$T = \frac{2\pi}{d\sqrt{2(1-\alpha^2)}} + O(d^2) \quad (17)$$

**Proof:** i and existence of the period-2 solutions follow from the above discussion. (16) can be easily checked by noticing that  $\Sigma$  maps

$$\left(1 - \frac{\alpha d^2}{2} \frac{1+\alpha-\sqrt{1-\alpha^2}}{2} + O(d^4), \frac{1+\alpha+\sqrt{1-\alpha^2}}{2} + O(d^2)\right) \quad (18)$$

into

$$\left(1 - \frac{\alpha d^2}{2} \frac{1+\alpha+\sqrt{1-\alpha^2}}{2} + O(d^4), \frac{1+\alpha-\sqrt{1-\alpha^2}}{2} + O(d^2)\right) \quad (19)$$

Hence it remains to study the stability of the period-2 solutions. The result follows from looking at the Jacobian matrix of  $\Sigma^2$ . We have:

$$\partial\Sigma(\psi, x) = \begin{pmatrix} -\psi & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-2x\psi & -x^2 \end{pmatrix} + O(d^4) \quad (20)$$

Denoting  $(\psi_0, x_0), (\psi_1, x_1)$  the period-2 solution, whose approximation is given by (16), we obtain:

$$\partial\Sigma^2(\psi_0, x_0) = \partial\Sigma(\psi_1, x_1) \partial\Sigma(\psi_0, x_0) \quad (21)$$

$$= \begin{pmatrix} \psi_0 & x_0\psi_1 - x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d^2 \begin{pmatrix} -x_1(1-2x_0\psi_0) & x_1x_0^2 \\ 1-2x_0\psi_0-(1-2x_1\psi_1)\psi_0 & -x_0^2-x_0(1-2x_1\psi_1)-x_1^2 \end{pmatrix} + O(d^4)$$

It follows that the characteristic polynomial is, up to  $O(d^4)$ -terms:

$$X^2 - X \left[ 2 + d^2(1+\alpha)(\frac{3}{2}\alpha - 2) \right] + 1 - d^2 \frac{\alpha(1+\alpha)}{2} = 0 \quad (22)$$

$|\alpha|$  being smaller than 1, for  $|d| < \frac{4}{3}$ , the roots of this polynomial are complex and in the open unit disc if and only if  $\alpha$  is strictly positive. Their argument is up to a  $O(d^2)$ -term:

$$\text{Arg} = d\sqrt{2(1-\alpha^2)} \quad (23)$$

□

### 3 Locally invariant sets

In the Introduction, we have observed that for  $d = 0$ , the set:

$$S_o = \left\{ (\psi, x) \mid x = \frac{1+\alpha}{1+\psi}, \psi \neq -1 \right\} \quad (24)$$

is invariant under  $\Sigma$ . This set is a graph and we have:

$$\left( x(t+1) - \frac{1+\alpha}{1+\psi(t+1)} \right) = -\psi(t) \left( x(t) - \frac{1+\alpha}{1+\psi(t)} \right) + \frac{d^2(1+\alpha)x(t)(x(t)\psi(t)-1)}{(1+\psi(t))(1+\psi(t)+d^2x(t)(1+x(t)))}$$

when this makes sense, i.e. when  $\psi(t)$  and  $x(t)$  are such that  $1+\psi(t)$  and  $1+\psi(t)+d^2x(t)(1+x(t))$  are non-zero. The presence of  $d^2$  in the second term on the right hand side shows that  $S_o$  is close to be a locally invariant set of  $\Sigma$  with  $d$  non-zero. Finally, for  $d = 0$ , this expression proves that:

$S_o \cap \{(\psi, x) \mid |\psi| > 1\}$  is exponentially repellent.

$S_o \cap \{(\psi, x) \mid |\psi| < 1\}$  is exponentially attractive.

These remarks lead us to look for locally invariant sets which will be close to  $S_o$ , being repellent in the set  $\{|\psi| > 1\}$  and attractive in the set  $\{|\psi| < 1\}$

#### 3.1 Repellent locally invariant set

Given any non-zero  $d$ , let  $\epsilon$  be the smallest positive root of:

$$\Delta(\epsilon) = \left( \epsilon - \frac{|d|}{1+\epsilon} \right) - 2 \sqrt{\frac{|1+\alpha||d|(1+\epsilon+|d|)}{\epsilon}} \quad (25)$$

For any function  $M : \{|\psi| \geq 1+\epsilon\} \rightarrow \mathbb{R}$ , we define its image by an operator  $T$  as:

$$TM(\psi) = \frac{1+\alpha-M(\phi_M(\psi))}{\psi} \quad (26)$$

with the function  $\phi_M$  defined as follows:

$$\hat{\phi}_M(\psi) = \psi + d^2 M(\psi) \frac{(1-\psi M(\psi))}{1+d^2 M^2(\psi)} \quad (27)$$

$$\phi_M(\psi) = \begin{cases} \hat{\phi}_M(\psi) & \text{if } \psi \hat{\phi}_M(\psi) > 0 \text{ and } |\hat{\phi}_M(\psi)| \geq 1+\epsilon \\ (1+\epsilon) sgn(\psi) & \text{if } \psi \hat{\phi}_M(\psi) < 0 \text{ or } |\hat{\phi}_M(\psi)| < 1+\epsilon \end{cases} \quad (28)$$

By definition,  $\phi_M$  maps  $\{|\psi| \geq 1+\epsilon\}$  into  $\{|\psi| \geq 1+\epsilon\}$ . It is a continuous function with  $\psi \phi_M(\psi)$  positive.

We are interested in the operator  $T$  because, if it has a fixed point  $H$ , then  $H$  satisfies the local invariance property:

$$H(\hat{\phi}_H(\psi)) = 1 + \alpha - \psi H(\psi) \quad \text{if} \quad \psi \hat{\phi}_H(\psi) > 0, \quad |\psi| > 1 + \epsilon, \quad |\phi_H(\psi)| > 1 + \epsilon \quad (29)$$

The graph  $\{(\psi, H(\psi)) / |\psi| \geq 1 + \epsilon\}$  has two connected components in the plane  $(\psi, x)$ . They are such that, with its initial condition in one of these sets, any solution of  $\Sigma$  will stay in it unless its  $\psi$ -component leaves its corresponding definition interval  $\{\psi > 1 + \epsilon\}$  or  $\{\psi < -(1 + \epsilon)\}$

To exhibit the fixed point  $H$ , we consider the set:

$$\mathcal{B} = \{M \mid \partial(M, 0) \leq m_0 \text{ and } \operatorname{sgn}(\psi_1) = \operatorname{sgn}(\psi_2) \implies |M(\psi_1) - M(\psi_2)| \leq m_1|\psi_1 - \psi_2|\} \quad (30)$$

As a subset of  $C^0(\{|\psi| \geq 1 + \epsilon\}, \mathbb{R})$ , it is a complete metric space with the distance  $\partial$  defined as:

$$\partial(M_1, M_2) = \sup_{\{|\psi| \geq 1 + \epsilon\}} |M_1(\psi) - M_2(\psi)| \quad (31)$$

The constants  $m_0, m_1$  are:

$$m_0 = \frac{|1 + \alpha|}{\epsilon} \quad (32)$$

$$m_1 = \frac{2|1 + \alpha|}{\epsilon(\epsilon - \frac{|d|}{1 + \epsilon})} \quad (33)$$

The next Lemma and the Uniform Contraction Theorem (see Hale, 1980) allow us to prove that  $T$  has a fixed point in  $\mathcal{B}$ :

#### Lemma 2:

For any non zero  $d$ , let  $\epsilon$  be given by (25), then:

i)  $T$  maps  $\mathcal{B}$  into  $\mathcal{B}$

ii) For  $M_i$ ,  $i = 1, 2$ , in  $\mathcal{B}$ , we have:

$$\partial(TM_1, TM_2) \leq \tau \partial(M_1, M_2) \quad (34)$$

with:

$$\tau = \frac{1}{1 + \epsilon} + |d| m_1 \left(1 + \frac{|d|}{1 + \epsilon}\right) < 1 \quad (35)$$

**Proof:** See Appendix A □

Another important property of  $H$  can be established as follows:  
 Let  $(\psi_0, x_0)$  be a point such that  $|\psi_0| > 1 + \epsilon$ . We denote by  $(\psi_1, x_1)$  its image by  $\Sigma$ , namely:

$$\psi_1 = \psi_0 + d^2 x_0 \frac{(1 - \psi_0 x_0)}{1 + d^2 x_0^2} ; \quad x_1 = -\psi_0 x_0 + 1 + \alpha \quad (36)$$

Suppose that:

$$sgn(\psi_1) = sgn(\psi_0) \text{ and } |\psi_1| > 1 + \epsilon \quad (37)$$

With Lemma 1 and the properties of  $H$  (27)-(29), we have:

$$|x_0 - H(\psi_0)| \leq \left| \frac{H(\psi_1) - x_1}{\psi_0} \right| + \left| \frac{H(\phi_H(\psi_0)) - H(\psi_1)}{\psi_0} \right| \quad (38)$$

$$\leq \left| \frac{H(\psi_1) - x_1}{\psi_0} \right| + m_1 \left| \frac{\hat{\phi}_H(\psi_0) - \psi_1}{\psi_0} \right| \quad (39)$$

$$\leq \left| \frac{H(\psi_1) - x_1}{\psi_0} \right| + \frac{m_1 d^2}{|\psi_0|} \sup_x \left\{ \left| \frac{d}{dx} \left( \frac{x(1 - \psi_0 x)}{1 + d^2 x^2} \right) \right| \right\} |H(\psi_0) - x_0| \quad (40)$$

$$\leq \left| \frac{H(\psi_1) - x_1}{1 + \epsilon} \right| + m_1 |d| \left( 1 + \frac{|d|}{1 + \epsilon} \right) |H(\psi_0) - x_0| \quad (41)$$

$$\leq \frac{1}{1 + (1 + \epsilon)(1 - \tau)} |H(\psi_1) - x_1| \quad (42)$$

Since  $\tau$  is strictly smaller than 1, this shows that the distance from a solution to its projection, parallel to the  $x$ -axis, on the graph of  $H$ , must increase as long as its  $\psi$ -component stays in the same interval  $\{\psi > 1 + \epsilon\}$  or  $\{\psi < -(1 + \epsilon)\}$ .

Using the above derivations and the definitions (25), (33) it can be shown that:

$$|H(\phi_H(\psi_0)) - H(\psi_1)| \leq \frac{m_1 |d|(1 + |d|/(1 + \epsilon))}{1 - m_1 |d|(1 + |d|/(1 + \epsilon))} |x_1 - H(\psi_1)| \quad (43)$$

If one replaces in (43) the value of  $m_1$  given by (33) and uses again (25), one obtains:

$$0 < m_1 |d|(1 + |d|/(1 + \epsilon)) < \frac{1}{2} \quad (44)$$

which implies:

$$|H(\phi_H(\psi_0)) - H(\psi_1)| < |x_1 - H(\psi_1)| \quad (45)$$

Then computing the following product from the definition of  $\Sigma$  and the invariance property of  $H$

$$(x_o - H(\psi_o))(x_1 - H(\psi_1)) = - \frac{(H(\psi_1) - x_1)^2}{\psi_o} + \frac{(H(\phi_H(\psi_o)) - H(\psi_1))(x_1 - H(\psi_1))}{\psi_o} \quad (46)$$

we have:

$$\operatorname{sgn}[(x_o - H(\psi_o))(x_1 - H(\psi_1))] \neq \operatorname{sgn}(\psi_o) \quad (47)$$

To summarize, we have established:

**Theorem 2 (Repellent locally invariant set):**

For any non-zero  $d$ , let  $\epsilon$  be given by (25). There exists a bounded Lipschitz continuous function  $H$  defined on  $\{|\psi| \geq 1 + \epsilon\}$  such that:

i) If:

$$|\psi| \geq 1 + \epsilon, |\hat{\phi}_H(\psi)| \geq 1 + \epsilon, \operatorname{sgn}(\hat{\phi}_H(\psi)) = \operatorname{sgn}(\psi) \quad (48)$$

then

$$H(\hat{\phi}_H(\psi)) = 1 + \alpha - \psi H(\psi) \quad (49)$$

ii) There exists  $\rho$  positive such that:

$$(\psi, x) \in \{|\psi| \geq 1 + \epsilon\} \times \mathbb{R}; (\phi, y) = \Sigma(\psi, x) \in \{|\psi| \geq 1 + \epsilon\} \times \mathbb{R}; \psi \phi > 0 \quad (50)$$

implies:

$$\operatorname{sgn}((x - H(\psi))(y - H(\phi))) \neq \operatorname{sgn}(\psi) \quad (51)$$

and:

$$|y - H(\phi)| \geq (1 + \rho)|x - H(\psi)| \quad (52)$$

iii) Approximation of  $H$ :  $\sup_{\{|\psi| \geq 1 + \epsilon\}} \left\{ \frac{1}{d^2} \left| H(\psi) - \frac{1 + \alpha}{1 + \psi} \right| \right\}$  is bounded.

**Proof:** (i) and (ii) are already established (iii) is proved in Appendix B.  $\square$

Further properties of  $H$  are given in Appendix C.

**Remarks:** 1 With (i) and (ii), this theorem thus establishes the existence of an exponentially repellent locally invariant set which, following (iii), can be approximated by the "frozen parameter invariant set", for  $|d|$  sufficiently small.

2- According to the sign of its  $\psi$ -component, the  $x$ -component of a solution changes side or not with respect to the graph of  $H$  (see (51)).

3- Though  $T$  has a unique fixed point  $H$  in  $\mathcal{B}$ ,  $H$  needs not be the unique function in  $\mathcal{B}$  satisfying (49). This non-uniqueness comes from the arbitrariness of the function  $\phi_M$  which is not determined by  $\Sigma$ . However, in Appendix C (see Remark following Property A3), it is shown that, if  $1/\alpha$  is larger than  $1+\epsilon$  (resp.  $1/\alpha$  is smaller than  $-(1+\epsilon)$ ), then in the definition of  $T$ ,  $\phi_M$  can be replaced by  $\hat{\phi}_M$  in (28) for  $\{\psi > 1+\epsilon\}$  (resp.  $\{\psi < (1/\alpha)\}$  or  $\{\psi \geq 1+\epsilon\}$ ). In this case, the restriction of  $H$  to  $\{\psi > 1+\epsilon\}$  (resp.  $\{\psi < 1/\alpha\}$ ) or  $\{\psi \geq 1+\epsilon\}$  is the unique locally invariant graph of  $\Sigma$  in the corresponding set. Moreover, when  $1/\alpha$  is larger than  $1+\epsilon$ , the graph of  $H$ , restricted to  $\{\psi \geq 1+\epsilon\}$ , is the local stable manifold of the fixed point of  $\Sigma$  (see Iooss, (1979)).

### 3.2 Attractive locally invariant set

In the set  $\{|\psi| < 1\}$ , we know from Section 2 that, when  $\alpha$  is kept at a fixed negative value and  $d$  is increased, the equilibrium point becomes a focus. This means that, on the contrary of what happens in  $\{|\psi| > 1\}$ , for  $|d|$  too large, there may be no time scale separation between the dynamics of the  $x$ -component and  $\psi$ -component. Consequently, there may be no locally invariant set which is also a graph. This fact is one of the motivation for introducing the following constant to bound  $|d|$ :

$$d^{*2} = \frac{1}{2|1+\alpha|^2} \left( \sqrt{\frac{1+3|1+\alpha|}{1+2|1+\alpha|}} - 1 \right) \quad (53)$$

Taking  $|d|$  in  $(0, d^*)$ , let  $\eta$  be the smallest positive root of:

$$\Delta(\eta) = (\eta - \frac{d^2 n_0^2}{1+d^2 n_0^2}) - 2 \sqrt{\frac{(1+2n_0)n_0 d^2}{1+d^2 n_0^2}} \quad (54)$$

where  $n_0$  is defined by:

$$n_0 = \frac{|1+\alpha|}{\eta} \quad (55)$$

With our constraint on  $d$ ,  $\Delta(0)\Delta(1)$  is strictly negative. This implies that  $\eta$  is strictly smaller than 1.

For any  $d$ ,  $0 < |d| < d^*$ , we define an operator  $P$  acting on functions  $N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  by:

$$PN(\phi) = \begin{cases} 1 + \alpha - \psi_N(\phi)N(\psi_N(\phi)) & \text{if } |\phi| \leq 1 - \eta \\ PN(1-\eta) & \text{(resp. } PN(\eta-1)) \text{ if } \phi \geq 1 - \eta \text{ (resp. } \phi \leq -(1-\eta)) \end{cases} \quad (56)$$

where  $\psi_N(\phi)$  mapping  $\{|\psi| \leq 1 - \eta\}$  into  $\{|\psi| \leq 1 - \eta\}$ , is a function implicitly defined by the next two relations:

$$\phi = \frac{\hat{\psi}_N(\phi) + d^2 N(\hat{\psi}_N(\phi))}{1 + d^2 N^2(\hat{\psi}_N(\phi))} \quad (57)$$

$$\psi_N(\phi) = \begin{cases} \hat{\psi}_N(\phi) & \text{if } |\hat{\psi}_N(\phi)| \leq 1 - \eta \\ (1 - \eta) \quad (\text{resp. } -(1 - \eta)) & \text{if } \hat{\psi}_N(\phi) > 1 - \eta \quad (\text{resp. } < -(1 - \eta)) \end{cases} \quad (58)$$

We are interested in the operator  $\mathbf{P}$  because, if it has a fixed point  $G$ , then  $G$  satisfies the local invariance property:

$$G(\phi) = -\hat{\psi}_G(\phi)G(\hat{\psi}_G(\phi)) + 1 + \alpha \quad \text{if : } |\phi| \leq 1 - \eta \quad \text{and} \quad |\hat{\psi}_G(\phi)| \leq 1 - \eta \quad (59)$$

As for  $H$  in the "instability" set, the graph  $\{(\psi, G(\psi)) \mid |\psi| \leq 1 - \eta\}$  defines a set in the plane  $(\psi, x)$ . It is such that, with its initial condition in this set, any solution of  $\Sigma$  will stay in it unless its  $\psi$ -component leaves the set of "strict stability":  $\{|\psi| \leq 1 - \eta\}$ .

To exhibit the fixed point  $G$ , we consider the set:

$$\mathcal{C} = \left\{ N \left| \begin{array}{l} (1) \partial(N, 0) \leq n_o \\ (2) \forall \psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}, |N(\psi_1) - N(\psi_2)| \leq n_1 |\psi_1 - \psi_2| \\ (3) N(\psi) = \begin{cases} N(1 - \eta) & \text{if } \psi \geq 1 - \eta \\ N(-(1 - \eta)) & \text{if } \psi \leq -(1 - \eta) \end{cases} \end{array} \right. \right\} \quad (60)$$

As a subset of  $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , it is a complete metric space with the distance  $\partial$ :

$$\partial(N_1, N_2) = \sup_{\mathbb{R}} \{ |N_1(\psi) - N_2(\psi)| \} \quad (61)$$

$n_o$  is defined in (55) and

$$n_1 = \sqrt{\frac{(1 + d^2 n_o^2) n_o}{(1 + 2 n_o) d^2}} \quad (62)$$

Before studying the operator  $\mathbf{P}$  acting on  $\mathcal{C}$ , we have to be sure that  $\hat{\psi}_N(\phi)$ , implicitly defined by (57), makes sense. For this we have:

### Lemma 3:

For any  $d$ ,  $0 < |d| < d^*$  and  $\eta$  given by (54), there exists a function

$$D : \mathcal{C} \times \{|\phi| \leq 1 - \eta\} \rightarrow \mathbb{R} \quad (63)$$

satisfying for  $(N_i, \phi_i)$  in  $\mathcal{C} \times \{|\phi| \leq 1 - \eta\}$  and  $i = 1, 2$ :

$$|D(N_1, \phi_1) - D(N_2, \phi_2)| \leq b_\phi |\phi_1 - \phi_2| + b_n \partial(N_1, N_2) \quad (64)$$

$$|D(N_i, \phi_i)| \leq n_o(1 + n_o) \quad (65)$$

$$D(N, \phi) = N(\phi - d^2 D)(1 - \phi N(\phi - d^2 D)) \quad (66)$$

with:

$$b_\phi = \frac{(1+2n_o)n_1 + n_o^2}{1-d^2(1+2n_o)n_1} ; \quad b_n = \frac{1+2n_o}{1-d^2(1+2n_o)n_1} \quad (67)$$

**Proof:** See Appendix D.  $\square$

With this function  $D$ , we can rewrite (57) in:

$$\hat{\psi}_N(\phi) = \phi - d^2 D(N, \phi) \quad (68)$$

The next Lemma and the Uniform Contraction Theorem (see Hale, (1980)) allow us to prove that  $\mathbf{P}$  has a fixed point in  $\mathcal{C}$ :

**Lemma 4:**

For any  $d$ ,  $0 < |d| < d^*$  and  $\eta$  given by (54), we have:

(i)  $\mathbf{P}$  maps  $\mathcal{C}$  into  $\mathcal{C}$

(ii) For all  $N_i$ ,  $i = 1, 2$ , in  $\mathcal{C}$ , we have:

$$\partial(\mathbf{P}N_1, \mathbf{P}N_2) \leq \lambda \partial(N_1, N_2) \quad (69)$$

with:

$$0 < \lambda = \frac{1 - (1+2n_o)d^2n_1}{1+d^2n_o^2} < 1 \quad (70)$$

**Proof:** See Appendix E.  $\square$

We next establish an important feature of the graph of  $G$  with respect to the solutions of  $\Sigma$ . Let  $(\psi_o, x_o)$  be an element of  $\{|\psi| \leq (1-\eta)\} \times \{|x| \leq \xi\}$  and  $(\psi_1, x_1)$  its image by  $\Sigma$ . Whenever  $|\psi_1|$  is smaller than  $1-\eta$ , from (68), (59), (56) one has,

$$|x_1 - G(\psi_1)| = |- \psi_o x_o + \psi_G(\psi_1)G(\psi_G(\psi_1))| \quad (71)$$

$$\leq |\psi_o||G(\psi_o) - x_o| + |\psi_o||G(\psi_G(\psi_1)) - G(\psi_o)| + |G(\psi_G(\psi_1))||\psi_G(\psi_1) - \psi_o| \quad (72)$$

$$\leq |\psi_o||G(\psi_o) - x_o| + (n_o + |\psi_0||n_1|)\hat{\psi}_G(\psi_1) - \psi_o| \quad (73)$$

But using Lemma 3, we obtain:

$$|\hat{\psi}_G(\psi_1) - \psi_o| = d^2|x_o(1-x_o\psi_1) - G(\hat{\psi}_G(\psi_1))(1-\psi_1G(\hat{\psi}_G(\psi_1)))| \quad (74)$$

$$\leq d^2(1+\xi+n_o)|x_o - G(\psi_o)| + d^2(1+2n_o)n_1|\psi_o - \hat{\psi}_G(\psi_1)| \quad (75)$$

$$\leq \frac{d^2(1 + \xi + n_o)}{1 - d^2(1 + 2n_o)n_1} |x_o - G(\psi_o)| \quad (76)$$

Hence, we have established:

$$|x_1 - G(\psi_1)| \leq \sigma(\xi) |x_o - G(\psi_o)| \quad (77)$$

where, using (54) and (62):

$$\sigma(\xi) = \frac{1 - (1 + 2n_o)d^2n_1}{1 + d^2n_o^2} + \frac{d^2n_1}{1 + d^2n_o^2} (\xi - n_o) \quad (78)$$

This shows with (70), that any solution, staying in the set  $\{|\psi| \leq (1 - \eta)\} \times \{|x| \leq \xi\}$ , exponentially approaches the graph of  $G$ , if  $\sigma(\xi)$  is strictly smaller than 1, i.e. if:

$$\xi < n_o + \frac{n_o^2 + n_1(1 + 2n_o)}{n_1} \quad (79)$$

Moreover, with the above derivations, one has:

$$|\psi_G(\psi_1)G(\psi_G(\psi_1)) - \psi_oG(\psi_o)| \leq \frac{d^2(1 + \xi + n_o)n_1}{1 + d^2n_o^2} |x_o - G(\psi_o)| \quad (80)$$

But, since the invariance property of  $G$  implies:

$$\psi_o(x_1 - G(\psi_1))(x_o - G(\psi_o)) = -\psi_o^2(x_o - G(\psi_o))^2 + \psi_o(x_o - G(\psi_o))(\psi_G(\psi_1)G(\psi_G(\psi_1)) - \psi_oG(\psi_o))$$

it follows that:

$$|x_o| \leq \xi \quad \text{and} \quad \frac{d^2(1 + \xi + n_o)n_1}{1 + d^2n_o^2} \leq |\psi_o| \leq 1 - \eta \quad (81)$$

implies

$$\operatorname{sgn}((x_1 - G(\psi_1))(x_o - G(\psi_o))) \neq \operatorname{sgn}(\psi_o) \quad (82)$$

To summarize we have established:

**Theorem 3 (Attractive locally invariant set):**

For any  $d$ ,  $0 < |d| < d^*$ , let  $\eta$  be given by (54), there exists a bounded continuous Lipschitz function  $G$  such that:

(i) If:

$$|\phi| \leq 1 - \eta \quad \text{and} \quad |\hat{\psi}_G(\phi)| \leq 1 - \eta \quad (83)$$

then:

$$G(\phi) = 1 + \alpha - \psi G(\psi) \text{ and } \phi = \psi + d^2 \frac{G(\psi)(1 - \psi G(\psi))}{1 + d^2 G(\psi)^2} \quad (84)$$

(ii) Let  $\xi$  satisfy:

$$n_o < \xi < n_o + \frac{n_o^2 + n_1(1 + 2n_o)}{n_1} \quad (85)$$

there exists  $\sigma$ , depending on  $\xi$  and strictly smaller than 1 such that:

$$(\psi, x) \in \{|\psi| < 1 - \eta\} \times \{|x| \leq \xi\} \text{ and } (\phi, y) = \Sigma(\psi, x) \in \{|\phi| \leq 1 - \eta\} \times \mathbb{R} \quad (86)$$

implies:

$$|y - G(\phi)| \leq \sigma |x - G(\psi)| \quad (87)$$

and if moreover:

$$\frac{d^2(1 + \xi + n_o)n_1}{1 + d^2 n_o^2} \leq |\psi| \quad (88)$$

then:

$$\operatorname{sgn}((y - G(\phi))(x - G(\psi))) \neq \operatorname{sgn}(\psi) \quad (89)$$

(iii) Approximation of  $G$ :  $\sup_{\{|\psi| < (1-\eta)\}} \left\{ \frac{1}{d^2} |G(\psi) - \frac{1+\alpha}{1+\psi}| \right\}$  is bounded.

**Proof:** (i) is a direct consequence of Lemma 4 (ii) follows from (77). The proof of (iii) can be found in Appendix F  $\square$

**Remarks:** 1- This theorem thus establishes the existence of an exponentially attractive set of bounded solutions which can be approximated by the "frozen-parameter invariant set", for  $|d|$  sufficiently small.

2- If its  $\psi$ -component is larger than  $\frac{d^2(1 + \xi + n_o)n_1}{1 + d^2 n_o^2}$  (resp. smaller than  $-\frac{d^2(1 + \xi + n_o)n_1}{1 + d^2 n_o^2}$ ), the  $x$  component of a solution changes side with respect to (resp. remains on the same side of) the graph of  $H$

3- Eventhough  $G$  is the unique fixed point of  $P$  in  $C$ , its graph needs not be the only one satisfying (59). This comes from the arbitrariness of the definition (58) which is not determined by  $\Sigma$ .

## 4 Global behavior of the solutions: technical results

Knowing the existence of critical elements and locally invariant sets, we are now in position for studying the behavior of the solutions. We decompose the plane  $(\psi, x)$  into nine subsets:

	B		F		A = $\{(\psi, x)   \psi \leq -(1 + \epsilon)\}$ B = $\{(\psi, x)   -(1 + \epsilon) < \psi < -(1 - \eta) \text{ and } x \leq \chi\}$ C = $\{(\psi, x)   -(1 + \epsilon) < \psi < -(1 - \eta) \text{ and }  x  < \chi\}$ D = $\{(\psi, x)   -(1 + \epsilon) < \psi < -(1 - \eta) \text{ and } x \leq -\chi\}$ E = $\{(\psi, x)   -(1 - \eta) \leq \psi \leq 1 - \eta\}$ F = $\{(\psi, x)   1 - \eta < \psi < 1 + \epsilon \text{ and } x \leq \chi\}$ G = $\{(\psi, x)   1 - \eta < \psi < 1 + \epsilon \text{ and }  x  < \chi\}$ H = $\{(\psi, x)   1 - \eta < \psi < 1 + \epsilon \text{ and } x \leq -\chi\}$ I = $\{(\psi, x)   1 + \epsilon \leq \psi\}$
A	C	E	G	I	
	D		H		

with  $\epsilon$  given by (25),  $\eta$  given by (53) and:

$$\chi > \frac{1}{1 - \eta} \quad (90)$$

The global behavior of the solutions can be understood by looking at their evolution in each of these sets.

**Theorem 4 (Solutions in the repellent locally invariant set, sets: A , I):**

For any non zero  $d$  and with  $\epsilon$  given by (25):

(i) The fixed point of  $\Sigma$ , belongs to the repellent locally invariant set if and only if  $|1/\alpha| \leq 1 + \epsilon$

(ii) Let  $(\psi(t), x(t))$  be a solution such that:

$$|\psi(0)| \geq 1 + \epsilon, \quad x(0) = H(\psi(0)) \quad (91)$$

and let  $T$  be the largest integer such that:

$$sgn(\psi(t)) = sgn(\psi_0) \text{ and } |\psi(t)| \geq 1 + \epsilon, \quad \forall 0 \leq t < T \quad (92)$$

Case  $\alpha < -1$ : For all  $t$  in  $(0, T)$ ,  $(\psi(t) - \psi(t-1))\psi(t-1)$  is negative. With (i), this implies that  $|\psi(t)|$  goes monotonically to and crosses  $1 + \epsilon$ . Consequently  $T$  is finite.

Case  $\alpha = -1$ :  $H(\psi) \equiv 0$  and any point in the repellent locally invariant set is a fixed point of  $\Sigma$ .

Case  $-1 < \alpha \leq 0$ : If  $\psi(0)$  is positive,  $\psi(t)$  is strictly increasing and therefore converges to  $+\infty$  while  $x(t)$  goes to zero. Consequently,  $T$  is infinite.

If  $\psi(0) < \min\{1/\alpha, -(1 + \epsilon)\}$ ,  $\psi(t)$  is strictly decreasing to  $-\infty$  while  $x(t)$  goes to zero.

Consequently,  $T$  is infinite.

If  $1/\alpha < \psi(0) < -(1 + \epsilon)$ ,  $\psi(t)$  is strictly increasing and crosses  $-(1 + \epsilon)$ . Consequently,  $T$  is finite.

Case  $0 < \alpha$ :  $\psi(t)$  is monotonically going toward  $1/\alpha$ . Consequently,  $T$  is finite if and only if  $\psi(0)$  is negative and/or  $1/\alpha < 1 + \epsilon$ .

**Proof:** (i) holds since any solution, not belonging to the locally invariant set, must diverge from it. (ii) is direct consequence of the Properties A1, A2 and A3 of Appendix C  $\square$

**Comment:** For  $\alpha$  in  $(-1, 0]$ ,  $\Sigma$  has unbounded solutions lying on the repellent locally invariant set. Hence, even though the reference is sufficiently "exciting" to estimate a single parameter, if its level does not exceed the disturbance, unbounded solutions are possible. This has also been noticed for a continuous time example by Narendra and Annaswamy (1986).

**Theorem 5 (Solutions in the "strict instability" set outside the repellent locally invariant set, sets: A , I ):**

For any  $d \neq 0$  and with  $\epsilon$  given by (25):

(i) If for some time  $t_0$ , a solution satisfies:

$$|\psi(t_0)| \geq 1 + \epsilon, \quad x(t_0) \neq H(\psi(t_0)) \quad (93)$$

then there exists a (finite) time  $t_1$  such that:

$$|\psi(t_1)| < 1 + \epsilon \quad (94)$$

Hence, there is no solution satisfying for ever  $x \neq H(\psi)$  and  $|\psi| \geq 1 + \epsilon$

(ii) Moreover, while the solution remains in  $\{\psi \geq 1 + \epsilon\}$  (resp.  $\{\psi \leq -(1 + \epsilon)\}$ ), it exponentially diverges from the graph  $\{(\psi, H(\psi))\}$  and crosses the repellent locally invariant set at each time  $t$  (resp. it remains on the same side).

**Proof:** (ii) is a direct consequence of (51)-(52). For (i), we have:

$$d^2 \frac{x(1 - \psi x)}{1 + d^2 x^2} = - \left(1 - \frac{1}{\psi x}\right) d^2 \frac{x^2}{1 + d^2 x^2} \psi \quad (95)$$

and whenever  $(|x| \geq 1, |\psi| \geq 1 + \epsilon)$  we can obtain:

$$1 - \frac{1}{\psi x} \geq \frac{\epsilon}{1 + \epsilon}, \quad \frac{d^2 x^2}{1 + d^2 x^2} \geq \frac{d^2}{1 + d^2} \quad (96)$$

Hence by Theorem 2, if for all  $s$  in  $[t_0, t]$ , we have:

$$\psi(s) \geq 1 + \epsilon \quad (\text{resp. } \leq -(1 + \epsilon)) \quad (97)$$

then:

$$|x(t) - H(\psi(t))| \geq (1 + \rho)^{t-t_0} |x(t_0) - H(\psi(t_0))| \quad (98)$$

Now since  $H(\psi)$  is bounded for  $|\psi|$  larger than  $1 + \epsilon$ , there exists a first time  $t_1$  (depending on  $x(t_0)$ ,  $\psi(t_0)$ ) such that either  $|\psi(t_1)| \leq 1 + \epsilon$  or  $|x(t_1)| \geq 1$ . In the latter case, from (95), (96) and the equations of  $\Sigma$ , we have:

$$|\psi(t)| \leq \left[ 1 - \frac{\epsilon d^2}{(1 + \epsilon)(1 + d^2)} \right] |\psi(t-1)| \quad \forall t > t_1 \quad (99)$$

which means that there exists  $t_2 > t_1$  such that  $|\psi(t_2)| < 1 + \epsilon$ .  $\square$

#### Theorem 6 (Solutions in the attractive locally invariant set, set: E):

For any  $d$ ,  $0 < |d| < d^*$ , and with  $\eta$ ,  $d^*$  given by (54), (58):

(i) The unique equilibrium point of  $\Sigma$  is in the locally invariant set if and only if  $|\alpha|$  is strictly larger than  $1/(1-\eta)$ . And any solution starting on it, monotonically approaches the equilibrium point.

(ii) if  $|\alpha|$  is strictly smaller than 1, all the solutions in the locally invariant set have their  $\psi$ -component strictly increasing while it remains in  $\{|\psi| \leq 1 - \eta\}$ . Consequently, with (i), the solutions in the attractive locally invariant set leave the "strict stability" set in finite time, through the boundary  $\psi = 1 - \eta$ .

**Proof:** (i) Property (87) implies that the unique equilibrium of  $\Sigma$ ,  $(1/\alpha, \alpha)$ , must be in the graph  $\{(\psi, G(\psi))\}$ . The rest of the proof needs similar developments as the ones used in the proofs of Properties A1, A2, A3 in Appendix C and it is omitted.

(ii) Let us first establish the following two properties of  $G$ :

$\psi G(\psi)$  is strictly smaller than 1:

With (84), we obtain:

$$\psi G(\psi) = 1 \implies \phi = \psi \implies G(\psi) = \frac{1 + \alpha}{1 + \psi} \implies \psi = \frac{1}{\alpha} \quad (100)$$

But since the assumption on  $\alpha$  implies that  $|1/\alpha| > 1 - \eta$ , there is no  $\psi$  such that  $\psi G(\psi)$  is equal to 1. On the other hand, for  $\psi = 0$ ,  $\psi G(\psi) = 0$ , hence,  $G$  being continuous, we have:

$$|\alpha| < 1 \implies \psi G(\psi) < 1, \quad \forall |\psi| < 1 - \eta \quad (101)$$

$G(\psi)$  is strictly positive:

Let us first show by contradiction that  $G$  cannot change sign. If, by continuity, there would be  $|\psi_1|$  strictly smaller than  $1 - \eta$  for which  $G(\psi_1)$  would be zero, we would have:

$$\phi_1 = \psi_1 + d^2 \frac{G(\psi_1)(1 - \psi_1 G(\psi_1))}{1 + d^2 G(\psi_1)^2} = \psi_1 = \hat{\psi}_G(\phi_1) \implies G(\phi_1) = G(\psi_1) = G(\hat{\psi}_G(\phi_1)) \quad (102)$$

and therefore:

$$G(\phi_1) = 1 + \alpha = G(\psi_1) \quad (103)$$

But  $1 + \alpha$  being strictly positive since  $|\alpha|$  is strictly smaller than 1, this proves that  $G(\psi_1)$  cannot be zero.

Now take any  $\psi$  strictly positive and smaller than  $1 - \eta$ . With:

$$\phi = \psi + d^2 \frac{G(\psi)(1 - \psi G(\psi))}{1 + d^2 G(\psi)^2} \quad (104)$$

and (84), we have:

$$G(\psi) < 0 \implies G(\phi) = 1 + \alpha + \psi(-G(\psi)) > 0 \quad (105)$$

Since  $G$  has a constant sign, this is impossible. We have proved:

$$|\alpha| < 1 \implies G(\psi) > 0, \quad \forall |\psi| < 1 - \eta \quad (106)$$

Now,  $G$  being continuous on the compact set  $\{|\psi| \leq 1 - \eta\}$ , there exists  $\eta_1$ , strictly positive, such that:

$$G(\psi) > \eta_1 \quad \text{and} \quad 1 - \psi G(\psi) > \eta_1 \quad (107)$$

This implies:

$$\phi = \psi + d^2 \frac{G(\psi)(1 - \psi G(\psi))}{1 + d^2 G(\psi)^2} > \psi + d^2 \frac{\eta_1^2}{1 + d^2 n_o^2} \quad (108)$$

Therefore, in the graph of  $G$ ,  $\psi(t)$  increases with increments bounded away from zero. This proves (ii).  $\square$

**Theorem 7 (Solutions in the "strict stability" set outside the attractive locally invariant set, set: E):**

For any  $d$ ,  $0 < |d| \leq d^*$ , with  $\eta$ ,  $d^*$  given by (54), (59):

(i) Any solution in  $\{|\psi| \leq 1 - \eta\} \times \mathbb{R}$  exponentially approaches the graph  $\{(\psi, G(\psi))\}$ . Moreover a solution starting in  $\{|\psi| \leq 1 - \eta\} \times \mathbb{R}$  remains in this set as long as it remains in the set  $\{|x| \geq \frac{1}{1-\eta}\}$ .

(ii) if  $|\alpha| < 1$  and for some time  $t_0$ , a solution satisfies:

$$|\psi(t_0)| \leq 1 - \eta \quad (109)$$

then there exists a (finite) time  $t_1$  such that:

$$|\psi(t_1)| > 1 - \eta \quad (110)$$

Hence, for  $|\alpha| < 1$ , there is no solution satisfying for ever  $|\psi| \leq 1 - \eta$ .

(iii) Moreover, while a solution remains in the set  $\{\frac{d^2(1+\xi+n_o)n_o}{1+d^2n_o^2} \leq \psi \leq 1 - \eta\} \times \{|x| \leq \xi\}$  (resp. in the set  $\{-(1-\eta) \leq \psi \leq -\frac{d^2(1+\xi+n_o)n_o}{1+d^2n_o^2}\} \times \{|x| \leq \xi\}$ ), it crosses the attractive locally invariant set at each time  $t$  (resp. it remains on the same side).

**Proof:** (i) Since:

$$|\psi| \leq 1 - \eta \quad \text{and} \quad |x| \geq \frac{1}{1 - \eta} \quad (111)$$

implies:

$$\left| \frac{\psi + d^2x}{1 + d^2x^2} \right| \leq 1 - \eta \quad (112)$$

a solution starting in  $\{|\psi| \leq 1 - \eta\} \times \mathbb{R}$  remains in this set at least while it remains in the set  $\{|x| \geq \frac{1}{1-\eta}\}$ . To complete the proof of (i), with property (87), we only need to show that any solution remaining in  $\{|\psi| \leq 1 - \eta\} \times \mathbb{R}$  enters the set  $\{|x| < \xi\}$  in a finite number of steps. Let the constant  $\xi'$  be:

$$n_o < \xi' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n_o + \xi}{2} < \xi \quad (113)$$

and  $|x(t)| \geq \xi'$  then, from the equations of  $\Sigma$ , and (55), one has:

$$\left| \frac{x(t+1)}{x(t)} \right| \leq \frac{|1 + \alpha|}{|x(t)|} + (1 - \eta) < 1 - \eta + \frac{2n_o}{\xi + n_o} \eta < 1 \quad (114)$$

i.e. the absolute value of the  $x$ -component decreases exponentially as long as  $|x| \geq \xi'$

(ii) We have:

$$\psi(t+1) = \psi(t) + \frac{d^2G(\psi(t))(1 - \psi(t)G(\psi(t)))}{1 + d^2G(\psi(t))^2} + d^2[x(t) - G(\psi(t))] \frac{1 + \psi(t)(x(t) + G(\psi(t)))}{(1 + d^2G(\psi(t))^2)(1 + d^2x(t)^2)}$$

From (i), either the  $\psi$ -component of the solution leaves the interval  $[-(1 - \eta), 1 - \eta]$  or, after a finite time,  $x(t) - G(\psi(t))$  will be as small as we want. The result follows from the proof of Theorem 6 (ii).

(iii) is a direct consequence of (ii) of Theorem 3.  $\square$

**Theorem 8 (Solution in the "critical stability" set, sets: B, D, F, H):**  
As long as a solution remains in the set

$$\{(\psi, x) \mid 1 - \eta < |\psi| < 1 + \epsilon \text{ and } |x| \geq \chi\},$$

its  $\psi$ -component is exponentially decaying. Hence there is no solution satisfying for ever  $1 - \eta < |\psi| < 1 + \epsilon$  and  $|x| \geq \chi$

**Proof:** It follows exactly the same lines as in (95), (96) and (99).  $\square$

**Theorem 9 (Solution in the "critical stability" set, set: G):**

If  $|1/\alpha|$  is larger than  $1 + \epsilon$  and, for  $|d|$  small enough, the period-2 solutions exist and are in the set:

$$G = \{(\psi, x) \mid 1 - \eta < \psi < 1 + \epsilon \text{ and } |x| < \chi\} \quad (115)$$

**Proof:** This is a direct consequence of the following facts:

- According to Theorem 1, for  $|d|$  small enough, period-2 solutions exist and their  $\psi$  component is close to 1.
- From Theorems 4 to 8, there is no solution remaining for ever in the sets A, B, D, E, F, H, I, except may be those converging to the fixed point.  $\square$

**Theorem 10 (Solution boundedness, sets : A to I):**

(i) If  $\alpha$  lies in  $(-1, 0]$ ,  $\Sigma$  has unbounded solutions.

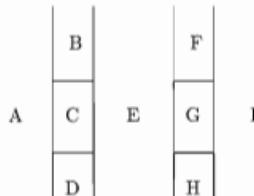
(ii) If  $\alpha$  is not in  $[-1, 0]$ , all the solutions of  $\Sigma$  are bounded.

**Proof:** (i) is immediate from Theorem 4 (i) and related comments. (ii) is proved in Appendix G.  $\square$

Notice that from (ii) and Theorem 4 all the solutions are bounded if the ones on the repellent locally invariant set are also bounded.

## 5 Global behavior of the solutions: interpretation

With the technical results of the previous sections, we are now in position to explain the five stages observed in the solution's behavior and mentioned in the Introduction. For this explanation, let us reproduce the decomposition of the plane  $(\psi, x)$ :



- According to Theorem 5, a solution in the set A or I, but not in the repellent locally invariant set, diverges exponentially from a set which is the graph of a uniformly

bounded function of  $\psi$ . This explains an exponential growth of the  $x$ -component which becomes and remains large. Moreover, for a solution in the set I , at each time  $t$ , the  $x$ -component changes side with respect to this graph. This explains a burst with a very high frequency content of this component. Conversely, for a solution in the set A , the  $x$ -component remains on the same side of the graph. It correspond a burst without oscillations. We conclude that the observed stage a takes place in the sets A and I for any value of the disturbance and the reference.

- Looking at the proof of Theorem 5 and according to Theorem 8, a solution in the set A or I with a large  $x$ -component or in the set B , D , F or H has its  $\psi$ -component exponentially decaying. This corresponds to the observed stage b which exists for any value of the disturbance and the reference.
- According to Theorem 7, as soon as a solution enters the set E , it is exponentially attracted towards a set which is once again the graph of a uniformly bounded function of  $\psi$  at least for a sufficiently small disturbance. This explains the exponential decrease of the  $x$ -component and the fast decay of its high frequency content if it were present. Consequently the observed stage c takes place in the set E . It happens for any value of the reference and at least for small values of the disturbance (see (53)).
- While a solution, in the set E , goes to the attractive locally invariant set, its evolution is more and more similar to these of the solutions in this set. According to Theorems 3 and 5, this explains a “speed” of the  $\psi$ -component of the order of  $d^2$ . Moreover, according to Theorems 1 and 6, if the reference to disturbance ratio  $|\alpha|$  is strictly larger than 1, the solutions converge to the fixed point which corresponds to the “desired working conditions”. But if this ratio is strictly smaller than 1, according to Theorems 6 and 7, the solutions leave the set E and, very likely, enter the set G . This explains the observed stage d and the conditions for its existence among which are smallness of the disturbance.
- After entering the set G , a solution may either leave it, going to the set I , F or H and restarts a stage a, or remains in G . According to Theorems 1 and 9, for a reference to disturbance ratio strictly smaller than 1 and for a disturbance sufficiently small, there exist two period-2 solutions in G . They are attractive if reference and disturbance have same signs and repellent in the opposite case. The former case explains why the solutions may remain in the set G and why we can expect the “bursting” phenomenon to disappear asymptotically. Moreover, also from Theorem 1, as the reference to disturbance ratio is closer and closer to (though smaller than) 1, the rotation of the solutions around these period-2 solutions is slower and slower and, therefore, the “bursts” are less and less frequent.
- From simulations, it seems that the attractive locally invariant set and the repellent locally invariant set are smoothly connected through the set G . From a theoretical point of view, we know that if the fixed point lies in the set I , the repellent locally invariant set is the stable manifold of this critical element. Its intersection with the boundary  $\psi = 1 + \epsilon$  being transverse, we expect that it extends in the set E , giving a candidate for an attractive locally invariant set. Using this conjecture as a working

hypothesis, the more a solution approaches the invariant set while it is in the set E, the more its evolution will be similar to the solutions in this invariant set even in the set I. But, according to Theorem 4, for a reference to disturbance ratio strictly smaller than 1 in absolute value and negative (resp. positive), the solutions in the set I and in the repellent locally invariant set are unbounded (resp. bounded). On the other hand, the bigger its  $\psi$ -component is, the more the  $x$ -component of a solution in the set I but not in the repellent locally invariant set, is "pushed-away" (exponentially) from this invariant set. This reasoning also explains the possibility of a very high sensitivity to initial conditions of solutions starting in the set E, close to the attractive locally invariant set or to remain simple and according to Theorem 3, close to the graph of the function:

$$x = \frac{1+\alpha}{1+\psi}. \quad (116)$$

Moreover, according to Theorem 10, this also explains the possibility of having unbounded solutions when the reference to disturbance ratio is strictly between -1 and 0 and this for any disturbance.

- According to Theorem 1, a reference to disturbance ratio strictly larger than 1 corresponds to a exponentially stable fixed point. According to Theorem 10 each solution remains in a compact set. According to Lemma 1 and for a sufficiently small disturbance, there is no periodic solution other than the fixed point. This suggests that the fixed point is a global attractor. In this case, the bursting phenomenum should not take place. Qualitatively speaking, this case most resembles to the ideal case.

Summarizing, according to the value of  $\alpha$ , the reference to disturbance ratio, three essentially different behaviors of the solutions of  $\Sigma$  can be predicted:

- $|\alpha| \gg 1$  (high level excitation): bounded solutions, no bursting, no periodic solution, a global attractive fixed point is conjectured, behavior similar to the ideal case.
- $0 < \alpha \ll 1$  (low level excitation): bounded solutions, periodic solutions exist and are conjectured to be global attractors, the fixed point is a saddle, bursting is present but is conjectured to disappear asymptotically.
- $-1 \ll \alpha \leq 0$  (low level excitation): unbounded solutions exist, periodic solutions exist, bursting is present, the fixed point is an unstable node.

Since  $\alpha$  is a relative quantity, drastic qualitative changes of the systems behavior may be expected when both  $r$  and  $d$  are close to 0 which is the natural working condition for an adaptive linear controller.

## 6 References

- Anderson B.D.O., (1985): *Adaptive systems, lack of persistency of excitation and bursting phenomena*. Automatica 21 3.
- Anderson B.D.O., Bitmead R.R., Johnson C.R., Kokotovic P.V., Kosut R.L., Mareels I.M.Y., Praly L., Riedle B.D., (1986): *Stability of Adaptive Systems: Passivity and Averaging Analysis*. MIT Press.
- Arnold V.I., (1983): *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer Verlag.
- Benveniste A., Metivier M., Priouret P. (1987): *Algorithmes adaptatifs et approximations stochastiques: théorie et applications*. Masson.
- Bodson M., Sastry S., Anderson B.D.O., Mareels I.M.Y., Bitmead R.R. (1986): *Nonlinear averaging theorems, and the determination of parameter convergence rates in adaptive control*. Systems and Control Letters. 7, pp. 145-157
- Egardt B., (1979): *Stability of Adaptive Controllers*. Springer Verlag.
- Elliott H., Goodwin G.C., (1984): *Adaptive implementation of the internal model principle*. Proceedings of the 23rd IEEE Conference on Decision and Control.
- Goodwin G.C., Sin K.S., (1984): *Adaptive Filtering, Prediction and Control*. Prentice-Hall.
- Hale J.K., (1980): *Ordinary Differential Equations*. Krieger Publishing Company.
- Iooss G., (1979): *Bifurcation of Maps and Applications*. North Holland Publishing Co., Amsterdam.
- Jaidane-Saidane M., Macchi O., (1988): *Quasi-periodic self-stabilization of adaptive ARMA predictors*. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. March.
- Ljung L. (1977): *Analysis of recursive stochastic algorithms*. IEEE Transactions on Automatic Control, August.
- Ljung L., Söderström T. (1984): *Theory and practice of recursive identification*. MIT Press.
- Mareels I.M.Y., Bitmead R., (1987): *Nonlinear dynamics in adaptive control: chaotic and periodic stabilization*. Automatica 22 641-655
- Narendra K.S., Annaswamy A., (1986): *Robust adaptive control in the presence of bounded disturbances*. IEEE Transactions on Automatic Control. April.
- Pomeau Y., Manville P. (1980): *Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems*. Comm. Math. Phys., Vol.74, 189-197
- Praly L., (1983): *Robustness of indirect adaptive control based on pole placement design*. 1st IFAC Workshop on Adaptive Systems in Control and Signal Processing. San Francisco, USA.
- Praly L., (1985): *A geometric approach for the local analysis of a one-step-ahead adaptive controller*. Proc. of the 4th Yale Workshop on Applications of Adaptive Systems Theory.

June.

Praly L., (1986): *Reduction principle for a two time scales discrete time system*. CAI Rep. To appear.

Praly L., (1988): *Oscillatory behavior and fixes in adaptive linear control: a worked example*. Proceed. of the 1988 IFAC Workshop on Robust Adaptive Control.

Praly L., Pomet J.-B., (1987): *Periodic solutions in adaptive systems: the regular case*. Xth IFAC World Congress. July.

Riedle B., (1986): *Integral manifolds of slow adaptation*. Ph. D; Dissertation., Electrical Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, USA.

Riedle B.D., Kokotovic P.V., (1986): *Integral manifold of slow adaptation*. I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, April.

Shub M. (1978): *Stabilité Globale des Systèmes Dynamiques*. Astérisque 56. Société Mathématique de France.

## A Proof of Lemma 2

(i), (ii) are satisfied if:

$$\partial(TM, 0) \leq m_0 \quad \forall M \in \mathcal{B} \quad (117)$$

and , with  $\operatorname{sgn}(\psi_1) = \operatorname{sgn}(\psi_2)$  and  $M_1$  and  $M_2$  in  $\mathcal{B}$ , we have:

$$|TM_1(\psi_1) - TM_2(\psi_2)| \leq m_1 |\psi_1 - \psi_2| + \tau \partial(M_1, M_2) \quad (118)$$

where  $\tau$  is smaller than 1. (117) is clearly satisfied from (26) and the definition (32) of  $m_0$ . For (118) we have:

$$|TM_1(\psi_1) - TM_2(\psi_2)| \leq \frac{m_0}{1 + \epsilon} |\psi_2 - \psi_1| + \frac{\partial(M_1, M_2)}{1 + \epsilon} + m_1 \left| \frac{\hat{\phi}_{M_2}(\psi_2) - \hat{\phi}_{M_1}(\psi_1)}{\psi_2} \right| \quad (119)$$

Where, thanks to definition (28) we used:

$$|\hat{\phi}_M(\psi_1) - \hat{\phi}_M(\psi_2)| \geq |\phi_M(\psi_1) - \phi_M(\psi_2)| \quad (120)$$

Now defining the function  $\delta : \{|M| \leq m_0\} \times \{|\psi| \geq 1 + \epsilon\} \rightarrow \mathbb{R}$  by:

$$\delta(M, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{d^2 M(1 - \psi M)}{\psi(1 + d^2 M^2)} \quad (121)$$

We have:

$$\left| \frac{\hat{\phi}_{M_2}(\psi_2) - \hat{\phi}_{M_1}(\psi_1)}{\psi_2} \right| \leq \begin{cases} (\sup_{|M| \leq m_0, |\psi| \geq 1 + \epsilon} \left| \frac{\partial \delta}{\partial \psi} (M, \psi) \right| + m_1 \sup_{|M| \leq m_0} \left| \frac{\partial \delta}{\partial M} \right|) |\psi_2 - \psi_1| \\ + \sup_{|M| \leq m_0} \left| \frac{\partial \delta}{\partial M} \right| \partial(M_1, M_2) \\ + \sup_{|M| \leq m_0} |\delta| \left| \frac{\psi_1 - \psi_2}{\psi_2} \right| \end{cases} \quad (122)$$

Since:

$$\begin{aligned} \sup_{|M| \leq m_0, |\psi| \geq 1 + \epsilon} \left\{ \left| \frac{\partial \delta}{\partial \psi} (M, \psi) \right| \right\} &\leq \frac{|d|}{2(1 + \epsilon)^2} \\ \sup_{|M| \leq m_0, |\psi| \geq 1 + \epsilon} \left\{ \left| \frac{\partial \delta}{\partial M} (M, \psi) \right| \right\} &\leq |d| \left( 1 + \frac{|d|}{1 + \epsilon} \right) \\ \sup_{|M| \leq m_0, |\psi| \geq 1 + \epsilon} \{ |\delta(M, \psi)| \} &\leq 1 + \frac{|d|}{2(1 + \epsilon)} \end{aligned} \quad (123)$$

We obtain from (119):

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}M_1(\psi_1) - \mathbf{T}M_2(\psi_2)| &\leq \left[ \frac{m_o}{1+\epsilon} + m_1 \left( \frac{1}{1+\epsilon} + \frac{|d|}{(1+\epsilon)^2} + m_1 |d| \left( 1 + \frac{|d|}{1+\epsilon} \right) \right) \right] |\psi_1 - \psi_2| \\ &\quad + \left[ \frac{1}{1+\epsilon} + m_1 |d| \left( 1 + \frac{|d|}{1+\epsilon} \right) \right] \partial(M_1, M_2) \end{aligned}$$

The result follows since, with (25) and (33),  $m_1$  is the unique positive root of:

$$\frac{m_0}{1+\epsilon} + m_1 \tau + m_1 \frac{|d|}{(1+\epsilon)^2} = m_1 \quad (124)$$

with

$$\tau = \frac{1}{1+\epsilon} + m_1 |d| \left( 1 + \frac{|d|}{1+\epsilon} \right) = 1 - \frac{m_0}{m_1(1+\epsilon)} - \frac{|d|}{(1+\epsilon)^2} \quad (125)$$

and (125) implying that  $\tau$  is strictly smaller than 1.  $\square$

## B Proof of Point (iii) of Theorem 2

Let  $H_o : \{|\psi| \geq 1 + \epsilon\} \rightarrow \mathbb{R}$  be:

$$H_o(\psi) = (1 + \alpha)/(1 + \psi) \quad |\psi| > 1 + \epsilon \quad (126)$$

We observe that:

$$\sup_{|\psi|>1+\epsilon} |H_o(\psi)| \leq \frac{|1 + \alpha|}{\epsilon} = m_o \quad (127)$$

$$\sup_{|\psi|>1+\epsilon} \left| \frac{dH_o(\psi)}{d\psi} \right| \leq \frac{|1 + \alpha|}{\epsilon^2} \stackrel{\text{def}}{=} m_1^o \quad (128)$$

Since (25) and (33) imply that  $m_1^o$  is smaller than  $m_1$ , it follows that  $H_o$  is in  $\mathcal{B}$ . Now since  $H$  is a fixed point of  $\mathbf{T}$ , using Theorem 2, one obtains:

$$\partial(H_o, H) \leq \partial(H_o, \mathbf{T}H_o) + \partial(\mathbf{T}H_o, TH) \leq \frac{1}{1 - \tau} \partial(H_o, \mathbf{T}H_o) \quad (129)$$

To conclude, we observe that:

$$H_o(\psi) - \mathbf{T}H_o(\psi) = \frac{H_o(\phi_{H_o}(\psi)) - H_o(\psi)}{\psi} \quad (130)$$

This implies:

$$|H_o(\psi) - \mathbf{T}H_o(\psi)| \leq \frac{m_1^o |\hat{\phi}_{H_o}(\psi) - \psi|}{|\psi|} \quad (131)$$

$$\leq d^2 m_1^o m_o \left( \frac{1}{1 + \epsilon} + m_o \right) \quad (132)$$

The last inequality follows from (27) and (28).  $\square$

## C Extra properties of the repellent locally invariant set

In order to prove other properties of the function  $H$ , we introduce  $\mathcal{B}_\alpha$ , a closed subset of  $\mathcal{B}$ , defined as the following set of functions  $M$ :

- Case  $1/\alpha < -1$  :

$$\begin{aligned} M(\psi) &\leq 1/\psi \quad \forall \psi \in [1/\alpha, -(1+\epsilon)] \\ 1/\psi &\leq M(\psi) \leq 0 \quad \forall \psi \in [-\infty, -(1+\epsilon)] \cap [-\infty, 1/\alpha] \\ 0 &\leq M(\psi)\psi \leq 1 + \alpha \quad \forall \psi \in [1 + \epsilon, \infty] \end{aligned} \tag{133}$$

- Case  $-1 \leq 1/\alpha \leq 0$  :

$$\begin{aligned} 0 &\leq M(\psi) \leq \frac{1+\alpha}{\psi} \quad \forall \psi \in [-\infty, -(1+\epsilon)] \\ \frac{1+\alpha}{\psi} &\leq M(\psi) \leq 0 \quad \forall \psi \in [1 + \epsilon, \infty] \end{aligned} \tag{134}$$

- Case  $0 \leq 1/\alpha$  :

$$\begin{aligned} 1 &\leq M(\psi)\psi \quad \forall \psi \in [-\infty, -(1+\epsilon)] \\ \alpha &\leq M(\psi) \leq 1/\psi \quad \forall \psi \in [1 + \epsilon, 1/\alpha] \\ 1/\psi &\leq M(\psi) \leq \alpha \quad \forall \psi \in [1 + \epsilon, \infty] \cap [1/\alpha, \infty] \end{aligned} \tag{135}$$

**Property A1:** For all  $\alpha$ ,  $H$ , the fixed point of  $\mathbf{T}$ , belongs to  $\mathcal{B}_\alpha$

$\mathcal{B}_\alpha$  being a closed subset of  $\mathcal{B}$ , to prove this Property, it suffices to show that  $\mathbf{T}\mathcal{B}_\alpha$  is contained in  $\mathcal{B}_\alpha$ . A separate analysis is needed for each of the cases in  $\alpha$ . We illustrate the technique just with the first case.

**Property A1':** If  $1/\alpha < -1$ ,  $H$  belongs to  $\mathcal{B}_\alpha$ .

**Proof.** Let  $M$  be a function in  $\mathcal{B}_\alpha$ . From the definition of  $\mathcal{B}_\alpha$  and (26), (27), (28),

- For all  $\psi$  in  $[1/\alpha, -(1+\epsilon)]$ , when  $1/\alpha$  is strictly smaller than  $-(1+\epsilon)$ , we have:

$$M(\phi_M(\psi)) \leq 1/\phi_M(\psi) \text{ and } \alpha - 1/\phi_M(\psi) \geq \alpha - 1/\psi \geq 0 \tag{136}$$

This implies:

$$\psi \cdot TM(\psi) \geq 1 + \alpha - 1/\phi_M(\psi) \geq 1 \quad (137)$$

and therefore

$$TM(\psi) \leq 1/\psi \quad (138)$$

- For all  $\psi$  in  $[-\infty, 1/\alpha]$ , we have:

$$M(\phi_M(\psi)) \leq 0 \quad (139)$$

This implies

$$\psi \cdot TM(\psi) \geq 1 + \alpha \geq 0 \quad (140)$$

and therefore

$$TM(\psi) \leq 0 \quad (141)$$

Also, we have:

$$M(\phi_M(\psi)) \geq 1/\phi_M(\psi) \text{ and } \alpha - 1/\phi_M(\psi) \leq \alpha - 1/\psi \leq 0 \quad (142)$$

This implies:

$$\psi \cdot TM(\psi) \leq 1 + \alpha - 1/\phi_M(\psi) \leq 1 \quad (143)$$

and therefore:

$$TM(\psi) \geq 1/\psi \quad (144)$$

- For all  $\psi$  larger than  $1 + \epsilon$ , we have:

$$\hat{\phi}_M(\psi) = \phi_M(\psi) \geq \psi \text{ and } M(\phi_M(\psi)) \leq \frac{1+\alpha}{\phi_M(\psi)} \quad (145)$$

This implies:

$$\psi \cdot TM(\psi) \geq 1 + \alpha - \frac{1+\alpha}{\phi_M(\psi)} \geq (1+\alpha)(1-1/\psi) \geq 0 \quad (146)$$

Also, we have:

$$M(\phi_M(\psi)) \geq 0 \quad (147)$$

This implies

$$\psi \text{ TM}(\psi) \leq 1 + \alpha \quad \square$$

One now can prove the following Properties of  $\Sigma$  on the repellent locally invariant set  $\{(\psi, H(\psi))\}$

**Property A2:** Suppose  $1/\alpha$  is not in  $[-1, 0]$ :

- (1) If  $\alpha \neq 0$  and  $sgn(\psi) \neq sgn(\alpha)$  then  $\hat{\phi}_H(\psi)$  is larger than  $\psi$
- (2) if  $\alpha \neq 0$  and  $sgn(\psi) = sgn(\alpha)$  then  $(\hat{\phi}_H(\psi) - 1/\alpha)(\psi - 1/\alpha)$  is positive and:  
 $\hat{\phi}_H(\psi) - 1/\alpha$  is smaller than  $|\psi - 1/\alpha|$ , if  $1/\alpha$  is positive,  
 $|\hat{\phi}_H(\psi) - 1/\alpha|$  is larger than  $|\psi - 1/\alpha|$ , if  $1/\alpha$  is smaller than  $-1$ .
- (3) if  $\alpha$  is zero,  $\hat{\phi}_H(\psi) - \psi$  is positive.

**Property A3:** If  $1/\alpha$  is in  $(-1, 0)$ , then  $(\hat{\phi}_H(\psi) - \psi)\psi$  is negative.

**Remarks:** 1- If  $1/\alpha$  is larger than  $1 + \epsilon$ , from Lemma 1,  $\psi = 1/\alpha$  is the unique fixed point of  $\hat{\phi}_H$ , considered as a map:  $\{\psi \geq 1 + \epsilon\} \rightarrow \{\psi \geq 1 + \epsilon\}$ . From Property A2, it is a global attractor of this map. In this case,  $\hat{\phi}_H(\cdot) \equiv \phi_H(\cdot)$  on the set  $\{\psi \geq 1 + \epsilon\}$ .

2- If  $1/\alpha$  is smaller  $-(1 + \epsilon)$ ,  $\psi = 1/\alpha$  is a global repellent fixed point of  $\phi_H$ , considered as a map:  $\{\psi \leq -(1 + \epsilon)\} \rightarrow \{\psi \leq -(1 + \epsilon)\}$ . In this case,  $\phi_H \equiv \hat{\phi}_H$  on the set  $\{\psi \leq -(1 + \epsilon)\} \cup \{\psi \leq 1/\alpha\}$ .

**Proof of Property A2:** (1) follows from the fact that, with (27),  $\hat{\phi}_H(\psi)$  is larger than  $\psi$ , if and only if  $H(\psi)(1 - \psi H(\psi))$  is positive. This latter property holds since  $H$  is in  $\mathcal{B}_\alpha$  and  $\alpha \neq 0$  and  $sgn(\psi) \neq sgn(\alpha)$ .

(2): From (27), we have:

$$(\hat{\phi}_H(\psi) - 1/\alpha)(\psi - 1/\alpha) = (\psi - 1/\alpha)^2 \left( 1 + \frac{d^2 H^2(\psi)}{1 + d^2 H^2(\psi)} \frac{\frac{1}{H(\psi)} - 1/\alpha}{\psi - 1/\alpha} \right) \quad (148)$$

Again  $H$  being in  $\mathcal{B}_\alpha$  and having  $sgn(\alpha) = sgn(\psi)$ , the result follows from the fact that  $\frac{1}{H(\psi)} - 1/\alpha$  and  $\psi - 1/\alpha$  have same sign.

Now, if  $\alpha$  is positive, since:

$$(\hat{\phi}_H(\psi) - 1/\alpha) = (\psi - 1/\alpha) - \frac{d^2 H^2(\psi)}{1 + d^2 H^2(\psi)} (\psi - \frac{1}{H(\psi)}) \quad (149)$$

and  $(\psi - 1/\alpha)$ ,  $(\hat{\phi}_H(\psi) - 1/\alpha)$  and  $(\psi - 1/H(\psi))$  have same sign, we obtain:

$$|\hat{\phi}_H(\psi) - 1/\alpha| = |\psi - 1/\alpha| - \frac{d^2 H^2(\psi)}{1 + d^2 H^2(\psi)} \left| \frac{1}{H(\psi)} - \psi \right| \quad (150)$$

Similarly, If  $\alpha$  is smaller than  $-1$ ,  $\psi - 1/\alpha$  and  $\psi - \frac{1}{H(\psi)}$  having opposite sign, we have:

$$|\hat{\phi}_H(\psi) - 1/\alpha| = |\psi - 1/\alpha| + \frac{d^2 H^2(\psi)}{1 + d^2 H^2(\psi)} \left| \frac{1}{H(\psi)} - \psi \right| \quad \square$$

**Proof of Property A3:**  $(\hat{\phi}_H(\psi) - \psi)\psi$  has the sign of  $\frac{1}{\psi H(\psi)} - 1$ . But  $H$  being in  $\mathcal{B}_\alpha$ , with  $\alpha$  in  $(-1, 0)$ , we have:

$$\frac{1}{\psi H(\psi)} \geq \frac{1}{1 + \alpha} \geq 1 \quad \square$$

## D Proof of Lemma 3

For each  $(N, \phi)$  in  $\mathcal{C} \times \{|\phi| \leq 1 - \eta\}$ , we consider the following application  $R_{(N, \phi)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  defined by:

$$R_{(N, \phi)}(D) = [1 - \phi N(\phi - d^2 D)] N(\phi - d^2 D) \quad (151)$$

For any  $(N_i, \phi_i, D_i)$  in  $\mathcal{C} \times \{|\phi| \leq 1 - \eta\} \times \mathbb{R}$  and with  $i = 1$  or  $2$ , we have:

$$|R_{(N_i, \phi_i)}(D_i)| \leq n_o(1 + n_o) \quad (152)$$

and:

$$\begin{aligned} |R_{(N_1, \phi_1)}(D_1) - R_{(N_2, \phi_2)}(D_2)| &\leq (1 + 2n_o)|N_1(\phi_1 - d^2 D_1) - N_2(\phi_2 - d^2 D_2)| + n_o^2|\phi_1 - \phi_2| \\ &\leq (1 + 2n_o)[n_1(|\phi_1 - \phi_2| + d^2|D_1 - D_2|) + \partial(N_1, N_2)] + n_o^2|\phi_1 - \phi_2| \end{aligned} \quad (153)$$

The result follows from the Uniform Contraction Theorem (Hale, (1980)) if:

$$d^2(1 + 2n_o)n_1 < 1 \quad (154)$$

But from (54) and (62), since  $\eta$  is strictly smaller than 1, we obtain:

$$d^2(1 + 2n_o)n_1 = \sqrt{(d^2(1 + d^2 n_o^2)n_o(1 + 2n_o))} < \frac{1}{2}$$

□

## E Proof of Lemma 4

(i): From (55), (56) to (60) we can easily check that  $\partial(\mathbf{P}N, 0)$  is smaller than  $n_o$  for all  $N$  in  $\mathcal{C}$ .

3) in definition (60) is direct consequence of (56).

In order to prove 2) of (60) we compute with  $N_i, \phi_i$  in  $\mathcal{C} \times \{|\phi| \leq 1 - \eta\}$  and  $i = 1, 2$ :

$$|\mathbf{P}N_1(\phi_1) - \mathbf{P}N_2(\phi_2)| = |\psi_{N_1}(\phi_1)N_1(\psi_{N_1}(\phi_1)) - \psi_{N_2}(\phi_2)N_2(\psi_{N_2}(\phi_2))| \quad (155)$$

$$\leq |\psi_{N_1}(\phi_1)N_1(\psi_{N_1}(\phi_1)) - \psi_{N_2}(\phi_1)N_2(\psi_{N_2}(\phi_1))| + \quad (156)$$

$$+ |\psi_{N_2}(\phi_1)N_2(\psi_{N_2}(\phi_1)) - \psi_{N_2}(\phi_2)N_2(\psi_{N_2}(\phi_2))| \quad (157)$$

$$\leq |\psi_{N_1}(\phi_1)||N_1(\psi_{N_1}(\phi_1)) - N_2(\psi_{N_2}(\phi_1))| + |\psi_{N_1}(\phi_1) - \psi_{N_2}(\phi_1)|n_o + \quad (158)$$

$$+ |\psi_{N_2}(\phi_1)| |N_2(\psi_{N_2}(\phi_1)) - N_2(\psi_{N_2}(\phi_2))| + n_o|\psi_{N_2}(\phi_1) - \psi_{N_2}(\phi_2)| \quad (159)$$

$$\leq (1 - \eta) [n_1|\psi_{N_1}(\phi_1) - \psi_{N_2}(\phi_1)| + \partial(N_1, N_2)] + n_o d^2 b_n \partial(N_1, N_2) \quad (160)$$

$$+ (1 - \eta) [n_1|\phi_1 - \phi_2| + n_1 d^2 b_\phi |\phi_1 - \phi_2|] + n_o d^2 b_\phi |\phi_1 - \phi_2| + n_o |\phi_1 - \phi_2| \quad (161)$$

$$\leq [(1 - \eta)(1 + d^2 b_n n_1) + n_o b_n d^2] \partial(N_1, N_2) + ((1 - \eta)n_1 + n_o)(1 + d^2 b_\phi)|\phi_1 - \phi_2| \quad (162)$$

The result will follow if the following two inequalities are satisfied:

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} (1 - \eta)(1 + d^2 b_n n_1) + n_o b_n d^2 < 1 \quad (163)$$

$$((1 - \eta)n_1 + n_o)(1 + d^2 b_\phi) \leq n_1 \quad (164)$$

Using the value of  $b_\phi$  given in (67), the latter may be rewritten in:

$$n_1^2 d^2 (1 + 2n_o) + n_1(d^2 n_o^2 - \eta(1 + d^2 n_o^2)) + n_o(1 + d^2 n_o^2) \leq 0 \quad (165)$$

This inequality is satisfied thanks to our choice of  $\eta$  in (54) and  $n_1$  in (62).

The former inequality is also satisfied since with the value of  $b_n$  given by (67) and using (54), we have:

$$0 < \lambda = \frac{1 - (1 + 2n_o)d^2 n_1}{(1 + (1 + 2n_o)d^2 n_1)(1 + d^2 n_o^2)} < 1 \quad \square$$

## F Proof of Part (iii) of Theorem 3

Let  $G_o : \{|\phi| \leq 1 - \eta\} \rightarrow \mathbb{R}$  be:

$$G_o(\phi) = (1 + \alpha)/(1 + \phi) \quad (166)$$

We observe that:

$$\sup_{|\phi| \leq 1 - \eta} |G_o(\phi)| \leq \frac{|1 + \alpha|}{\eta} = n_o \quad (167)$$

$$\sup_{|\phi| \leq 1 - \eta} \left| \frac{dG_o(\phi)}{d\phi} \right| \leq \frac{|1 + \alpha|}{\eta^2} \stackrel{\text{def}}{=} n_1^o \quad (168)$$

Since (54) and (62) imply that  $n_1^o$  is smaller than  $n_1$ , it follows that  $G_o$  is in  $\mathcal{C}$ . Now since  $G$  is a fixed point of  $\mathbf{P}$ , using Lemma 4 (ii), we obtain:

$$\partial(G, G_o) \leq \frac{1}{1 - \lambda} \partial(\mathbf{P}G_o, G_o) \quad (169)$$

On the other hand, since:

$$G_o(\phi) - \mathbf{P}G_o(\phi) = \psi_{G_o}(\phi)G_o(\psi_{G_o}(\phi)) - \phi G_o(\phi) \quad (170)$$

we have:

$$|G_o(\phi) - \mathbf{P}G_o(\phi)| \leq (n_o + n_1^o) |\psi_{G_o}(\phi) - \phi| \quad (171)$$

$$\leq (n_o + n_1^o) |\hat{\psi}_{G_o}(\phi) - \phi| \quad (172)$$

$$\leq d^2 n_o (n_o + n_1^o)(n_o + 1) \quad (173)$$

The last inequality is obtained from (65). □

## G Proof of point (ii) of Theorem 10

With Theorem 4.1 of (Egardt, 1979), we know that this result holds if the sequence  $|\psi(t)|$  obtained from each solution of  $\Sigma$  is bounded. To prove this sufficient boundedness property, we will use the two following facts obtained from the second equation of  $\Sigma$ :

**fact 1:**

$$|\psi(t+1)| = \left| \frac{\psi(t) + d^2x(t)}{1 + d^2x(t)^2} \right| \leq |\psi(t)| + \frac{|d|}{2} \quad (174)$$

**fact 2:**

$$|\psi(t+1)| = |\psi(t)| \left| 1 - \frac{d^2\psi(t)x(t)(\psi(t)x(t) - 1)}{\psi(t)^2(1 + d^2x(t)^2)} \right| \quad (175)$$

It follows that:

$$0 < \frac{d^2\psi(t)x(t)(\psi(t)x(t) - 1)}{\psi(t)^2(1 + d^2x(t)^2)} < 2 \quad (176)$$

implies:

$$|\psi(t+1)| < |\psi(t)| \quad (177)$$

But the condition (176) is met if

$$\psi(t)x(t) \notin [0, 1] \text{ and } |\psi(t)| > \frac{d}{2\sqrt{2}} \quad (178)$$

From (178), the idea of the proof is to show that as long as  $|\psi(t)|$  is large,  $x(t)$  has to be such that  $\psi(t)x(t)$  is not in  $[0, 1]$  except, may be, for one time instant denoted  $T_1$  in the following. This implies that  $|\psi(t)|$  cannot be increasing and is therefore bounded.

To simplify our following notations, let:

$$\beta = \begin{cases} \alpha & \text{if } \alpha > 0 \\ -(1 + \alpha) & \text{if } \alpha \leq 0 \end{cases} \quad (179)$$

$$\gamma = \sup \left\{ \frac{1 + 2\beta}{\beta}, \frac{|d|}{2\sqrt{2}} \right\} \quad (180)$$

From the Theorem assumption,  $\beta$  is strictly positive.

Now given a solution  $(x(t), \psi(t))$  of  $\Sigma$ , let  $T_o$  be the smallest time  $t$  such that:

$$|\psi(t)| \geq \gamma \quad (181)$$

Clearly if no such time  $T_o$  exists  $|\psi(t)|$  is bounded by  $\gamma$ .

Then let  $T_2$ , may be infinite, be the first time such that  $|\psi(t)| < \gamma$ , namely:

$$|\psi(t)| \geq \gamma \quad \forall t \in [T_o, T_2] \quad , \quad |\psi(T_2 + 1)| < \gamma \quad (182)$$

Our result will be established by proving that:

$$|\psi(t)| \leq |\psi(T_o)| + \frac{|d|}{2} \quad \forall t \in [T_o, T_2] \quad (183)$$

$$|\psi(t)| < \gamma + |d| \quad \text{if } t < T_o \quad \text{or } t > T_2 \quad (184)$$

From fact 2 and (A.27), (182), we know that for  $t$  in  $[T_o, T_2]$ , if  $x(t)\psi(t)$  is not in  $[0, 1]$ , then, necessarily,

$$|\psi(t+1)| < |\psi(t)| \quad (185)$$

Hence consider  $T_1$ , the first time instant in  $[T_o, T_2]$  for which  $x(t)\psi(t)$  is in  $[0, 1]$ . If no such  $T_1$  exists (10) is established. If  $T_1$  exists and  $T_1$  is strictly larger than  $T_o$ , then from its definition and (185), we have:

$$|\psi(t)| < |\psi(t-1)| \leq |\psi(T_o)| \quad \forall t \in [T_o, T_1] \quad (186)$$

Now from the first equation of  $\Sigma$ , we obtain:

$$|x(T_1 + 1)| = |[1 - \psi(T_1)x(T_1)] + \alpha| = |\psi(T_1)x(T_1) - (1 + \alpha)| \quad (187)$$

Hence the definition of  $T_1$  and (182) imply:

$$|x(T_1 + 1)| \geq \beta \quad (188)$$

On the other hand, with fact 1, (177) and since  $T_1$  is in  $[T_o, T_2]$  which means that (182) applies, we have:

$$\gamma \leq |\psi(T_1 + 1)| \leq |\psi(T_1)| + \frac{|d|}{2} \leq |\psi(T_o)| + \frac{|d|}{2} \quad (189)$$

Therefore, with fact 2:

$$|x(T_1 + 1)\psi(T_1 + 1)| \geq \gamma \beta \geq 1 + 2\beta > 1 \quad (190)$$

which implies:

$$|\psi(T_1 + 2)| < |\psi(T_1 + 1)| \quad (191)$$

Moreover, if  $T_1 + 1$  is strictly smaller than  $T_2$ , for any  $t$  in  $[T_1 + 1, T_2]$ , we obtain the following implications:

$$|x(t)| \geq \beta \implies |x(t+1)| \geq \beta \implies |\psi(t+1)x(t+1)| > 1 \implies |\psi(t+2)| < |\psi(t+1)| \quad (192)$$

where the first implication comes from (182) and:

$$|x(t+1)| \geq |\psi(t)x(t)| - |1 + \alpha| \geq 1 + 2\beta - |1 + \alpha| \geq \beta \quad (193)$$

Hence (183) is established since we have:

$$\left. \begin{array}{l} |\psi(t)| < |\psi(t-1)| \leq |\psi(T_o)| \quad \forall t \in [T_o, T_1] \\ |\psi(T_1 + 1)| \leq |\psi(T_1)| + \frac{|d|}{2} \\ |\psi(t+1)| < |\psi(t)| < |\psi(T_1 + 1)| \quad \forall t \in [T_1 + 1, T_2] \end{array} \right\} \quad (194)$$

This proves also that whenever the sequence  $|\psi|$  enters the set  $\{|\psi| \geq \gamma\}$  at time  $T$  larger than  $T_2$ , then for all time  $t$  after  $T$  and as long as  $\psi(t)$  remains in this set, we have necessarily:

$$|\psi(t)| \leq |\psi(T)| + \frac{|d|}{2} \quad (195)$$

But since we have by definition,

$$|\psi(T_2 + 1)| < \gamma \quad (196)$$

fact 1 shows that the solution can reenter this set at time  $t$ , after  $T_2$  only with a  $\psi$ -component satisfying:

$$|\psi(t)| < \gamma + \frac{|d|}{2} \quad (197)$$

This proves (184).  $\square$

**Remark:** With (194), (184) we have established that if  $r(d+r)$  is strictly positive, for any solution  $(x(t), \psi(t))$  of  $\Sigma$ , the only possibility for  $|\psi(t)|$  to be larger than

$$\sup \left\{ \frac{1 + 2 \sup\{|\alpha|, |1 - \alpha|\}}{\sup\{|\alpha|, |1 + \alpha|\}}, \frac{|d|}{2\sqrt{2}} \right\} + |d|$$

is if its initial condition  $\psi(0)$  satisfies this property. In this case we have a transient behavior where  $\psi(t)$  is strictly decreasing except may be at a unique time instant and after a finite time  $|\psi(t)|$  will remain smaller than the above bound.

## **D.2 Topological orbital equivalence with asymptotic phase for a two time scales discrete time system**

A paraître dans Mathematics of Control, Signals, and Systems. Springer Verlag.



# Topological Orbital Equivalence with Asymptotic Phase For A Two Time Scales Discrete Time System

L.Praly

C.A.I., Ecole des Mines  
35 Rue Saint Honore  
77305 Fontainebleau Cedex  
France

**Abstract:** Existence, smoothness, approximation and attractiveness of a locally integral manifold are established for the following two time scales discrete time system:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= A(\theta_k) X_k + B(\theta_k) u_k \\ \theta_k &= \theta_{k-1} + \epsilon C(X_k, \theta_{k-1}, k) \end{aligned}$$

This manifold is defined as a graph  $(M_c(\theta, k), \theta)$  on the set  $\mathbf{S}$  of  $\theta$  such that  $A(\theta)$  is "Hurwitz". It contains all the solutions remaining in a compact subset  $\mathbf{C}$  of  $\mathbb{R}^n \times \mathbf{S}$ . It allows us to define a (locally) topologically orbitally equivalent system (with asymptotic phase):

$$\begin{aligned} X_{k+1}^M &= A(\theta_k^M) X_k^M + B(\theta_k^M) u_k \\ \theta_{k+1}^M &= \theta_k^M + \epsilon C(M_c(\theta_k^M, k+1), \theta_k^M, k+1) \end{aligned}$$

It follows that (in)stability properties and existence of solutions of our original system, remaining in  $\mathbf{C}$  after time  $k_0$ , can be established from the  $\theta^M$ -subsystem.

We study this reduced order system for a weakly non-stationary case by applying the stroboscopic method to approximate it by a practically meaningful slowly time varying system.

This work is motivated by the study of time varying linear systems whose time variations depend on the state itself or the study of adaptive linear systems.

March 7, 1986.

Revised January 5, 1988.

Revised June 1, 1988.



## 1. Introduction

The objective of this paper is to provide a tool for the local analysis of the following discrete time system:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= A(\theta_k) X_k + B(\theta_k) u_k \\ \theta_k &= \theta_{k-1} + \epsilon C(X_k, \theta_{k-1}, k) \end{aligned} \quad (S_\epsilon)$$

For  $\epsilon$  small enough and  $A(\theta)$  without any eigenvalue on the unit circle, this system exhibits a two time scales property. The state of the fast subsystem is  $X$  in  $\mathbb{R}^n$  and the state of the slow subsystem is  $\theta$  in  $\mathbb{R}^p$ .  $u_k$  represents a (closed loop) forcing term.

To determine in which conditions  $S_\epsilon$  has solutions bounded on  $\mathbb{Z}$  or a semi-infinite time interval and when these solutions are stable, our idea is to consider  $S_\epsilon$  as a small perturbation of the "frozen" system:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= A(\theta_k) X_k + B(\theta_k) u_k \\ \theta_k &= \theta_{k-1} \end{aligned} \quad (S_0)$$

which can be seen as a family of linear systems in  $X_k$ , indexed by  $\theta_k$

$S_\epsilon$  arises from the study of linear time varying systems where the time variations, though small, depend on the state itself. Also, as noticed by Ljung and Soderstrom (1983) for example,  $S_\epsilon$  describes most of the actually studied adaptive linear systems.

When the sequence  $u_k$  satisfies the so-called test input assumption (see (Riedle, Praly, Kokotovic, 1986), (Praly, Rhode, 1985)), i.e. when there exists a solution of  $S_\epsilon$  on  $\mathbb{Z}$  or a semi-infinite time interval whose  $\theta$ -component is constant, Riedle and Kokotovic (1985) have performed the stability analysis by linearization and by invoking the Krylov-Bogoliubov-Mitropolski averaging theory (see (Hale, 1980)). This theory was used for a long time for the case when  $u_k$  is a stationary stochastic process. In particular, it has been used by Ljung to derive the associated differential equation technique for the case when  $C(X, \theta, k)$  decreases to zero as  $k$  tends to infinity ((Ljung, 1977), (Ljung, Soderstrom, 1983), (Kushner, Clark, 1978)). This technique has been also justified for the case where  $C(X, \theta, k)$  is small but not decreasing ((Benveniste et al., 1987), (Derevitskii, Fradkov, 1974)). In the deterministic case and for the specific system  $S_\epsilon$ , its use as a heuristic mean in the non-decreasing case has been considered by Astrom (1983, 1984). Based on a linear averaging technique, but incorporating total stability arguments, some relaxation of the test input assumption has been obtained (Anderson et al., 1986).

When  $u_k$  has only  $L_2$ -stationary properties (periodic, almost periodic,...), existence of a particular  $\mathbb{Z}$ -bounded solution has been established using nonlinear averaging theory ((Bodson et al, 1986) or Poincaré expansion method ((Praly (b), 1985), (Praly, Pomet, 1987))). It relies on the existence of a solution of a bifurcation equation. Again stability properties are established by linearization.

In this paper, up to section 4, no other assumption, besides boundedness, will be needed on  $u_k$ . Moreover, we are interested in a complete description of all the bounded solutions. Such a description is

easily obtained for  $S_0$  for any  $\theta$ -set where  $A(\theta)$  is non critical with respect to  $u_k$ . For example, all the  $\mathbb{Z}$ -bounded solutions of  $S_0$  whose  $\theta$ -component lies in  $\mathbf{S}$  (subset of  $\mathbb{R}^p$  for which the eigenvalues of  $A(\theta)$  are in the open unit disk), are given by the graph of the function  $M_0: \mathbb{R}^p \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$M_0(\theta, k) = \sum_{i=-\infty}^{k-1} A(\theta)^{k-1-i} B(\theta) u_i \quad (1)$$

This graph is an integral manifold which, restricted to  $\mathbf{S}$  for example, is normally attractive. A general theory is available proving the persistence of normally hyperbolic invariant manifolds under small perturbations (see Fenichel (1971), Hale (1980), Hirsch, Pugh, Schub (1976), Osipenko (1985)). Therefore we expect the existence of a function  $M_\epsilon$  whose graph is an integral manifold of  $S_\epsilon$ . And like  $M_0$  for  $S_0$ ,  $M_\epsilon$  should describe (at least locally) all the  $\mathbb{Z}$ -bounded solutions of  $S_\epsilon$ .

After section 2 where we introduce our assumptions and notations, in section 3, we apply this general theory to establish existence and regularity of this function  $M_\epsilon$  and we prove that any solution  $(X_{k+1}, \theta_k)$  of  $S_\epsilon$  which remains for ever in  $B(O, x) \times \mathbf{S}$  ( $B(O, x)$  is the closed ball of center O, radius  $x$ ) lies in the graph of  $M_\epsilon$ .

Our main result is given in section 4. We prove that the so called "reduction principle" applies with an asymptotic phase. This "principle" has been introduced by Pliss (1964) and generalized by Aulbach (1982), Henry (1981), Kelley (1967). It is of practical importance since it shows that stability properties and existence of solutions of  $S_\epsilon$  remaining in  $B(O, x) \times \mathbf{S}$  after time  $k_0$  can be established from the reduced order system given by the restriction of  $S_\epsilon$  to the graph of  $M_\epsilon$ , i.e. from the system  $SM_\epsilon^\#$  obtained from the  $\theta$ -equation of  $S_\epsilon$  by replacing  $X_k$  by  $M_\epsilon(\theta_{k-1}, k)$ . We will see that this "principle" or more precisely the existence of a topological orbital equivalence is a consequence of Bowen's Shadowing Lemma (see proposition 8.19 of (Schub, 1978) or Hirsh, Pugh, Shub (1976)) which is again an aspect of normal hyperbolicity.

In section 5, we study the system  $SM_\epsilon^\#$  for the case where  $u_k$  is weakly non-stationary. We apply Minorsky's stroboscopic method ideas (Minorsky, 1962). This allows us to define a subset of  $\mathbb{R}^p$  where the solutions of  $SM_\epsilon^\#$  are hyperbolically attractive (and therefore, the same property holds for solutions of  $S_\epsilon$ ). This proves in particular that Astrom's heuristic approach is technically sound when restricted to this subset.

Some of the results presented here have been established for the continuous time case by Riedle and Kokotovic (1986). For the discrete time case, they have been announced in (Praly (a), 1985).

## 2. Assumptions and notations

In the following,  $\|\cdot\|$  denotes the euclidian norm. The case when  $u_k$  and  $C(X, \theta, k)$  are periodic in  $k$  is called the periodic case. Through out this paper,  $\epsilon$  is positive.

The following assumptions will be used:

**A1:** The sequence  $u_k$  is bounded:

$$\|u_k\| \leq u \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Let  $S$  be a compact set in  $\mathbb{R}^p$  with a non empty interior:

**A2:** If  $\theta$  lies in  $S$ , the eigenvalues of  $A(\theta)$  are strictly in the unit circle:

$$|\lambda \{A(\theta)\}| \leq \lambda_0 \quad \forall \theta \in S \quad \lambda_0 < 1$$

**A3:** The functions  $A(\theta), B(\theta)$  are Lipschitz continuous on  $S$  with  $a_1, b_1$  as respective Lipschitz constant.

A direct consequence of A2, A3 is the existence of  $a, b, \lambda$  such that (see (Fuchs, 1982)):

$$\|B(\theta)\| \leq b \quad \|A(\theta)^i\| \leq a \lambda^i \quad \lambda_0 < \lambda < 1 \quad \forall \theta \in S \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Let  $B(O, x)$  be the closed ball of  $\mathbb{R}^n$  with center  $O$  and radius  $x$ :

**A4:**  $C$  is Lipschitz continuous uniformly on  $B(O, x) \times S \times \mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} \|C(X, \theta, k)\| &\leq c(x) \\ \|C(X^0, \theta^0, k) - C(X^1, \theta^1, k)\| &\leq c_1(x) (\|X^0 - X^1\| + \|\theta^0 - \theta^1\|) \end{aligned}$$

where  $c, c_1$  are positive non decreasing functions (typically  $x^\alpha$ ) whose argument is omitted when no confusion is possible. In the following, the  $C$  function could also depend on  $\epsilon$ .

To study the smoothness properties of  $M_\epsilon(\theta, k)$ , we will need:

**A5:** A, B, C are Lipschitz continuously differentiable. Precisely, there exist linear applications  $\frac{\partial A}{\partial \theta}, \frac{\partial B}{\partial \theta}, \frac{\partial C}{\partial X}$  and  $\frac{\partial C}{\partial \theta}$  such that, with  $(X, \theta)$  an interior point of  $B(O, x) \times S$  and  $h_x, h_\theta$  two (sufficiently small) vectors in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  respectively, the functions  $\delta_A, \delta_B, \delta_C$  defined as (similary for  $\delta_A, \delta_B$ ):

$$\delta_C(X, \theta, k, h_x, h_\theta) = C(X + h_x, \theta + h_\theta, k) - C(X, \theta, k) - \frac{\partial C}{\partial X}(X, \theta, k) h_x - \frac{\partial C}{\partial \theta}(X, \theta, k) h_\theta$$

satisfy (similary for  $\delta_A - \delta_B$ ):

$$\limsup_{k \rightarrow 0, k_1 \rightarrow 0} \frac{\|\delta_C(X, \theta, k, h_x, h_s)\|}{\|h_x\| + \|h_s\|} = 0$$

Moreover the functions  $\frac{\partial A}{\partial \theta}(\theta)$ ,  $\frac{\partial B}{\partial \theta}(\theta)$ ,  $\frac{\partial C}{\partial X}(X, \theta, k)$  and  $\frac{\partial C}{\partial \theta}(X, \theta, k)$  are Lipschitz continuous uniformly on  $B(O, x) \times S \times Z$  with  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2(x)$  and  $e_2(x)$  as respective Lipschitz constant.

Assumptions A1, A3 to A5 are smoothness conditions. Assumption A2 concerns the possibility of finding a constant  $\theta$  such that the (linear)  $X$ -subsystem is exponentially stable. These assumptions are very similar to conditions C1 and C2 of p.158 (Ljung, Soderstrom, 1983), introduced to derive the associated differential equation technique. One of the consequence of the results presented in this paper will be to provide a geometric justification of the substitution of  $X_{k+1}$  by  $M_\epsilon(\theta_k, k)$  in the  $\theta$ -equation of  $S_\epsilon$ , used to derive this associated differential equation. However, notice that for the time being no stationnarity nor decaying  $\epsilon$  is needed compared with C3 to C6 used in the above reference. These extra assumptions will be discussed in section 5, when studying a reduced order system.

To obtain this geometric insight, we consider  $S_\epsilon$  as a map:

$$S_\epsilon : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times Z \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times Z$$

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta \\ k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} Y = A(\psi)X + B(\psi)u_k \\ \psi = \theta + \epsilon C(X, \theta, k) \\ k+1 \end{bmatrix}$$

Similary given the function  $M_\epsilon : S \times Z \rightarrow \mathbb{R}^n$  we consider the system  $SM_\epsilon$  defined by:

$$SM_\epsilon : \begin{bmatrix} X^M \\ \theta^M \\ k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} Y^M = A(\psi^M)X^M + B(\psi^M)u_k \\ \psi^M = \theta^M + \epsilon C(M_\epsilon(\theta^M, k), \theta^M, k) \\ k+1 \end{bmatrix}$$

The difference between  $S_\epsilon$  and  $SM_\epsilon$  is that, in the  $\theta$ -equation,  $X$  is replaced by the  $M_\epsilon$ . Consequently,  $SM_\epsilon$  being "lower triangular" is structurally much simpler than  $S_\epsilon$ .

To study boundedness and stability properties of these systems, we consider the following sets:

Let  $\Theta$  be a compact subset of  $S$ , we define  $B([k_0, k_1], \Theta)$  (resp.  $B^M([k_0, k_1], \Theta)$ ) as the set of sequences  $(X_{k+1}, \theta_k)$  (resp.  $(X_{k+1}^M, \theta_k^M)$ ) solutions of  $S_\epsilon$  (resp.  $SM_\epsilon$ ) for  $k \in [k_0, k_1]$  and satisfying:

$$X_{k_0+1} - M_\epsilon(\theta_{k_0}, k_0+1) \in B(O, \frac{x-m}{\alpha}) \quad (\text{resp. } X_{k_0+1}^M - M_\epsilon(\theta_{k_0}^M, k_0+1) \in B(O, \frac{x-m}{\alpha}))$$

$$\theta_k \in \Theta \quad (\text{resp. } \theta_k^M \in \Theta) \quad \forall k \in [k_0, k_1]$$

where  $m$ ,  $\alpha$  will be precised later. For sequences in these sets we define the elevation above the manifold

as (similary for  $E^M$ ):

$$E_{k+1} = X_{k+1} - M_\epsilon(\theta_k, k+1)$$

In the following, we will say that the graph of  $M_\epsilon$  is an integral manifold of  $S_\epsilon$  locally on  $\Theta$  if for any  $(\theta_k^M)$  solution of:

$$\theta_{k+1}^M = \theta_k^M + \epsilon C(M_\epsilon(\theta_k^M, k+1), \theta_k^M, k+1) \quad (SM_\epsilon^M)$$

such that  $\theta_k^M$  lies in  $\Theta$  for all  $k$  in  $[k_0, k_1]$ , the sequence  $(X_{k+1}, \theta_k)$  defined by:

$$X_{k+1} = M_\epsilon(\theta_k^M, k+1) \quad \theta_k = \theta_k^M$$

is a solution of  $S_\epsilon$  on  $[k_0, k_1]$ . Note that this implies that the graph of  $M_\epsilon$  is an integral manifold of  $SM_\epsilon$  locally on  $\Theta$ .

Our interest in this paper lies in studying the properties of solutions of  $S_\epsilon$  remaining in  $B(O, r) \times \mathbf{S}$ . To facilitate this study, we use the classical trick consisting in modifying the system  $S_\epsilon$  into  $\bar{S}_\epsilon$ , such that  $S_\epsilon$  and  $\bar{S}_\epsilon$  coincides on a compact subset of  $B(O, r) \times \mathbf{S}$ :

For a compact set  $\Theta$  in  $\mathbb{R}^p$  we denote by  $\Theta + \eta$ , the " $\eta$ -augmented" compact set of  $\Theta$ :

$$\Theta + \eta = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^p / \exists \psi \in \Theta : \| \psi - \theta \| \leq \eta \right\}$$

Since  $\mathbf{S}$  has a non empty interior we can find  $\eta$  and compact sets  $\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1$  with non empty interior, such that:

$$\mathbf{S}_0 + \eta \subset \mathbf{S}_1 \quad \mathbf{S}_1 + \eta \subset \mathbf{S}$$

We call stopping function  $s : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, 1]$  a  $C^r$ -function ( $0 \leq r \leq \infty$ ) given by Urysohn Theorem satisfying:

$$s(\theta) = 1 \iff \theta \in \mathbf{S}_0 \quad \theta \notin \mathbf{S}_1 \Rightarrow s(\theta) = 0$$

Let  $s_1, s_2$  denote the Lipschitz constant of  $s$  and its differential respectively. We can take  $s_1 = 1/\eta$  if  $s$  is only Lipschitz continuous. We define the function  $\bar{C} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^p$  by:

$$\bar{C}(X, \theta, k) = s(\theta) C(X, \theta, k)$$

$\bar{C}$  as the same properties as  $C$ , with in particular:

$$\bar{c} \leq c \quad \bar{c}_1 \leq s_1 c + c_1 \quad \bar{c}_2 \leq s_2 c + 2 s_1 c_1 + c_2$$

In our paper we will always assume  $\epsilon \leq \epsilon_0$  with:

$$\epsilon_0 \leq \min\left(\frac{\eta}{c}, \frac{1}{\bar{c}_1}\right)$$

In this condition, if  $\psi$  is defined as:

$$\psi = \theta + \epsilon \bar{C}(X, \theta, k)$$

we have:

$$\theta \in S_1 \Rightarrow \psi \in S \quad \psi \in S - S_1 \Rightarrow \theta = \psi$$

$$\theta \in S \Rightarrow \text{the segment } [\theta, \psi] \subset S$$

with  $\bar{C}$ , we define the modified system  $\bar{S}_\epsilon$  (similarly for  $\bar{SM}_\epsilon$ ):

$$\bar{S}_\epsilon \quad \begin{bmatrix} X \\ \theta \\ k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} Y = A(\psi)X + B(\psi)u_k \\ \psi = \theta + \epsilon \bar{C}(X, \theta, k) \\ k+1 \end{bmatrix}$$

In  $\bar{S}_\epsilon$  we smoothly stop the  $\theta$ -component of any solution trying to leave  $S_1$ . Clearly a solution of  $\bar{S}_\epsilon$  is a solution of  $S_\epsilon$  on  $[k_0, k_1]$  if, for all  $k$  in  $[k_0, k_1]$ ,  $\theta_k$  lies in  $S_0$ . The idea of preventing the  $\theta$ -vector to leave an admissible region is also used in practice ([Egardt, 1979], [Ljung, Soderstrom, 1983]).

To end this section, let us mention that the non explicit form of  $S_\epsilon$  is chosen to simplify the forthcoming derivations. However, this is done with no loss of generality since the system:

$$\begin{aligned} Y_{k+1} &= A(\theta_k)Y_k + B(\theta_k)u_k \\ \theta_{k+1} &= \theta_k + \epsilon C(Y_k, \theta_k, k+1) \end{aligned}$$

can also be written in:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y_{k+1} \\ Y_k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A(\theta_k) & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_k \\ Y_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B(\theta_k) \\ 0 \end{pmatrix} u_k \\ \theta_k &= \theta_{k-1} + \epsilon C(Y_{k-1}, \theta_{k-1}, k) \end{aligned}$$

### 3. Existence of a normally attractive locally integral manifold.

**Theorem 1:** Under assumptions A1 to A4, for any compact set  $\mathbf{S}_0$  strictly contained in  $\mathbf{S}$ , there exists  $\epsilon_*$  such that for any  $\epsilon, \epsilon \leq \epsilon_*$ , one can find constants  $\alpha, f^0, f^1, f_1^0$ , a function  $\tau_0(\epsilon, x)$ ,  $0 \leq \tau_0 < 1$  and a (may be non-unique) function  $M_\epsilon: \mathbf{S} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}^+$  which is periodic in  $k$  in the periodic case, such that:

- i) the graph of  $M_\epsilon$  is an integral manifold of  $S_\epsilon$  locally on  $\mathbf{S}_0$ ,
- ii) smoothness:  $M_\epsilon$  is bounded and Lipschitz continuous uniformly on  $\mathbf{S} \times \mathbf{Z}$  with bounds  $m_1$  and  $m_2$  respectively. Moreover, if A5 holds,  $M_\epsilon$  is Lipschitz continuously differentiable in  $\theta$  with  $m_2$  as Lipschitz constant of its differential,
- iii) approximation: let  $M_0$  be the function defined in (1), then uniformly on  $\mathbf{S}_0 \times \mathbf{Z}$ :

$$\| M_\epsilon(\theta, k) - M_0(\theta, k) \| \leq \epsilon f^0$$

Moreover, if A5 holds,  $M_0$  is continuously differentiable in  $\theta$  and letting  $(M_0^1(\theta, k))$  be the unique  $\mathbf{Z}$ -bounded solution of:

$$X_{k+1} = A(\theta) X_k + B(\theta) u_k - \epsilon A(\theta) \frac{\partial M_0}{\partial \theta}(\theta, k) C(M_0(\theta, k), \theta, k)$$

we have uniformly on  $\mathbf{S}_0 \times \mathbf{Z}$ :

$$\| M_\epsilon(\theta, k) - M_0^1(\theta, k) \| \leq \epsilon^2 f^1 \quad \| \frac{\partial M_\epsilon}{\partial \theta}(\theta, k) - \frac{\partial M_0}{\partial \theta}(\theta, k) \| \leq \epsilon f_1^0$$

iv) attractiveness: let  $(X_{k+1}, \theta_k)$  be a sequence of  $B([k_0, k_1], \mathbf{S}_0)$ , with  $(E_k)$  its corresponding sequence of elevations above the manifold, we have for all  $k', k - k_0 \leq k' \leq k < k_1$ :

$$\| E_{k+1} \| \leq \alpha \tau_0(\epsilon, x)^{k-k'} \| E_{k'+1} \|$$

Moreover if  $(X_{k+1}, \theta_k)$  is a solution of  $S_\epsilon$  which lies in  $B(O, x) \times \mathbf{S}_0$  for all  $k$  in  $\mathbf{Z}$ , then this solution lies in the graph of  $M_\epsilon$ , namely: for all  $k$

$$X_{k+1} = M_\epsilon(\theta_k, k+1)$$

v) all these properties hold for  $SM_\epsilon$ .

All the constants appearing in this statement will be clarified in the proof.

**Remark 1:** 1- For the continuous time case, existence of  $M_\epsilon$ , approximation by  $M_0$  and exponential decay-ing of the elevation above the manifold are established in (Riedle, Kokotovic, 1986).  
 2- This theorem is a technical step towards our main result of section 4. However it gives us a first important geometric property of  $S_\epsilon$ :

*Any solution of  $S_\epsilon$  remaining for ever in the compact set  $B(O, x) \times \mathbf{S}_0$  lies in the graph of  $M_\epsilon$ .*

The end of this section is devoted to the proof of this Theorem. It is sufficient to establish this result for the modified system  $\bar{S}_\epsilon$ . A possible proof would be to call upon more general Theorems on persistence of normally hyperbolic integral manifolds as those mentioned in introduction. We prefer a less technical direct proof. It is an adaptation of the proof of Theorem 5.2 of (Shub, 1978) and is based on the graph transform technique:

Consider the image by  $\bar{S}_\epsilon$  of the graph:

$$\left\{ (X = M_\epsilon(\theta, k), \theta, k) / \theta \in S, k \in Z \right\}$$

We obtain a set of  $(Y, \psi, k+1)$  contained in  $R^* \times S \times Z$ . If the graph is an integral manifold, this set is contained in the graph itself i.e.:

$$Y = M_\epsilon(\psi, k+1)$$

This means that the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc} \left[ \begin{matrix} X = M_\epsilon(\theta, k) \\ \theta \\ k \end{matrix} \right] & \xrightarrow{\bar{S}_\epsilon} & \left[ \begin{matrix} Y = M_\epsilon(\psi, k+1) \\ \psi \\ k+1 \end{matrix} \right] \\ M_\epsilon \uparrow & & M_\epsilon \uparrow \\ (\theta, k) & \xrightarrow{\bar{S}M_\epsilon^\theta} & (\psi, k+1) \end{array}$$

This means also that  $M_\epsilon$  is a fixed point of the operator  $T$ , called the graph transform and defined as:

$$T(M) = \bar{S}, \text{ or } M \circ (\bar{S}M_\epsilon^\theta)^{-1}$$

Our problem is reduced to study the properties of this operator. Let us first introduce an

**adapted metric:** Given  $\theta \in S$ , for any vector  $X$  in  $R^*$  we define its norm  $||| X |||_\theta$  by:

$$||| X |||_\theta = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^{-i} \| A(\theta)^i X \| \quad \lambda < \mu < 1$$

From assumptions A2, A3 it can be seen that:

- i)  $\| X \| \leq ||| X |||_\theta \leq \alpha \| X \| \quad \alpha = \frac{a_1 \mu}{\mu - \lambda}$
- ii)  $\| A(\theta) X \|_\theta \leq \gamma ||| X |||_\theta \quad \gamma = \mu (1 - \frac{\mu - \lambda}{a_1 \mu})$
- iii)  $||| X |||_\psi \leq (1 + \beta \| \theta - \psi \|) ||| X |||_\theta \quad \beta = \frac{a_1 a}{\mu - \lambda}$

**Remark 2:** This metric allows us to exhibit the normal hyperbolicity property:

Let  $(X^0, \theta^0, k)$ ,  $(X^1, \theta^1, k)$  be two points in  $B(O, x) \times S \times Z$  and  $(Y^0, \theta^0, k+1)$ ,  $(Y^1, \theta^1, k+1)$  be their respective image by  $\bar{S}_\epsilon$ . We have the following inequalities (compare with eq. (2. 21), (2. 22) of (Pliss, 1966)):

$$\begin{aligned} ||| Y^0 - Y^1 |||_{\varphi^0} &\leq \gamma (1 + \epsilon \beta \bar{c}) (||| X^0 - X^1 |||_{\varphi^0} + \alpha (a_1 x + b_1 u) ||| \psi^0 - \psi^1 |||) \\ ||| \psi^0 - \psi^1 ||| &\geq \epsilon \bar{c}_1 (||| X^0 - X^1 |||_{\varphi^0} + (1 - \epsilon \bar{c}_1) ||| \theta^0 - \theta^1 |||) \end{aligned}$$

Introducing the positive function  $l(x)$  satisfying:

$$\frac{\gamma (1 + \epsilon \beta \bar{c}(x)) l(x)}{1 - \epsilon \bar{c}_1(x)(1 + l(x))} + \alpha(a_1 x + b_1 u) \leq l(x)$$

we obtain the following key technical triangular system:

$$\begin{aligned} ||| Y^0 - Y^1 |||_{\varphi^0} - l ||| \psi^0 - \psi^1 ||| &\leq \tau_0(\epsilon, x) \left( ||| X^0 - X^1 |||_{\varphi^0} - l ||| \theta^0 - \theta^1 ||| \right) \\ ||| \psi^0 - \psi^1 ||| &\geq -\epsilon \bar{c}_1 \left( ||| X^0 - X^1 |||_{\varphi^0} - l ||| \theta^0 - \theta^1 ||| \right) + (1 - \epsilon \bar{c}_1(1 + l)) ||| \theta^0 - \theta^1 ||| \end{aligned} \quad (2)$$

with

$$\tau_0(\epsilon, x) = \gamma (1 + \epsilon \beta \bar{c}(x)) \left( 1 + \epsilon \frac{\bar{c}_1(x) l(x)}{1 - \epsilon \bar{c}_1(x)(1 + l(x))} \right)$$

The normal attractivity property appears here. In particular  $\tau_0(\epsilon, x)$  characterizes the contraction property of  $S_\epsilon$  in the direction normal to the integral manifold (see attractiveness).  $(1 - \epsilon \bar{c}_1(1 + l))^{-1}$  characterizes the possible expansion along the manifold (see Lemma 1). From these characterizations and following (Fenichel, 1971) or (Hirsch, Pugh, Shub, 1976) we expect the existence of an integral manifold which can be up to  $r$  continuously differentiable if  $r$  is the largest integer such that:

$$\tau_0(\epsilon, x) \left( \frac{1}{1 - \epsilon \bar{c}_1(x)(1 + l(x))} \right)^r < 1 \quad (3)$$

This means that existence and smoothness of this integral manifold depend directly on how sharper  $S_\epsilon$  contracts in the normal direction than expands in the tangent direction or else on how faster the  $X$  component converges to its "steady state" value than the  $\theta$ -component is changed.

Let  $\mathbf{M}$  be the set of functions  $M: S \times Z \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfying uniformly:

$$\begin{aligned} ||| M(\theta, k) |||_s &\leq m < x \\ ||| M(\theta^0, k) - M(\theta^1, k) |||_{\varphi^i} &\leq m_i ||| \theta^0 - \theta^1 ||| \quad i = 0, 1 \end{aligned}$$

where  $m, m_i$  will be precised later. In the periodic case,  $M(\theta, k)$  is chosen periodic in  $k$ . Equipped with

the distance associated with the norm:

$$\| M \| = \sup_{\theta \in S, k \in \mathbb{Z}} \| |M(\theta, k)| \|_s$$

$\mathbf{M}$  is a complete metric space.

In our above definition of the graph transform, we used  $(\bar{S}M_\epsilon^{\#})^{-1}$ . Let us prove that this makes sense.

**Lemma 1:** There exists  $\epsilon_*$ , such that for any  $\epsilon, \epsilon \leq \epsilon_*$ ,  $M$  in  $\mathbf{M}$  and  $k$  in  $\mathbb{Z}$ , one can find a unique function  $D(M, k) : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R}^p$  such that uniformly on  $\mathbf{M} \times \mathbb{Z} \times \mathbf{S}$ :

- i)  $\| D(M, k)(\psi) \| \leq \bar{\epsilon}$
- ii)  $\| D(M, k)(\psi^0) - D(M, k)(\psi^1) \| \leq d_1 \| \psi^0 - \psi^1 \|$
- iii)  $\| D(M^0, k)(\psi) - D(M^1, k)(\psi) \| \leq d_1^m \| M^0 - M^1 \|$
- iv)  $D(M, k)(\psi) = \bar{C}(M(\psi - \epsilon D(M, k)(\psi), k), \psi - \epsilon D(M, k)(\psi), k)$

**Proof:** Given  $M, k, \psi$  in  $\mathbf{M} \times \mathbb{Z} \times \mathbf{S}_1$ , we consider the complete metric space of vectors  $\mathbf{D}$  of  $\mathbf{R}^p$  such that:

$$\| D \| \leq \bar{\epsilon}$$

With our assumption on  $\epsilon$ , if  $\psi$  is in  $\mathbf{S}_1$ ,  $\psi - \epsilon D$  is in  $\mathbf{S}$ . On  $\mathbf{D}$ , we define an operator  $T(M, \psi, k)$  as:

$$T(M, \psi, k)(D) = \bar{C}(M(\psi - \epsilon D, k), \psi - \epsilon D, k)$$

We have:

$$\| T(M^0, \psi^0, k)(D^0) - T(M^1, \psi^1, k)(D^1) \| \leq \bar{\epsilon}_1 \left[ (1 + m_1) \| \psi^0 - \psi^1 \| + \epsilon (1 + m_1) \| D^0 - D^1 \| + \| M^0 - M^1 \| \right]$$

From the Uniform Contraction Mapping Theorem (Hale, 1980), the result follows with:

$$d_1 = \frac{\bar{\epsilon}_1(1 + m_1)}{1 - \epsilon \bar{\epsilon}_1(1 + m_1)} \quad d_1^m = \frac{1}{1 - \epsilon \bar{\epsilon}_1(1 + m_1)}$$

However up to now  $\psi$  was restricted to lie in  $\mathbf{S}_1$ . The extension to  $\mathbf{S}$  is obtained by taking:

$$D(M, k)(\psi) = 0 \quad \forall \psi \in \mathbf{S} - \mathbf{S}_1$$

Using the properties of  $\bar{C}$ , one can easily check that this is a licit extension satisfying i to iv

•

This Lemma proves:

$$\begin{aligned} \psi = \theta + \epsilon \bar{C}(M(\theta, k), \theta, k) &\iff \theta = \psi - \epsilon D(M, k)(\psi) \\ \psi \in \mathbf{S} - \mathbf{S}_1 &\Rightarrow D(M, k)(\psi) = 0 \end{aligned}$$

We remark that this implies the periodicity of  $D(M,k)(\psi)$  in the periodic case.

Having established that the graph transform is well defined, we study its properties in a slightly more general context:

Let us consider a graph transform  $T$  defined on  $\mathbf{M}$  by:

$$\begin{aligned} T(M)(\psi, k+1) &= A(\psi) M(\theta, k) + B'(\psi, M(\theta, k), k) \\ \theta &= \psi - \epsilon D(M, k)(\psi) \end{aligned}$$

where  $B': \mathbf{S} \times B(O, m) \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}^n$  satisfies uniformly:

- i)  $\|B'(\psi, X, k)\|_{\psi} \leq b$
- ii)  $\|B'(\psi^0, X^0, k) - B'(\psi^1, X^1, k)\|_{\psi^i} \leq b_i^{\psi} (\|\psi^0 - \psi^1\| + \epsilon b_i^{\theta} \|X^0 - X^1\|_{\psi^i}) \quad , \quad i = 0, 1$

**Lemma 2:**  $T(M)$  is contained in  $\mathbf{M}$  and  $T$  is a contraction.

**Proof:** a)  $T(M)$  is in  $\mathbf{M}$ :

i) With our adapted metric, we have:

$$\|T(M)(\psi, k+1)\|_{\psi} \leq \gamma(1+\epsilon\beta\bar{c}) \|M(\theta, k)\|_{\theta} + b$$

Hence  $m$  should satisfy, with  $\epsilon$  sufficiently small:

$$\gamma(1+\epsilon\beta\bar{c}) m + b \leq m$$

ii) Using the properties of  $M - D$ , for  $\psi^0, \psi^1$  in  $\mathbf{S}$ , we have:

$$\|T(M)(\psi^0, k+1) - T(M)(\psi^1, k+1)\|_{\psi^i} \leq [(\gamma + \epsilon b_i^{\theta})(1+\epsilon\beta\bar{c})m_1(1+\epsilon d_1) + \alpha a_1 m + b_i^{\psi}] \|\psi^0 - \psi^1\| \quad i = 0, 1$$

Hence  $m_1$  should satisfy, with  $\epsilon$  sufficiently small:

$$(1+\epsilon d_1)(\gamma + \epsilon b_i^{\theta})(1+\epsilon\beta\bar{c}) m_1 + \alpha a_1 m + b_i^{\psi} \leq m_1$$

iii)  $T(M)$  is periodic in  $k$  in the periodic case.

b)  $T$  is a contraction:

Let  $M^0, M^1$  be two elements of  $\mathbf{M}$ , we have:

$$\begin{aligned} \|T(M^0)(\psi, k+1) - T(M^1)(\psi, k+1)\|_{\psi} &\leq (\gamma + \epsilon b_i^{\theta})(1+\epsilon\beta\bar{c}) \|M^0(\theta^0, k) - M^1(\theta^1, k)\|_{\theta} \\ &\leq (\gamma + \epsilon b_i^{\theta})(1+\epsilon\beta\bar{c}) [\|M^0 - M^1\| + \epsilon m_1 \|D(M^0, k)(\psi) - D(M^1, k)(\psi)\|] \\ &\leq (\gamma + \epsilon b_i^{\theta})(1+\epsilon\beta\bar{c})(1+\epsilon m_1 d_1^m) \|M^0 - M^1\| \end{aligned}$$

Since  $\gamma < 1$ , taking the supremum on  $\mathbf{S} \times \mathbf{Z}$  gives the result for  $\epsilon$  sufficiently small

To prove existence of  $M_e(\theta, k)$ , we apply this Lemma with:

$$B'(\psi, X, k) = B(\psi) u_k$$

It follows that the graph transform has a fixed point in  $\mathbf{M}$  if:

$$\begin{aligned} \gamma(1+\epsilon\beta\bar{c}(m))m + bu &\leq m \leq x \\ \frac{m_1}{1-\epsilon\bar{c}_1(m)(1+m_1)}\gamma(1+\epsilon\beta\bar{c}(m)) + \alpha(b_1u+a_1m) &\leq m_1 \\ r_0(\epsilon, m) = \gamma(1+\epsilon\beta\bar{c}(m)) \left(1+\epsilon\frac{\bar{c}_1(m)m_1}{1-\epsilon\bar{c}_1(m)(1+m_1)}\right) &< 1 \end{aligned}$$

In particular, this confirms condition (3) of Remark 2.

We have proved the existence of a Lipschitz continuous function  $M_\epsilon : S \times Z \rightarrow \mathbb{R}^n$  whose graph is an integral manifold of  $S_\epsilon$  locally on  $S_0$  and which is periodic in the periodic case. We establish now that under assumption A5,  $M_\epsilon$  is Lipschitz continuously differentiable in  $\theta$ . Assuming for the time being that this property holds and denoting by  $L_\epsilon(\theta, k)$  what the differential of  $M_\epsilon(\theta, k)$  should be, formal derivations show that  $L_\epsilon(\theta, k)$  satisfies:

$$\begin{aligned} L_\epsilon(\psi, k+1) &= A(\psi)L_\epsilon(\theta, k) + B'(\psi, L_\epsilon(\theta, k), k) \\ \psi &= \theta + \epsilon \bar{C}(M_\epsilon(\theta, k), \theta, k) \end{aligned}$$

where, with  $\otimes$  denoting the tensor product:

$$\begin{aligned} B'(\psi, Y, k) &= -\epsilon A(\psi)Y \nabla \bar{C}(Y, \theta, k)(I + \epsilon \nabla \bar{C}(Y, \theta, k))^{-1} + \frac{\partial A}{\partial \theta}(\psi) \otimes M_\epsilon(\theta, k) + \frac{\partial B}{\partial \psi}(\psi) \otimes u_k \\ \nabla \bar{C}(Y, \theta, k) &= \frac{\partial \bar{C}}{\partial \theta}(M_\epsilon(\theta, k), \theta, k) + \frac{\partial \bar{C}}{\partial X}(M_\epsilon(\theta, k), \theta, k)Y \end{aligned}$$

Hence  $L_\epsilon$  should be the fixed point of the following operator:

$$\begin{aligned} T(L)(\psi, k+1) &= A(\psi)L(\theta, k) + B'(\psi, L(\theta, k), k) \\ \theta &= \psi - \epsilon D(M_\epsilon, k)(\psi) \end{aligned}$$

Let us prove that this operator has a fixed point. From its definition and assumption A5,  $B'$  satisfies assumptions of Lemma 2 with in particular:

$$\|X\|_S \leq m_1 \Rightarrow \|B'(\psi, X, k)\|_\psi \leq \epsilon \gamma(1+\epsilon\beta\bar{c})m_1 \frac{\bar{c}_1(1+m_1)}{1-\epsilon\bar{c}_1(1+m_1)} + \alpha(a_1m + b_1u)$$

Noting that  $m_1$  plays the role of  $m$  and  $m_2$  (the Lipschitz constant of  $L_\epsilon$ ) the role of  $m_1$ , Lemma 2 applies if:

$$\begin{aligned} \gamma(1+\epsilon\beta\bar{c}(m)) \frac{m_1}{1-\epsilon\bar{c}_1(m)(1+m_1)} + \alpha(a_1m + b_1u) &\leq m_1 \\ (1+\epsilon\beta\bar{c}(m)) \frac{(\gamma+\epsilon b_1^2)m_2}{1-\epsilon\bar{c}_1(m)(1+m_1)} + \alpha a_1m_1 + b_1u &\leq m_2 \\ r_1(\epsilon, m) = (1+\epsilon\beta\bar{c}(m))(\gamma+\epsilon b_1^2) \left(1+\epsilon\frac{m_2\bar{c}_1(m)}{1-\epsilon\bar{c}_1(m)(1+m_1)}\right) &< 1 \end{aligned}$$

Remark that the condition  $\tau_1' < 1$  guarantees not only existence but also Lipschitz continuity of  $L_\epsilon$ .

To complete our proof let us show that the candidate  $L_\epsilon$  is indeed the differential of  $M_\epsilon$ , i.e. for any  $\theta$  interior point of  $\mathbf{S}$  we have uniformly in  $k$ :

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{\| M_\epsilon(\theta+h, k) - M_\epsilon(\theta, k) - L_\epsilon(\theta, k)h \|}{\| h \|} = 0$$

To prove this equality, we consider  $\psi$  an interior point of  $\mathbf{S}$  and  $\bar{h}$  a (sufficiently small) vector in  $\mathbb{R}^p$  and we introduce the following notations (see A5):

$$\begin{aligned} \theta &= \psi + \epsilon D(M_\epsilon, k)(\psi) \\ h &= \bar{h} + \epsilon \left[ D(M_\epsilon, k)(\psi) - D(M_\epsilon, k)(\psi + \bar{h}) \right] \\ \delta_M(\theta, k, h) &= M_\epsilon(\theta+h, k) - M_\epsilon(\theta, k) - L_\epsilon(\theta, k)h \\ \bar{\delta}_C(\theta, k, h) &= \delta_C(M_\epsilon(\theta, k), \theta, k) - M_\epsilon(\theta+h, k) - M_\epsilon(\theta, k) + h \\ \Delta(\theta, k) &= \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{\| \delta_M(\theta, k, h) \|}{\| h \|} \end{aligned}$$

Note that  $\theta$  is also an interior point of  $\mathbf{S}$ . From A5 and since  $M_\epsilon$  is Lipschitz continuous, we have:

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{\| \bar{\delta}_C(\theta, k, h) \|}{\| h \|} = 0$$

Let us find a recurrence satisfied by  $\delta_M$ . The definition of  $M_\epsilon$  yields:

$$\begin{aligned} \delta_M(\psi, k+1, \bar{h}) &= A(\psi + \bar{h}) \delta_M(\theta, k, h) + A(\psi + \bar{h}) L_\epsilon(\theta, k)h - L_\epsilon(\psi, k+1) \bar{h} + \\ &\quad + (A(\psi + \bar{h}) - A(\psi)) M_\epsilon(\theta, k) + (B(\psi + \bar{h}) - B(\psi)) u_k \end{aligned}$$

We have also:

$$\begin{aligned} \bar{h} &= [I + \epsilon \nabla \bar{C}(L_\epsilon(\theta, k), \theta, k)] h + \epsilon \frac{\partial \bar{C}}{\partial X}(M_\epsilon(\theta, k), \theta, k) \delta_M(\theta, k, h) + \epsilon \bar{\delta}_C(\theta, k, h) \\ L_\epsilon(\psi, k+1) &= A(\psi) L_\epsilon(\theta, k) [I + \epsilon \nabla \bar{C}(L_\epsilon(\theta, k), \theta, k)]^{-1} + \frac{\partial A}{\partial \psi}(\psi) \otimes M_\epsilon(\theta, k) + \frac{\partial B}{\partial \psi}(\psi) \otimes u_k \end{aligned}$$

This yields:

$$\begin{aligned} \delta_M(\psi, k+1, \bar{h}) &= A(\psi + \bar{h}) \delta_M(\theta, k, h) + \delta_A(\psi, k, \bar{h}) M_\epsilon(\theta, k) + \delta_B(\psi, k, \bar{h}) u_k + (A(\psi + \bar{h}) - A(\psi)) L_\epsilon(\theta, k) h + \\ &\quad + \epsilon A(\psi) L_\epsilon(\theta, k) [I + \epsilon \nabla \bar{C}(M_\epsilon(\theta, k), \theta, k)]^{-1} [\frac{\partial \bar{C}}{\partial X}(M_\epsilon(\theta, k), \theta, k) \delta_M(\theta, k, h) + \bar{\delta}_C(\theta, k, h)] \end{aligned}$$

Noticing that:

$$\frac{\| h \|}{1 + \epsilon d_1} \leq \| \bar{h} \| \leq (1 + \epsilon \bar{c}_1(1 + m_1)) \| h \|$$

taking the  $\| \cdot \|$ -norm, dividing by  $\| h \|$  and taking the  $\limsup$  for  $h$  going to zero, we obtain:

$$\Delta(\psi, k+1) \frac{1}{1+\epsilon d_1} \leq \gamma (1+\epsilon \beta \bar{c}) \left( 1 + \epsilon \frac{m_1 \bar{c}_1}{1-\epsilon \bar{c}_1(1+m_1)} \right) \Delta(\theta, k)$$

On the other hand, for any interior point  $\theta$  of  $\mathbf{S}$ , the properties of  $M_\epsilon$ ,  $L_\epsilon$  give for all  $k$ :

$$\Delta(\theta, k) \leq 2 m_1$$

Given  $k$  and  $\theta$ , an interior point of  $\mathbf{S}$ , we construct a sequence  $(\theta_j)$   $j \in \mathbb{N}$  as:

$$\theta_{j+1} = \theta_j - \epsilon D(M_\epsilon, k-j-1)(\theta_j) \quad \theta_0 = \theta$$

By induction,  $\theta_j$  is an interior point of  $\mathbf{S}$  and we have:

$$\Delta(\theta, k) \leq r_1(\epsilon, m)^j \Delta(\theta_j, k-j) \leq r_1(\epsilon, m)^j 2m_1$$

with

$$\begin{aligned} r_1(\epsilon, m) &= \gamma (1+\epsilon \beta \bar{c}(m)) \left( 1 + \epsilon \frac{m_1 \bar{c}_1(m)}{1-\epsilon \bar{c}_1(m)(1+m_1)} \right) \frac{1}{1-\epsilon \bar{c}_1(m)(1+m_1)} \\ &= r_0(\epsilon, m) \frac{1}{1-\epsilon \bar{c}_1(m)(1+m_1)} \end{aligned}$$

Since our relation holds for all positive  $j$ , and as expected from Remark 2, we have established that  $L_\epsilon$  is the differential of  $M_\epsilon$  if:

$$r_1(\epsilon, m) < 1$$

•

**Approximation:** We know now the existence of  $M_\epsilon$  solution of

$$M_\epsilon(\psi, k+1) = A(\psi) M_\epsilon(\psi - \epsilon D(M_\epsilon, k)(\psi), k) + B(\psi) u_k$$

Getting a solution of this system for each  $\psi$ , would be equivalent to getting all the solutions of  $\bar{S}_\epsilon$  bounded on  $\mathbf{Z}$ . However we notice that this equation can be rewritten in:

$$M_\epsilon(\psi, k+1) = A(\psi) M_\epsilon(\psi, k) + B(\psi) u_k + A(\psi) \left[ M_\epsilon(\psi - \epsilon D(M_\epsilon, k)(\psi), k) - M_\epsilon(\psi, k) \right]$$

This is a linear system with a non linear forcing term which disappears for  $\epsilon=0$ . Using Poincaré method of expansion with respect to a small parameter, we can obtain a family of approximations:

"o"-order approximation: taking  $\epsilon=0$  gives:

$$M_0(\psi, k+1) = A(\psi) M_0(\psi, k) + B(\psi) u_k$$

This is the solution of  $\mathbf{S}_0$ .

"1"-order approximation: retaining the first order term in  $\epsilon$  gives:

$$M_1(\psi, k+1) = A(\psi) M_1(\psi, k) + B(\psi) u_k - \epsilon A(\psi) L_0(\psi, k) \bar{C}(M_0(\psi, k), \psi, k)$$

again a linear system.

Quality of these approximations can be characterized as follows:

i) We notice that  $M_0$  belongs to the set  $\mathbf{M}$ , hence the graph transform properties imply:

$$|M_0 - M_\epsilon| \leq \frac{|M_0 - T(M_0)|}{1 - \tau_0(\epsilon, m)}$$

But:

$$|||M_0(\psi, k+1) - T(M_0)(\psi, k+1)|||_\psi \leq \gamma |||M_0(\psi - \epsilon D(M_0, k)(\psi), k) - M_0(\psi, k)|||_\psi$$

It follows:

$$|M_0 - M_\epsilon| \leq \epsilon \frac{\gamma m_1 \bar{c}}{1 - \tau_0(\epsilon, m)} = \epsilon f^0$$

Similary for the gradient matrix, we get:

$$|L_0 - L_\epsilon| \leq \frac{|L_0 - T(L_0)|}{1 - \tau_1(\epsilon, m)}$$

and

$$L_0(\psi, k+1) - T(L_0)(\psi, k+1) = A(\psi)[L_0(\psi, k) - L_0(\theta, k)(I + \epsilon \nabla \bar{C}(L_0(\theta, k), \theta, k))^{-1}] + \frac{\partial A}{\partial \psi}(\psi) \otimes (M_0(\psi, k) - M_0(\theta, k))$$

with:

$$\theta = \psi - \epsilon D(M_0, k)(\psi)$$

Hence:

$$|L_0 - L_\epsilon| \leq \frac{\gamma \left( \epsilon m_0 \bar{c} + \epsilon \frac{m_1 \bar{c}_1 (1+m_1)(1+\epsilon \beta \bar{c})}{1-\epsilon \bar{c}_1 (1+m_1)} \right) + \alpha a_1 m_1 (\epsilon m_1 \bar{c} + \epsilon f^0)}{1 - \tau_1(\epsilon, m)} = \epsilon f^1$$

ii)  $M_0^1$  defined in iii of Theorem 1, is given by a non critical linear system with bounded input. Hence, it is uniquely defined and bounded. Denoting:

$$\Delta(\psi, k) = M_1(\psi, k) - M_0^1(\psi, k)$$

we have:

$$\Delta(\psi, k+1) = A(\psi) \left[ \Delta(\psi, k) + M_\epsilon(\theta, k) - M_\epsilon(\psi, k) + \epsilon L_0(\psi, k) \bar{C}(M_0(\psi, k), \psi, k) \right]$$

$$\theta = \psi - \epsilon D(M_\epsilon, k)(\psi)$$

We know that the segment  $[\theta, \psi]$  is contained in  $\mathbf{S}$ . The Mean Value Theorem gives for some  $\xi$   $0 \leq \xi \leq 1$ :

$$M_\epsilon(\theta, k) - M_\epsilon(\psi, k) = -\epsilon L_1(\psi + \xi(\theta - \psi), k) \bar{C}(M_0(\psi, k), \theta, k)$$

Hence, using the properties of  $L_\epsilon$ ,  $L_0 - L_\epsilon$ ,  $M_0 - M_\epsilon$ ,  $D$ , we get:

$$||| M_\epsilon(\theta, k) - M_\epsilon(\psi, k) + \epsilon L_0(\psi, k) \bar{C}(M_0(\psi, k), \psi, k) |||_\varphi \leq \epsilon^2 m_2 \xi \bar{e}^2 + \epsilon^2 f_1^0 \bar{e} + \epsilon m_1 \bar{e} (\epsilon(1+m_1) \bar{e} + \epsilon f_1^0)$$

This yields:

$$|| M_\epsilon - M_1 || \leq \epsilon^2 \gamma \frac{m_2 \bar{e}^2 + f_1^0 \bar{e} + m_1 \bar{e} (\bar{e}(1+m_1) + f_1^0)}{1 - \gamma} = \epsilon^2 f_1^1$$

**Attractiveness:** let  $(X, \theta, k)$  be an element of  $B(O, x) \times \mathbf{S}_0 \times \mathbf{Z}$ , for  $x \geq m$ , and  $(Y, \psi, k+1)$  be its image by  $S_\epsilon$ . Paying attention to the fact that we have  $X$  only in  $B(O, x)$  and not in  $B(O, m)$ , we can however proceed as in Lemma 1, to get:

$$||| D(M_\epsilon, k)(\psi) - C(X, \theta, k) ||| \leq d_1^m(x) ||| X - M_\epsilon(\theta, k) |||_\varphi \quad d_1^m(x) = \frac{\bar{e}_1(x)}{1 - \epsilon \bar{e}_1(x)(1+m_1)}$$

Then, as in Lemma 2, we obtain:

$$||| Y - M_\epsilon(\psi, k+1) |||_\varphi \leq r_0(\epsilon, x) ||| X - M_\epsilon(\theta, k) |||_\varphi$$

Applying this inequality to a sequence  $(X_{k+1}, \theta_k)$  of  $B([k_0, k_1], \mathbf{S}_0)$ , we obtain for all  $k, k' \quad k_0 \leq k' \leq k < k_1$ :

$$|| X_{k+1} - M_\epsilon(\theta_k, k+1) || \leq r_0(\epsilon, x)^{k-k'} \alpha || X_{k'+1} - M_\epsilon(\theta_{k'}, k'+1) ||$$

Moreover if  $X_{k+1}, \theta_k$  lies in  $B(O, x) \times \mathbf{S}_0$  for all  $k$ , then this inequality holds for all  $k \quad k' \leq k$ . This implies

$$X_{k+1} = M_\epsilon(\theta_k, k+1)$$

This completes the proof of Theorem 1.

In the following, we will be interested in characterizing the set  $B([k_0, \infty), \mathbf{S}_0)$ . The attractiveness property implies that this set is subset of  $L_\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p)$  from which it inherits a complete metric space property. We see also that the corresponding sequences of elevation above the manifold have a preferred exponentially weighted supremum norm:

$$\|E\| = \sup_{k \geq k_0} \left\{ \rho^{k\sigma^k} \|E_k\| \right\} \quad \rho < 1$$

For  $\rho = r_0(\epsilon, x)$ , we know that the map:

$$\begin{aligned} B([k_0, \infty), S_0) &\rightarrow \mathbf{R}^* \\ (X, \theta) &\rightarrow E \end{aligned}$$

is bounded. We have even:

**Lemma 3:** Under assumptions A1 to A5, there exists  $\epsilon_*$  such that for any  $\epsilon, \epsilon \leq \epsilon_*$ , one can find  $\rho < 1$  such that the above map is Lipschitz continuous.

A key technical Lemma to prove this statement is the following consequence of Hadamard's Lemma (Aubin, Ekeland, 1984):

**Lemma 4:** Let  $f$  be a Lipschitz continuously differentiable function  $f: C \subset \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}^*$  with  $f_1, f_2$  as Lipschitz constants. If the segments  $[x^0 - x^0 + \delta^0], [x^1 - x^1 + \delta^1]$  are contained in  $C$ , then:

$$\|f(x^0 + \delta^0) - f(x^0) + f(x^1) - f(x^1 + \delta^1)\| \leq (f_1 + 1/2 f_2 \| \delta^0 \|) \| \delta^0 - \delta^1 \| + f_2 \| \delta^0 \| \| x^0 - x^1 \|$$

**Proof of Lemma 3:** Let  $(X^0, \theta^0, k), (X^1, \theta^1, k)$  be two points in  $B(O, x) \times S_0 \times Z$  and  $(Y^0, \psi^0, k), (Y^1, \psi^1, k)$  be their respective image by  $S_\epsilon$ . For  $i=0,1$ , we define:

$$\begin{aligned} E^i &= X^i - M_\epsilon(\theta^i, k) \quad F^i = Y^i - M_\epsilon(\psi^i, k) \quad G^i = X^i - M_\epsilon(\theta^i + \Delta^i, k) \\ \Delta^i &= \psi^i - \theta^i - \epsilon D(M_\epsilon, k)(\psi^i) = \epsilon \left[ C(X^i, \theta^i, k) - C(M_\epsilon(\theta^i + \Delta^i, k), \theta^i + \Delta^i, k) \right] \end{aligned}$$

We have:

$$\| \Delta^0 \| \leq \epsilon \epsilon_1 (\| G^0 \| + \| \Delta^0 \|) \quad \| G^0 \| \leq \| E^0 \| + m_1 \| \Delta^0 \|$$

which implies:

$$\| \Delta^0 \| \leq \epsilon \frac{\epsilon_1}{1 - \epsilon \epsilon_1 (1 + m_1)} \| E^0 \| \quad \| G^0 \| \leq \frac{1 - \epsilon \epsilon_1}{1 - \epsilon \epsilon_1 (1 + m_1)} \| E^0 \|$$

On the other hand, by definition:

$$F^0 - F^1 = A(\psi^0)(G^0 - G^1) + (A(\psi^0) - A(\psi^1))G^1$$

But, noticing that, for  $i=0,1$ , the segments  $[X^i - M_\epsilon(\theta^i + \Delta^i, k)]$  and  $[\theta^i - \theta^i + \Delta^i]$  are contained in  $B(O, x)$  and  $S_1$  respectively, we apply Lemma 4 to  $M_\epsilon$  and  $C$  to obtain:

$$\begin{aligned} \|\| G^0 - G^1 \| \|_{\varphi^0} &\leq \|\| E^0 - E^1 \| \|_{\varphi^0} + (m_1 + 1/2m_2 \|\Delta^0\|) \|\Delta^0 - \Delta^1\| + m_2 \|\Delta^0\| \|\theta^0 - \theta^1\| \\ \|\Delta^0 - \Delta^1\| &\leq \epsilon \left[ (\epsilon_1 + 1/2\epsilon_2 (\|\Delta^0\| + \|G^0\|)) (\|\| G^0 - G^1 \| \| + \|\Delta^0 - \Delta^1\|) + \right. \\ &\quad \left. + \epsilon_2 (\|\Delta^0\| + \|G^0\|) (\|\| X^0 - X^1 \| \| + \|\theta^0 - \theta^1\|) \right] \end{aligned}$$

It follows that:

$$\begin{aligned} &\left[ 1 - \epsilon (\epsilon_1 + 1/2\epsilon_2 (\|\Delta^0\| + \|G^0\|)) (1 + m_1 + 1/2m_2 \|\Delta^0\|) \right] \|\| G^0 - G^1 \| \|_{\varphi^0} \leq \\ &\leq [1 - \epsilon (\epsilon_1 + 1/2\epsilon_2 (\|\Delta^0\| + \|G^0\|)) \|\| E^0 - E^1 \| \|_{\varphi^0} + ((1 - \epsilon \epsilon_1)m_2 \|\Delta^0\| + \epsilon \epsilon_2 m_1 (\|\Delta^0\| + \|G^0\|)) \|\theta^0 - \theta^1\| + \\ &\quad + \epsilon \epsilon_2 (\|\Delta^0\| + \|G^0\|) (m_1 + 1/2m_2 \|\Delta^0\|) \|\| X^0 - X^1 \| \|] \end{aligned}$$

This implies existence of a constant  $q_0$  such that:

$$\|\| F^0 - F^1 \| \|_{\varphi^0} \leq \rho \|\| E^0 - E^1 \| \|_{\varphi^0} + q_0 \|\| E^0 \| (\|\| X^0 - X^1 \| \| + \|\theta^0 - \theta^1\|)$$

with:

$$\rho = \frac{\gamma(1 + \epsilon \beta \epsilon)}{1 - \epsilon \left( \epsilon_1 + \frac{\epsilon_2}{2(1 - \epsilon \epsilon_1(1 + m_1))} \|\| E^0 \| \| \right)} \left( 1 + \frac{m_2 \epsilon_1}{1 - \epsilon \epsilon_1(1 + m_1)} \|\| E^0 \| \| \right)$$

Now we apply these inequalities to two sequences  $(X_{k+1}^0, \theta_k^0), (X_{k+1}^1, \theta_k^1)$  of  $B([k_0, \infty), S_0)$ :

we have:

$$\|\| E_k^0 \| \| \leq (x - m) \tau_0^{k-k_0} \quad \|\| E_{k_0+1}^0 - E_{k_0+1}^1 \| \|_{\ell_{k_0}^0} \leq \alpha \|\| X_{k_0+1}^0 - X_{k_0+1}^1 \| \| + m_1 \|\| \theta_{k_0}^0 - \theta_{k_0}^1 \| \|$$

hence:

$$\|\| E_{k+1}^0 - E_{k+1}^1 \| \|_{\ell_k^0} \leq \rho \|\| E_k^0 - E_k^1 \| \|_{\ell_{k-1}^0} + q_0 (x - m) \tau_0^{k-k_0} (\|\| X_k^0 - X_k^1 \| \| + \|\theta_k^0 - \theta_k^1\|)$$

which yields:

$$\|\| E_{k+1}^0 - E_{k+1}^1 \| \| \leq \rho^{k-k_0} (1 + \frac{\tau_0}{\rho - \tau_0}) q \sup_{k \geq k_0} (\|\| X_{k+1}^0 - X_{k+1}^1 \| \| + \|\theta_k^0 - \theta_k^1\|)$$

with:

$$q = \max \{ \alpha, m_1, q_0 (x - m) \}$$

•

#### 4. Topological Orbital Equivalence with Asymptotic Phase

In this section, we establish the existence of an homeomorphism between subsets of  $\mathbf{B}([k_0, \infty), \mathbf{S}_0)$  and  $\mathbf{B}^M([k_0, \infty), \mathbf{S}_0)$ .

For such a strong property to hold, solutions of  $S_\epsilon$  have to be very close to solutions of  $SM_\epsilon$ . As a consequence of attractiveness, we know that for any sequence  $(X_{k+1}, \theta_k)$  (*resp.*  $(X_{k+1}^M, \theta_k^M)$ ) of  $\mathbf{B}([k_0, \infty), \mathbf{S}_0)$  (*resp.*  $(\mathbf{B}^M([k_0, \infty), \mathbf{S}_0)$ ) we have for all  $k - k \geq k_0$ :

$$\rho^{k-\sigma-k} \parallel (X_{k+1}, \theta_k, k+1) - SM_\epsilon(X_k, \theta_{k-1}, k) \parallel \leq \epsilon (1 + (a_1 x + b_1 u)) c_1(x-m) \quad \rho = \tau_0(\epsilon, x)$$

respectively:

$$\rho^{k-\sigma-k} \parallel (X_{k+1}^M, \theta_k^M, k+1) - S_\epsilon(X_k^M, \theta_{k-1}^M, k) \parallel \leq \epsilon (1 + (a_1 x + b_1 u)) c_1(x-m) \quad \rho = \gamma(1 + \epsilon \beta \epsilon)$$

This means that  $(X_{k+1}, \theta_k)$  (*resp.*  $(X_{k+1}^M, \theta_k^M)$ ) is an  $\epsilon$ -pseudo solution of  $SM_\epsilon$  (*resp.*  $S_\epsilon$ ) in the neighborhood of a normally attractive integral manifold. Invoking the Shadowing Lemma, we may expect the existence of a unique solution  $(\tilde{X}_{k+1}, \tilde{\theta}_k)$  (*resp.*  $(\tilde{X}_{k+1}^M, \tilde{\theta}_k^M)$ ) of  $SM_\epsilon$  (*resp.*  $S_\epsilon$ )  $\epsilon$ -close to the corresponding  $\epsilon$ -pseudo solution for the exponentially weighted supremum norm. This allows us to define a map  $\Phi(k_0)$  (*resp.*  $\Phi^M(k_0)$ ) as:

$$\Phi(k_0)(X, \theta)_k = (\tilde{X}_{k+1}, \tilde{\theta}_k) \quad (\text{resp. } \Phi^M(k_0)(X^M, \theta^M)_k = (\tilde{X}_{k+1}^M, \tilde{\theta}_k^M))$$

Clearly from the nice  $\epsilon$ -closeness property, this map is a very good candidate for the homeomorphism we are looking for.

To obtain the Shadowing Lemma in our context, we have to shrink the set  $\mathbf{S}_0$  again: let  $\mathbf{S}_0$ ,  $\mathbf{S}_1$  be compact sets with non empty interior such that:

$$\mathbf{S}_0 + \eta \subset \mathbf{S}_1 \quad \mathbf{S}_1 + \eta \subset \mathbf{S}_0$$

**Theorem 2:** Under assumptions A1 to A4, for any compact set  $\mathbf{S}_1$  strictly contained in  $\mathbf{S}$ , there exists  $\epsilon_*$  such that for any  $\epsilon$ ,  $\epsilon \leq \epsilon_*$ , one can find  $g^x$ ,  $g^y$ ,  $g_1$ ,  $\sigma$ ,  $0 \leq \sigma < 1$  and for any  $k_0$ , maps:

$$\Phi(k_0) : \mathbf{B}([k_0, \infty), \mathbf{S}_1) \rightarrow \mathbf{B}^M([k_0, \infty), \mathbf{S}_1) \quad \text{and} \quad \Phi^M(k_0) : \mathbf{B}^M([k_0, \infty), \mathbf{S}_1) \rightarrow \mathbf{B}([k_0, \infty), \mathbf{S}_0)$$

such that (similarly for  $\Phi^M$ ):

i) For any sequence  $(X_{k+1}, \theta_k)$  in  $\mathbf{B}([k_0, \infty), \mathbf{S}_1)$ , its image  $(\tilde{X}_{k+1}^M, \tilde{\theta}_k^M)$  by  $\Phi(k_0)$  satisfies for all  $k - k \geq k_0$ :

$$X_{k_0+1} = \tilde{X}_{k_0+1} \quad \sigma^{k-\sigma-k} \parallel X_{k+1} - \tilde{X}_{k+1}^M \parallel \leq \epsilon g^x(\|E_{k_0+1}\|) \quad \sigma^{k-\sigma-k} \parallel \theta_k - \tilde{\theta}_k^M \parallel \leq \epsilon g^y(\|E_{k_0+1}\|)$$

where  $g^x$ ,  $g^y$  are positive non decreasing functions of the norm of the elevation above the manifold at time  $k_0$ .

ii)  $\Phi(k_0)(X, \theta)_k = \Phi(k'_0)(X, \theta)_k \quad k_0 \leq k'_0 \leq k$

iii) If A5 holds, then  $\Phi(k_0)$  is Lipschitz continuous in the following strong sense: for all  $k - k_0 \geq k_0$ :

$$\| \bar{X}_{k+1}^0 - \bar{X}_{k+1}^{k_0} \| + \| \bar{\theta}_k^0 - \bar{\theta}_k^{k_0} \| \leq \| X_{k+1}^0 - X_{k+1}^{k_0} \| + \| \theta_k^0 - \theta_k^{k_0} \| + \sigma^{k-k_0} g_1 \sup_{k' \geq k_0} (\| X_{k+1}^0 - X_{k+1}^{k'} \| + \| \theta_k^0 - \theta_k^{k'} \|)$$

Moreover  $\Phi(k_0)$  (*resp.*  $\Phi^M(k_0)$ ) is injective and the restriction of  $\Phi^M(k_0) \circ \Phi(k_0)$  (*resp.*  $\Phi(k_0) \circ \Phi^M(k_0)$ ) to  $B([k_0, \infty), S_0)$  (*resp.*  $B^M([k_0, \infty), S_0)$ ) is the identity map.

**Remark 3:** 1- For the continuous time case, Riedle and Kokotovic (1986) have shown that if there exists a uniformly stable solution  $(\theta_k^M)$  of  $SM_\epsilon^M$  remaining in  $S_1$  after time  $k_0$ , then  $B([k_0, \infty), S_0)$  is not empty and has a non empty interior.

2- Since we have only:

$$\sigma^{k-k_0} \| \theta_k - \bar{\theta}_k \| \leq \eta$$

we have to take  $\theta_k$  in  $S_0$  (*resp.*  $S_1$ ) to guarantee that  $\bar{\theta}_k^M$  is in  $S_1$  (*resp.*  $S_0$ ).

3- Since we have an exponentially decaying distance between  $(X_{k+1}, \theta_k)$  and  $(\bar{X}_{k+1}^M, \bar{\theta}_k^M)$ .  $\Phi(k_0)$  is an asymptotic phase.

4- We have established:

$$B([k_0, \infty), S_0) \subset \Phi^M(k_0) \left( B^M([k_0, \infty), S_1) \right)$$

This means that any solution  $(X_{k+1}, \theta_k)$  of  $S_\epsilon$  which remains in  $B(O, \epsilon) \times S_0$  on a semi-infinite time interval (i.e. belongs to  $B([k_0, \infty), S_0)$  for some  $k_0$ ) can be approximated with an exponentially decaying distance by a solution of  $SM_\epsilon$  satisfying the same property. Moreover these two sequences have the same  $X$ -values  $X_{k_0+1}$  at time  $k_0$  and their  $\theta$ -value at this time are at an  $\epsilon$ -distance, the magnitude of this distance increasing with the norm of the elevation above the manifold at time  $k_0$ .

These two solutions have the same type of Lyapunov stability in each of the following cases: stability, uniform stability, asymptotic stability, uniform asymptotic stability, instability. Uniformity follows from ii and the independence of  $\sigma$ ,  $g^x$ ,  $g^y$ ,  $g_1$  in  $k_0$ . Asymptotic or exponential property results from the  $\sigma^{k-k_0}$  term in iii. (In)stability is a consequence of the continuity property iii as shown in the following Lemma:

**Lemma 5:** If the sequence  $(X_{k+1}, \theta_k)$  (*resp.*  $(X_{k+1}^M, \theta_k^M)$ ) in the interior (in the  $L_\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$  sense) of  $B([k_0, \infty), S_0)$  (*resp.*  $B^M([k_0, \infty), S_1)$ ) is a stable solution of  $S_\epsilon$  (*resp.*  $SM_\epsilon$ ), its image by  $\Phi(k_0)$  (*resp.*  $\Phi^M(k_0)$ ) is a stable solution of  $SM_\epsilon$  (*resp.*  $S_\epsilon$ ).

**Proof:** As above let  $(\bar{X}_{k+1}^M, \bar{\theta}_k^M)$  denote the image of  $(X_{k+1}, \theta_k)$  by  $\Phi(k_0)$ . Let  $(X_{k+1}^0, \theta_k^0)$  be the stable solution of  $S_\epsilon$  in the interior of  $B([k_0, \infty), S_0)$ . Stability implies existence of an open neighborhoud

$\mathbf{V}(X_{k_0+1}^0, \theta_{k_0}^0)$  in  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$  on which the injective application associating a solution of  $S_\epsilon$  to its value at time  $k_0$  is continuous. Composing by  $\Phi(k_0)$ , we obtain a continuous injective application:

$$\Psi : \mathbf{V}(X_{k_0+1}^0, \theta_{k_0}^0) \rightarrow \mathbf{B}^M([k_0, \infty), \mathbf{S}_1)$$

$$(X_{k_0+1}, \theta_{k_0}) \mapsto (\bar{X}_{k_0+1}^M, \bar{\theta}_{k_0}^M)$$

Restricting  $\Psi$  to time  $k = k_0$ , we have a continuous injective application:

$$\Psi_{k_0} : \mathbf{V}(X_{k_0+1}^0, \theta_{k_0}^0) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$$

$$(X_{k_0+1}, \theta_{k_0}) \rightarrow (\bar{X}_{k_0+1}^M, \bar{\theta}_{k_0}^M)$$

It follows from the Brouwer's Domain Invariance Theorem (Dugundji, 1966) that this application is an homeomorphism from the open set  $\mathbf{V}(X_{k_0+1}^0, \theta_{k_0}^0)$  in its open image  $\tilde{\mathbf{V}}(\bar{X}_{k_0+1}^M, \bar{\theta}_{k_0}^M)$ . We conclude that the following application is continuous and is defined on a non empty open subset of  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$

$$\Psi \circ \Psi_{k_0}^{-1} : \tilde{\mathbf{V}}(\bar{X}_{k_0+1}^M, \bar{\theta}_{k_0}^M) \rightarrow \mathbf{B}^M([k_0, \infty), \mathbf{S}_1)$$

This is nothing but the application associating the solution  $(\bar{X}_{k_0+1}^M, \bar{\theta}_{k_0}^M)$  of  $SM_\epsilon$  to its value  $(\bar{X}_{k_0+1}^M, \bar{\theta}_{k_0}^M)$  at time  $k_0$ . Since this can be done for any  $k_0 < k' \geq k_0$ , we have proved stability of  $(\bar{X}_{k_0+1}^M, \bar{\theta}_{k_0}^M)$  •

From this Lemma, instability is obtained by contradiction.

Noticing that if  $(X_{k+1}^M, \theta_k^M)$  belongs to  $\mathbf{B}^M([k_0, \infty), \mathbf{S}_0)$  then this solution of  $SM_\epsilon$  and  $(\theta_k^M)$  as solution of  $SM_\epsilon^\#$  have the same type of Lyapunov stability or instability, we have established the main following result of this paper:

**Main result:** Under assumptions A1 to A5, for each  $x - x \geq m$  there exists  $\epsilon_*$  such that for any  $\epsilon, \epsilon \leq \epsilon_*$  the systems  $S_\epsilon$  and  $SM_\epsilon$ , when restricted to  $B(O, x) \times \mathbf{S}_0$ , are topologically orbitally equivalent with asymptotic phase. More precisely, for any  $k_0$ , each solution  $(X_{k+1}, \theta_k)$  of  $S_\epsilon$  such that:

$$\theta_k \in \mathbf{S}_0 \quad \forall k \geq k_0 \quad \| X_{k+1} - M_\epsilon(\theta_k, k+1) \| \leq \frac{x-m}{\alpha}$$

can be obtained from a solution  $(\theta_k^M)$  of  $SM_\epsilon^\#$  satisfying:

$$\theta_k^M \in \mathbf{S}_1 \quad \forall k \geq k_0$$

and  $X_{k+1} - M_\epsilon(\theta_k^M, k+1)$  and  $\theta_k^M - \theta_k$  decay exponentially. Moreover,  $(\theta_k^M)$  and  $(X_{k+1}, \theta_k)$  have the same type of Lyapunov stability or instability.

To prove Theorem 2, we study an auxiliary system defined as follows:

Let  $(\phi_k)$  be a sequence whose elements lie in  $\mathbf{S}_1'$  and satisfy uniformly on  $\mathbf{N}$ , the set of positive integers:

$$\|\phi_{k+1} - \phi_k\| \leq 1 + \epsilon \beta c$$

We consider the following auxiliary system on  $\mathbf{R}^x \times \mathbf{R}^p$

$$\begin{aligned} \partial X_{k+1} &= A(\phi_k + \partial\theta_k) \partial X_k + B[\partial\theta_k, k] & \partial X_1 \in B(O, \frac{x-m}{\alpha}) \\ \partial\theta_k &= \partial\theta_{k-1} + \epsilon C[\partial X_k, \partial\theta_{k-1}, k] \end{aligned} \quad (\partial S)$$

where  $B$  "  $C$  " are defined and Lipschitz continuous on  $B(O, \eta) \times \mathbf{N}$  and  $B(O, x-m) \times B(O, \eta) \times \mathbf{N}$  respectively with  $b_1$  "  $c_1$  " as respective Lipschitz constant and such that uniformly on  $\mathbf{N}$ :

$$B[0, k] = 0 \quad \|C[0, 0, k]\| \leq \epsilon_1 x_1 \rho^{k-1} \quad \rho < 1$$

For two sequences  $(\phi_k^0), (\phi_k^1)$  satisfying uniformly on  $\mathbf{N}$ :

$$\|\phi_k^0 - \phi_k^1\| \leq \nu$$

we will be interested in the relation between the solutions of the corresponding auxiliary systems  $\partial S^0$   $\partial S^1$  assuming that:

$$\begin{aligned} \|B^0(\partial\theta^0, k) - B^1(\partial\theta^1, k)\| &\leq b_2^* \left[ \max(\|\partial\theta^0\|, \|\partial\theta^1\|) \nu + \|\partial\theta^0 - \partial\theta^1\| \right] \\ \|C^0(\partial X^0, \partial\theta^0, k) - C^1(\partial X^1, \partial\theta^1, k)\| &\leq \epsilon_2^* \left[ \left( \max(\|\partial X^0\| + \|\partial\theta^0\|, \|\partial X^1\| + \|\partial\theta^1\|) + \rho^{k-1} \right) \nu + \right. \\ &\quad \left. + \|\partial X^0 - \partial X^1\| + \|\partial\theta^0 - \partial\theta^1\| \right] \end{aligned}$$

As for describing the  $\epsilon$ -pseudo solution property, we use an exponentially weighted supremum norm to study this system:

$$\|\partial X\| = \sup_{k \geq 0} (\sigma^{-k} \|\partial X_{k+1}\|) \quad \|\partial\theta\| = \sup_{k \geq 0} (\sigma^{-k} \|\partial\theta_k\|) \quad \rho \leq \sigma < 1$$

The following Lemma states the existence of a unique solution of  $\partial S$  which is bounded for this norm.

**Lemma 6:** Under the above assumptions and assumptions A2, A3, there exists  $\epsilon_*$  such that for any  $\epsilon$ ,  $\epsilon \leq \epsilon_*$ , one can find constants  $\partial^x g_1$ ,  $\sigma$  such that for any initial  $\partial X$ -condition  $\partial X_1$  in  $B(O, \frac{x-m}{\alpha})$ :

i) the system  $\partial S$  has a unique bounded solution satifying:

$$\|\partial X\| \leq x_1 = \max(\alpha \|\partial X_1\|, \epsilon \partial^x g_1) \quad \|\partial\theta\| \leq \epsilon \frac{c_1^*(x_1 + x_1)}{1 - \sigma - \epsilon c_1^*} \leq \eta$$

ii) If  $(\partial X_{k+1}^0, \partial\theta_k^0), (\partial X_{k+1}^1, \partial\theta_k^1)$  are these solutions for the systems  $\partial S^0$   $\partial S^1$  respectively, we have:

$$|\partial X^0 - \partial X^1| + |\partial \theta^0 - \partial \theta^1| \leq g_1(||\partial X_1^0 - \partial X_1^1|| + \nu)$$

$\sigma$ ,  $\partial^x$  and  $g_1$  will be explicited in the proof.

Let us explain the interest of this Lemma for proving Theorem 2:

1- If  $(X_{k+1}, \theta_k)$  is a sequence of  $B([k_0, \infty), S_1')$ , we define its auxiliary system  $\partial S$  by choosing:

$$\phi_k = \theta_{k+k_0} \quad \partial X_1 = 0$$

$$B'(\partial \theta, k) = (A(\phi_k + \partial \theta) - A(\phi_k)) X_{k+k_0} + (B(\phi_k + \partial \theta) - B(\phi_k)) u_{k+k_0}$$

$$C'(\partial X, \partial \theta, k) = C(M_c(\phi_{k-1} + \partial \theta, k + k_0), \phi_{k-1} + \partial \theta, k + k_0) - C(X_{k+k_0}, \phi_{k-1}, k + k_0)$$

Using the properties of the elevation above the manifold and Lemma 4, one can check that  $B'$ ,  $C'$  satisfy our assumptions with  $b_1^*, b_2^*$ ,  $c_1^*, c_2^*$  independant of  $k_0$ ,  $\rho$  given by Lemma 3 and:

$$x_1 = \alpha ||E_{k_0+1}|| \quad \nu = \sup_{k \geq k_0} \left( ||X_{k+1}^0 - X_{k+1}^1|| + ||\theta_k^0 - \theta_k^1|| \right)$$

Then if  $(\partial X_{k+1}, \partial \theta_k)$  is the particular solution of  $\partial S$  given by Lemma 6, we define:

$$\Phi(k_0)(X, \theta)_k = (X_{k+1+k_0} + \partial X_{k+1}, \theta_{k+k_0} + \partial \theta_k)$$

From the properties of  $(\partial X_{k+1}, \partial \theta_k)$ , it follows that  $\Phi(k_0)$  satisfies i, ii, iii of Theorem 2.

2- Similarly, if  $(X_{k+1}^M, \theta_k^M)$  is a sequence of  $B^M([k_0, \infty), S_1')$ , we define  $\partial S$  by:

$$\phi_k = \theta_{k+k_0}^M \quad \partial X_1 = X_{k_0+1}^M - M_c(\theta_{k_0}^M, k_0 + 1)$$

$$B'(\partial \theta, k) = (A(\phi_k + \partial \theta) - A(\phi_k)) M_c(\phi_{k-1}, k + k_0) + (B(\phi_k + \partial \theta) - B(\phi_k)) u_{k+k_0}$$

$$C'(\partial X, \partial \theta, k) = C(M_c(\phi_{k-1}, k + k_0) + \partial X, \phi_{k-1} + \partial \theta, k + k_0) - C(M_c(\phi_{k-1}, k + k_0), \phi_{k-1}, k + k_0)$$

Again our assumptions are satisfied with in particular:

$$\rho = 0 \quad \nu = \sup_{k \geq k_0} ||\theta_k^M - \theta_k^{M-1}|| \quad x_1 = 0$$

With  $(\partial X_{k+1}, \partial \theta_k)$  the corresponding solution of  $\partial S$ , we define:

$$\Phi^M(k_0)(X^M, \theta^M)_k = (M_c(\theta_{k+k_0}^M, k + 1 + k_0) + \partial X_{k+1}, \theta_{k+k_0}^M + \partial \theta_k)$$

$\Phi^M(k_0)$  satisfies i, ii, iii of Theorem 2. Note that, in this case, we have:

$$g^x(e) = \frac{\alpha(a_1 x + b_1 u)}{\sigma - \gamma(1 + e \beta c)} - \frac{\sigma \alpha c_1}{1 - \sigma - e c_1} e$$

This is obtained by studying the sequence  $(\tilde{X}_{k+1} - X_{k+1}^M)$ , knowing that (for  $e$  larger than  $\epsilon \partial^x$ ):

$$\bar{X}_{k_0+1} = X_{k_0+1}^M \quad ||\bar{\theta}_k - \theta_k^M|| \leq \epsilon \frac{\epsilon_1^k}{1-\sigma-\epsilon\epsilon_1} \alpha e^{-\sigma^{k-k_0}}$$

**Proof of Lemma 6:** i) Let  $\mathbf{D}$  be the set of sequences  $(\partial\theta_k)$  in  $\mathbb{R}^p$  such that for all positive  $k$ , we have:

$$|\partial\theta| \leq \epsilon |\partial^x| \leq \eta$$

$\mathbf{D}$  is a complete metric space for the distance associated with the norm  $|\partial\theta|$ .

For any sequence  $(\partial\theta_k)$  in  $\mathbf{D}$ , we consider the sequence  $(\partial X_k)$  uniquely defined as solution of:

$$\partial X_{k+1} = A(\bar{\phi}_k) \partial X_k + B(\partial\theta_k, k)$$

with  $\partial X_1$  as initial condition and:

$$\bar{\phi}_k = \phi_k + \partial\theta_k$$

Since  $\bar{\phi}_k$  is in  $\mathbf{S}$ , we have:

$$|||\partial X_{k+1}|||_{\bar{\phi}_k} \leq \gamma(1+\beta||\bar{\phi}_k - \bar{\phi}_{k-1}||) |||\partial X_k|||_{\bar{\phi}_{k-1}} + \alpha b_1^\top ||\partial\theta_k||$$

It follows that:

$$|\partial X| \leq x_1 = \max(\alpha||\partial X_1||, \epsilon |\partial^x|)$$

if  $\epsilon, \sigma, |\partial^x|, |\partial^x|$  satisfy:

$$\gamma \left( 1 + \beta(\epsilon c + \epsilon |\partial^x| \sigma^{k-1}(1+\sigma)) \right) |\partial^x| + \alpha b_1^\top |\partial^x| \sigma \leq \sigma |\partial^x|$$

Also for two sequences  $(\partial\theta_k^0), (\partial\theta_k^1)$  in  $\mathbf{D}$ , we have:

$$|||\partial X_{k+1}^0 - \partial X_{k+1}^1|||_{\bar{\phi}_k^0} \leq \gamma(1+\beta||\bar{\phi}_k^0 - \bar{\phi}_{k-1}^0||) |||\partial X_k^0 - \partial X_k^1|||_{\bar{\phi}_{k-1}^0} + \alpha(a_1 x_1^\top \sigma^{k-1} + b_1^\top) ||\partial\theta_k^0 - \partial\theta_k^1||$$

This implies:

$$|\partial X^0 - \partial X^1| \leq \partial_1^x |\partial\theta^0 - \partial\theta^1|$$

if:

$$\gamma \left( 1 + \beta(\epsilon c + \epsilon |\partial^x| \sigma^{k-1}(1+\sigma)) \right) \partial_1^x + \alpha(a_1 x_1^\top \sigma^k + b_1^\top \sigma) \leq \sigma \partial_1^x$$

Let us now define an operator  $T$  on  $\mathbf{D}$  by:

$$T(\partial\theta)_k = \partial\theta_{k+1} - C(\partial X_{k+1}, \partial\theta_k, k+1)$$

Clearly from the above inequalities  $(\partial X_{k+1}, \partial\theta_k)$ , defined this way, is the solution mentionned in the

Lemma if and only if  $(\partial\theta_k)$  is a unique fixed point of  $T$  in  $\mathbf{D}$ .

a)  $T(\partial\theta)$  is in  $\mathbf{D}$ :

We have:

$$\begin{aligned} \|T(\partial\theta)_k\| &\leq \|\partial\theta\| \sigma^{k+1} + \epsilon \epsilon_1^* (\|\partial X\| + \|\partial\theta\| + x_1) \sigma^k \\ &\leq \sigma^k \epsilon (\sigma \partial^\theta + \epsilon_1^* (x_1 + \epsilon \partial^\theta + x_1)) \end{aligned}$$

which means that  $\epsilon, x_1, \partial^\theta, \sigma$  should satisfy:

$$\rho \leq \sigma < 1 \quad \sigma \partial^\theta + \epsilon_1^* (x_1 + x_1 + \epsilon \partial^\theta) \leq \sigma^\theta$$

b)  $T$  is a contraction (uniformly in  $\partial X_1$ ):

$$\begin{aligned} \|T(\partial\theta^0)_k - T(\partial\theta^1)_k\| &\leq \sigma^{k+1} |\partial\theta^0 - \partial\theta^1| + \epsilon \epsilon_1^* (1 + \partial_1^\theta) \sigma^k |\partial\theta^0 - \partial\theta^1| \\ &\leq \sigma^k (\sigma + \epsilon \epsilon_1^* (1 + \partial_1^\theta)) |\partial\theta^0 - \partial\theta^1| \end{aligned}$$

Therefore the first part of our Lemma holds if:

$$\begin{aligned} \epsilon \partial^\theta &\leq \eta \quad \rho \leq \sigma < 1 \quad x_1 = \text{Max}\{\alpha \|\partial X_1\|, \epsilon \partial^\theta\} \\ \alpha b_1 \partial^\theta &\leq [\sigma - \gamma(1 + \epsilon \beta(\epsilon + \partial^\theta(1 + \sigma)))] \partial^\theta \\ \alpha(a_1 x_1 + b_1 \sigma) &\leq [\sigma - \gamma(1 + \epsilon \beta(\epsilon + \partial^\theta(1 + \sigma)))] \partial_1^\theta \\ \epsilon_1^*(x_1 + x_1) &\leq (1 - \sigma - \epsilon \epsilon_1^*) \partial^\theta \\ 0 &\leq 1 - \sigma - \epsilon \epsilon_1^* (1 + \partial_1^\theta) \end{aligned}$$

ii) Proceeding as for i, we obtain:

$$\begin{aligned} \|\partial X_{k+1}^0 - \partial X_{k+1}^1\|_{\tilde{\ell}_1^0} &\leq \gamma(1 + \epsilon \beta(\epsilon + \partial^\theta \sigma^{k-1}(1 + \sigma))) \|\partial X_k^0 - \partial X_k^1\|_{\tilde{\ell}_1^0} + \\ &\quad + \alpha \left[ a_1 x_1 \sigma^{k-1} (\nu + \sigma^k |\partial\theta^0 - \partial\theta^1|) + b_2 (\epsilon \partial^\theta \sigma^k \nu + \sigma^k |\partial\theta^0 - \partial\theta^1|) \right] \end{aligned}$$

It follows that:

$$|\partial X^0 - \partial X^1| \leq \alpha \|\partial X_1^0 - \partial X_1^1\| + g_1^r \nu + g_1^s |\partial\theta^0 - \partial\theta^1|$$

with:

$$\begin{aligned} \gamma(1 + \epsilon \beta(\epsilon + \partial^\theta \sigma^{k-1}(1 + \sigma))) g_1^r + \alpha(a_1 x_1 + \epsilon \partial^\theta b_2 \sigma) &\leq \sigma g_1^r \\ \gamma(1 + \epsilon \beta(\epsilon + \partial^\theta \sigma^{k-1}(1 + \sigma))) g_1^s + \alpha(a_1 x_1 \sigma^k + b_2 \sigma) &\leq \sigma g_1^s \end{aligned}$$

Now since  $(\partial\theta_k^0), (\partial\theta_k^1)$  are fixed points of the operator  $T$  defined in i, we have:

$$\|\partial\theta_k^0 - \partial\theta_k^1\| \leq \sigma^k \left[ \sigma |\partial\theta^0 - \partial\theta^1| + \epsilon \epsilon_2 \left( (x_1 + \epsilon \partial^\theta + 1) \nu + |\partial X^0 - \partial X^1| + |\partial\theta^0 - \partial\theta^1| \right) \right]$$

Our conclusion follows with:

$$\begin{aligned} \alpha(a_1x_1 + \epsilon b_2^* \partial^\theta \sigma) &\leq \left[ \sigma - \gamma(1 + \epsilon \beta(\epsilon + \partial^\theta(1+\sigma))) \right] g_1^\nu \\ \alpha(a_1x_1 + b_2^* \sigma) &\leq \left[ \sigma - \gamma(1 + \epsilon \beta(\epsilon + \partial^\theta(1+\sigma))) \right] g_1^\theta \\ \max\left(\alpha, g_1^\nu + \epsilon \frac{c_2^*(1+g_1^\theta)(x_1 + \epsilon \partial^\theta + 1)}{1-\sigma}\right) &\leq \left(1 - \epsilon \frac{c_2^*(1+g_1^\theta)}{1-\sigma}\right) g_1 \end{aligned} \quad \bullet$$

To complete the proof of Theorem 2, we have to study the relation between  $\Phi$  and  $\Phi^M$ .

Let  $(X_{k+1}, \theta_k)$  be a sequence in  $B([k_0, \infty), S_0)$ . From part i of the Theorem, its image  $(\tilde{X}_{k+1}^M, \tilde{\theta}_k^M)$  by  $\Phi(k_0)$  lies in  $B^M([k_0, \infty), S_1)$ . Similarly the image  $(\tilde{X}_{k+1}, \tilde{\theta}_k)$  by  $\Phi^M(k_0)$  of  $(\tilde{X}_{k+1}^M, \tilde{\theta}_k^M)$  lies in  $B([k_0, \infty), S_0)$ . Moreover, we have:

$$\tilde{X}_{k_0+1} = \tilde{X}_{k_0+1} = X_{k_0+1}$$

By uniqueness,  $\Phi^M(k_0) \circ \Phi(k_0)$  is the identity map if:

$$\tilde{\theta}_{k_0} = \theta_{k_0}$$

From i, we have:

$$\|\theta_k - \tilde{\theta}_k\| \leq \sigma^{k-k_0} \epsilon g^\theta \quad \|\tilde{\theta}_k - \bar{\theta}_k\| \leq \sigma^{k-k_0} \epsilon g^\theta$$

Hence:

$$\|\tilde{\theta}_k - \theta_k\| \leq 2 \sigma^{k-k_0} \epsilon g^\theta$$

But since  $(X_{k+1}, \theta_k)$  and  $(\tilde{X}_{k+1}, \tilde{\theta}_k)$  are in  $B(O, x) \times S_0$  for all  $k \geq k_0$ , we apply inequalities (2) iteratively to get for all  $k \geq k_0$ :

$$\begin{aligned} \|\|X_{k+1} - \tilde{X}_{k+1}\| \|_{\theta_k - I} \|\theta_k - \tilde{\theta}_k\| &\leq \tau_0(\epsilon, x)^{k-k_0} I \|\theta_{k_0} - \tilde{\theta}_{k_0}\| \\ \|\theta_k - \tilde{\theta}_k\| &\geq (1 - \epsilon c_1(1+l))^{k-k_0} \|\theta_{k_0} - \tilde{\theta}_{k_0}\| \end{aligned}$$

Therefore, for all  $k \geq k_0$ :

$$\|\theta_{k_0} - \tilde{\theta}_{k_0}\| \leq 2 \epsilon g^\theta \left( \frac{\sigma}{1 - \epsilon c_1(1+l)} \right)^{k-k_0}$$

Hence our result holds if:

$$0 < 1 - \sigma - \epsilon c_1(1+l)$$

Proofs of  $\Phi(k_0) \circ \Phi^M(k_0) = I_d$  and injectivity properties follow the same lines

•

### 5. Study of the reduced order system $SM_\epsilon^\#$

With Theorem 2, we have established that stability and existence of solutions of  $S_\epsilon$  remaining in  $B(O, \epsilon) \times S_0$  after time  $k_0$  can be obtained from similar properties of solutions of  $SM_\epsilon^\#$ . Therefore, we can concentrate our attention on this system. It is a nonlinear nonautonomous system and many approaches can be used to study stability and existence of bounded solutions.

In the  $l_2$ -stationary (stochastic process) case, averaging theory, leading to the associated differential equation technique, turns out to be a very appropriate tool to round the difficulty due to the time dependence. This has been demonstrated by Ljung in the  $C(X, \theta, k)$ -vanishing case ([Ljung, 1977], [Ljung, Soderstrom, 1983], [Kushner, Clark, 1978]), and by Anderson et al. (1986) and Benveniste et al. (1987) in the non-vanishing case. Noticing that, as  $\epsilon$  is made smaller,  $SM_\epsilon^\#$  becomes closer to a first order approximation of an ordinary differential equation, our result allows us to decompose the associated differential equation technique into three steps:

- application of the topological orbital equivalence to replace  $S_\epsilon$  by  $SM_\epsilon^\#$ ,
- application of the averaging theory to  $SM_\epsilon^\#$ ,
- approximation of a difference equation by a differential equation.

In the non-stationary case, a possibility to simplify the time dependence is to extend to the discrete time case the stroboscopio method ideas according to Minorsky (1962) (see also (Fedorenko, 1974)): if  $u_k$  and  $C(X, \theta, k)$  have a "slowly varying period"  $p(K)$ , then by flash illumination at times  $t(K)$ ,  $t(K)+p(K)$ ,  $t(K)+p(K)+p(K+1), \dots$  one sees a weakly non-stationary advance map, i.e. the solutions of  $SM_\epsilon^\#$  observed on the time interval  $[t(K), t(K)+p(K)]$  are very similar to the solutions observed on the time interval  $[t(K)+p(K), t(K)+p(K)+p(K+1)]$ . The idea is then to approximate this advance map:

Let  $\{p(K)\}$  be a sequence of bounded positive integers:

$$p(K) \leq p$$

Given  $k_0$ , we define flash illumination times after  $k_0$ , by:

$$t(K+1) = t(K) + p(K) \quad t(0) = k_0$$

The advance map  $SM_{t_K}^\#$  from  $t(K)$  to  $t(K+1)$  of  $SM_\epsilon^\#$  written as:

$$\theta_{t(K+1)}^M = \theta_{t(K)}^M + \epsilon C_i^\Sigma (\theta_{t(K)}^M, K+1) \quad (SM_{t_K}^\#)$$

is obtained from:

$$\theta_k^M = \theta_{t(K)}^M + \epsilon \sum_{i=1(K)}^{k-1} C(M, \{\theta_i^M, i+1\}, \theta_i^M, i+1) \quad t(K)+1 \leq k \leq t(K+1)$$

To approximate  $SM_{t_K}^\#$ , we introduce the system  $SM_{0K}^\#$

$$\psi_{k+1} = \psi_k + \epsilon C_0^{\Sigma}(\psi_k, k+1) \quad (SM_{0K}^{\theta})$$

with:

$$C_0^{\Sigma}(\psi, k+1) = \sum_{i=t(K)}^{t(K+1)-1} C(M_0(\psi, i+1), \psi, i+1)$$

Under assumptions A1 to A5,  $C_0^{\Sigma}$  is Lipschitz continuously differentiable on  $\mathbf{S} \times \mathbf{N}$  with  $c_1^\sigma - c_2^\sigma$  as respective Lipschitz constant:

$$c_1^\sigma \leq p \cdot c_1(1+m_1) \quad c_2^\sigma \leq p \cdot (c_2(1+m_1)^2 + c_1 m_1)$$

$SM_{0K}^{\theta}$  is simpler than  $SM_{\epsilon}^{\theta}$ . In particular, for adaptive systems, the  $C$  function is given by the controller designer and is typically the product of a gain vector times an adaptation error. In this case,  $C_0^{\Sigma}$  and  $\frac{\partial C_0^{\Sigma}}{\partial \psi}$  are correlations on the time interval  $[t(K), t(K+1)]$  of components of  $M_0$  or  $\frac{\partial M_0}{\partial \theta}$ . And, from its definition,  $M_0$  and  $\frac{\partial M_0}{\partial \theta}$  can be obtained by implementation of sensitivity filters and observation of the feedback system using a constant parameter vector  $\theta$ , i.e. in a classical linear feedback context. This latter aspect makes the assumptions on  $C_0^{\Sigma}$  interpretable in terms of signals properties.

Though simpler,  $SM_{0K}^{\theta}$  is very helpful to understand the behavior of solutions of  $SM_{\epsilon}^{\theta}$ . This is possible since  $SM_{0K}^{\theta}$  is an  $\epsilon^2$ -approximation of  $SM_{\epsilon K}^{\theta}$ . Indeed, from Theorem 1, under assumptions A1 to A5, we have uniformly on  $\mathbf{S}_0 \times \mathbf{N}$ :

$$\| C_0^{\Sigma}(\psi, K) - C_{\epsilon}^{\Sigma}(\psi, K) \| \leq \epsilon v_0 \quad \| \frac{\partial C_0^{\Sigma}}{\partial \psi}(\psi, K) - \frac{\partial C_{\epsilon}^{\Sigma}}{\partial \psi}(\psi, K) \| \leq \epsilon v_1$$

where  $v_0, v_1$  can be obtained by induction on  $p$  as:

$$v_0 \leq p c_1 l^0 + c_1^\sigma c_2 \frac{p-1}{2} \quad v_1 \leq p(c_2(1+m_1)(l^0 + c_1 l^0) + c_2^\sigma c_2 \frac{p-1}{2} + ((1+\epsilon c_1(1+m_1))^{p-1} - 1) c_1(1+m_1))$$

Again invoking hyperbolicity properties, namely conservation of stable and unstable manifolds of hyperbolic solutions under small perturbations (see [Hale, 1980], [Shub, 1978]), we may expect that, to any hyperbolic solution of  $SM_{0K}^{\theta}$ , it corresponds an  $\epsilon$ -close solution of  $SM_{\epsilon}^{\theta}$  with the same hyperbolicity property.

However, a difficulty remaining in the study of stability of solutions of  $SM_{0K}^{\theta}$  is the time variations. They have two causes: the time variations of the system itself and the motion of the studied solutions:

- To take care of the system time variations, we are going to consider the case where, uniformly on  $\mathbf{S}_0 \times \mathbf{N}$ ,  $\| \frac{\partial C_0^{\Sigma}}{\partial \psi}(\psi, K) - \frac{\partial C_0^{\Sigma}}{\partial \psi}(\psi, K+1) \|$  is "small". This assumption concerns essentially the  $k$ -dependence of  $C(X, \theta, k)$  and  $u_k$ . In particular, it is trivially satisfied in the periodic case by choosing  $p(K)$  constant, equal to the period. It holds also in the almost periodic case, i.e. if there exists a Lipschitz

continuously differentiable function  $\hat{C}_0^{\Sigma}(\psi)$  such that, for any  $\epsilon$ , one can find  $p$  for which we have uniformly on  $\mathbf{S} \times \mathbf{N}$ :

$$\| C_0^{\Sigma}(\psi, K) - \hat{C}_0^{\Sigma}(\psi) \| \leq \epsilon \hat{v}_0 \quad \quad \quad \left\| \frac{\partial C_0^{\Sigma}}{\partial \psi}(\psi, K) - \frac{\partial \hat{C}_0^{\Sigma}}{\partial \psi}(\psi) \right\| \leq \epsilon \hat{v}_1$$

In this case, one replace  $C_0^{\Sigma}(\psi, K)$  by  $\hat{C}_0^{\Sigma}(\psi)$  in the definition of  $SM_{0K}^{\theta}$

To take care of the motion of the solutions, we will consider those evolving in a set where  $C_0^{\Sigma}(\psi, K)$  is "small" uniformly in  $K$ . This condition would be trivially satisfied if  $SM_{0K}^{\theta}$  would have a fixed point, i.e. if there exists  $\psi^*$  such that for all  $K$

$$C_0^{\Sigma}(\psi^*, K) = 0$$

This equation is precisely the bifurcation equation obtained by averaging theory in (Bodson et al., 1986) and (Riedle, Kokotovic, 1986) or critical systems theory in (Praly, Pomet, 1987). Existence of solutions for this equation has been studied for model reference adaptive systems with a fixed point argument (Riedle, section 4.5, 1986) or applying degree theory (Pomet, Coron, Praly, 1988).

From this discussion, we introduce the following definition:

**Definition:** Given strictly positive constants  $\varsigma, \epsilon$ , we define the set  $\mathbf{P}(\varsigma, \epsilon)$  as:

$$\mathbf{P}(\varsigma, \epsilon) = \left\{ \psi \in \mathbf{S}_0 \quad \begin{array}{l} A.6.1: \left\| \frac{\partial C_0^{\Sigma}}{\partial \psi}(\psi, K) - \frac{\partial \hat{C}_0^{\Sigma}}{\partial \psi}(\psi, K+1) \right\| + \epsilon \epsilon \hat{v}'' \| C_0^{\Sigma}(\psi, K) \| \leq \epsilon w < \epsilon \varsigma^2 \\ A.6.2: \max_{i \in [1, p]} \operatorname{Re}(\lambda_i \{ \frac{\partial C_0^{\Sigma}}{\partial \psi}(\psi, K) \}) \leq -\varsigma \end{array} \quad \forall K \right\}$$

where  $\operatorname{Re}(.)$  and  $\lambda_i\{.\}$  denote the real part and the  $i$ th eigenvalue respectively.

**Remark 5:** In the adaptive linear systems context, the inequality A6.2, involved in the definition of  $\mathbf{P}(\varsigma, \epsilon)$ , is related to the so-called "the signal dependent positivity condition". In the test input assumption case (see introduction), it can be interpreted as the positivity of an operator restricted to act on specific signals (see (Anderson et al., 1986), (Riedle, Kokotovic, 1985), (Riedle, Praly, Kokotovic, 1986)).

**Theorem 3:** Under assumptions A1 to A5, there exists  $\epsilon_*$  such that,

if one can find  $\varsigma$  and  $\epsilon$ ,  $0 < \epsilon \leq \epsilon_*$ , for which  $\mathbf{P}(\varsigma, \epsilon)$  contains a solution of  $SM_{0K}^{\theta}$

then  $SM_t^{\theta}$  has an exponentially stable solution remaining in  $\mathbf{S}_1$  after time  $k_0$  and  $\epsilon$ -close to  $(\psi_K)$  at times  $t(K)$ , i.e. for all  $K$

$$\| \theta_t^M(K) - \psi_K \| \leq \epsilon \delta \quad \quad \quad \frac{v_0}{\varsigma} < \delta$$

The constant  $\delta$ , appearing in this statement, will be clarified in the proof.

**Remark 6:** 1- This stroboscopic method approach extends to more general situations the local averaging technique proposed by Kosut, Anderson and Mareels (1987) (see also (Anderson et al., 1986)) to study  $SM_0^\theta$  after linearization under a relaxed test input assumption.

2- With Theorems 2 and 3, we have established the following result:

For  $\epsilon$  sufficiently small, if  $SM_{\epsilon K}^\theta$  has a solution remaining in a set  $\mathbf{P}(\zeta, \epsilon)$ , then  $S_\epsilon$  has exponentially stable solutions remaining in  $B(O, x) \times S_0$  after time  $k_0$ .

In other words, this proves that, as far as stability is concerned, the heuristic technique proposed by Astrom (1983, 1984) is theoretically sound when restricted to the set  $\mathbf{P}(\zeta, \epsilon)$ .

3-  $(\psi_K)$  would be an  $\epsilon^2$ -approximation of a solution of  $SM_{\epsilon K}^\theta$  if  $C_0^\Sigma$  were replaced by  $C_i^\Sigma$  an  $\epsilon^2$ -approximation of  $C_\epsilon^\Sigma$  involving  $M_1$ , the  $\epsilon^2$ -approximation of  $M_\epsilon$ .

As a key step to prove Theorem 3, we establish the following result:

**Lemma 7:** Let  $F(K_1, K_0)$  be the transition matrix of:

$$\Delta_{K+1} = (I + \epsilon \frac{\partial C_0^\Sigma}{\partial \psi}(\psi_K, K+1)) \Delta_K$$

with  $(\psi_K)$ , the solution in  $\mathbf{P}(\zeta, \epsilon)$  given by Theorem 3. For any  $\zeta'$ ,  $0 < \zeta' < \zeta - \epsilon \frac{(\epsilon \zeta')^2}{2}$ , there exists  $v$  (independant of  $\psi_K$ ) such that for any  $K_0, K_1$ ,  $0 \leq K_0 < K_1$ :

$$\| F(K_1, K_0) \| \leq \frac{1 + \epsilon v}{1 - \epsilon \zeta'} (1 - \epsilon \zeta')^{K_1 - K_0}$$

with:

$$\zeta'' = \zeta' \left[ (1 + \epsilon v) (1 - \epsilon \zeta') w \right]^{1/2} \quad v = v (1 - \epsilon \zeta') - \zeta''$$

where  $w$  is obtained from A6.1.

**Proof:** Given  $K_1$ , the transition matrix satisfies for any  $N - K_0 \leq N < K_1$ :

$$F(N+1, K_0) = (I + \epsilon \frac{\partial C_0^\Sigma}{\partial \psi}(\psi_{K-1}, K_1)) F(N, K_0) + \epsilon \left[ \frac{\partial C_0^\Sigma}{\partial \psi}(\psi_N, N+1) - \frac{\partial C_0^\Sigma}{\partial \psi}(\psi_{K-1}, K_1) \right] F(N, K_0)$$

To derive the property of  $F(K_1, K_0)$ , we will use the following three inequalities:

i) From A6.2 in the definition of the set  $\mathbf{P}(\zeta, \epsilon)$ , we have uniformly on  $\mathbf{P}(\zeta, \epsilon) \times \mathbb{N}$ :

$$\| I + \epsilon \frac{\partial C_0^\Sigma}{\partial \psi}(\psi, K) \| \leq 1 + \epsilon \zeta''$$

$$\max_{i \in [1, p]} |\lambda_i \{ I + \epsilon \frac{\partial C_0^\Sigma}{\partial \psi}(\psi, K) \}| \leq \left[ 1 - 2\epsilon \zeta + \epsilon^2 \| \frac{\partial C_0^\Sigma}{\partial \psi}(\psi, K) \|^2 \right]^{1/2} \leq 1 - \epsilon \zeta + \epsilon^2 \frac{(\epsilon \zeta'')^2}{2}$$

Then it follows from Theorem 5 of (Fuchs, 1982) that for any  $\zeta$ ,  $0 < \zeta' < \zeta - \epsilon \frac{(\epsilon \zeta')^2}{2}$ , there exists  $v$  ( $v \geq \epsilon \zeta'$ ) such that, uniformly on  $\mathbf{P}(\zeta, \epsilon) \times \mathbf{N}$ :

$$\left\| (I + \epsilon \frac{\partial C_0^\Sigma}{\partial \psi}(\psi, K))^i \right\| \leq (1 + \epsilon v) (1 - \epsilon \zeta')^i \quad \forall i \in \mathbf{N}$$

ii) From A6.1 and the fact that  $(\psi_K)$  is a solution of  $SM_{0K}^{\#}$ , we obtain:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial C_0^\Sigma}{\partial \psi}(\psi_N, N+1) - \frac{\partial C_0^\Sigma}{\partial \psi}(\psi_{K-1}, K_1) \right\| &\leq \sum_{K=N+1}^{K-1} \left\| \frac{\partial C_0^\Sigma}{\partial \psi}(\psi_{K-1}, K) - \frac{\partial C_0^\Sigma}{\partial \psi}(\psi_K, K+1) \right\| \\ &\leq \epsilon w (K-1-N) \end{aligned}$$

iii) Let  $u_k$  be a sequence of positive real numbers satisfying for any  $k-1 \leq k$

$$u_k \leq a \lambda^k u_0 + b \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} (k-1-i) u_i \quad a \geq 0 \quad b \geq 0 \quad \lambda \geq 0$$

then one can check by induction that:

$$u_k \leq \left[ \frac{\lambda a + \sqrt{\lambda b}}{2} (\lambda + \sqrt{\lambda b})^{k-1} + \frac{\lambda a - \sqrt{\lambda b}}{2} (\lambda - \sqrt{\lambda b})^{k-1} \right] u_0$$

Let us now use the variation of constants formula, take the Euclidian norm and use our two first inequalities to obtain:

$$\| F(K_1, K_0) \| \leq (1 + \epsilon v) (1 - \epsilon \zeta')^{K_1 - K_0} + \epsilon^2 w (1 + \epsilon v) \sum_{N=K_0}^{K-1} (1 - \epsilon \zeta')^{K_1 - 1 - N} (K_1 - 1 - N) \| F(N, K_0) \|$$

The result follows from the third inequality

**Proof of Theorem 3: a) Existence:** The idea is to find a solution  $(\theta_{t(K)}^M)$  of  $SM_{tK}^{\#}$  satisfying:

$$\| \theta_{t(K)}^M - \psi_K \| \leq \epsilon \delta$$

This will solve our problem, since the corresponding solution  $(\theta_t^M)$  of  $SM_t^{\#}$  satisfies,

for all  $k-t(K) - \frac{p}{2} \leq k \leq t(K) + \frac{p}{2}$ :

$$\| \theta_{t(K)}^M - \theta_k^M \| \leq \epsilon \epsilon \frac{p}{2}$$

In particular, knowing that  $\psi_K$  lies in  $S_0$ ,  $\theta_k^M$  lies in  $S_1$  if  $\delta$  and  $\epsilon$  satisfy:

$$\delta \leq \frac{\eta}{\epsilon} - \epsilon \frac{p}{2}$$

Hence, let  $\Delta_K$  be defined recursively by:

$$\Delta_0 = 0$$

$$\Delta_{K+1} = (I + \epsilon \frac{\partial C_0^\Sigma}{\partial \psi}(\psi_K, K+1)) \Delta_K + \epsilon \left[ C_\epsilon^\Sigma(\psi_K + \Delta_K, K+1) - C_0^\Sigma(\psi_K, K+1) - \frac{\partial C_0^\Sigma}{\partial \psi}(\psi_K, K+1) \Delta_K \right]$$

$(\psi_K + \Delta_K)$  is a solution of  $SM_\epsilon^\#_K$

We remark that for any  $\Delta$  such that the segment  $[\psi_K, \psi_K + \Delta]$  is contained in  $S_0$ , application of the Mean Value Theorem yields for some  $\xi$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ :

$$\begin{aligned} \| C_\epsilon^\Sigma(\psi_K + \Delta, K+1) - C_0^\Sigma(\psi_K, K+1) - \frac{\partial C_0^\Sigma}{\partial \psi}(\psi_K, K+1) \Delta \| &\leq \\ \leq \epsilon v_0 + \left\| \frac{\partial C_0^\Sigma}{\partial \psi}(\psi_K + \xi \Delta, K+1) - \frac{\partial C_0^\Sigma}{\partial \psi}(\psi_K, K+1) \right\| \|\Delta\| &\leq \epsilon v_0 + \epsilon \frac{p}{2} \|\Delta\|^2 \end{aligned}$$

Let us now apply the variation of constants formula and apply Lemma 7. We get:

$$\|\Delta_{K+1}\| \leq \epsilon \frac{1+\epsilon v^*}{1-\epsilon \zeta^*} \sum_{N=0}^K (1-\epsilon \zeta)^{K-N} (\epsilon v_0 + \epsilon \frac{p}{2} \|\Delta_N\|^2)$$

Hence, we have established:

$$\|\Delta_K\| \leq \epsilon \delta$$

and therefore, existence of a solution  $(\theta_k^M)$  of  $SM_\epsilon^\#$  remaining in  $S_1$  after time  $k_0$ , if  $\zeta^*$ ,  $\delta$  satisfy:

$$\frac{1+\epsilon v^*}{1-\epsilon \zeta^*} \frac{v_0 + \epsilon \epsilon \frac{p}{2} \delta^2}{\zeta^*} \leq \delta \leq \frac{\eta}{\epsilon} - \epsilon \frac{p}{2}$$

b) Exponential stability: For any two solutions  $(\theta_k^{M0}), (\theta_k^{M1})$  of  $SM_\epsilon^\#$  remaining in  $S_0$ , we have uniformly in  $K$

$$\|\theta_k^{M0} - \theta_k^{M1}\| \leq (1+\epsilon \epsilon_0(1+m_1))^p \|\theta_{t(K)}^{M0} - \theta_{t(K)}^{M1}\| \quad t(K) \leq k \leq T(K+1)$$

Hence exponential stability of the solution  $(\theta_k^M)$  obtained in part a follows from exponential stability of  $(\theta_{t(K)}^M)$ , solution of  $SM_\epsilon^\#_K$ . But, from the Lyapunov's Theorem on stability with respect to the first approximation, for this property to hold, it is sufficient that the origin be an exponentially stable solution of the following linear system:

$$\Delta_{K+1} = (I + \epsilon \frac{\partial C_\epsilon^\Sigma}{\partial \psi}(\theta_{t(K)}, K+1)) \Delta_K$$

From part a, we know:

$$\left| \left| \frac{\partial C_i^{\Sigma}}{\partial \psi}(\theta_{t(K)}^M, K+1) - \frac{\partial C_0^{\Sigma}}{\partial \psi}(\psi_K, K+1) \right| \right| \leq \epsilon v_1 + \epsilon c_1^\sigma \delta$$

Therefore, with Lemma 7 and Lemma B.5 p.118 (Aulbach, 1984), our property holds if:

$$1 - \epsilon \zeta' + \epsilon^2 \frac{1+\epsilon v}{1-\epsilon \zeta'} (v_1 + c_1^\sigma \delta) < 1$$

In conclusion, our Theorem holds if  $\epsilon$  and  $\delta$  satisfy, with  $v$  given by Theorem 5 of (Fuchs, 1982):

$$\begin{aligned} 0 < \zeta' < \zeta - \epsilon \frac{(c_1^\sigma)^2}{2} &\quad \zeta' = \zeta - \left[ (1+\epsilon v)(1-\epsilon \zeta') w \right]^{1/2} \quad v' = v (1-\epsilon \zeta') - \zeta'' \\ w < \frac{\zeta'^2}{(1+\epsilon v)(1-\epsilon \zeta')} \\ \frac{1+\epsilon v'}{1-\epsilon \zeta'} \frac{v_0 + \epsilon c_2^\sigma \delta^2}{\zeta'} &\leq \delta \leq \frac{\eta}{\epsilon} - \epsilon \frac{p}{2} \\ 1 - \epsilon \zeta' + \epsilon^2 \frac{1+\epsilon v}{1-\epsilon \zeta'} (v_1 + c_1^\sigma \delta) &< 1 \end{aligned}$$

### Acknowledgments

Most of the concepts appearing in Section 3 of this paper were formulated during joint work with Petar Kokotovic and Brade Riedle, who concentrated on the continuous-time case, while the author pursued the study of the discrete time case. The author wishes also to thank Jean-Michel Coron for his interest and constant support.

## References

- B.D.O. Anderson, R.R. Bitmead, C.R. Johnson, P.V. Kokotovic, R.L. Kosut, I.M.Y. Mareels, L. Praly, B.D. Riedle. "Stability of adaptive systems: passivity and averaging analysis" The MIT Press. 1986.
- K.J. Astrom. "Analysis of Rohrs counter-example to adaptive control" 22nd IEEE Conference on Decision and Control. December 1983.
- K.J. Astrom. "Interactions between excitation and unmodeled dynamics in adaptive control" 23rd IEEE Conference on Decision and Control. December 1984.
- J.P. Aubin, I. Ekeland. "Applied nonlinear analysis" John Wiley & Sons. 1984.
- B. Aulbach. "A reduction principle for nonautonomous differential equations" Arch. Math., Vol. 39, 1982.
- B. Aulbach. "Continuous and discrete dynamics near manifolds of equilibria" Lecture Notes in Mathematics 1058. Springer-Verlag 1984.
- A. Benveniste, M. Metivier, P. Priouret. "Algorithmes adaptatifs et approximations stochastiques: théorie et applications" Masson, Paris. 1987
- D.P. Derezitskii, A.L. Fradkov. "Two models for analysing the dynamics of adaptation algorithms" Automat. Remote Contr., Vol 35, No 1, 1974.
- M. Bodson, S. Sastry, B.D.O. Anderson, I. Mareels, R.R. Bitmead. "Nonlinear averaging theorems, and the determination of parameter convergence rates in adaptive control" Systems and Control Letters. 7 1986, pp. 145-157
- J. Dugundji. "Topology" Allyn and Bacon. 1966.
- B. Egardt. "Stability of adaptive controllers" Lecture Notes in Control and Information Sciences 20. Springer-Verlag 1979.
- R.P. Fedorenko. "Derivation and justification of equations in slow time (the stroboscopic method)"

USSR computational mathematics and mathematical physics. Vol. 14, 5. 1974.

N. Fenichel. "Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows" Indiana University Mathematics Journal, 21. 1971.

J.J. Fuchs. "On the good use of the spectral radius of a matrix" IEEE Transactions on Automatic Control, October 1982.

J.K. Hale. "Ordinary differential equations" Krieger Publishing Company. Second edition 1980.

M.W. Hirsch, C.C. Pugh, M. Shub. "Invariant manifolds". Lecture Notes in Mathematics 583. Springer-Verlag 1976.

D. Henry. "Geometric theory of semilinear parabolic equations" Lecture Notes in Mathematics 840. Springer-Verlag 1981.

A. Kelley. "Stability of the center manifold" Journal of Mathematical Analysis and Applications 18, 336-344, 1967.

R.L. Kosut, B.D.O. Anderson, I.M.Y. Mareels. "Stability theory for adaptive systems: method of averaging and persistency of excitation" IEEE Transactions on Automatic Control, January 1987.

H. J. Kushner, D. S. Clark. "Stochastic approximation methods for constrained and unconstrained systems" Applied Mathematical Sciences 26. Springer-Verlag 1978.

L. Ljung. "Analysis of recursive stochastic algorithms" IEEE Transactions on Automatic Control, August 1977

L. Ljung, T. Soderstrom. "Theory and practice of recursive identification" The MIT Press. 1983.

N. Minorsky. "Nonlinear oscillations" Van Nostrand 1962.

G.S. Osipenko. "Perturbation of invariant manifolds" Differential equations 4, 406-412. 1985.

V.A. Pliss. "Principle reduction in the theory of the stability of motion" Izv. Akad. Nauk. S.S.R Mat. Ser. 28, 1964 (in russian).

V.A. Pliss. "On the theory of invariant surfaces" Differential Equations 2, 589-594, 1966.

J.-P. Pomet, J.-M. Coron, L. Praly. "About periodic solutions of adaptive systems in presence of periodic forcing terms" CAI Rep. Submitted for publication in Mathematics for Control, Signals and Systems. January 1988.

L. Praly (a). "A geometric approach for the local analysis of a one step ahead adaptive controller" 4th Yale Workshop on Applications of Adaptive Systems Theory. Yale University Connecticut. May 1985.

L. Praly (b). "Local stability/instability of slowly adapted systems in presence of periodic inputs" CAI Rep. A156. July 1985.

L. Praly, J.-B. Pomet. "Periodic solutions in adaptive systems: the regular case." 10th World congress on automatic control. IFAC. July 1987

L. Praly, D. Rhode. "A local analysis of a one step ahead adaptive controller" 24th IEEE Conference on Decision and Control. December 1985.

Riedle B.D "Integral manifolds of slow adaptation" Thesis in Electrical Engineering. University of Illinois at Urbana-Champaign. 1986.

B.D. Riedle, P.V. Kokotovic. "A stability-instability boundary for disturbance-free slow adaptation with unmodeled dynamics" IEEE Transactions on Automatic Control. October 1985.

B.D. Riedle, P.V. Kokotovic. "Integral manifolds of slow adaptation" IEEE Transactions on Automatic Control. April 1986.

B.D. Riedle, L. Praly, P.V. Kokotovic. "Examination of the SPR condition in output error parameter estimation" Automatica, Vol. 22, No. 4, pp.495-498. 1986.

M. Shub. "Stabilité globale des systèmes dynamiques" Astérisque 56. Société Mathématique de France. 1978.



Vu: le Président

Vu: les suffragants

Mr. Ivar EKELAND

Mr. Albert BENVENISTE

Mr. Petar KOKOTOVIC

Mr. Jean-Michel LASRY

Mr. Jean LEVINE

Mr. Claude SAMSON

Vu et permis d'imprimer  
Le Président de l'Université de PARIS IX DAUPHINE