Práctica 1: Matriz de Hilbert y Regla de Simpson

García Pérez Rodrigo Alan
No. de alumno: 58

Probabilidad aplicada y simulación estocástica
Ciencia de datos
Profesora: Laura Clementina Eslava Fernández
26 de agosto del 2021

Resumen

Para esta primer práctica se repasaron los temas de matriz de Hilbert y la Regla de Simpson. Para ambos temas se realizo un script en lenguaje de programación R y mediante estos se intento responder las preguntas planteadas en el desarrollo de la práctica

1. Matriz de Hilbert

La matriz de Hilbert es una matriz cuadrada cuyos terminos son obtenidos por la formula $H_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$, con $i, j = 1...n$ .Se creo el siguiente programa en R studio para la creación de la matriz de Hilbert con la n indicada por el usuario

```
Hilbert <- function(n){
  matrix1 <- matrix(c(0), nrow = n, ncol = n)
  for (i in 1:n){
    for (j in 1:n){
      matrix1[i,j] <- coeficiente_hilbert(i,j)
    }
  }
  return(matrix1)
}
```

Para una $n = 5$ la matriz tomaba la siguiente forma en la ejecución del programa

```
          [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]
[1,] 1.0000000 0.5000000 0.3333333 0.2500000 0.2000000
[2,] 0.5000000 0.3333333 0.2500000 0.2000000 0.1666667
[3,] 0.3333333 0.2500000 0.2000000 0.1666667 0.1428571
[4,] 0.2500000 0.2000000 0.1666667 0.1428571 0.1250000
[5,] 0.2000000 0.1666667 0.1428571 0.1250000 0.1111111
```

Como parte de la práctica se pedía encontrar el valor de n para la cual no se pudiera hayar numéricamente la inversa de la matriz de Hilbert. Se realizaron múltiples ejecuciones del código mostrado para encontrar que cuando la n llega al valor de 29, R Studio no puede ejecutar la inversa de la matriz.

```
> solve(m)
Error in solve.default(m) :
  system is computationally singular: reciprocal condition number = 4.66477e-20
```

Esto sucede porque la a característica de esta matriz es que su determinante se va aproximando a cero cuando el orden de la misma va en aumento. Más formalmente:

$$lim_{n\to\infty} det(H_n) = 0$$

Debido a esto, el calculo de su inversa se vuelve más difícil a medida de que aumente el orden la matriz a raíz de que cada vez dicha matriz esta mas cerca de ser singular. A continuación se muestra el valor del determinante que se obtiene de R con la función det( ) para diferentes valores de n.

Valor de n	Determinante
5	3.749295e-12
10	2.164405e-53
20	-1.100433e-195
28	-2.944631e-321
29	0

Como se puede observar para una n con valor de 28 se obtiene un determinante con un valor en extremo pequeño. A partir de $n = 29$ la computadora ya no puede manejar valores más pequeños por lo que devuelve un determinante de 0. Esto concuerda con los valores de números de doble precisión con punto flotante que una computadora con arquitectura de 64 bits puede manejar que son de aproximadamente $2{,}22507385850720 * 10^{-308}$.

2. Regla de Simpson

En esta sección de la práctica se solicito crear una función que tenga como input: la función a evaluar, el rango $[a, b]$, el valor de n y como output mostrará el valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ usando la regla de Simspon, el cual es un método que a partir de polinomios de grado dos, aproxima el área bajo la curva. El código del programa se muestra a continuación:

```
Regla_simpson <- function(f,a,b,n){
  h <- (b-a)/n
  sum <- 0
  sum <- sum + f(a)
  sum <- sum + f(b)
  for (i in 1:(n-1)){

    if (i%%2 == 0){
      sum <- sum + 2*f(a+i*h)
    }else{
      sum <- sum + 4*f(a+i*h)
    }
  }
  resultado <- (h/3)*(sum)
  return(resultado)
}
```

Para evaluar a la función se implementaron cuatro tipos de funciones diferentes: x^2, $sen(x)$, e^{-x^2} y $\sqrt{1+x^3}$

```
f1 <- function(x){
  return(x**2)
}


f3 <- function(x){
  return(exp(-x^2))
}

f4 <- function(x){
  y_1 <- x^3
  y_2 <- 1 + y_1
  y_3 <- sqrt(y_2)
  return (y_3)
}
```

A continuación se muestra el valor de la integral de cada función, así como el valor con la función de la regla de Simpson para diferentes valores de n en un rango de $[a, b]$

Función	Área obtenida integrando	Área con n=2	Área con n=5	Área con n=10
x^2	333.33	333.33	280	333.33
$sen(x)$	1.8391	-7.29953	1.627079	1.850647
e^{-x^2}	0.8862	1.666667	0.7155085	0.8362143
$\sqrt{1+x^3}$	127.858	129.2308	109.9905	127.8366

Como se puede apreciar en la tabla la regla de Simpson puede llegar a ser muy precisa en sus resultados pero es dependiente del valor de n que se asigne. Además este valor de n depende específicamente de cada tipo de función, como ejemplo para la $f = x^2$ un valor de $n = 2$ fue suficiente para tener un valor muy exacto del área.

Para escoger un valor de n óptimo, primero se deberá realizar $|f^{(4)}(x)|$ de la función que se este trabajando. Después se dará valores a x conforme al rango de $[a, b]$ para obtener un valor de K. Por último, se le otorga un valor al error estimado que se quiera manejar (por lo general 0.001) y la formula para encontrar n queda de la siguiente manera:

$$n \leq \sqrt[4]{\frac{K(b-a)^5}{E_s}}$$