



# Machines synchrones - Modélisation en régime permanent

Date de publication :  
**10 novembre 2006**

Cet article est issu de : **Énergies | Conversion de l'énergie électrique**

par **Hamid BEN AHMED, Nicolas BERNARD, Gilles FELD, Bernard MULTON**

**Résumé** Cet article propose des modélisations aux différentes utilisations des machines synchrones en régime permanent, qu'elles soient associées à un réseau électrique ou à un convertisseur statique. Il traite tout d'abord des machines synchrones à champs tournants non saturées, avec les machines à pôles lisses, caractérisées par une distance constante entre les deux parties ferromagnétiques de l'entrefer, puis celles à pôles saillants avec une valeur d'inductance d'induit variable. La méthode de Potier, puis le diagramme de Blondel, permettent d'aborder la saturation magnétique. Pour terminer, la méthode des travaux virtuels offre un modèle rigoureux capable d'envisager l'amélioration des principales non-linéarités.

## Abstract

**Pour toute question :**  
Service Relation clientèle  
Techniques de l'Ingénieur  
Immeuble Pleyad 1  
39, boulevard Ornano  
93288 Saint-Denis Cedex

**Par mail :**  
infos.clients@teching.com  
**Par téléphone :**  
00 33 (0)1 53 35 20 20

Document téléchargé le : **26/01/2018**  
Pour le compte : **7200031081 - ecole centrale de nantes // 130.66.37.1**

# Machines synchrones

## Modélisation en régime permanent

par Hamid BEN AHMED

*Maître de conférences à l'ENS Cachan – Antenne de Bretagne  
Chercheur au laboratoire SATIE (UMR CNRS 8029)*

Nicolas BERNARD

*Maître de conférences à l'IUT de Saint-Nazaire  
Chercheur au laboratoire IREENA*

Gilles FELD

*Professeur agrégé à l'ENS Cachan*

et Bernard MULTON

*Professeur des universités à l'ENS Cachan – Antenne de Bretagne  
Chercheur au laboratoire SATIE (UMR CNRS 8029)*

1.	Modélisation des machines synchrones à champs tournants non saturées .....	D 3 521 - 2
1.1	Machines à pôles lisses.....	— 2
1.1.1	Force magnétomotrice et induction d'entrefer .....	— 3
1.1.2	Flux à vide .....	— 4
1.1.3	Flux de réaction magnétique d'induit .....	— 5
1.1.4	Force électromotrice .....	— 6
1.1.5	Schéma électrique équivalent simplifié .....	— 6
1.1.6	Bilan de puissance .....	— 7
1.1.7	Expression du couple électromagnétique et des puissances .....	— 8
1.1.8	Signification de l'angle interne .....	— 9
1.2	Machines à pôles saillants .....	— 10
1.2.1	Perméance superficielle d'entrefer .....	— 10
1.2.2	Inductions magnétiques d'entrefer .....	— 11
1.2.3	Équations des flux .....	— 12
1.2.4	Équations électriques et 1 <sup>er</sup> diagramme de Blondel .....	— 13
1.2.5	Schémas électriques équivalents .....	— 13
1.2.6	Puissance et couple électromagnétiques .....	— 15
1.2.7	Remarque sur le rapport de saillance .....	— 16
2.	Modélisation des machines synchrones à champs tournants saturées .....	— 16
2.1	Machines à pôles lisses, méthode de Potier .....	— 17
2.2	Machines à pôles saillants, second diagramme de Blondel .....	— 18
2.3	Amélioration de la modélisation en régime saturé : méthode des travaux virtuels .....	— 19
	Notations et symboles .....	— 20
	Références bibliographiques .....	— 21

**C**omme toutes les machines électriques, les machines synchrones sont réversibles et le passage des modes de fonctionnement moteur à générateur est continu. Nous adoptons dans ce dossier, **par convention, un fonctionnement génératrice**, le fonctionnement moteur pouvant être obtenu par simple inversion de la force électromotrice ou du courant d'induit. En outre, les modélisations présentées ici restent classiques et toutes les **formes d'onde sont supposées sinusoïdales** sauf à la fin du texte où une modélisation plus rigoureuse est proposée. Ces modélisations conviennent potentiellement à toutes les machines synchrones mais elles sont particulièrement bien adaptées aux

**machines hétéropolaires à champ tournant et à bobinages répartis.** Nous commençons par les machines à entrefer constant ou à « pôles lisses », en fonctionnement non saturé. Leur modélisation fournit une première approche utile à la compréhension des propriétés spécifiques et des modalités d'utilisation des machines synchrones en général. La saturation magnétique est ensuite prise en compte grâce à la méthode de Potier. Puis, la modélisation en deux axes (méthode de Blondel) des machines à pôles saillants est décrite. Finalement, l'application de la méthode des travaux virtuels fournit un modèle rigoureux capable de prendre en compte les principales non-linéarités.

Nous donnons, à chaque fois qu'il sera nécessaire, deux représentations électriques : l'une correspondant au cas où la position rotorique est connue, adaptée au fonctionnement autopiloté (représentation de Fresnel dans le plan d-q) et l'autre où la position rotorique est inconnue, adaptée au fonctionnement en boucle ouverte (représentation classique). En outre, les expressions du couple seront fournies pour les deux types de sources électriques associées à la machine : source de tension et source contrôlée en courant. Ces approches permettent ainsi d'appliquer les modélisations proposées aux différentes utilisations des machines synchrones en régime permanent qu'elles soient associées à un réseau électrique ou à un convertisseur statique.

Ce dossier fait suite au dossier « Machines synchrones : principes généraux et structures » de ce traité [D 3 520]. Le lecteur pourra donc utilement s'y reporter, notamment pour certaines définitions ou calculs préliminaires tels que la perméance superficielle d'entrefer ou les forces magnétomotrices.

## 1. Modélisation des machines synchrones à champs tournants non saturées

La non-saturation et plus généralement le fonctionnement magnétique linéaire suppose qu'il y a linéarité entre courants et flux. Il est donc possible de dissocier et d'identifier la contribution magnétique de chaque source. Ainsi, à l'inverse du cas saturé, nous pouvons ici expliciter les grandeurs magnétiques et électriques ainsi que les performances de la machine en fonction de ses caractéristiques internes.

Dans ce cadre, nous nous intéressons tout d'abord au cas le plus simple : la machine à pôles lisses (ou à entrefer constant).

### 1.1 Machines à pôles lisses

Les **machines à pôles lisses** sont caractérisées par une distance constante entre les deux parties **ferromagnétiques** statorique et rotorique le long de la périphérie de l'entrefer (l'encaillage du stator et/ou du rotor est magnétiquement assimilé à un entrefer constant).

La présence éventuelle d'une frette amagnétique, de cales pour bobinage ou encore d'aimants permanents est supposée sans conséquence sur l'homogénéité magnétique.

Les effets d'encoches sont donc modélisés en considérant la perméance superficielle d'entrefer  $\varphi_{se}$  constante et corrigée par le coefficient de Carter  $K_c$  (voir dossier [18] : *Alternateur synchrone de grande puissance (partie 2)* [D 3 551] de ce traité) :

$$\varphi_{se} = \langle \varphi_{se} \rangle = \frac{\mu_0}{K_c e_s} \quad (1)$$

#### Conventions et notations

Nous adoptons tout au long de l'exposé des conventions électriques et mécaniques de type générateur. Les puissances positives correspondent donc à des puissances électriques fournies ou mécaniques absorbées.

Les **angles** considérés dans le repérage angulaire d'un point ou d'un mobile dans l'espace sont des angles mécaniques, orientés dans le **sens trigonométrique**. Toutefois, les représentations vectorielles des grandeurs magnétiques seront effectuées dans l'espace électrique correspondant au cas des **machines bipolaires**.

Par ailleurs, nous considérons, dans cette étude de la machine synchrone tournante, une topologie cylindrique triphasée à **p paires de pôles**, de **rayon d'alésage noté  $R_s$** , de **longueur active** (identique au rotor et au stator) notée  $L_s$  et un **entrefer** (jeu mécanique) d'**épaisseur  $e_s$** . L'**induit** est triphasé, chaque phase comportant  $n_s$  **spires** en série par pôle. L'**inducteur** considéré est *a priori* de type bobiné, comportant  $n_f$  **spires** en série par pôle (figure 1), mais les modèles sont aisément adaptables aux machines à aimants permanents.

Les grandeurs relatives à l'**inducteur** sont repérées par la lettre **f**, celles des phases de l'**induit** par les lettres **a, b et c**.

Les harmoniques d'espace (induction, forces magnétomotrices) et temporels (courants, tensions) seront négligés, l'étude se limitant à leurs **composantes fondamentales**. Enfin, l'hypothèse d'un régime de fonctionnement magnétique linéaire s'accompagne de celle d'une perméabilité des matériaux ferromagnétiques statoriques et rotoriques constante et très supérieure à celle de l'air. Par conséquent, la circulation du champ magnétique et l'énergie stockée dans le fer seront négligées. L'étude magnétique se confine alors dans l'**entrefer de la machine**.

Sauf indication contraire, l'axe fixe de référence considéré durant toute l'étude est l'axe de la **phase a**, le maximum du courant  $i_a$  est pris comme origine des temps.

### 1.1.1 Force magnéto-motrice et induction d'entrefer

En général, le bobinage se trouve dans des encoches dont la forme est optimisée (cf. exemple de la figure 2). Le nombre d'encoches par pôle et par phase ainsi que la répartition de ce bobinage sont choisis de manière à obtenir une force magnéto-motrice (FMM) et une force électromotrice (FEM) de formes souhaitées, le plus souvent sinusoïdales.

Dans ce cas, les résultats établis dans le dossier [D 3 520] restent valables en modifiant le nombre réel de spires  $n$  en un nombre effectif  $n'$  traduisant l'influence de la distribution du bobinage d'induit sur le fondamental de la FMM :

$$n' = n k_B \quad (2)$$

où  $k_B$  est un coefficient de bobinage (inférieur à 1) correspondant au produit des différents coefficients liés aux différentes opérations réalisées : distribution, inclinaison des encoches, raccourcissement (pour plus de détail, on consultera le dossier [21] : *Bobinage des machines tournantes à courant alternatif* [D 3 420] de ce traité).

Rappelons brièvement les expressions des forces magnéto-motrices, au sens du premier harmonique, générées par un système triphasé spatialement et électriquement équilibré dont les grandeurs électriques sont à la pulsation  $\omega = p\Omega$  et celle de l'inducteur mobile alimenté en courant continu.

Le système triphasé équilibré de courants d'induit considéré s'écrit :

$$\begin{cases} i_a(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t) \\ i_b(t) = I\sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_c(t) = I\sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} i_a(t) = \text{réel}\left\{\sqrt{2}[I]\right\} \\ i_b(t) = \text{réel}\left\{\sqrt{2}[I]e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right\} \\ i_c(t) = \text{réel}\left\{\sqrt{2}[I]e^{+j\frac{2\pi}{3}}\right\} \end{cases}$$

Rappelons que pour des grandeurs présentant des variations spatiotemporelles sinusoïdales, leurs formulations et représentations peuvent être considérablement simplifiées. En effet, pour une grandeur  $y(\omega t - p\gamma) = \sqrt{2} Y \cos(\omega t - p\gamma)$  de valeur efficace  $Y$  et d'argument variant en fonction du temps et de l'espace, est associée le nombre complexe  $\underline{Y}$  représenté par le vecteur de Fresnel ou phasor spatial correspondant tel que :

$$y(t, \gamma) = \text{réel}\left[\sqrt{2}(\underline{Y}e^{j\omega t})e^{-j\gamma}\right] = \text{réel}\left[\sqrt{2}(\underline{Y})e^{-j\gamma}\right].$$

Pour une grandeur électrique (courant, tension, ...), la valeur instantanée relative à chaque phase est égale à  $\sqrt{2}$  fois la projection du vecteur de Fresnel correspondant sur l'axe magnétique fixe de la phase considérée. Pour une grandeur magnétique (induction, FMM, ...), la valeur instantanée en un point donné de l'entrefer (par exemple, le point M de la figure 3) est égale à  $\sqrt{2}$  fois la projection du vecteur de Fresnel correspondant sur l'axe diamétral  $\overrightarrow{OM}$ .

Le lecteur pourra se reporter au dossier [24] : « Réseaux électriques linéaires. Systèmes triphasés » [D 80] de ce traité pour plus de détails sur les systèmes triphasés équilibrés.

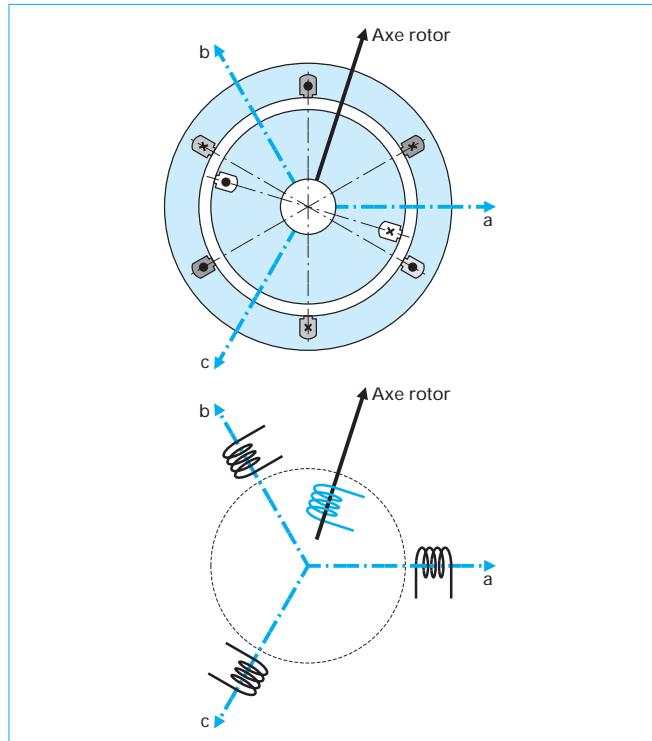


Figure 1 – Machine synchrone triphasée élémentaire bipolaire

D'après le théorème de Ferraris, la FMM résultante d'entrefer, due à la contribution des trois enroulements, est tournante (figure 3a) à la vitesse  $\omega/p$  par rapport à l'axe fixe de référence choisi (axe de la phase a), et vaut au point M :

$$\varepsilon_I(t, \gamma) = \varepsilon_a(t, \gamma) + \varepsilon_b(t, \gamma) + \varepsilon_c(t, \gamma) = \left(\frac{3}{2} \frac{4 n'_s}{\pi}\right) I\sqrt{2} \cos(p\gamma - \omega t) \quad (3)$$

En notation complexe, sachant que  $K_I = \frac{3}{2} \frac{4 n'_s}{\pi}$ , la relation (3) s'écrit :

$$\varepsilon_I = K_I I_f e^{-j\gamma} \quad (4)$$

Cette FMM correspond, en régime de non-saturation, à la différence de potentiel magnétique générée entre les faces de l'entrefer et permettant ainsi la circulation du champ magnétique dans ce dernier.

Concernant l'inducteur tournant à la vitesse  $\Omega$  et alimenté par un courant continu noté  $I_f$ , la FMM générée au point M, par rapport au même référentiel statorique fixe que précédemment, (figure 3b) s'écrit :

$$\varepsilon_f(t, \gamma) = \left(\frac{4 n'_f}{\pi\sqrt{2}}\right) I_f \sqrt{2} \cos[p\gamma - p\Omega t - p\theta_0] \quad (5)$$

En notation complexe, sachant que  $K_f = \frac{4 n'_f}{\pi\sqrt{2}}$ , la relation (5) s'écrit :

$$\varepsilon_f = K_f I_f e^{-j\gamma} \quad (6)$$

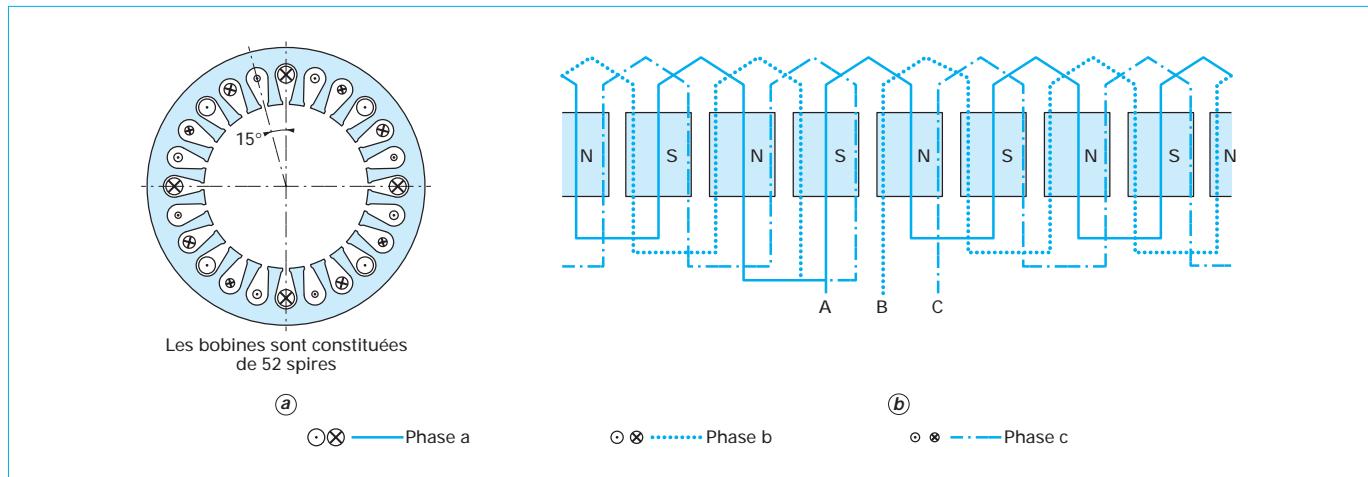


Figure 2 – Exemple d'une coupe de machine triphasée à 4 paires de pôles à une seule encoche par pôle et par phase et schéma du bobinage induit

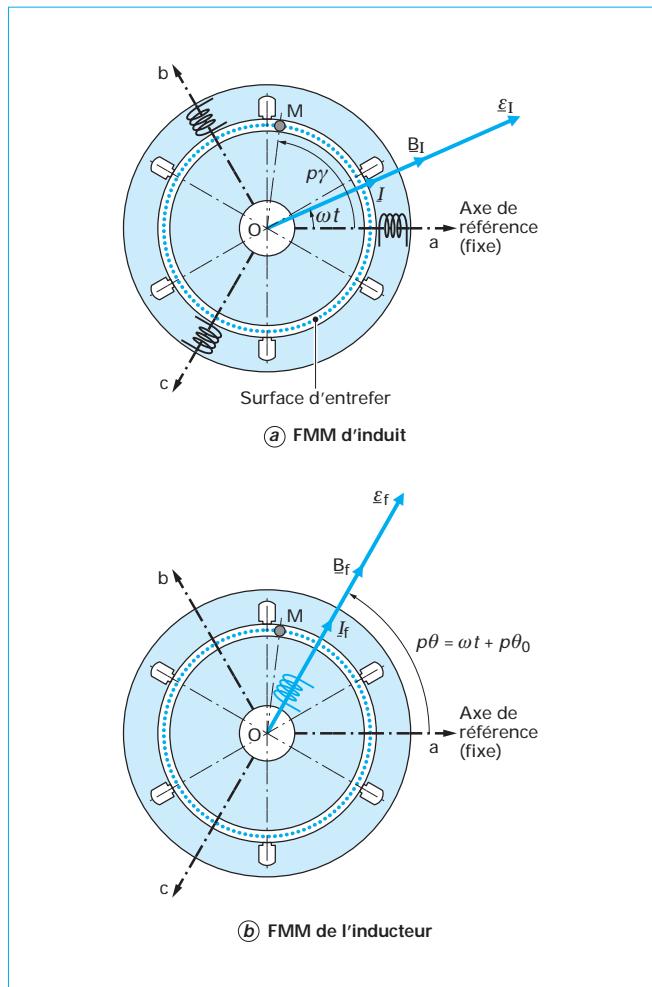


Figure 3 – Diagramme vectoriel de la FMM d'induit et de l'inducteur d'une machine bipolaire à pôles lisses

Sous cette forme, le courant d'excitation apparaît comme un courant variable d'expression complexe :

$$I_f = I_f e^{j(\omega t + p\theta_0)} \quad (7)$$

Les inductions magnétiques d'entrefer (dues à l'induit ou à l'inducteur) se déduisent directement des FMM et de la perméance superficielle d'entrefer par :

$$B(\gamma, t) = \underline{\epsilon}(\gamma, t) \varphi_{se}(\gamma) \quad (8)$$

Ce qui donne, toujours au point M, respectivement les contributions de l'inducteur et de l'induit :

$$B_f(\gamma, t) = K_f \langle \varphi_{se} \rangle I_f \sqrt{2} \cos [p\gamma - \omega t - p\theta_0] \quad (9)$$

$$B_I(\gamma, t) = K_I \langle \varphi_{se} \rangle I_f \sqrt{2} \cos [p\gamma - \omega t] \quad (10)$$

ou encore, en notation complexe :

$$\begin{cases} \underline{B}_f = K_f \langle \varphi_{se} \rangle \underline{I}_f e^{-jp\gamma} \\ \underline{B}_I = K_I \langle \varphi_{se} \rangle \underline{I}_f e^{-jp\gamma} \end{cases} \quad (11)$$

Ainsi, la perméance superficielle d'entrefer étant ici constante (grandeur scalaire), les vecteurs de Fresnel  $\underline{B}_f$  et  $\underline{B}_I$  sont colinéaires aux vecteurs courants respectifs tels que représenté sur les figures 3a et 3b.

### 1.1.2 Flux à vide

À partir de l'expression de l'induction générée par l'inducteur dans l'entrefer (9), le flux total embrassé par la phase « a » constituée de  $n'_s$  spires équivalentes en série par pôle vaut :

$$\Psi_{af}(\theta) = 2p(n'_s) \int_{-\frac{\pi}{2p}}^{\frac{\pi}{2p}} B_f(\gamma, \theta) L_s R_s d\gamma = (4n'_s) B_{fm} R_s L_s \cos(p\theta) \quad (12)$$

Ce flux est également appelé flux totalisé, ou encore flux d'enroulement ; sa dérivée temporelle est égale à la FEM de la phase.

Compte tenu du fait que :

$$\theta = \Omega t + \theta_0$$

et que  $\Omega = \frac{\omega}{p}$  (condition de synchronisme), le flux peut s'écrire sous la forme :

$$\Psi_{af}(t) = \left[ \frac{M_{af}}{\sqrt{2}} \right] I_f \sqrt{2} \cos(\omega t + p\theta_0)$$

où  $M_{af}$  représente l'amplitude de la mutuelle inductance entre le bobinage de la phase « a » statorique et le bobinage inducteur. Elle s'exprime par :

$$M_{af} = (2n'_s 2n'_f) \frac{4}{\pi} \langle \rho_{se} \rangle R_s L_s \quad (13)$$

On montre que les flux embrassés par les deux autres phases « b » et « c » ont des modules d'expressions identiques à (12) et des phases décalées, respectivement de  $\frac{2\pi}{3}$  et  $\frac{4\pi}{3}$ .

La variation du flux inducteur embrassé par les enroulements de l'induit est due à la variation du couplage magnétique induit/inducteur. Les inductances mutuelles sont donc idéalement sinusoïdales en fonction de la position rotorique.

Cette variation du flux peut être également vue comme celle produite par un enroulement fixe d'inductance propre  $M_{af}$  et parcouru par un courant variable d'expression donnée par (7). Il est commode d'adopter, en écriture complexe bien que le courant  $I_f$  soit continu, cette seconde représentation et d'écrire ainsi :

$$\underline{\Psi}_f = \frac{M_{af}}{\sqrt{2}} \underline{I}_f \quad (14)$$

### 1.1.3 Flux de réaction magnétique d'induit

À partir de l'expression de l'induction générée par la phase « a » de l'induit dans l'entrefer, nous pouvons calculer le **flux propre**  $\Psi_{ap}$ , généré et embrassé par cette même phase :

$$\begin{aligned} \Psi_{ap}(t) &= 2p(n'_s) \int_{-\frac{\pi}{2p}}^{\frac{\pi}{2p}} B_a(\gamma, t) L_s R_s d\gamma \\ &= 2p(n'_s) \langle \rho_{se} \rangle \int_{-\frac{\pi}{2p}}^{\frac{\pi}{2p}} \epsilon_a(\gamma, t) L_s R_s d\gamma \end{aligned} \quad (15)$$

où  $\epsilon_a(\gamma, t)$  est la FMM générée par la phase « a » seule d'expression :

$$\epsilon_a(\gamma, t) = \frac{4}{\pi} n'_s I_f \sqrt{2} \cos(\omega t) \cos(p\gamma)$$

Pour les trois phases d'un système triphasé, nous pouvons écrire le flux propre sous la forme complexe suivante (l'indice de la phase considérée a été omis) :

$$\underline{\Psi}_p = L_p \underline{I} \quad (16)$$

où  $L_p$  est l'inductance propre, identique pour les trois enroulements, indépendante du courant (dans l'hypothèse de non-saturation) et de la position rotorique (pôles lisses). Elle s'exprime par :

$$L_p = (2n'_s)^2 \frac{4}{\pi} \langle \rho_{se} \rangle R_s L_s \quad (17)$$

Le **flux mutuel** d'entrefer  $\Psi_{ab}$  entre deux enroulements statiques, par exemple « a » et « b » vaut :

$$\begin{aligned} \Psi_{m_{b \rightarrow a}}(t) &= 2p(n'_s) \int_{\frac{2\pi}{3p} - \frac{\pi}{2p}}^{\frac{2\pi}{3p} + \frac{\pi}{2p}} B_a(\gamma, t) L_s R_s d\gamma \\ &= -\frac{2}{\pi} (2n'_s)^2 R_s L_s \langle \rho_{se} \rangle I_f \sqrt{2} \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (18)$$

que nous écrivons sous la forme unique pour toutes les mutuelles entre phases de même armature :

$$\underline{\Psi}_m = M \underline{I} \quad (19)$$

avec :

$$M = -\frac{2}{\pi} (2n'_s)^2 \frac{2}{\pi} \langle \rho_{se} \rangle R_s L_s \quad (20)$$

Le **flux de réaction magnétique d'induit** dans l'entrefer, généré par l'ensemble des enroulements statoriques et embrassé par la phase « a » est calculé de la même manière que précédemment mais en considérant ici l'induction totale d'induit générée par la FMM résultante d'induit :

$$\Psi_I = 2p(n'_s) R_s L_s \int_{-\frac{\pi}{2p}}^{\frac{\pi}{2p}} [B_I(t, \gamma)] d\gamma$$

où  $B_I(\gamma, t)$  est l'induction générée par l'armature statorique complète et dont l'expression est donnée par (10).

Ce flux s'écrit donc sous la forme :

$$\underline{\Psi}_I = L \underline{I}$$

où  $L$  définit l'**inductance cyclique d'entrefer** dont l'expression est :

$$L = \frac{6}{\pi} (2n'_s)^2 \langle \rho_{se} \rangle R_s L_s$$

Il est aisément de montrer que pour une alimentation triphasée équilibrée ( $\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0$ ), l'équation du flux total, avec couplages, embrassé par la phase a est

$$\underline{\Psi}_I = L_p \underline{I}_a + M \underline{I}_b + M \underline{I}_c = (L_p - M) \underline{I}_a$$

Par identification, on obtient donc :

$$L = L_p - M$$

Par ailleurs, au premier harmonique, on montre que :

$$L_p = -2M \text{ donc, } L = \frac{3}{2} L_p$$

Aux flux d'entrefer s'ajoutent les fuites magnétiques traduisant le couplage imparfait entre induit et inducteur. Les **flux de fuite de l'enroulement de l'induit**, plus particulièrement dans les encoches et les têtes de bobine, sont modélisés par une inductance non-saturable  $L_\sigma$  :

$$\underline{\Psi}_\sigma = L_\sigma \underline{I}$$

L'expression de l'inductance de fuites est relativement complexe et dépend de nombreux paramètres géométriques liés notamment à la forme de l'encoche. Notons cependant que sa valeur est relativement faible représentant généralement quelques % de la valeur de l'inductance cyclique.

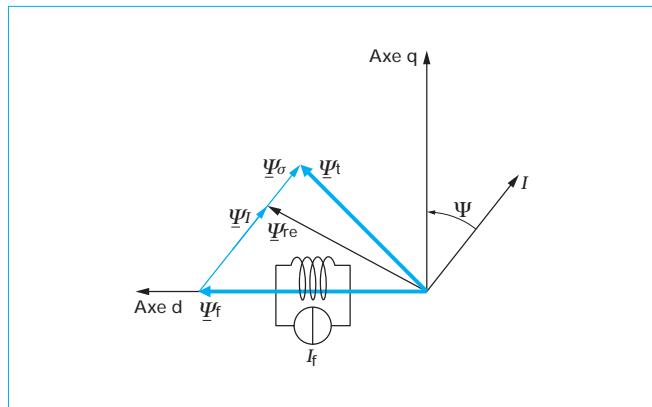


Figure 4 – Diagramme vectoriel des flux (fonctionnement générateur)

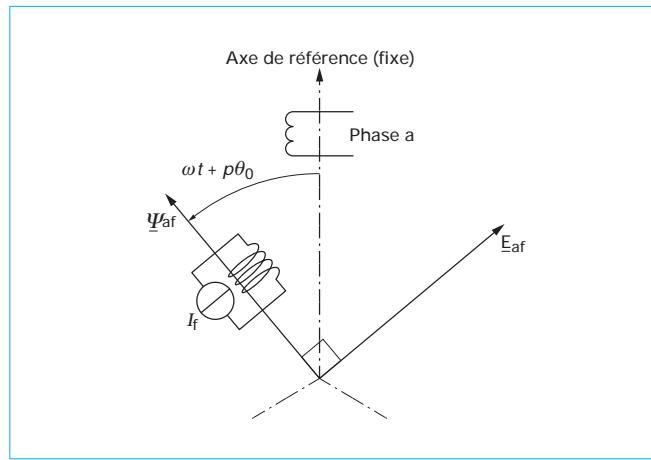


Figure 5 – Diagramme vectoriel en fonctionnement à vide

Nous posons ainsi pour chaque phase d'induit (cf. figure 4) :

$$\underline{\Psi}_{re} = \underline{\Psi}_f + \underline{\Psi}_I : \text{flux résultant d'entrefer (hors flux de fuites)}$$

$$\underline{\Psi}_t = \underline{\Psi}_{re} + \underline{\Psi}_\sigma : \text{flux total embrassé par une phase d'induit dû à la superposition des contributions magnétiques de l'inducteur et de l'induit.}$$

#### 1.1.4 Force électromotrice

À partir des résultats précédents, la FEM générée aux bornes d'une phase de l'induit par la rotation de l'inducteur tournant à la vitesse  $\Omega$  s'écrit d'après la loi de Faraday (en convention générateur, cf. figure 5) :

$$E_f = -j\omega \underline{\Psi}_f \quad (21)$$

À titre d'exemple, pour la phase a d'induit, l'expression du flux  $\Psi_{af}$  (12) permet d'écrire la FEM correspondante sous la forme temporelle suivante :

$$e_{af}(t) = E \sqrt{2} \cos\left(\omega t + p\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right) \quad (22)$$

où la valeur efficace de la FEM est donnée par :

$$E = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\right) 4 n_s' f B_{fm} R_s L_s \quad (23)$$

#### 1.1.5 Schéma électrique équivalent simplifié

Sans la prise en compte des phénomènes dissipatifs d'origine magnétique (courants de Foucault, hystérésis) et compte tenu des lois de Faraday et de Kirchhoff, la tension aux bornes d'une phase d'induit est liée à la FEM en charge et à la chute ohmique par (cf. figure 6) :

$$V = E_t - RI \quad (24)$$

où  $E_t = -j\omega \underline{\Psi}_t$  est dite FEM totale en charge associée au flux résultant  $\underline{\Psi}_t$ .

Compte tenu de l'expression du flux total en fonction des inductances, la relation précédente s'écrit alors :

$$V = E_f - j\omega I(L + L_\sigma) - RI \quad (25)$$

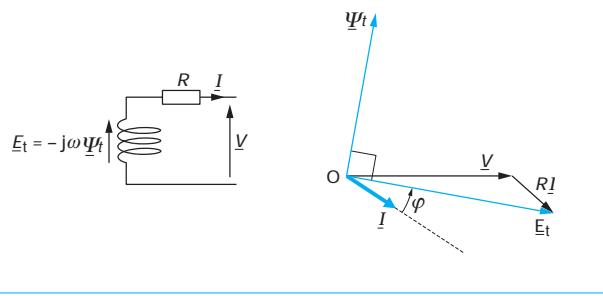


Figure 6 – Premier schéma électrique monophasé (fonctionnement générateur)

La réactance  $X = (L + L_\sigma) \omega$  constante (indépendante du courant et de la position du rotor) est dite **réactance synchrone de Behn-Eschenburg**.

Le diagramme vectoriel des tensions en fonctionnement générateur est présenté à la figure 7. Bien qu'équivalents, nous avons indiqué les deux représentations usuellement utilisées.

La première, classique, adaptée à un fonctionnement non autopiloté (alternateur couplé à un réseau à tension fixe ou moteur alimenté en boucle ouverte), considère la tension et le courant d'induit comme références. La FEM générée ainsi que la position de l'axe rotorique (axe d) sont déduites.

La seconde représentation, adaptée à un fonctionnement autopiloté, considère que la position rotorique est connue à tout instant. La référence est ici le système formé par les deux axes *direct ou longitudinal* (axe rotorique d) et *transversal* ou *en quadrature* (axe en quadrature arrière par rapport à l'axe d et noté axe q). Comme nous le verrons ultérieurement, cette seconde représentation s'avère particulièrement utile dans le cas des machines à pôles saillants.

La figure 8 montre le schéma équivalent monophasé d'une machine synchrone à pôles lisses non saturée (en fonctionnement générateur) en régime permanent équilibré.

On notera sur la figure 7a la distinction que l'on fait entre l'angle interne « électrique »  $\delta$  représentant le **déphasage** entre deux grandeurs électriques : la tension d'induit et la FEM à vide, et l'angle interne « magnétique »  $\delta'$  représentant le **décalage** angulaire entre

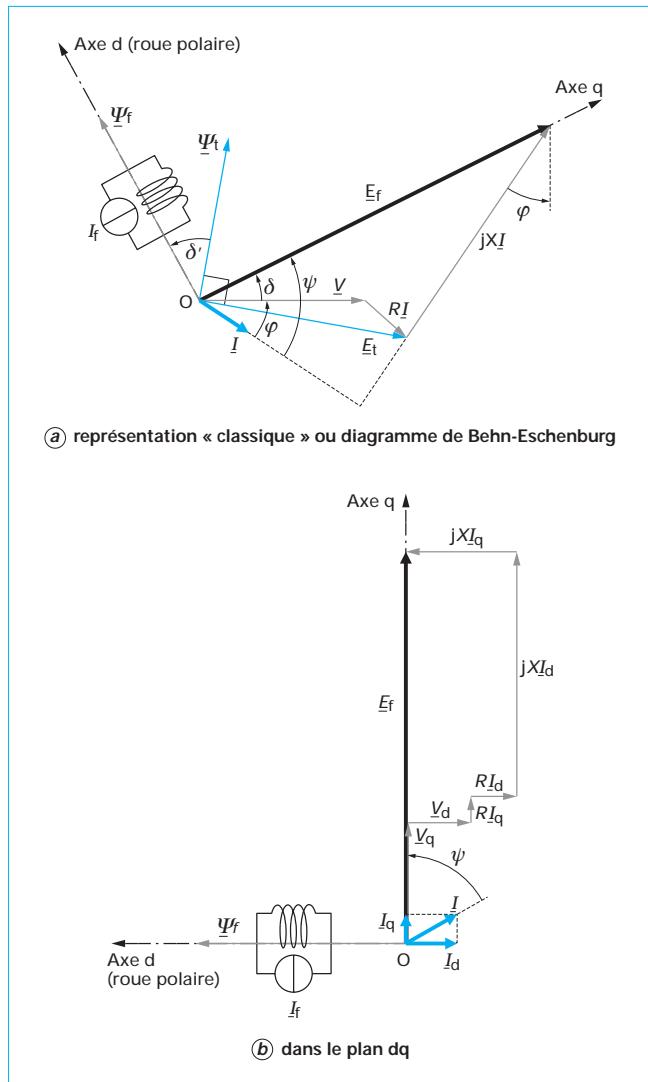


Figure 7 – Diagrammes vectoriels en fonctionnement générateur

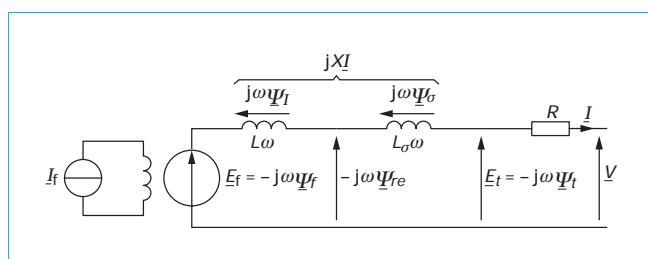


Figure 8 – Schéma électrique équivalent monophasé simplifié

les deux grandeurs magnétiques : les inductions d'entrefer et donc les flux embrassés tournants inducteur et total. Les deux angles sont identiques dans le cas d'un fonctionnement à flux forcé (résistance d'induit négligée).

### 1.1.6 Bilan de puissance

Le bilan de puissance en fonctionnement générateur, valable également pour les machines à pôles saillants et/ou saturées, est illustré par la figure 9. L'enroulement d'excitation ne fournissant que le champ magnétique, la puissance absorbée par celui-ci est entièrement transformée en pertes Joule. Dans le cas où l'alimentation du bobinage d'excitation est assurée par un groupe tournant monté sur l'arbre de la machine (auto-excitation), la puissance d'excitation est prélevée à la puissance mécanique absorbée. Dans ce cas, le rendement de conversion en fonctionnement générateur correspond au rapport de la puissance électrique disponible aux bornes de l'enroulement d'induit à la puissance mécanique reçue. Dans le cas contraire (excitation indépendante), il convient d'ajouter à la puissance mécanique absorbée la puissance électrique d'excitation.

En **fonctionnement moteur**, le rendement de conversion correspond au quotient de la puissance mécanique utile disponible sur l'arbre de la machine, par la puissance électrique absorbée par l'induit augmentée de celle absorbée par l'inducteur (si excitation indépendante).

Enfin, il convient de rappeler que pour une excitation par aimants permanents, les pertes et donc la puissance électrique d'alimentation correspondantes sont nulles.

S'ajoutent aux pertes inducteur précitées, les différentes pertes conséquentes de toute conversion électro-magnéto-mécanique : pertes par effet Joule dans les enroulements statoriques, pertes d'origine magnétique ainsi que pertes mécaniques.

#### ■ Pertes mécaniques

Elles sont dues essentiellement aux frottements solide/solide et solide/air. Pour les premiers (dus en particulier aux roulements et aux éventuels contacts balais/bagues pour l'alimentation de l'inducteur bobiné), les pertes comportent un terme indépendant de la vitesse (frottements secs) et un terme sensiblement proportionnel à la vitesse de rotation (frottements visqueux).

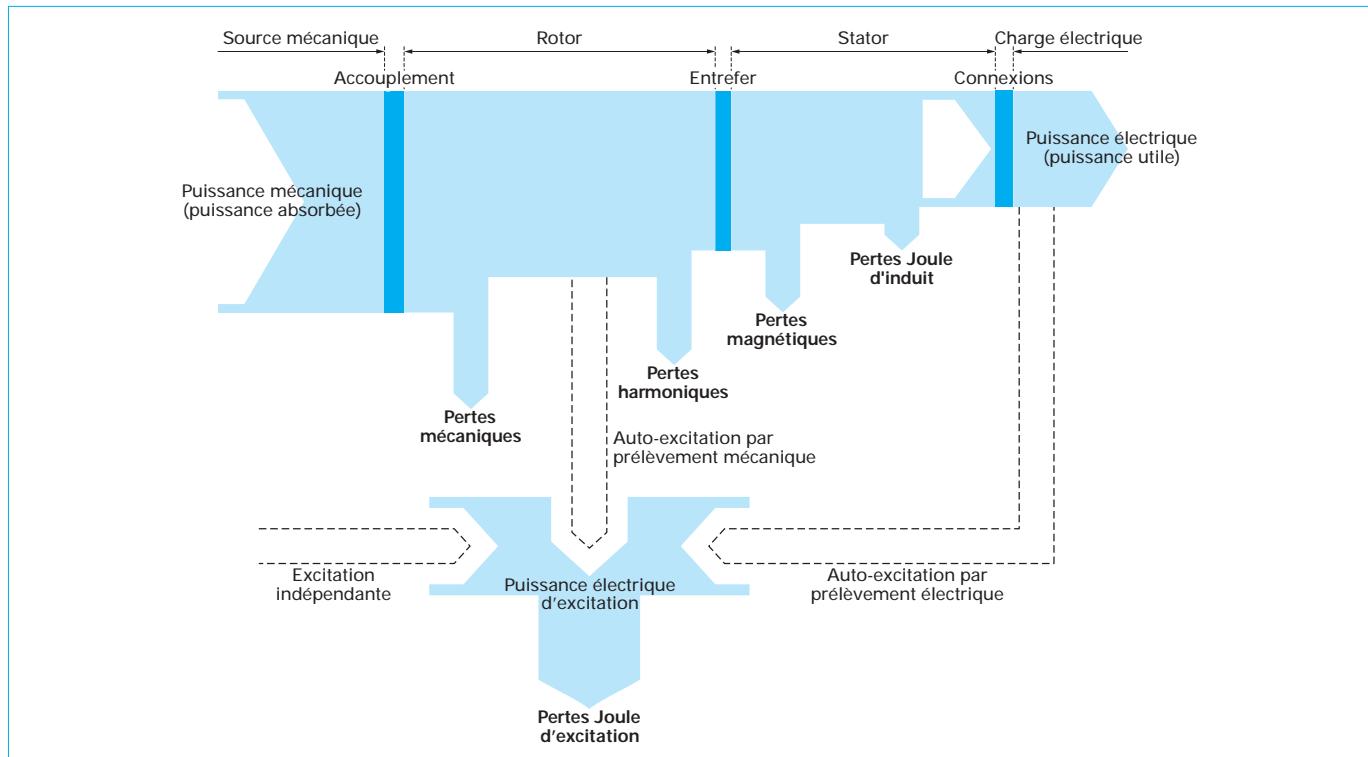
Les seconds, dus au cisaillement de l'air piégé entre le rotor et le stator, génèrent les pertes aérodynamiques. La valeur de ces pertes dépend essentiellement de la géométrie de l'entrefer et du type d'écoulement caractérisé en première approximation par le nombre de Reynolds. Ces pertes deviennent relativement significatives pour les grandes vitesses de rotation ( $> 10\ 000$  tr/min). Elles varient, en première approximation, proportionnellement au carré de la vitesse de rotation.

#### ■ Pertes magnétiques

Ces pertes, par hystérésis et par courants de Foucault, sont dues aux variations du champ magnétique résultant en chaque point du circuit magnétique statorique, et dans une moindre mesure, rotorique. Pour réduire ces pertes, le circuit magnétique est feuilleté à l'aide de tôles en acier à forte résistivité ( $0,5 \mu\Omega \cdot m$  pour le FeSi3 %) et de faible épaisseur (0,5 à 0,3 mm).

D'un point de vue global, les pertes magnétiques générées au niveau statorique sont modélisées par une résistance  $R_f$  dont la valeur ne peut être supposée constante que dans le cas d'un fonctionnement à fréquence fixe à cause des pertes par hystérésis. Dans le cas d'un fonctionnement à fréquence variable, cette résistance pourra être identifiée pour chaque fréquence. En première approximation, la valeur de la conductance correspondante ( $1/R_f$ ) comporte une partie fixe relative principalement aux pertes par courants de Foucault, et une partie variable, inversement proportionnelle à la fréquence, relative aux pertes par hystérésis.

Les pertes magnétiques précédemment modélisées sont principalement générées au niveau du circuit magnétique statorique. Ce cas idéal correspond à une induction résultante parfaitement sinusoïdale tournant à la même vitesse que le rotor. Ce dernier peut donc être *a priori* massif. Cependant, du fait des harmoniques d'espace et/ou d'alimentation, il peut exister également des pertes



dans le rotor, souvent appelées pertes harmoniques. Ces pertes se développent dans le circuit magnétique rotorique (devant donc être feuilleté) et, le cas échéant, dans les aimants permanents [12].

**Nota :** pour plus de détails, le lecteur pourra se rapporter aux dossiers [26] et [18] *Pertes dans les machines tournantes* [D 3 450] et *Alternateurs synchrones de grande puissance (partie 3)* [D 3 552] de ce traité.

Le schéma monophasé équivalent complété, tenant compte des phénomènes dissipatifs magnétiques relatifs à l'induit, est donné à la figure 10.

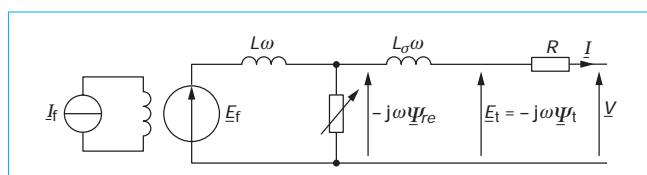


Figure 10 – Schéma électrique équivalent monophasé avec pertes d'origine magnétique

### 1.1.7 Expression du couple électromagnétique et des puissances

Les puissances active et réactive fournies ou consommées, selon le mode de fonctionnement, valent respectivement en régime équilibré :

$$P = 3 \langle v(t) i(t) \rangle = 3VI \cos(\varphi)$$

$$Q = 3 \langle v(t) i\left(t - \frac{T}{4}\right) \rangle = 3VI \sin(\varphi)$$

Une partie de la puissance réactive  $Q$  échangée avec la source électrique est liée à l'énergie nécessaire à la magnétisation de la machine (en particulier de l'entrefer).

En négligeant toutes les pertes, en particulier celles dans la résistance statorique (hypothèse valable pour les machines de puissance  $P$  assez élevée  $> 10 \text{ kW}$  et/ou fonctionnant à fréquence suffisamment grande  $\geq 50 \text{ Hz}$ ), la puissance active, alors égale à la puissance électromagnétique ( $P \approx P_{em}$ ), et la puissance réactive peuvent s'exprimer en fonction des grandeurs internes de la machine. En effet, à partir du diagramme des puissances (figure 11) établi en situation de flux forcé, on montre que :

$$\begin{cases} I \cos(\varphi) = \frac{E_f \sin(\delta)}{X} \\ I \sin(\varphi) = \frac{E_f \cos(\delta) - V}{X} \end{cases}$$

ce qui donne dans un raisonnement à tension et fréquence fixes (et à flux forcé) les expressions (26) et (27) faisant apparaître en particulier la corrélation entre l'angle interne ou de charge  $\delta$  et la puissance active échangée par la machine avec la source électrique associée :

$$P \approx P_{em} = \left(\frac{3V}{X}\right) \overline{AN} = \frac{3E_f V}{X} \sin(\delta) \quad (26)$$

$$Q = \left(\frac{3V}{X}\right) \overline{AM} = \frac{3E_f V}{X} \cos(\delta) - \frac{3V^2}{X} \quad (27)$$

Le premier terme de l'expression de la puissance réactive (relation 27) traduit la contribution de l'inducteur à la magnétisation de la machine, le second terme, à celle de la source électrique (fonctionnement générateur). À l'inverse des machines ne disposant

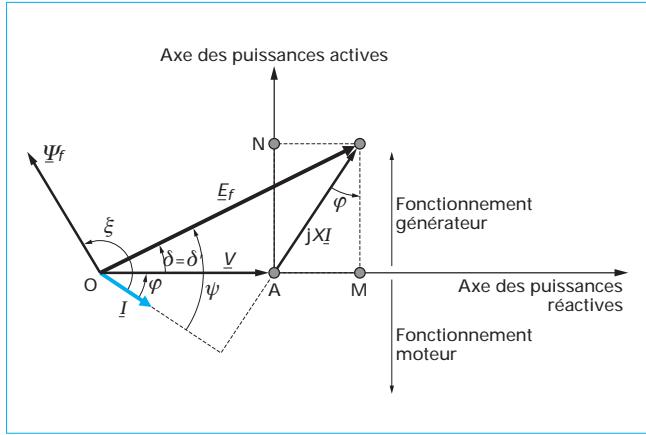


Figure 11 – Diagramme des puissances pour la machine à pôles lisses (avec  $R = 0$ , convention générateur)

pas d'excitation (machines à réductance variable pure, machines à induction), la machine synchrone peut donc, par le réglage de l'excitation, fournir (sur-excitation) ou absorber (sous-excitation) à la source de la puissance réactive. Cette caractéristique est exploitée sur les réseaux d'énergie pour le réglage de la tension plus sensible à la puissance réactive, notamment lors du fonctionnement en compensateur synchrone. Elle permet également le fonctionnement en association avec un pont à thyristors (en moteur ou en générateur), montage encore très utilisé en très fortes puissances.

Le couple électromagnétique se déduit aisément de (26) faisant :

$$C_{\text{em}} = \frac{P_{\text{em}}}{\omega} = \left( \frac{P}{\omega} \right) \frac{3E_f V}{X} \sin(\delta) = 3p \frac{\Psi_f V}{X} \sin(\delta) \\ = \frac{3p}{\sqrt{2}} \frac{M_{\text{af}} I_f V}{X} \sin(\delta) \quad (28)$$

Les équations précédentes sont adaptées à une association de la machine avec une source de tension à fréquence fixe imposant un flux forcé (réseau, par exemple). Dans le cas d'une association avec une source de courant (par exemple lors de l'alimentation par convertisseur statique régulé en courant), on préfère exprimer le couple électromagnétique en fonction du courant d'induit et du flux inducteur. On trouve ainsi :

$$C_{\text{em}} = \frac{3E_f I}{\Omega} \cos(\psi) = 3p \Psi_f [I \cos(\psi)] = 3p \Psi_f I_q \quad (29)$$

où  $\psi$  est le déphasage entre la FEM et le courant d'induit. Il correspond, à  $\frac{\pi}{2}$  près, à l'écart angulaire entre le champ d'induit et le

champ inducteur noté  $\xi = \psi + \frac{\pi}{2}$  :

$$C_{\text{em}} = 3p \Psi_f I \sin(\xi) \quad (30)$$

Sur la figure 12 sont représentées pour les deux types de sources électriques associées (contrôlée en tension ou en courant), les deux configurations de maximisation du couple électromagnétique. Notons qu'en l'absence d'autopilotage (maintien des angles  $\delta'$  et  $\xi$  fixes par une régulation), ces fonctionnements sont à la limite de la stabilité et ne sont pas possibles. À flux inducteur donné, ils minimisent respectivement le flux forcé (source contrôlée en tension) et le courant d'induit (source contrôlée en courant).

À l'inverse du cas d'une source associée contrôlée en tension où nous avons considéré un fonctionnement à flux forcé (résistance

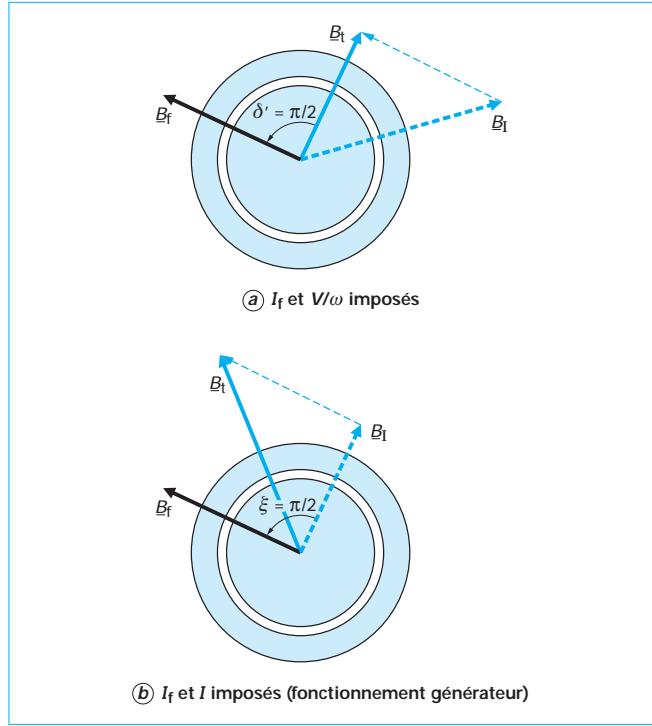


Figure 12 – Écart angulaire maximisant le couple pour les deux types d'alimentation

négligée), l'association d'une source contrôlée en courant permet de s'affranchir de cette hypothèse et d'obtenir donc un couple électromagnétique indépendant de la chute de tension résistive.

### 1.1.8 Signification de l'angle interne

L'angle  $\delta'$  que l'on appelle angle interne (ou angle de charge) correspond, par définition, à l'écart angulaire entre le flux induiteur  $\Psi_f$  et le flux résultant  $\Psi_t$  (ce dernier étant pris en référence). Il traduit l'état de charge de la machine dans le contexte spécifique d'une association de la machine avec une source contrôlée en tension à fréquence fixe. Lorsque la machine ne débite aucun courant (marche à vide), la FEM générée est égale, en module et en phase, à la tension du réseau ( $\delta' = \delta = 0$ ). Lorsque l'on augmente infinitement lentement (pour ne pas déclencher d'oscillations) la puissance mécanique sur l'arbre (fonctionnement en charge), le rotor prend de l'avance et l'angle interne augmente. L'angle interne représente donc la variation de la position de la roue polaire entre la marche à vide et la marche en charge pour un observateur lié au champ tournant.

Sur la figure 13, sont illustrées l'influence de la charge (en fonctionnement générateur) sur la distribution du champ magnétique résultant et donc sur l'angle interne. La machine considérée est élémentaire, bipolaire triphasée. Les résultats sont issus des calculs par éléments finis dans lesquels les courants d'induit et d'inducteur sont imposés pour chaque configuration (cas de la source contrôlée en courant).

La visualisation pratique de l'angle interne peut se faire à l'aide d'un capteur de position mécanique (figure 14). Par exemple, le signal issu d'un codeur incrémental permet, lorsqu'il est appliqué à l'entrée d'un compteur, d'adresser une EPROM dans laquelle est programmé le signal numérique  $\sin(p\theta)$  et d'obtenir l'image de la FEM notamment en charge lorsque celle-ci n'est directement accessible. Le compteur doit posséder des entrées de chargement

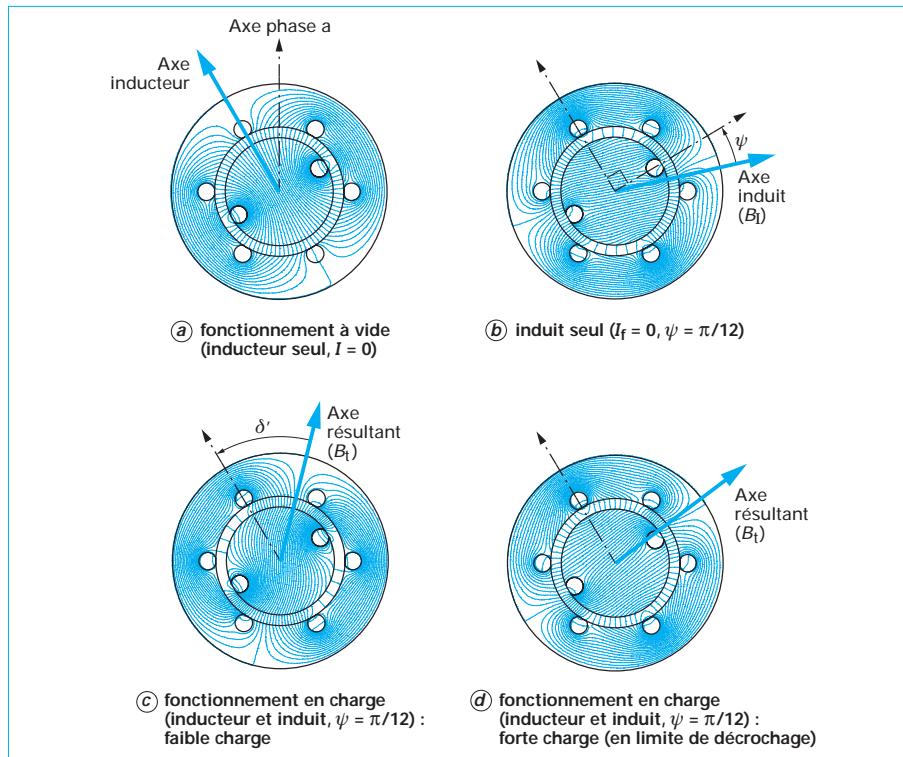


Figure 13 – Cartes de champ pour une machine bipolaire à « rotor lisse »

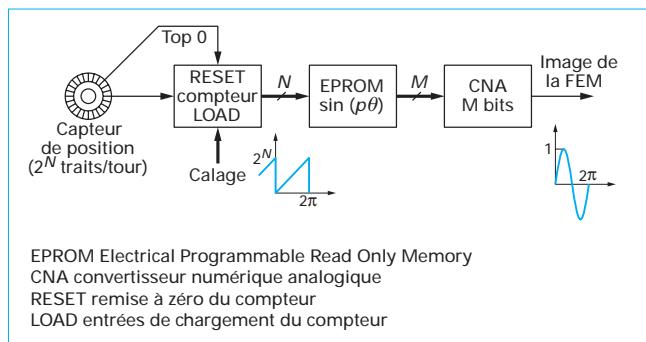


Figure 14 – Exemple de mise en œuvre d'une visualisation de l'angle interne

afin de pouvoir caler la phase de ce signal numérique avec la phase de la FEM. Cette opération de calage, effectuée à vide, permet de visualiser l'angle interne en mesurant le déphasage entre la tension réseau  $v$  (phase a par exemple) et le signal analogique obtenu après conversion numérique-analogique du signal  $\sin(p\theta)$ . Le déphasage entre  $\sin(p\theta)$  et le courant débité  $i(t)$  correspond, quant à lui, au déphasage  $\psi$  ( $\psi = \pi/2 - \xi$ ).

## 1.2 Machines à pôles saillants

Les machines à pôles saillants se différencient des machines à pôles lisses par la variation de leur inductance d'induit, jusqu'ici considérée constante, en fonction de la position relative rotor-stator du fait de l'anisotropie magnétique polaire du rotor (inducteur bobiné sur pôles saillants (figure 15) ou à aimants permanents avec

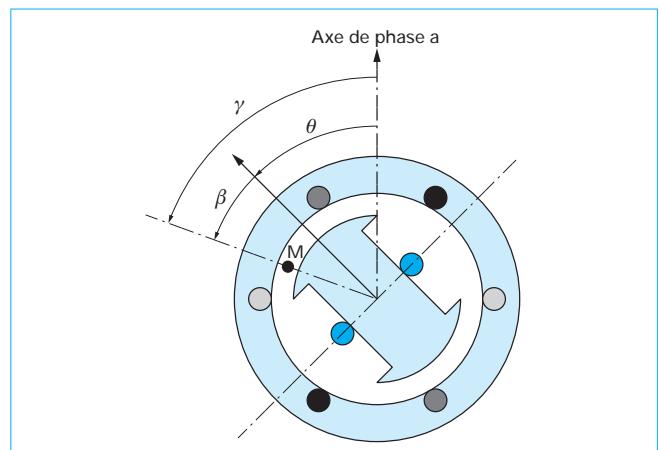


Figure 15 – Représentation élémentaire d'une machine synchrone bipolaire à pôles saillants bobinés

pièces polaires). La périodicité de cette variation doit être égale à celle des forces magnétomotrices générées. La présence d'encoches engendre une variation locale de l'entrefer, dont la périodicité est très inférieure à celle des FMM. Par conséquent, nous continuons à négliger ce phénomène dont les effets peuvent être, en première approximation, considérés comme parasites vis-à-vis de la création du couple électromagnétique.

### 1.2.1 Perméance superficielle d'entrefer

La perméance superficielle d'entrefer d'une machine à pôles saillants est une fonction dont la périodicité est double du nombre

de paires de pôles (figure 16). Dans le cas d'un rotor saillant, on peut l'exprimer comme suit en ne considérant que le fondamental (à l'échelle du pôle) :

$$\varphi_{se}(\beta) = \langle \varphi_{se} \rangle + \frac{\Delta \varphi_{se}}{2} \cos(2p\beta) \quad (31)$$

La valeur moyenne de la perméance  $\langle \varphi_{se} \rangle$  ainsi que l'amplitude crête-à-crête de sa variation  $\Delta \varphi_{se}$  sont liées aux caractéristiques géométriques de la machine, à savoir l'ouverture angulaire des dents rotoriques  $\beta_{dr}$  et aux entrefers minimal et maximal notés respectivement  $e_{s min} = K_c e_s$  et  $e_{s max}$ . Dans le cadre très approximatif d'une distribution rectangulaire, le développement en série de Fourier de celle-ci permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{se} \rangle &\approx (\varphi_{se})_{min} + \frac{p\beta_{dr}}{\pi} [(\varphi_{se})_{max} - (\varphi_{se})_{min}] \\ \Delta \varphi_{se} &\approx \frac{4}{\pi} [(\varphi_{se})_{max} - (\varphi_{se})_{min}] \sin(p\beta_{dr}) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} (\varphi_{se})_{min} \approx \frac{\mu_0}{K_c e_s} \\ (\varphi_{se})_{max} \approx \frac{\mu_0}{e_{s max}} \end{cases}$$

Nous retrouvons bien sûr le cas de la machine à pôles lisses pour laquelle  $e_{s min} = e_{s max} = K_c e_s$ ,  $p\beta_{dr} = \pi$  et donc  $\Delta \varphi_{se} = 0$ .

Par rapport à l'axe de référence fixe statorique (axe de la phase a) qui fait un angle  $\theta$  avec l'axe rotorique (avec  $\beta = \gamma - \theta$ ), on trouve :

$$\varphi_{se}(\gamma, \theta) = \langle \varphi_{se} \rangle + \frac{\Delta \varphi_{se}}{2} \cos(2p\gamma - 2p\theta) \quad (32)$$

## 1.2.2 Inductions magnétiques d'entrefer

Le produit de la perméance superficielle d'entrefer (32) et de la FMM d'excitation (5), supposée parfaitement sinusoïdale, correspond à l'induction d'excitation d'entrefer. Le résultat de calcul fait apparaître un terme en harmonique 3. En ne retenant que le fondamental, nous obtenons :

$$B_f(\gamma, t) = \left[ \langle \varphi_{se} \rangle + \frac{\Delta \varphi_{se}}{4} \right] K_f I_f \sqrt{2} \cos(p\gamma - \omega t - p\theta_0) \quad (33)$$

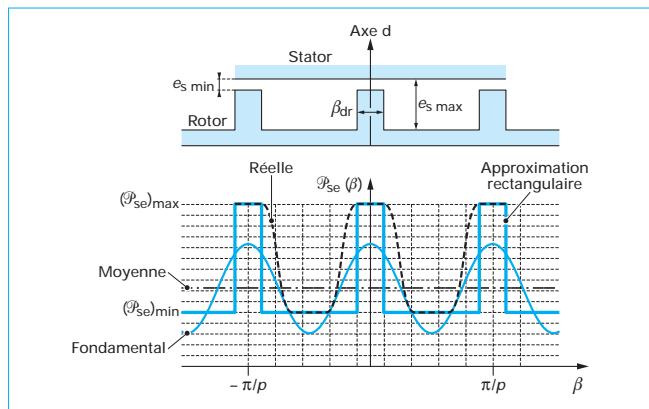


Figure 16 – Variation de la perméance superficielle d'entrefer d'une machine à pôles saillants

Comparativement à l'expression obtenue dans le cas de la machine à pôles lisses (9), la relation (33) montre que la saillance rotorique modifie uniquement l'amplitude de l'induction magnétique compte tenu de la modification de la perméance superficielle équivalente et non sa richesse harmonique (hypothèse de variation sinusoïdale de la perméance d'entrefer).

En utilisant la même démarche que précédemment, l'induction d'entrefer générée par les trois phases de l'induit par rapport à la référence fixe (axe de la phase a) s'écrit :

$$\begin{aligned} B_I(\gamma, t) &= \varphi_{se}(\gamma, \theta) \varepsilon_I(\gamma, t) \\ &= \varphi_{se}(\gamma, \theta) K_I I \sqrt{2} \cos(p\gamma - \omega t - (\psi + \frac{\pi}{2})) \end{aligned} \quad (34)$$

En injectant dans l'équation (34) l'expression de la perméance superficielle (32) il y apparaît, comme pour l'inducteur, un terme harmonique 3. En ne retenant que le fondamental, ce produit vaut :

$$\begin{aligned} B_I(\gamma, t) &= K_I \langle \varphi_{se} \rangle I \sqrt{2} \cos(p\gamma - \omega t) \\ &\quad + K_I \frac{\Delta \varphi_{se}}{4} I \sqrt{2} \cos(p\gamma - \omega t - 2p\theta_0) \end{aligned} \quad (35)$$

Rappelons que l'angle initial  $\theta_0$  de calage de l'axe rotorique par rapport à l'axe fixe de référence est lié au déphasage  $\psi$  entre le courant d'induit et la FEM à vide par la relation :  $p\theta_0 = \psi + \frac{\pi}{2}$ .

En faisant explicitement apparaître la quantité  $(p\gamma - \omega t - p\theta_0)$  dans l'argument de chacun des deux termes de (35) nous obtenons, après quelques calculs intermédiaires utilisant les identités trigonométriques usuelles, l'expression suivante :

$$\begin{aligned} B_I(\gamma, t) &= K_I \left[ \langle \varphi_{se} \rangle + \frac{\Delta \varphi_{se}}{4} \right] [-I \sin(\psi)] \\ &\quad + K_I \left[ \langle \varphi_{se} \rangle - \frac{\Delta \varphi_{se}}{4} \right] [I \cos(\psi)] \\ &\quad \sqrt{2} \cos(p\gamma - \omega t - p\theta_0) \\ &\quad \sqrt{2} \sin(-p\gamma + \omega t + p\theta_0) \end{aligned} \quad (36)$$

On note :

$$\begin{cases} (\varphi_{se})_d = \langle \varphi_{se} \rangle + \frac{\Delta \varphi_{se}}{4} \\ (\varphi_{se})_q = \langle \varphi_{se} \rangle - \frac{\Delta \varphi_{se}}{4} \end{cases} \quad (37)$$

La relation (36) peut s'écrire sous la forme (38) faisant apparaître explicitement les vecteurs inductions  $B_{Id}$  et  $B_{Iq}$  générés par les vecteurs courants  $I_d$  et  $I_q$  respectivement.

La valeur efficace de ces derniers, donnée par (39), correspond à la projection du vecteur courant  $I$  sur les axes d et q (figure 17).

$$\begin{aligned} B_I(\gamma, t) &= \text{Re} \left\{ \begin{array}{l} K_I (\varphi_{se})_d \sqrt{2} [-\sin(\psi) I e^{j(\omega t + p\theta_0)}] \\ + K_I (\varphi_{se})_q \sqrt{2} [\cos(\psi) I e^{j(\omega t + p\theta_0 - \frac{\pi}{2})}] \end{array} \right\} e^{-jp\gamma} \\ &= \text{Re} \left\{ \begin{array}{l} K_I (\varphi_{se})_d \sqrt{2} I_d e^{-jp\gamma} \\ + K_I (\varphi_{se})_q \sqrt{2} I_q e^{-jp\gamma} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{cases} I_d = -I \sin(\psi) \\ I_q = +I \cos(\psi) \end{cases} \quad (39)$$

L'induction d'entrefer générée par la réaction magnétique d'induit peut donc se décomposer en deux termes orthogonaux d

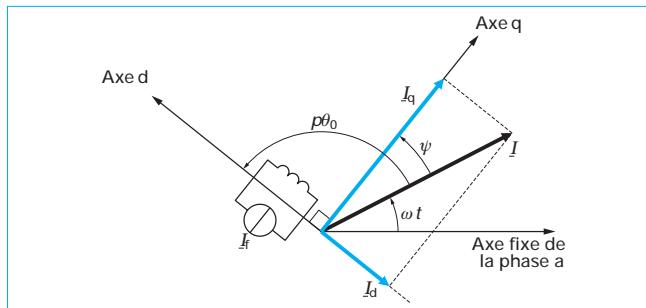


Figure 17 – Décomposition du vecteur courant

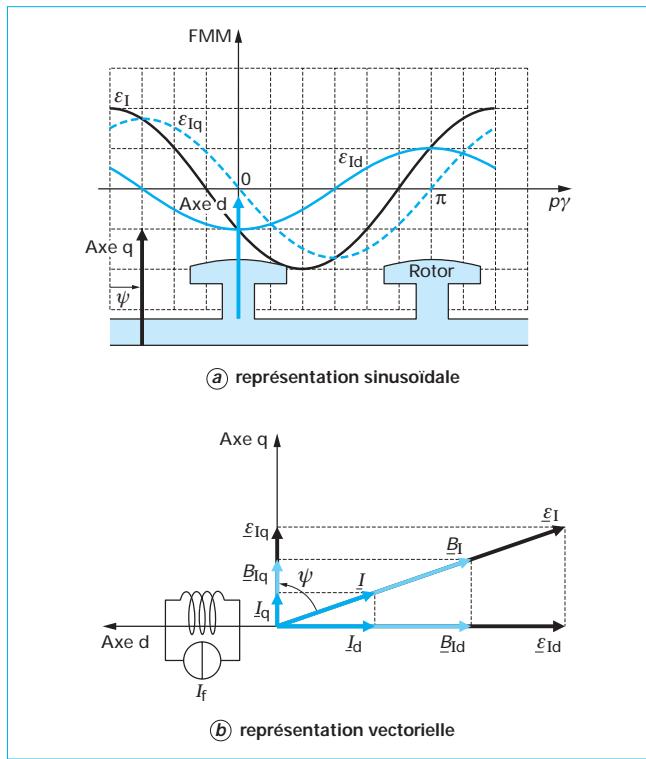


Figure 18 – Décomposition spatiale de la FMM d'induit

et q. De même, la FMM d'induit admet deux composantes notées  $\varepsilon_{Id}$  et  $\varepsilon_{Iq}$ , et dont l'expression est déduite directement de la relation (36) :

$$\begin{cases} \varepsilon_{Id}(t, \gamma) = K_1 I_d \sqrt{2} \cos(p\gamma - \omega t - p\theta_0) \\ = \operatorname{Re}[K_1 I_d e^{-j p \gamma}] \\ \varepsilon_{Iq}(t, \gamma) = K_1 I_q \sqrt{2} \cos(p\gamma - \omega t - p\theta_0 - \frac{\pi}{2}) \\ = \operatorname{Re}[K_1 I_q e^{-j p \gamma}] \end{cases} \quad (40)$$

La distribution spatiale des FMM ainsi que leur représentation vectorielle sont illustrées figures 18a et 18b respectivement.

En régime magnétique linéaire, l'induction résultante ainsi obtenue est égale à la superposition des inductions d'entrefer que génèrent deux machines synchrones équivalentes à pôles lisses de même rayon d'entrefer (figure 19) présentant des entrefers diffé-

rents de valeurs notées  $e_{sd}$  et  $e_{sq}$ , et données par (41) dont les armatures statoriques génèrent chacune une FMM d'induit  $\varepsilon_{Id}$  et  $\varepsilon_{Iq}$ . Notons que la « machine q » est non excitée.

$$\begin{cases} e_{sd} = \frac{\mu_0}{(\rho_{se})_d} \\ e_{sq} = \frac{\mu_0}{(\rho_{se})_q} \end{cases} \quad (41)$$

Cela constitue un résultat fondamental qui nous permet de simplifier considérablement l'étude des machines à pôles saillants. En effet, limités au premier harmonique, ces résultats montrent que la machine peut être complètement définie à partir uniquement de deux valeurs caractéristiques de la perméance superficielle. Ce qui permet de s'affranchir de la prise en compte, dans les équations électriques, de la position instantanée du rotor et donc de les résoudre comme dans une machine à pôles lisses.

### Remarques

1 – Bien que peu utile, la décomposition de la machine synchrone en deux machines équivalentes d et q est également possible dans le cas de la machine à pôles lisses. Les deux machines équivalentes seraient, à l'inverse du cas de la machine à pôles saillants, géométriquement identiques ( $e_{sd} = e_{sq} = e_s$ ,  $X_d = X_q = X$ ).

2 – Dans les machines à pôles saillants bobinés, l'enroulement d'excitation est nécessairement concentrique. Le coefficient de bobinage est donc unitaire. Par conséquent, le nombre équivalent de spires en série par pôle est égal au nombre réel de spires ( $n'_f = n_f$ ).

3 – Pour la modélisation de la machine à pôles saillants, nous avions considéré un modèle simple de la perméance superficielle et une répartition parfaitement sinusoïdale de la FMM d'induit. Le produit de ces deux fonctions, donnant la répartition de l'induction d'entrefer due à la réaction magnétique d'induit, a fait apparaître un harmonique 3 dans celle-ci. En conservant cet harmonique 3, le résultat issu du modèle analytique est assez représentatif de celui obtenu par calculs numériques (figure 20) dans lesquels l'armature statorique a été remplacée par une nappe de courant surfacique équivalente. En éliminant cet harmonique 3 (modélisation au premier harmonique, relation (35)), l'erreur commise sur la répartition spatiale est à l'inverse importante. En revanche, pour les répartitions temporelles, intervenant dans les diagrammes vectoriels et dans les équations électriques, la disposition d'un bobinage d'induit de forme adéquate permet d'atténuer fortement l'importance de ces harmoniques.

### 1.2.3 Équations des flux

Comme pour la machine à pôles lisses, on peut définir un flux de réaction magnétique d'induit d'entrefer, pour chaque machine équivalente, tel que :

$$\underline{\Psi}_I = \underline{\Psi}_{Id} + \underline{\Psi}_{Iq}$$

$$\text{avec } \underline{\Psi}_{Id} = L_d \underline{I}_{Id}, \quad \underline{\Psi}_{Iq} = L_q \underline{I}_{Iq}$$

où  $L_d$  et  $L_q$  sont les inductances cycliques respectivement des machines à pôles lisses équivalentes d et q. Les expressions de ces inductances (équivalente à celle déjà obtenue pour la machine à pôles lisses) sont :

$$L_d = \frac{6}{\pi} (2n'_s)^2 R_s L_s (\rho_{se})_d \quad (42)$$

$$L_q = \frac{6}{\pi} (2n'_s)^2 R_s L_s (\rho_{se})_q \quad (43)$$

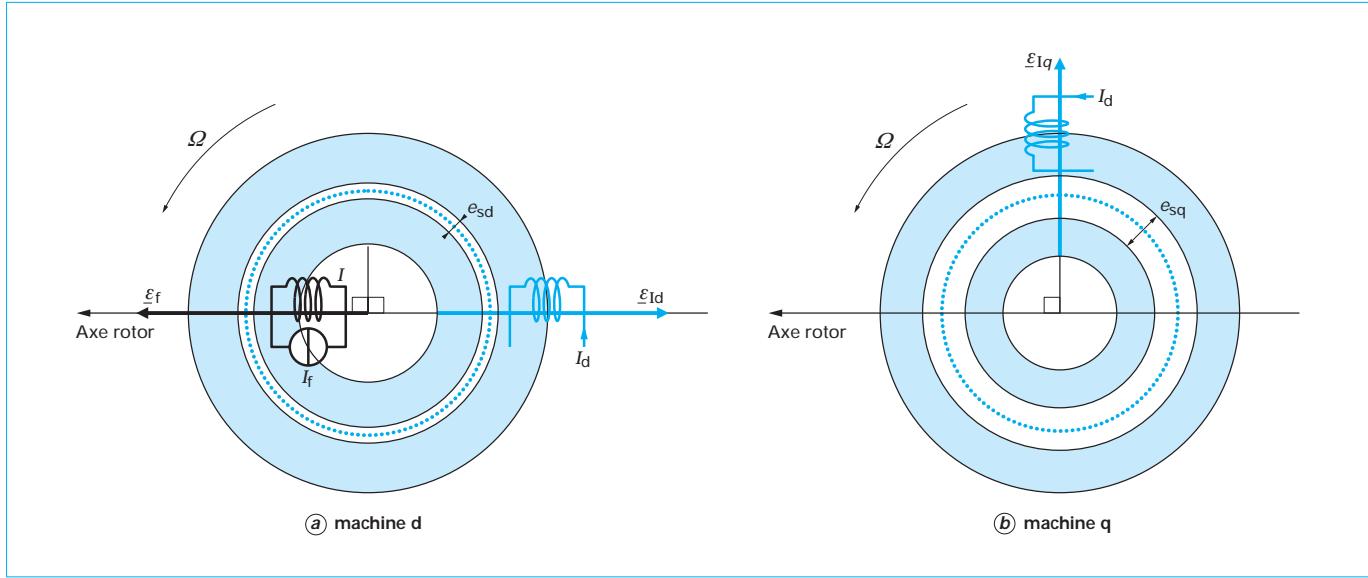


Figure 19 – Machines à pôles lisses équivalentes (fonctionnement générateur)

Du fait de la non-saturation, le flux d'entrefer embrassé par chaque enroulement statorique vaut :

$$\underline{\Psi}_d = \underline{\Psi}_f + \underline{\Psi}_{Id}, \quad \underline{\Psi}_q = \underline{\Psi}_{Iq}$$

Le flux hors entrefer, ne dépendant pas ou peu de la position du rotor, s'écrit comme dans le cas des machines à pôles lisses :

$$\underline{\Psi}_\sigma = L_\sigma \underline{I}$$

Ainsi, nous avons pour chaque phase (figure 21) :

- $\underline{\Psi}_{re} = \underline{\Psi}_d + \underline{\Psi}_q$  : flux résultant d'entrefer (hors fuites magnétiques)  
 $\underline{\Psi}_t = \underline{\Psi}_f + \underline{\Psi}_{Id} + \underline{\Psi}_{Iq} + \underline{\Psi}_\sigma$  : flux total embrassé par une phase de l'induit dû à la contribution conjointe de l'induit et de l'inducteur.

#### 1.2.4 Équations électriques et 1<sup>er</sup> diagramme de Blondel

La force électromotrice induite en charge dans une phase de l'induit  $E_t = -j\omega \underline{\Psi}_t$  s'écrit donc :

$$\underline{E}_t = \underline{E}_f - j\omega \underline{\Psi}_\sigma + j\omega \underline{\Psi}_{Id} + j\omega \underline{\Psi}_{Iq}$$

En remplaçant les flux embrassés par leurs expressions en fonction des inductances et compte tenu de l'équation électrique générale du circuit (relation (24)), nous obtenons :

$$\underline{E}_f = \underline{V} + R\underline{I} + j\omega(L_d + L_\sigma)\underline{I}_d + j\omega(L_q + L_\sigma)\underline{I}_q \quad (44)$$

En notant :

$X_d = (L_d + L_\sigma)\omega$  : réactance dans l'axe direct ou longitudinal (axe rotor),

$X_q = (L_q + L_\sigma)\omega$  : réactance dans l'axe en quadrature ou transversal, l'équation (45) devient :

$$\underline{E}_f = \underline{V} + R\underline{I} + jX_d \underline{I}_d + jX_q \underline{I}_q \quad (45)$$

Dans le cas d'un fonctionnement où la position de l'axe rotatoire est inconnue (alternateur couplé au réseau par exemple), l'axe portant la FEM est donc inconnu. Généralement, la valeur efficace de cette dernière est également inconnue. On cherche donc, à travers la construction du diagramme vectoriel des tensions et connaissant les grandeurs électriques liées à la source associée à la machine que sont le courant et la tension d'induit ainsi que le déphasage  $\varphi$ , à déterminer la FEM d'excitation et le courant inducteur.

Ceci est fait en rajoutant puis retranchant la quantité  $jX_q \underline{I}_d$  à l'équation (45), ce qui donne :

$$\underline{E}_f = [\underline{V} + R\underline{I} + jX_q \underline{I}] + j(X_d - X_q)\underline{I}_d \quad (46)$$

L'extrémité du vecteur correspondant à la somme vectorielle des trois premiers termes de cette expression indique la position de l'axe q. Le vecteur restant (quatrième terme) étant parallèle à l'axe q, la construction du vecteur FEM d'excitation est alors immédiate (figure 22a).

Dans le cas où la position rotatoire est connue à chaque instant (fonctionnement autopiloté), il est plus commode d'exprimer les grandeurs électriques précédentes en fonction de leurs projections sur les axes d et q. Nous obtenons donc :

$$\begin{cases} \underline{E}_f = \underline{V}_q + R\underline{I}_q + jX_d \underline{I}_d \\ 0 = \underline{V}_d + R\underline{I}_d + jX_q \underline{I}_q \end{cases} \quad (47)$$

La figure 22b en donne une représentation vectorielle.

#### 1.2.5 Schémas électriques équivalents

Dans le cas de la machine à pôles saillants, contrairement à la machine à pôles lisses, le schéma équivalent monophasé correspond à la superposition de deux schémas monophasés distincts correspondant chacun au schéma équivalent des machines à pôles lisses équivalentes vues précédemment (figure 23). Notons que seule la machine d comporte une FEM d'excitation. En outre, les termes  $X_d \underline{I}_d$  (« machine d » parcourue par un courant  $I_d$ ) et  $X_q \underline{I}_q$  (« machine q »

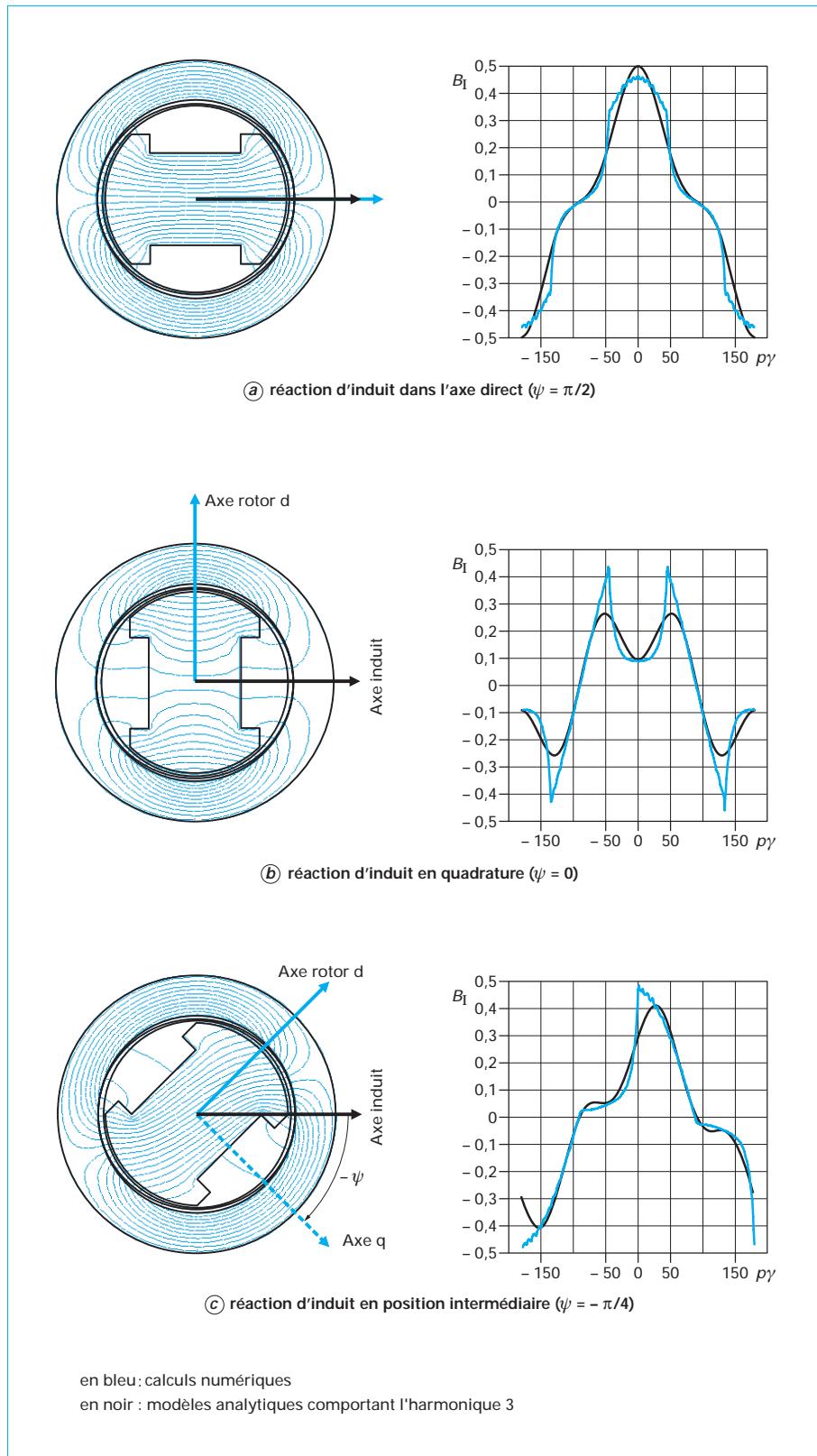


Figure 20 – Exemples de cartes du champ résultant des contributions de l'induit et de l'inducteur et formes d'onde d'induction correspondantes pour différents décalages angulaires de l'axe de la réaction d'induit par rapport à celui de l'inducteur

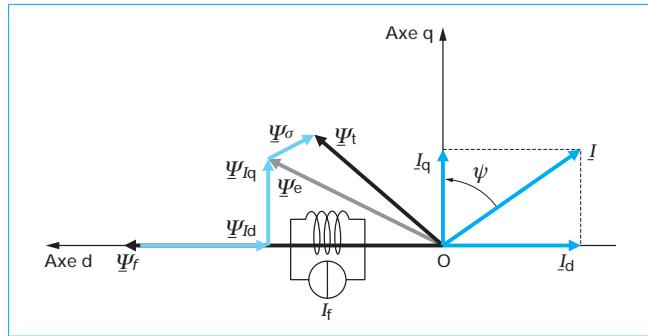


Figure 21 – Diagramme des flux en fonctionnement générateur

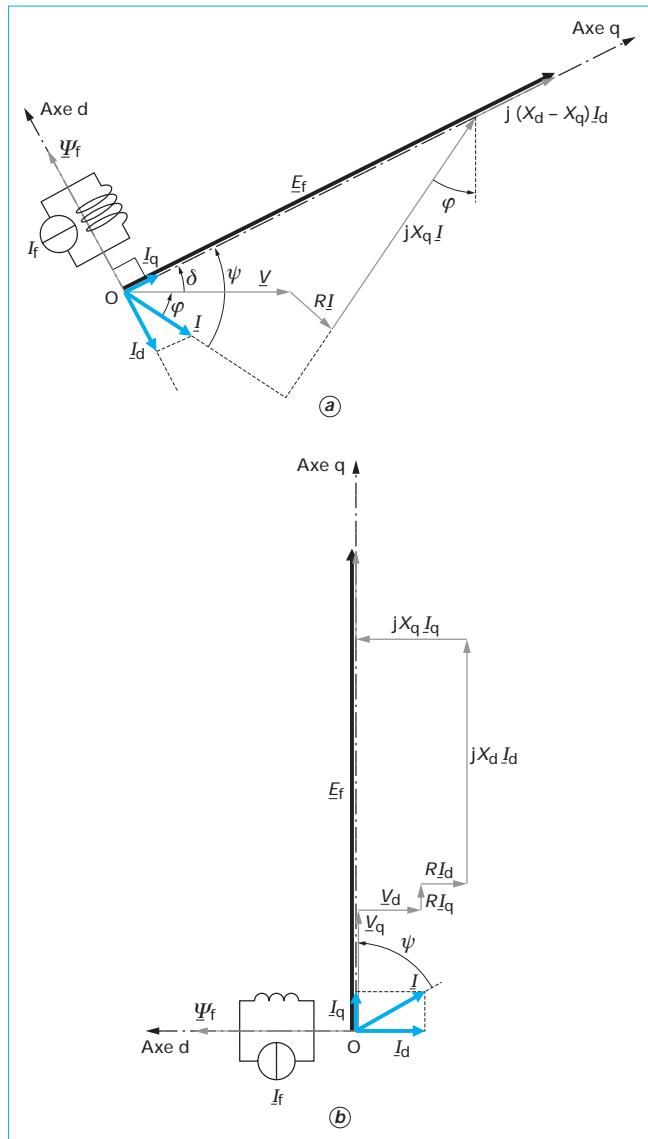


Figure 22 – Diagrammes vectoriels de la machine à pôles saillants (fonctionnement générateur) ou diagramme de Blondel

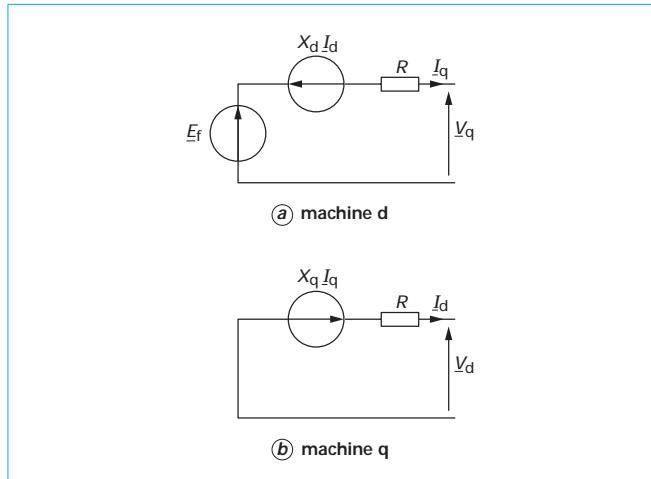


Figure 23 – Schémas électriques monophasés équivalents simplifiés (fonctionnement générateur)

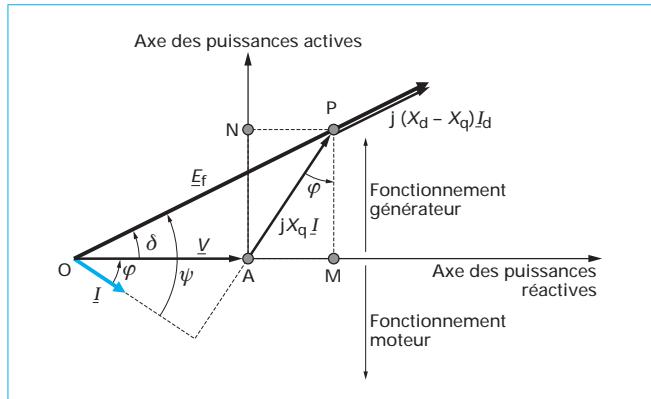


Figure 24 – Diagramme des puissances pour la machine à pôles saillants (avec chute de tension résistive négligée, fonctionnement générateur)

parcourue par un courant  $I_d$  intervenants dans le système d'équation (48) traduisent l'influence croisée d'une machine sur l'autre. Ils sont représentés par des sources de tension dans chacun des schémas équivalents.

### 1.2.6 Puissance et couple électromagnétiques

En première approximation, nous supposons que la chute ohmique due à la résistance d'induit est négligeable devant celle liée à la réactance d'induit. Dans ces conditions, le diagramme vectoriel des tensions et des puissances est celui de la figure 24.

Comme précédemment, la puissance active transmise à la charge (aux pertes Joule d'induit près) et la puissance réactive échangée ont pour expression :

$$P_{\text{em}} = \overline{AN} \frac{3V}{X_q}$$

$$Q = \overline{AM} \frac{3V}{X_q}$$

À partir des relations géométriques simples, nous obtenons les expressions (48) et (49) utiles lors d'un fonctionnement à flux forcé. Dans ces expressions interviennent les grandeurs internes de la machine ainsi que celles relatives à la source électrique associée supposée contrôlée en tension :

$$P_{\text{em}} = \frac{3E_f V}{X_d} \sin(\delta) + \frac{3V^2}{2} \left[ \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right] \sin(2\delta) \quad (48)$$

$$Q = \frac{3E_f V}{X_d} \cos(\delta) - \frac{3V^2}{X_d} - \frac{3V^2}{2} \left[ \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right] (1 - \cos(2\delta)) \quad (49)$$

Le couple électromagnétique, pour une machine à pôles saillants, vaut alors :

$$C_{\text{em}} = \frac{3pE_f V}{X_d \omega} \sin(\delta) + \frac{3p}{\omega} \frac{V^2}{2} \left[ \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right] \sin(2\delta) \quad (50)$$

Dans les cas d'alimentation en courant, en écrivant le bilan des puissances à partir des deux schémas équivalents précédents (figure 23), on obtient :

$$P_{\text{em}} = 3(X_q I_q I_d) + 3(E_f I_q - X_d I_d I_q)$$

Ce qui donne :

$$C_{\text{em}} = \frac{3p}{\omega} [E_f I_q + I_d I_q (X_q - X_d)] \quad (51)$$

Le premier terme de l'expression (51) correspond à la composante dite synchrone (interaction induit-inducteur, parfois appelé hybride) du couple dont la nature est identique à celle de la machine à pôles lisses. Le second terme correspond à la composante réductrice (interaction induit-circuit magnétique rotorique) inexiste dans les machines à pôles lisses. Comme les effets d'enclenchement du stator sont négligés (ils sont parfois inexistant lorsque le bobinage d'induit est sans encoche), la composante de détenté (cf. figure 25) n'apparaît pas dans cette analyse.

Le couple réducteur existe même en absence de courant inducteur. Cependant, dans ce cas, la puissance réactive échangée est toujours négative, la machine dans ce mode de fonctionnement nécessitera par conséquent un apport de réactif et ce, même en fonctionnement générateur. L'apport de puissance réactive est assuré par la source électrique directement ou encore l'utilisation de condensateurs.

La modélisation de la machine à pôles saillants que nous venons d'effectuer s'applique également au cas de la machine à pôles lisses en posant  $X_d = X_q = X$ .

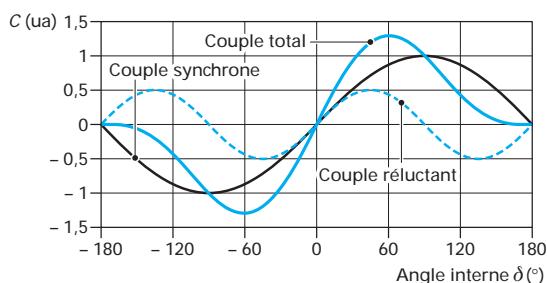


Figure 25 – Variation des composantes synchrones, réductrice et résultante du couple en fonction de l'angle interne pour une machine à pôles saillants avec  $X_q < X_d$

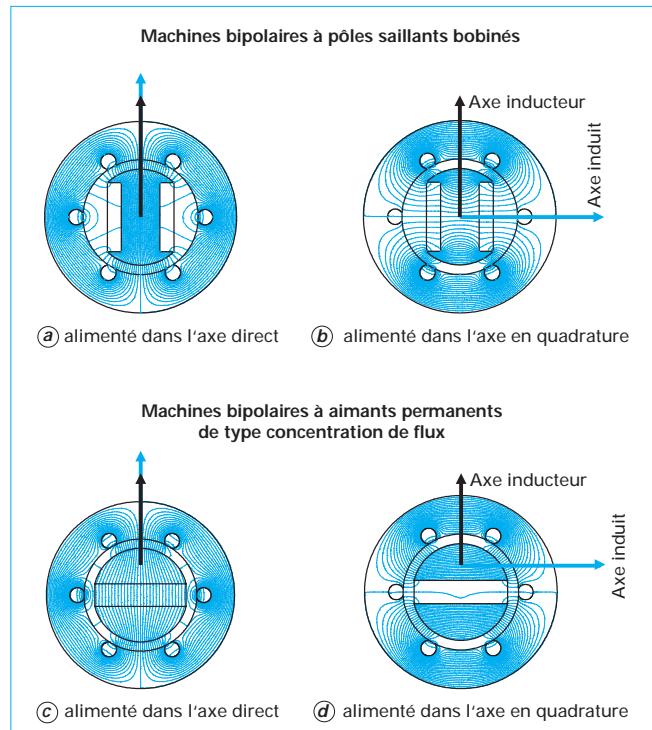


Figure 26 – Exemples de cartes de champ induit seul pour une machine bipolaire à pôles saillants à inducteur à aimant permanent avec pièces polaires

### 1.2.7 Remarque sur le rapport de saillance

Les figures 26a, b, c, d représentent les cartes de champ dues à l'induit alimenté dans les deux configurations précitées pour une machine bipolaire à pôles saillants bobinés (figures 26a, b) et à aimants permanents de type concentration de flux (figures 26c, d). Pour ces dernières, les figures correspondantes montrent que l'inductance directe est inférieure à l'inductance en quadrature, la distance offerte aux lignes de champ dans ce dernier cas étant moins importante puisque traversant l'épaisseur de l'aimant (dans le plan de son aimantation) de perméabilité voisine de celle de l'air. Le rapport de saillance  $X_d/X_q$  est par conséquent inférieur à l'unité à l'inverse du cas de la machine à pôles saillants à inducteur bobiné. On parle dans ce cas de saillance inversée. Cette différence entraîne un comportement sensiblement différent de la machine, en particulier, concernant la limite de stabilité en fonctionnement non autopiloté (voir dossier *Machines synchrones : modes de fonctionnement* dans ce traité).

## 2. Modélisation des machines synchrones à champs tournants saturées

La saturation du circuit magnétique ajoute un degré de complexité important que des schémas équivalents simples ne permettent pas, en toute rigueur, de traiter car la notion d'inductance définie en régime linéaire n'est plus valable et les flux ne s'additionnent plus. Cependant, à partir de certaines approximations, nous pouvons adopter une modélisation approchée simple,

donnant dans les cas de fonctionnement moyenement saturés, une bonne approximation des performances de la machine.

Les hypothèses ou approximations classiquement adoptées sont les suivantes :

- les formes d'ondes (forces magnétomotrices, induction d'entrefer, flux, FEM, ...) restent sinusoïdales et décomposables selon les deux axes direct et transverse. La saturation n'affecte alors que les valeurs efficaces des grandeurs magnétiques et électriques. Cela permet de continuer à adopter une représentation vectorielle de Fresnel et l'utilisation du calcul complexe ;

- les fuites magnétiques sont non saturables (car circulant dans l'air). La notion d'inductance de fuites reste donc valable ;

- la saturation magnétique est supposée globale. Les effets non linéaires locaux sont négligés.

Bien que dans ces conditions une modélisation au premier harmonique soit possible, il n'est cependant pas possible d'extraire des formulations explicites de la puissance électromagnétique et donc du couple développé en fonction des caractéristiques internes de la machine comme nous avons pu le faire pour le régime non saturé.

## 2.1 Machines à pôles lisses, méthode de Potier

Lorsque la saturation apparaît, l'induction magnétique et la force magnétomotrice ne sont plus liées par une relation linéaire. En effet, à la perméance superficielle d'entrefer s'ajoute celle du circuit magnétique qui, elle, dépend de la FMM symbolisant la chute de potentiel magnétique dans le circuit magnétique. Ainsi, la caractéristique à vide  $E_f(I_f)$ , à vitesse de rotation constante, ne se

résume plus à une simple droite de pente égale à  $\frac{M_{af}\omega}{\sqrt{2}}$ . Par

conséquent, la FEM résultante d'entrefer n'est plus une simple superposition des FEM à vide et relative au champ d'induit.

**La méthode de Potier** consiste à considérer, sachant que les fuites sont supposées non saturables, que la FEM résultante d'entrefer, due à une force magnétomotrice résultante, est celle générée par l'inducteur seul, mais décalée angulairement et alimentée par un courant d'excitation résultant  $I_{fr}$ . Ce courant d'excitation équivalent devra générer le même état magnétique de la machine et donc la même FMM résultante que ceux obtenus en charge en situation réelle.

Bien que la machine sature, on peut cependant superposer les FMM. La FMM résultante peut donc s'écrire simplement :

$$\varepsilon_{fr}(t, \gamma) = k_s [K_f \sqrt{2} I_f \cos(p\gamma - \omega t - p\theta_0) + K_I \sqrt{2} I \cos(p\gamma - \omega t)] \quad (52)$$

avec  $k_s(\varepsilon_{fr})$  coefficient prenant en compte la consommation d'amperes-tours dans le circuit magnétique. En régime saturé, sa valeur est inférieure à l'unité (voir dossier [15], *Machines synchrones : principes généraux et structures* [D 3 520] de ce traité). Elle dépend de l'état magnétique du circuit, donc du flux résultant et par conséquent de la FMM  $\varepsilon_{fr}$  elle-même.

La relation (58) peut également s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{fr}(t, \gamma) &= \operatorname{Re} \left\{ k_s K_f \sqrt{2} \left[ I_f e^{j(\omega t + p\theta_0)} + \frac{K_I}{K_f} I e^{j\omega t} \right] e^{-jp\gamma} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ k_s K_f \sqrt{2} \left[ I_f + \frac{K_I}{K_f} I \right] e^{-jp\gamma} \right\} \end{aligned}$$

Ainsi, la FMM résultante d'entrefer peut être vue comme celle générée par l'inducteur seul alimenté par un courant équivalent  $I_{fr}$  d'expression :

$$I_{fr} = I_f + \alpha I \quad (53)$$

où  $\alpha = \frac{K_I}{K_f} = \frac{3}{2} \frac{n'_s \sqrt{2}}{n'_f}$  est dit rapport d'équivalence. La quantité

$\alpha$  représente donc le courant équivalent à injecter dans l'inducteur pour que celui-ci génère la même FMM d'entrefer que celle obtenue par l'induit seul alimenté.

Il est aisé de montrer qu'en régime linéaire, la valeur de  $\alpha$  s'exprime en fonction du rapport de l'inductance cyclique et de l'amplitude de la mutuelle induit/inducteur sous la forme :

$$\alpha = \frac{L \sqrt{2}}{M_{af}}$$

En régime saturé, on ne peut plus dissocier les contributions en terme d'inductions et donc de flux de l'inducteur et de l'induit. Le flux total  $\Psi_t$  embrassé par une phase ne peut donc s'expliquer qu'en fonction de flux de fuites  $\Psi_\sigma$  (non saturables) et du flux résultant d'entrefer  $\Psi_{re}$  dû à l'effet combiné de l'induit et de l'inducteur :

$$\underline{\Psi}_t = \underline{\Psi}_{re} + \underline{\Psi}_\sigma$$

À partir de l'équation électrique générale donnée par (24), on peut donc écrire dans ce cas :

$$\underline{E}_{re} = -j\omega \underline{\Psi}_{re} = \underline{V} + R \underline{I} + j\omega L_\sigma \underline{I} \quad (54)$$

La valeur efficace de la FEM résultante d'entrefer peut être approchée en considérant la caractéristique à vide de la machine  $E_f(I_f)$  obtenue à vitesse constante. Puisque les fuites sont supposées non saturables, il suffit de remplacer simplement  $I_f$  par la valeur du courant d'excitation équivalent en charge  $I_{fr}$  (figure 27).

Le schéma équivalent monophasé simplifié (sans pertes magnétiques) ainsi que le diagramme vectoriel correspondant (diagramme de Potier) sont donnés figure 28. L'effet de la réaction d'induit sur le flux résultant d'entrefer est symbolisé par un transformateur de courant fictif de rapport de transformation égal à  $\alpha$ .

En fonctionnement non autopiloté pour lequel la machine est associée à une source électrique contrôlée en tension (alternateur couplé au réseau, par exemple), la connaissance des grandeurs de la source  $V, I, \phi$  permet de construire le vecteur FEM résultante  $E_{re}$ . À partir de la caractéristique à vide, on en déduit le courant d'excitation équivalent en charge  $I_{fr}$ . Par combinaison vectorielle (relation (53)), nous pouvons alors en déduire le module et la phase du courant d'excitation réel  $I_f$ , et donc la position des axes  $d$  et  $q$ .

La détermination expérimentale de  $\alpha$  et de  $L_\sigma$  est traditionnellement réalisée à partir du relevé de la caractéristique à vide et d'un essai en déwätté. Ce dernier correspond à un fonctionnement de la machine en générateur sur charge inductive pure pour lequel, en négligeant la résistance statorique, les relations vectorielles (53) et (54) deviennent des relations algébriques (pour plus de détails, voir dossiers [17] *Turboalternateurs*, [D 3530] et [18] *Alternateurs synchrones de grande puissance* [D 3 550], [D 3 551], [D 3 552]).

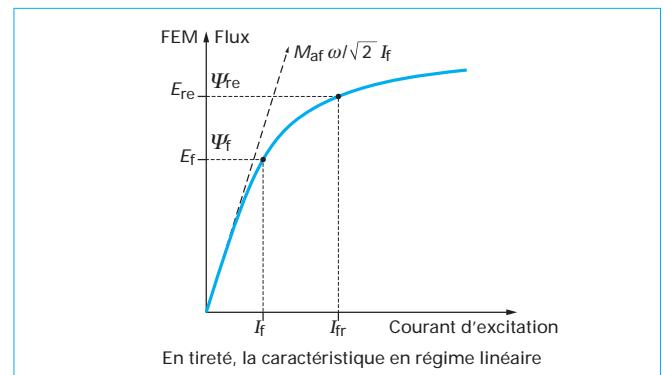


Figure 27 – Caractéristique à vide (vitesse de rotation constante)

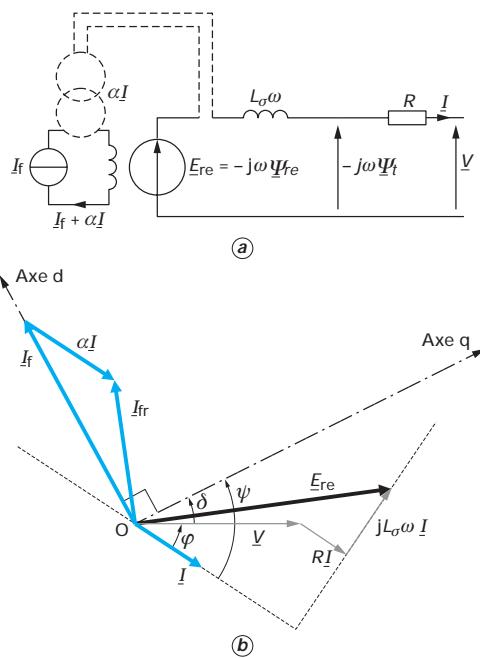


Figure 28 – Schéma électrique monophasé équivalent simplifié et diagramme vectoriel correspondant ou diagramme de Potier

Notons que la méthode de Potier suppose implicitement que le flux de fuites magnétiques de l'inducteur est le même à vide qu'en charge pour un même flux d'entrefer. C'est de par le fait, assimiler la courbe de FEM résultante en charge  $E_{re} = f(I_{fr})$  à la caractéristique à vide  $E_f = f(I_f)$ . Or, en charge, ces fuites sont dues au courant inducteur seul et non au courant résultant équivalent, ce qui se traduit par une mauvaise estimation du flux propre généré par l'inducteur et donc de son état magnétique.

Cependant, pour un fonctionnement avec une saturation magnétique légère et une inductance de fuite de l'inducteur faible, la méthode de Potier conduit généralement à une prédétermination satisfaisante des performances de la machine.

## 2.2 Machines à pôles saillants, second diagramme de Blondel

**L'hypothèse de Blondel** consiste à admettre qu'en régime saturé, en plus du flux de fuites non saturable, le flux d'entrefer d'axe en quadrature est également non saturable, ce qui revient à considérer que l'on continue à décomposer la machine à pôles saillants en deux machines équivalentes à pôles lisses et que la « machine q » est non saturable alors que la « machine d » peut l'être. Cette dernière est alors modélisée à partir de la méthode de Potier vue précédemment.

Dans ces conditions, le flux total embrassé par une phase de l'induit s'écrit alors :

$$\Psi_t = \Psi_{red} + \Psi_{Iq} + \Psi_\sigma$$

où  $\Psi_{red}$  est le flux résultant (contribution des bobinages d'inducteur et d'induit) dans l'axe d et  $\Psi_{Iq} = \Psi_q$  est le flux résultant dans l'axe q (donc uniquement dû à l'induit) et  $\Psi_\sigma$  est le flux de fuites.

À partir de l'équation générale des tensions (24), il vient :

$$\underline{E}_{req} = -j\omega\Psi_{red} = \underline{V} + R\underline{I} + j\omega L_q \underline{I}_q + j\omega L_\sigma \underline{I} \quad (55)$$

Pour faciliter la construction du diagramme vectoriel pour un fonctionnement non-autopiloté (positions des axes d et q inconnues), l'équation (55) est mise sous la forme (56). L'extrémité du vecteur correspondant au terme entre crochets indique la position de l'axe q. Il suffit alors de retrancher la quantité  $j\omega L_q \underline{I}_d$  pour retrouver la valeur de la FEM  $E_{req}$  :

$$\underline{E}_{req} = [\underline{V} + R\underline{I} + jX_q \underline{I}] - j\omega L_q \underline{I}_d \quad (56)$$

En fonctionnement autopiloté, l'équation (55) est décomposée suivant les deux axes d et q comme suit :

$$\begin{cases} \underline{E}_{req} = \underline{V}_q + R\underline{I}_q + jL_\sigma \omega \underline{I}_d \\ 0 = \underline{V}_d + R\underline{I}_d + jX_q \underline{I}_q \end{cases} \quad (57)$$

Les schémas équivalents monophasés simplifiés (sans pertes magnétiques) ainsi que les diagrammes vectoriels correspondants sont donnés respectivement figures 29 et 30.

La valeur du courant inducteur est obtenue exactement comme précédemment (méthode de Potier) en considérant la force magnéto-motrice résultante de la « machine d » calculée à partir de la somme vectorielle des FMM inducteur et induit dans l'axe d :

$$\epsilon_{fd} = \text{Re} \left\{ k_s [K_f I_f + K_d I_d] e^{-j\phi_f} \right\} = \text{Re} \left\{ k_s K_f \left[ I_f + \frac{K_d}{K_f} I_d \right] e^{-j\phi_f} \right\} \quad (58)$$

Cette FMM peut être générée par l'inducteur seul alimenté par un courant d'excitation équivalent  $I_{frd}$  de valeur donnée par (59) de sorte que la « machine d » à pôles lisses équivalente de la figure 19 ne comporte qu'une seule FMM générée par l'inducteur seul alimenté par  $I_{frd}$ , la « machine q » équivalente étant inchangée :

$$\underline{I}_{frd} = \underline{I}_f + \alpha_d \underline{I}_d \quad (59)$$

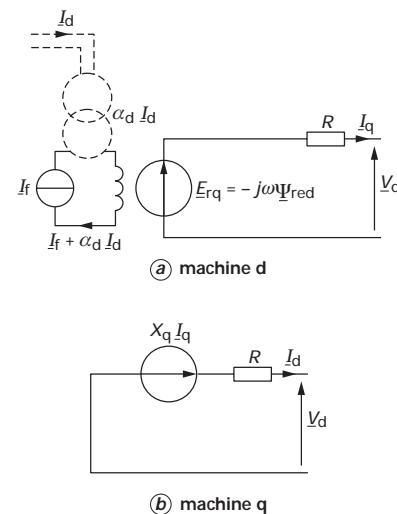


Figure 29 – Schémas électriques monophasés équivalents simplifiés dans les deux axes d et q (fonctionnement générateur)

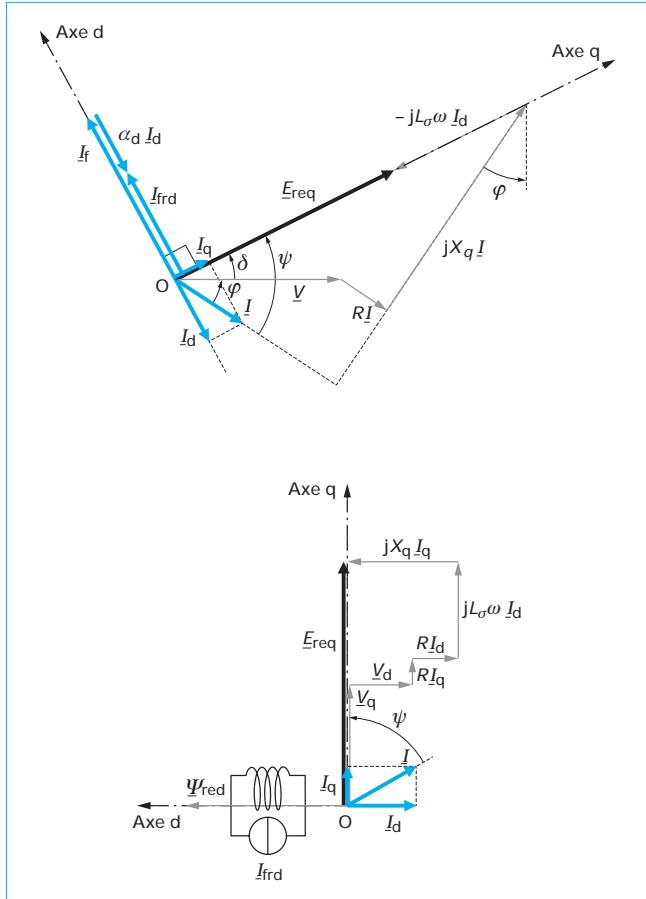


Figure 30 – Diagrammes vectoriels correspondant (fonctionnement génératrice) en représentations « tension en référence » et d-q

Bien qu'ayant la même définition que pour les machines à pôles lisses ( $\alpha_d = \frac{K_1}{K_f}$ ),  $\alpha_d$  est dit rapport d'équivalence de la « machine d ». En régime linéaire, sa valeur est liée à l'inductance dans l'axe d par :  $\alpha_d = \frac{L_d \sqrt{2}}{M_{af}}$ .

Notons que dans la relation (59) les vecteurs courants  $I_f$  et  $I_d$  sont nécessairement colinéaires et portés par l'axe d. Cette relation peut donc s'exprimer simplement en valeurs algébriques :

$$I_{frd} = I_f - \alpha_d I_d \quad (60)$$

L'identification expérimentale de  $\alpha_d$  s'effectue comme pour les machines à pôles lisses : par un essai en déwateré. En effet, dans cet essai, l'axe de la FMM d'induit est naturellement confondu avec l'axe direct (pour une résistance d'induit négligeable).

Au-delà de l'hypothèse forte de décomposition des flux dans les deux axes d et q malgré la présence de la saturation, la méthode de Blondel suppose de plus que la saturation n'affecte que l'axe direct et que l'axe en quadrature reste, quant'à lui, en régime linéaire. Cela est d'autant moins vrai que les saturations locales sont particulièrement affectées dans l'axe en quadrature. En effet, comme montré sur la figure 26b illustrant le cas de la machine à

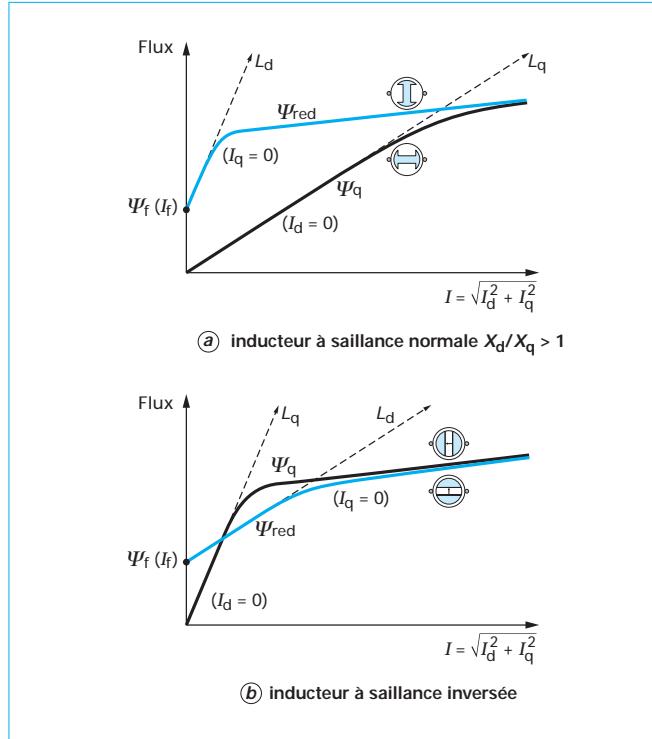


Figure 31 – Flux total embrassé dans l'axe direct et transversal en fonction du courant d'induit injecté (alimentation en courant continu à rotor bloqué) pour les deux types d'inducteur

pôles saillants bobinés alimentée selon l'axe q, les cornes polaires subissent une concentration de lignes d'induction importante.

Par ailleurs, pour une machine à saillance inversée (machine à aimants permanents à concentration de flux), le flux de réaction magnétique d'induit en quadrature (figure 26d) est plus important que celui de l'axe direct (figure 26c). En effet, si l'on bloque le rotor en rotation et on alimente l'induit en courant continu tel que la FMM d'induit générée soit dans l'axe d ( $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ ) ou q ( $\psi = 0$ ), alors le flux embrassé en fonction du courant injecté suit les caractéristiques magnétiques dans le plan flux-courant telles que celles représentées figures 31a et 31b. Sur ces figures, nous avons représenté le cas des deux types de saillance : normale et inversée.

Ainsi, à l'inverse de la machine à saillance normale (figure 31a), pour la machine à saillance inversée (figure 31b), la valeur du courant  $I_q$  entraînant la saturation de la machine est plus faible que celle du courant  $I_d$ . Cette différence est d'autant plus marquée que le rapport de saillance  $X_d/X_q$  est faible.

En conséquence, l'hypothèse de Blondel appliquée aux machines présentant une saturation notable mène à des erreurs de pré-détermination de leurs caractéristiques souvent importantes.

### 2.3 Amélioration de la modélisation en régime saturé : méthode des travaux virtuels

Toutes les modélisations précédentes, en régime saturé, font appel à une hypothèse majeure : celle de répartition sinusoïdale de la composante normale d'induction d'entrefer résultante des

actions des circuits d'excitation de l'induit. Cette hypothèse permet la décomposition des flux selon les axes direct et transverse sur laquelle reposent les modélisations de Park, y compris celles incluant la saturation via les phénomènes de couplages croisés entre les deux axes [13]. Pratiquement, les phénomènes de saturation du circuit magnétique (aussi bien du stator – culasse et denture – que du rotor) peuvent conduire à de fortes distorsions de la forme de l'onde d'induction d'entrefer. Il en résulte en particulier une distorsion du fondamental de la tension induite lorsque les courants sont régulés à des formes sinusoïdales (en situation d'alimentation par convertisseur statique avec modulation de largeur d'impulsion de la tension). Enfin, la décomposition vectorielle d-q en deux axes n'est plus possible. Tout cela conduit notamment à des ondulations supplémentaires du couple instantané (en plus de la composante de détente) que les modèles d-q ne permettent pas d'obtenir.

La seule méthode, qui permette alors de modéliser rigoureusement la machine, est issue de la **méthode des travaux virtuels** [14] [15] [22]. Elle consiste à déterminer les fonctions de coénergie de chacune des phases. Les non-linéarités nécessitent une approche numérique et il ne sera plus possible d'obtenir des fonctions analytiques à plusieurs variables (les courants et la position) ou de construire des diagrammes de Fresnel. Le couple électromagnétique d'une machine synchrone tournante triphasée est égal à la dérivée de la fonction de coénergie globale de la machine.

Dans le cas des **machines synchrones à inducteur bobiné**, la coénergie magnétique  $\tilde{W}_m$  est une fonction des trois courants de phase  $i_a, i_b, i_c$ , du courant inducteur  $I_f$  et de la position angulaire  $\theta$  rotor/stator et s'exprime par :

$$\begin{aligned}\tilde{W}_m(i_a, i_b, i_c, I_f, \theta) = & \int_0^{i_f} \Psi_f(i'_a = 0, i'_b = 0, i'_c = 0, i'_f, \theta) di'_f \\ & + \int_0^{i_a} \Psi_a(i'_a = i_a, i'_b = 0, i'_c = 0, i_f = I_f, \theta) di'_a \\ & + \int_0^{i_b} \Psi_b(i'_a = i_a, i'_b = 0, i'_c = 0, i_f = I_f, \theta) di'_b \\ & + \int_0^{i_c} \Psi_c(i'_a = i_a, i'_b = i_b, i'_c = 0, i_f = I_f, \theta) di'_c\end{aligned}$$

Notations et symboles		
Symbol	Unité	Définition
$Y$		représentation complexe de la grandeur instantanée $y(t)$ tel que : $y(t) = \operatorname{Re}[\sqrt{2} Y e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\sqrt{2} \bar{Y}]$ où $\bar{Y}$ est la valeur efficace de $y(t)$
$\langle y \rangle$		valeur moyenne de $y$
$\operatorname{Re}(Y)$		partie réelle de la grandeur complexe $Y$
$y_{a,b,c}$		grandeur relative à la phase a, b ou c de l'induit
$y_f$		grandeur relative à l'inducteur
$y_i$		grandeur relative à l'induit (contribution des 3 phases)
$y_{re}$		grandeur résultante d'entrefer
$y_t$		grandeur totale correspondant à la contribution de l'induit et de l'inducteur
$y_\sigma$		grandeur relative aux fuites magnétiques d'induit

où les variables d'intégration sont affectées d'un prime (par exemple :  $i'_a$ ).

Les flux totaux de phase peuvent être calculés par toute méthode incluant la saturation (éléments finis, réseaux de réticances saturables...) ou encore mesurés. Il s'agit alors de déterminer les fonctions (numériques) complètes des flux de phase  $\Psi_k(i_a, i_b, i_c, I_f, \theta)$   $k = a, b, c$  comme on le fait avec les machines à réticance variable à double saillance, fondamentalement non linéaires, lorsque l'on veut prendre en compte les couplages entre phases.

À partir de la fonction de coénergie, on peut déterminer le couple électromagnétique instantané ainsi que les flux de phases (lorsque la machine est alimentée en courant) dont les dérivées temporelles donnent les tensions induites de phases :

$$c_{em}(i_a, i_b, i_c, I_f, \theta) = \frac{\partial \tilde{W}_m(i_a, i_b, i_c, I_f, \theta)}{\partial \theta}$$

$$\Psi_a = \frac{\partial \tilde{W}_m(i_a, i_b, i_c, I_f, \theta)}{\partial i_a}, \quad \Psi_b = \frac{\partial \tilde{W}_m(i_a, i_b, i_c, I_f, \theta)}{\partial i_b}$$

$$\Psi_c = \frac{\partial \tilde{W}_m(i_a, i_b, i_c, I_f, \theta)}{\partial i_c}$$

En régime magnétique linéaire, nous retrouvons la formulation classique du couple faisant apparaître explicitement la contribution de chaque source (voir dossier [15] *Machines synchrones : principes généraux et structures*, [D 3 520] de ce traité).

Dans le cas des **machines à aimants permanents**, chaque aimant peut être considéré comme une source dont le courant équivalent est constant. La composante de détente du couple se trouve alors imbriquée aux autres composantes.

Notons cependant que les modèles précédemment établis, bien qu'ils soient limités au premier harmonique, restent d'un usage précieux pour une première approche, y compris en régime saturé.

Notations et symboles		
Symbol	Unité	Définition
$Y_d$		projection de la grandeur $Y$ sur l'axe direct (axe magnétique rotorique)
$Y_q$		projection de la grandeur $Y$ sur l'axe en quadrature à l'axe direct
$\varphi_{se}$	(H/m <sup>2</sup> )	perméance superficielle d'entrefer
$\mu_0$	(H/m)	perméabilité du vide ( $= 4 \pi 10^{-8}$ )
$n_s$		nombre de spires en série par pôle et par phase de l'induit
$n_f$		nombre de spires en série par pôle de l'enroulement inducteur
$k_B$		coefficients de bobinage ( $\leq 1$ , induit ou inducteur)
$n'_{f,s} = k_B n_{f,s}$		nombre de spires en série par pôle et par phase d'un bobinage concentrique diamétral équivalent (induit ou inducteur)
$e_s$	(m)	jeu mécanique de la machine

Notations et symboles		
Symbol	Unité	Définition
$R_s$	(m)	rayon d'alésage ou d'entrefer ( $R_s \gg e_s$ )
$L_s$	(m)	longueur active de la machine
$i$	(A)	courant instantané dans une phase d'induit. L'origine des temps correspond au maximum du courant dans la phase "a"
$I$	(A)	valeur efficace de $i$
$I_{fr}$	(A)	courant d'excitation en charge équivalent
$\omega$	(rad/s)	pulsation des courants d'induit ( $\omega = \frac{2\pi}{T}$ )
$\varepsilon$	(A)	force magnétomotrice (FMM) d'entrefer
$\Omega$	(rad/s)	vitesse de rotation du rotor
$p$		nombre de paires de pôles
$\theta$	(rad)	position angulaire du rotor par rapport à l'axe fixe de référence défini par l'axe magnétique de la phase "a" de l'induit
$\theta_0$	(rad)	position angulaire du rotor à $t = 0$ par rapport à l'axe fixe de référence
$\gamma$		repère angulaire d'un point situé dans l'entrefer par rapport à l'axe de référence fixe
$\beta$		repère angulaire d'un point situé dans l'entrefer par rapport à l'axe rotorique
$B$	(T)	induction magnétique d'entrefer
$B_{fm}$	(T)	induction maximale d'entrefer générée par l'inducteur seul
$\Psi$	(Wb)	flux totalisé embrassé par une phase d'induit
$\Psi_p$	(Wb)	flux propre généré et embrassé par une phase d'induit
$\Psi_m$	(Wb)	flux mutuel embrassé par une phase d'induit et généré par une autre phase d'induit
$M_{af}$	(H)	amplitude de l'inductance mutuelle entre une phase d'induit et l'enroulement inducteur
$L_p$	(H)	inductance propre d'une phase d'induit
$M$	(H)	mutuelle inductance entre deux phases d'induit
$L$	(H)	inductance cyclique d'induit

Notations et symboles		
Symbol	Unité	Définition
$L_\sigma$	(H)	inductance de fuites
$E_f$	(V)	valeur efficace de la force électromotrice (FEM) à vide générée aux bornes d'une phase d'induit
$E_{af}$	(V)	valeur complexe (ou vecteur) de la FEM à vide générée par l'inducteur aux bornes de la phase "a" d'induit
$V$	(V)	tension aux bornes d'une phase d'induit
$R$	( $\Omega$ )	résistance d'une phase d'induit
$\varphi$	(rad)	déphasage entre la tension d'induit et le courant d'induit
$\psi$	(rad)	déphasage entre le FEM à vide d'induit et le courant d'induit (dit également angle d'autopilotage)
$\delta$	(rad)	déphasage entre la tension d'induit et la FEM à vide d'induit (dit également angle de charge ou angle interne)
$\delta'$	(rad)	décalage angulaire entre les inductions magnétiques d'entrefer inducteur et totale
$\zeta$	(rad)	écart angulaire entre les inductions d'entrefer de l'induit et de l'inducteur ( $= \frac{\Pi}{2} + \psi$ )
$\alpha$		rapport d'équivalence
$X$	( $\Omega$ )	réactance magnétique synchrone ( $X = (L + L_\sigma)\omega$ )
$P$	(W)	puissance électrique active fournie par la machine (selon la convention utilisée (générateur) : $P > 0$ = puissance fournie, $P < 0$ = puissance reçue)
$P_{em}$	(W)	puissance électromagnétique
$Q$	(VAR)	puissance réactive de la machine
$C_{em}$	(N.m)	couple électromagnétique correspondant au couple utile sur l'arbre de la machine $\pm$ le couple de pertes (selon le mode de fonctionnement de la machine)
$\tilde{W}_m$	(J)	coénergie magnétique

## Références bibliographiques

- [1] GUILBERT (A.). – *Machines synchrones*. Dunod (1965).
- [2] SÉGUIER (G.) et NOTELET (F.). – *Électrotechnique industrielle*. Lavoisier (2000).
- [3] MILLER (T.J.E.). – *Brushless Permanent-Magnet and Reluctance Motors Drives*. Oxford Science Publications (1993).
- [4] GIERAS (J.F.). – *Permanent Magnet Motor Technology : Design and Applications*. Marcel Dekker Inc. (1997).
- [5] GRENIER (D.), LABRIQUE (F.), BUYSE (H.) et MATAGNE (E.). – *Électromécanique : convertisseurs d'énergie et actionneurs*. Dunod (2001).
- [6] LACROUX (G.). – *Les actionneurs électriques pour la robotique et les asservissements*. Lavoisier, Tec&Doc (1994).
- [7] GRELLET (G.) et CLERC (G.). – *Actionneurs électriques : principes, modèles, commande*. Eyrolles (1996).
- [8] CHATELAIN (J.). – *Machines électriques*. Traité d'Électricité, d'Électronique et d'Électrotechnique, Dunod (1983).
- [9] BOLDEA (I.) et NASAR (S.A.). – *Electric Drives*. CRC Press (1999).
- [10] GENON (A.) et LEGROS (W.). – *Machines électriques*. Hermès (2000).
- [11] PROMETHE. – *Entrainements électriques à vitesse variable*. Lavoisier, Tec&Doc (1997).
- [12] KAIS (A.), ZHU (Z.Q.) et HOWE (D.). – *An improved method for predicting iron losses in brushless permanent magnet DC drives*. IEEE trans. On Magnetics, vol. 28, Issue 5, Part 2, pages 2997-2999, sept. 1992.
- [13] CHEDOT (L.) et FRIERICH (G.). – *A cross saturation model for interior permanent magnet synchronous machine. Application to a starter-generator*. IEEE Industry Application

- Society annual meeting (IEEE-IAS04), Seattle USA (2004).
- [14] WHITE (D.C) et WOODSON (H.H.). – *Electro-mechanical energy conversion*. John Wiley & Sons (1959).
- Dans les Techniques de l'Ingénieur
- [15] BEN AHMED (H.), BERNARD (N.), FELD (G.) et MULTON (B.). – *Machines synchrones : principes généraux et structures*. D 3 520 Convertisseurs et machines électriques (2005).
- [16] RUELLE (G.). – *Alternateurs hydrauliques et compensateurs*. D 490, Archives Énergie (1973).
- [17] RUELLE (G.). – *Turboalternateurs*. D 3 530, Archives Énergie (1993).
- [18] BERNOT (F.). – *Alternateurs synchrones de grande puissance*. D 3 550, D 3 551, D 3 552 Convertisseurs et machines électriques (2002/2003).
- [19] WETZER (P.). – *Machines synchrones. Excitation*. D 3 545, Convertisseurs et machines électriques (1997).
- [20] LAJOIE-MAZENC (M.) et VIAROUGE (P.). – *Alimentation des machines synchrones*. D 3 630 Archives Énergie (1991).
- [21] SAINT-MICHEL (J.). – *Bobinage des machines tournantes à courant alternatif*. D 3 420 Convertisseurs et machines électriques (2001).
- [22] NOGAREDE (B.). – *Machines tournantes. Conversion électromécanique de l'énergie*.
- [23] NOGAREDE (B.). – *Machines tournantes. Principes et constitution*. D 3 411 Convertisseurs et machines électriques (2001).
- [24] ESCANE (J-M.) et BASTARD (P.). – *Réseaux électriques linéaires. Systèmes triphasés*. D 80 Convertisseurs et machines électriques (2004).
- [25] LOUIS (J-P.) et BERGMANN (C.). – *Commande numérique des machines synchrones*. D 3 644 Convertisseurs et machines électriques (1999).
- [26] GRELLET (G.). – *Pertes dans les machines tournantes*. D 3 450 Archives Énergie (1989).

# GAGNEZ DU TEMPS ET SÉCURISEZ VOS PROJETS EN UTILISANT UNE SOURCE ACTUALISÉE ET FIABLE

Techniques de l'Ingénieur propose la plus importante collection documentaire technique et scientifique en français !

Grâce à vos droits d'accès, retrouvez l'ensemble des **articles et fiches pratiques de votre offre, leurs compléments et mises à jour,** et bénéficiez des **services inclus.**



- + de 350 000 utilisateurs
- + de 10 000 articles de référence
- + de 80 offres
- 15 domaines d'expertise

- |   |   |
|---|---|
| <input type="radio"/> Automatique - Robotique         | <input type="radio"/> Innovation                    |
| <input type="radio"/> Biomédical - Pharma             | <input type="radio"/> Matériaux                     |
| <input type="radio"/> Construction et travaux publics | <input type="radio"/> Mécanique                     |
| <input type="radio"/> Électronique - Photonique       | <input type="radio"/> Mesures - Analyses            |
| <input type="radio"/> Énergies                        | <input type="radio"/> Procédés chimie - Bio - Agro  |
| <input type="radio"/> Environnement - Sécurité        | <input type="radio"/> Sciences fondamentales        |
| <input type="radio"/> Génie industriel                | <input type="radio"/> Technologies de l'information |
| <input type="radio"/> Ingénierie des transports       |   |

Pour des offres toujours plus adaptées à votre métier,  
découvrez les offres dédiées à votre secteur d'activité

Depuis plus de 70 ans, Techniques de l'Ingénieur est la source d'informations de référence des bureaux d'études, de la R&D et de l'innovation.

[www.techniques-ingenieur.fr](http://www.techniques-ingenieur.fr)

**CONTACT :** Tél. : + 33 (0)1 53 35 20 20 - Fax : +33 (0)1 53 26 79 18 - E-mail : [infos.clients@teching.com](mailto:infos.clients@teching.com)

# LES AVANTAGES ET SERVICES compris dans les offres Techniques de l'Ingénieur

ACCÈS



## Accès illimité aux articles en HTML

Enrichis et mis à jour pendant toute la durée de la souscription



## Téléchargement des articles au format PDF

Pour un usage en toute liberté



## Consultation sur tous les supports numériques

Des contenus optimisés pour ordinateurs, tablettes et mobiles

SERVICES ET OUTILS PRATIQUES



## Questions aux experts\*

Les meilleurs experts techniques et scientifiques vous répondent



## Articles Découverte

La possibilité de consulter des articles en dehors de votre offre



## Dictionnaire technique multilingue

45 000 termes en français, anglais, espagnol et allemand



## Archives

Technologies anciennes et versions antérieures des articles



## Impression à la demande

Commandez les éditions papier de vos ressources documentaires



## Alertes actualisations

Recevez par email toutes les nouveautés de vos ressources documentaires

\*Questions aux experts est un service réservé aux entreprises, non proposé dans les offres écoles, universités ou pour tout autre organisme de formation.

## ILS NOUS FONT CONFIANCE



[www.techniques-ingénieur.fr](http://www.techniques-ingénieur.fr)

**CONTACT :** Tél. : + 33 (0)1 53 35 20 20 - Fax : +33 (0)1 53 26 79 18 - E-mail : [infos.clients@teching.com](mailto:infos.clients@teching.com)