



TRAVAUX PRATIQUES

Systèmes échantillonnés

Listes des travaux pratiques :

- 1-** Etude des systèmes échantillonnés à l'aide du logiciel Matlab-Simulink.
- 2-** Régulation numérique.
- 3-** Régulation de la vitesse d'un moteur à courant continu à base d'un correcteur numérique.
- 4-** Pendule Inverse (Approche numérique).

Proposé par :

SLIMENE HATEM

Classe :

Licence GE, Niveau : 3, Parcours : Automatisme et Informatique Industriels

TP N°1

Etude des systèmes échantillonnés à l'aide du logiciel Matlab-Simulink

1. But

Le but de la manipulation est d'étudier les systèmes échantillonnés. Il s'agit de rechercher les modèles discrets des systèmes du premier ordre et du second ordre, de choisir convenablement la période d'échantillonnage, de tracer les réponses temporelles et d'étudier la stabilité des systèmes échantillonnés.

2. Notion de base sur les systèmes échantillonnés

Le développement important de la théorie des systèmes échantillonnés est du principalement au développement de la commande numérique.

2.1 Commande numérique

La commande numérique par ordinateur (ou micro ordinateur) s'effectue nécessairement à temps discret. En règle générale, une même période d'échantillonnage T_e conditionne le rythme d'acquisition des mesures et de la génération des signaux de commande par ordinateur.

Les processus considérés dans la commande numérique sont le plus souvent des processus à temps continu.

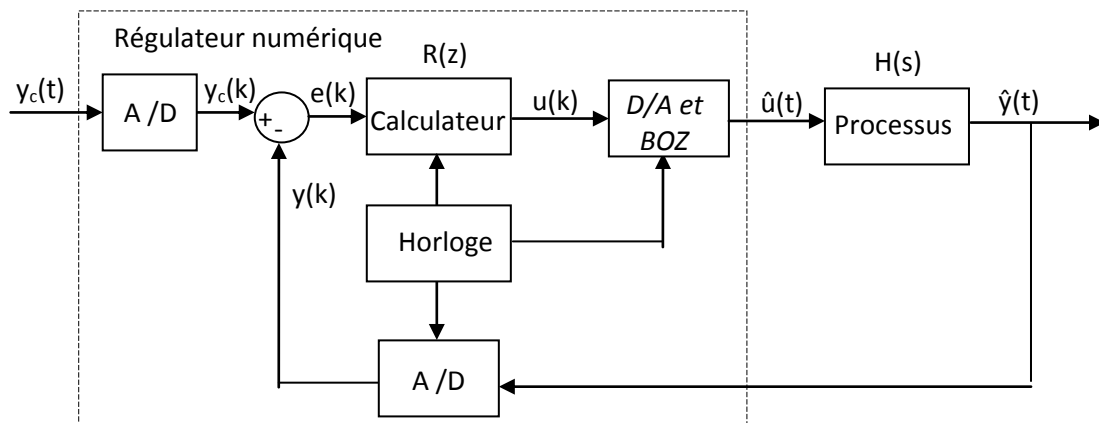


Figure 1 : Schéma de base de la commande numérique.

La figure 1 montre la structure de la boucle d'asservissement numérique. Cette dernière repose sur cinq éléments indispensables :

- Le processus que l'on doit asservir, qui est de façon générale, un processus à temps continu.
- Le calculateur numérique sur le quel on implante, sous la forme d'une récurrence, l'algorithme de régulation.
- Le BOZ (Bloqueur d'Ordre Zéro) permet de maintenir la commande $u(k)$ constante entre les instants kT_e et $(k+1)T_e$, où T_e désigne la période d'échantillonnage.

- Le A/D (convertisseur Analogique/Digital) qui transforme en valeurs numériques les grandeurs à manipuler (consigne $y_c(t)$ et sortie $y(t)$).
- Le D/A (convertisseur Digital/Analogique) qui permet d'obtenir sous forme analogique l'information fournie par le calculateur.

2.2 Bloqueur d'Ordre Zéro (BOZ) ou Zero Order Hold (ZOH)

Le plus souvent, le signal fourni par le calculateur est un signal en escalier, c'est-à-dire variant par palier. D'un point de vue pratique, tout se passe comme si le système continu était commandé par l'intermédiaire d'un échantillonneur/bloqueur d'ordre zéro (figure 2).

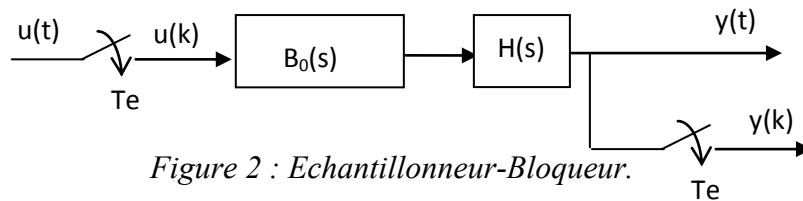


Figure 2 : Echantillonneur-Bloqueur.

La transmittance en s du BOZ s'écrit :

$$B_0(s) = \frac{1 - e^{-sT_e}}{s}$$

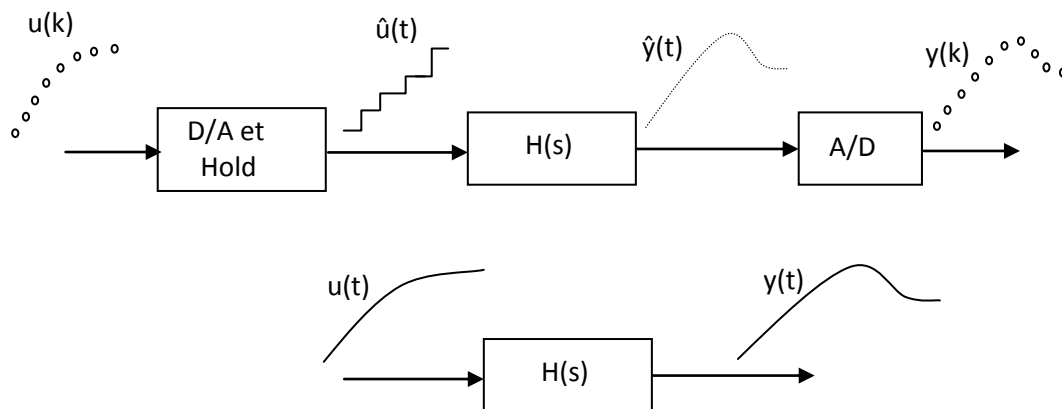


Figure 3 : Effet du Bloqueur d'Ordre Zéro (Hold) et des convertisseurs D/A et A/D.

2.3 Schéma de base d'un asservissement échantillonné

Le schéma de la figure 1 peut être représenté comme l'indique la figure 4.

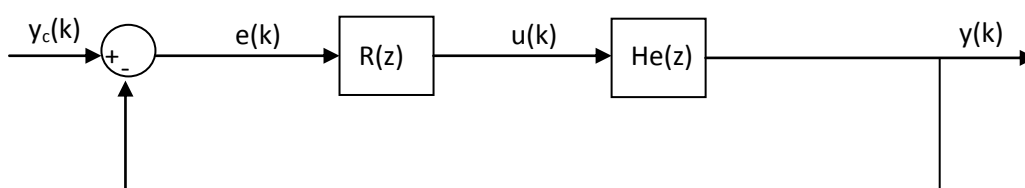


Figure 4 : Modélisation discrète d'un système asservi.

Où $He(z) = B_0H(z)$ et $R(z)$ représentent respectivement les transmittances en Z du modèle du processus échantillonné et du régulateur numérique.

Les fonctions du transfert sont :

- **En boucle ouverte :**

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = R(z)He(z)$$

- **En boucle fermée :**

$$\frac{Y(z)}{Yc(z)} = \frac{R(z)He(z)}{1 + R(z)He(z)}$$

- **Expression de $He(z)$:**

$$He(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{H(s)}{s}\right]$$

$Z\left[\frac{H(s)}{s}\right]$ représente la transformée en z de $\left[\frac{H(s)}{s}\right]$ qui peut être déterminée à partir de la table de transformée en z où $z = e^{sT_e}$.

- **Gain statique :**

Pour les systèmes continus le gain statique s'obtient en faisant $s = 0$ dans la fonction de transfert. Dans le cas discret : $s = 0 \Rightarrow z = e^{sT_e} = 1$ et donc le gain s'obtient en faisant $z = 1$ dans la fonction de transfert échantillonnée.

$$\text{Gain statique } k = |H(z)|_{z=1}$$

2.4 Choix de la période d'échantillonnage T_e

▪ Théorème de Shannon

Pour que l'observation échantillonné d'un signal soit significative, il est nécessaire que l'échantillonnage soit effectué à une fréquence (f_e) au minimum double de la fréquence maximale (f_H) présente dans le signal ($f_e = 2f_H$).

▪ Règle pratique

Soit $f_H = 1/T_H$ la fréquence la plus haute à considérer dans un signal. Alors en pratique, pour satisfaire à la condition de Shannon avec une bonne marge de sécurité on prendra :

$$\frac{T_H}{25} < T_e < \frac{T_H}{5} \quad \text{soit} \quad 5f_H < \frac{1}{T_e} < 25f_H$$

2.5 Stabilité des systèmes échantillonnés

$$z = e^{sT_e} \text{ avec } s = \sigma + j\omega \Rightarrow z = e^{(\sigma + j\omega)T_e} = e^{\sigma T_e} e^{j\omega T_e}$$

La condition de stabilité $\text{Re}(s) = \sigma < 0$ étant remplacée par la condition $e^{\sigma T_e} < 1$ soit $|z| < 1$.

Pour qu'un système échantillonné soit asymptotiquement stable, il faut que toutes les racines de l'équation caractéristique (du dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée) soient à l'intérieur du cercle unité.

Equation caractéristique : $1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} = 0 \Rightarrow |z| < 1$

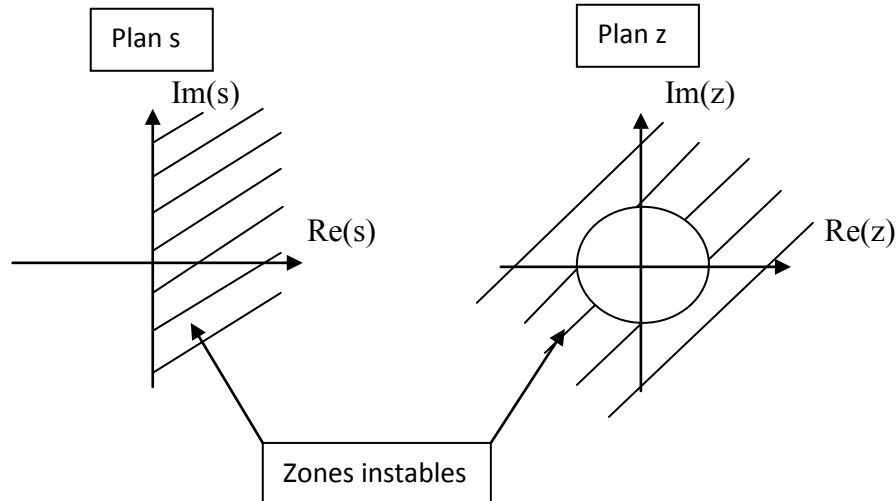


Figure 5 : Effet de la transformation $z = e^{sT_s}$ sur le domaine de stabilité.

2.6 Précision des systèmes asservis échantillonnés

La précision d'un système asservi (figure 4) est défini à partir de l'erreur e entre la grandeur de consigne y_c et la grandeur de sortie y , soit $e = y_c - y$.

Précision statique (en régime permanent) :
$$e_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z-1}{z} \right] \frac{Y_c(z)}{1+R(z)H_e(z)}$$

Notons que $R(z)H_e(z) = \frac{k}{(z-1)^\alpha D(z)}$ avec $k \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{N(1)}{D(1)} = 1$. En pratique, on s'intéresse essentiellement aux erreurs statiques de position, de vitesse et d'accélération.

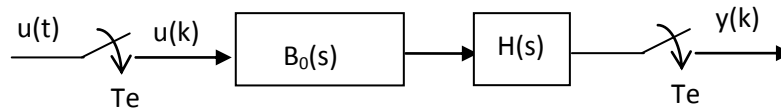
Classe du système Nbr de pôles $z=1$		0	1	2	$\alpha > 2$
Consigne y_c	Erreur e				
Echelon de position	e_p (position)	$1/(1+k)$	0	0	0
Echelon de vitesse	e_v (vitesse)	∞	Te/k	0	0
Echelon d'accélération	e_a (accélération)	∞	∞	Te^2/k	0

Tableau 1 : Erreurs permanents pour un système échantillonné.

Travail demandé :

1. Etude d'un système de premier ordre

a. On considère le système échantillonné suivant :



avec :

$$H(s) = \frac{1}{1 + 0.5s}$$

Trouver le modèle échantillonné équivalent pour les différentes périodes d'échantillonnage $T_e = 1, 0.5, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05$ s.

Tracer la réponse indicielle et déduire la ou les périodes d'échantillonnage qui satisfont la condition donnée dans le paragraphe 2.4.

b. Etudier les réponses temporelles à un échelon de

$$H(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

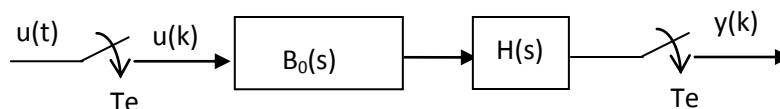
Pour $a_1 = -0.2, -0.5, -0.7, -0.9$ en choisissant chaque fois b_1 tel que le gain statique égale à 1.

- Tracer la réponse indicielle et déduire la constante du temps équivalente (il s'agit d'une constante du temps normalisée par rapport à la période d'échantillonnage).

- $a_1 = -0.2$ correspond à un échantillonnage rapide ou lent d'un système de premier ordre continu ? Même question pour $a_1 = -0.9$.

2. Etude d'un système du second ordre

a- soit le système échantillonné suivant :



avec :

$$H(s) = \frac{100}{s^2 + 2s + 100}$$

Trouver le modèle échantillonné équivalent pour les différentes périodes d'échantillonnage $T_e = 1, 0.5, 0.25, 0.15, 0.1, 0.05$ s.

Tracer la réponse indicielle et déduire la ou les périodes d'échantillonnage qui satisfont la condition donnée dans le paragraphe 2.4.

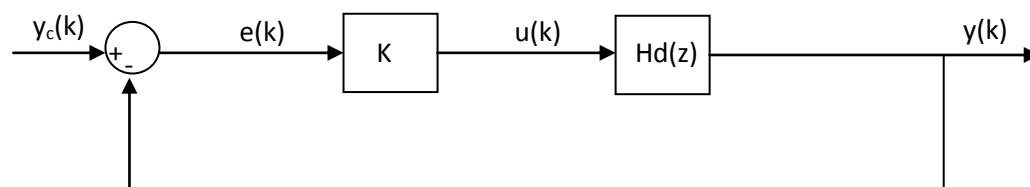
b- On considère la fonction de transfert échantillonnée suivante :

$$\frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{1}{z^2 - 0.3z + 0.5}$$

- Localiser les pôles de cette fonction de transfert dans le plan z en utilisant la fonction « **pzmap** ».
- Dédurre graphiquement le coefficient d'amortissement, la pulsation propre et donner la fonction de transfert du système second ordre continu équivalent sachant que $T_e = 0.05$ s.
- Tracer les réponses indicielles unitaires des deux fonctions de transfert en z et en s. Calculer de manière approximative le temps de réponse, le temps de stabilisation à $\pm 5\%$ et le dépassement.
- Reprendre ces questions pour une période d'échantillonnage $T_e = 0.02$ s. conclure.

3. Analyse et synthèse des systèmes asservis

On considère le système asservi donné par la figure suivante :



Avec :

$$Hd(z) = \frac{z - 0.3}{z^2 - 1.3z + 0.7}$$

- Déterminer la valeur de K de façon que le système en boucle fermée doit se comporter comme un système de second ordre continu de coefficient d'amortissement $m=0.4$ et de pulsation propre $\omega_n = 0.6$ rad/s. pour cela on utilise les instructions suivantes :
m=0.4 ;
wn=0.6 ;
zgrid(m,wn)
[k,poles]=rlocfind(Hd)
- Trouver la fonction de transfert échantillonné en boucle fermée et tracer pour une entrée en échelon unitaire la sortie $y(k)$ et l'erreur $e(k)$.
- Trouver la forme du régulateur la plus simple permettant d'annuler l'erreur de position en régime permanent. Tracer de nouveau la sortie $y(k)$ et l'erreur $e(k)$ pour une entrée en échelon unitaire.
- Conclure.

Annexe 1 : Fonctions de Matlab et de la boîte à outil 'control system toolbox'

Fonction	Explication
Num=[b_m b_{m-1}.....b₁ b₀] Den=[a_n a_{n-1}.....a₁ a₀] Hd=tf(Num,Den,-1) Ou Hd=tf(Num,Den,Te)	Affectation du numérateur et du dénominateur d'une fonction de transfert en z. On utilise Te si la période d'échantillonnage est connue, si non on utilise -1
He=c2d(H,Te,'zoh')	Conversion de la fonction de transfert continue H(s) en une fonction de transfert échantillonnée en utilisant la méthode du bloqueur d'ordre zéro et pour une période d'échantillonnage Te
roots(Den)	Calculer les racines du dénominateur
Damp(Hd)	Calculer les pôles et leurs modules de Hd(z)
step(Hd)	Tracer la réponse indicielle à un échelon unitaire de Hd(z)
[Z, P,K]=zpk(Hd)	Calculer les zéros, les pôles et le gain statique de Hd(z)
H_{bo}=Hd*R	Calculer la fonction de transfert en boucle ouverte
H_{bf}=feedback(H_{bo},1,-1)	Calculer la fonction de transfert en boucle fermée avec un retour unitaire
[num_{bf},den_{bf}]=tfdata(H_{bf}, 'v')	Extraire le numérateur et le dénominateur de H _{bf} (z)
pzmap(Hd)	Localiser les zéros et les pôles de H(z) dans le plan z
rlocus(Hd)	Tracer le lieu des pôles de 1/(1+K*H(z))
zgrid zgrid(m,wn)	Tracer les lignes isoamortissement et isopulsation Tracer la courbe à coefficient d'amortissement m constant et la courbe à pulsation propre wn constante dans le lieu d'Evans (lieu des pôles)
Axis([-1 1 -1 1])	Limiter les axes de la figure entre -1 et 1
[k,poles]=rlocfind(Hd)	Sélectionner l'emplacement des pôles et des zéros dans le lieu d'Evans