Práctica 5: Método de la Transformada Inversa para V.A. continuas

García Pérez Rodrigo Alan
No. de alumno: 58

Probabilidad aplicada y simulación estocástica
Profesora: Dra. Laura Clementina Eslava Fernández
16 de septiembre del 2021

Resumen

Como parte de esta práctica número cinco se reviso el funcionamiento del método de la transformada inversa y se aplico a las V.A. de Weibull y de Pareto para simularlas y apreciar su gráfica. La transformada inversa encontrada se creo como una función en el lenguaje de programación R y se gráfico como un histograma.

Método de la Transformada Inversa

Este método se utiliza cuando se desea simular variables de tipo continuo. El método utiliza la distribución acumulada $F(x)$ de la distribución de probabilidad. Ya que el rango de $F(x)$ se encuentra en el intervalo de $[0, 1]$ puede generarse un número aleatorio r_i para determinar el valor de la variable aleatoria cuya distribución acumulada es igual a r_i. La dificultad de este método se encuentra en que algunas veces es complicado encontrar la transformada inversa

Weibull

La distribución de Weibull es la distribución que más se utiliza para modelar datos de fiabilidad. Esta distribución es fácil de interpretar y muy versátil. En el análisis de fiabilidad, esta distribución se puede usar para responder a preguntas como el porcentaje de dispositivos que falla durante un periodo de tiempo, la fase de vida útil de un producto, su desgaste, entre otros. La variable aleatoria Weibull tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x; \lambda, k) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k}\right\};$$

Y su función de distribución de probabilidad es:

$$F(x; \lambda, k) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right\}.$$

Para obtener su función inversa se reemplazo a la función de distribución de probabilidad $F(x)$ por la variable aleatoria $U(0,1)$ y se resolvió la expresión para quedar en términos de X. A continuación se muestra el proceso realizado.

$$\begin{aligned}
U &= 1 - e^{-(X/\lambda)^k} \\
1 - U &= e^{-(X/\lambda)^k} \\
-\ln(1 - U) &= \left(\frac{X}{\lambda}\right)^k \\
[-\ln(1 - U)]^{\frac{1}{k}} &= \frac{X}{\lambda} \\
X &= \lambda[-\ln(1 - U)]^{\frac{1}{k}}
\end{aligned}$$

Una vez obtenida la función inversa de Weibull se creó una función en R que devuelve el valor encontrado de X y utiliza el generador de números aleatorios runif( ). Esta se muestra a continuación.

```
#Función Inversa Weibull
#Recibe como parámetros a lambda, k
weibull <- function(lambda, k){
  u = runif(1)
  x = lambda*((-log(1-u))^(1/k))
  return(x)
}
```

Figura 1: Función inversa Weibull

Pareto

Esta es una distribución de probabilidad continua con dos parámetros, que tiene aplicación en disciplinas como la sociología, geofísica y economía.La variable aleatoria Pareto tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x; a, b) = \frac{ab^a}{(b+x)^{a+1}};$$

Su función de distribución de probabilidad es:

$$F(x; a, b) = 1 - \left(\frac{b}{b+x}\right)^a$$

Para obtener su función inversa se reemplazo a la función de distribución de probabilidad $F(x)$ por la variable aleatoria $U(0,1)$ y se resolvió la expresión para quedar en términos de X. A continuación se muestra el proceso realizado.

$$U = 1 - \left(\frac{b}{b+x}\right)^a$$

$$1 - U = \left(\frac{b}{b+x}\right)^a$$

$$(1-U)^{1/a} = \frac{b}{b+x}$$

$$X = \left(\frac{b}{(1-U)^{1/a}}\right) - b$$

Una vez obtenida la función inversa de Pareto se creó una función en R que devuelve el valor encontrado de X y utiliza el generador de números aleatorios runif( ). Esta se muestra a continuación.

```r
#Función Inversa de Pareto
#Recibe como parametros a,b
pareto <- function(a,b){
  u = runif(1) #Generador de números aleatorios
  x = (b/(1-u)^(1/a))-b
  return(x)
}
```

Figura 2: Función Inversa Pareto

Gráficas y Resultados

Como última parte de la práctica se solicito simular mediante las transformaciones inversas encontradas las variables para Weibull(1,5) y Pareto(10,3). Se realizaron tres histogramas diferentes para cada simulación con $n = 100$, $n = 1000$ y $n = 100000$. En cada histograma se gráfico también la función de densidad teórica para así poder comparar que tan acertada fue la simulación. A continuación se muestran los resultados de las simulaciones de Weibull.

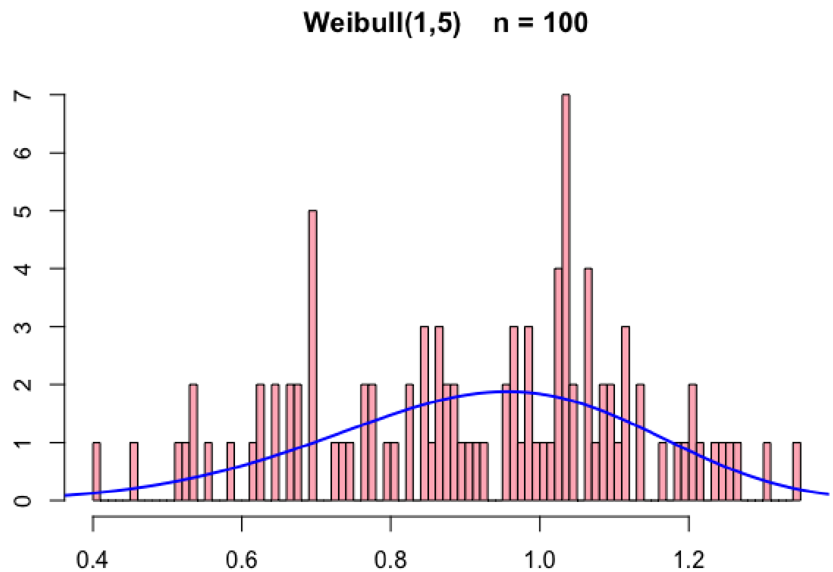

Figura 3: Gráfica Weibull con $n = 100$

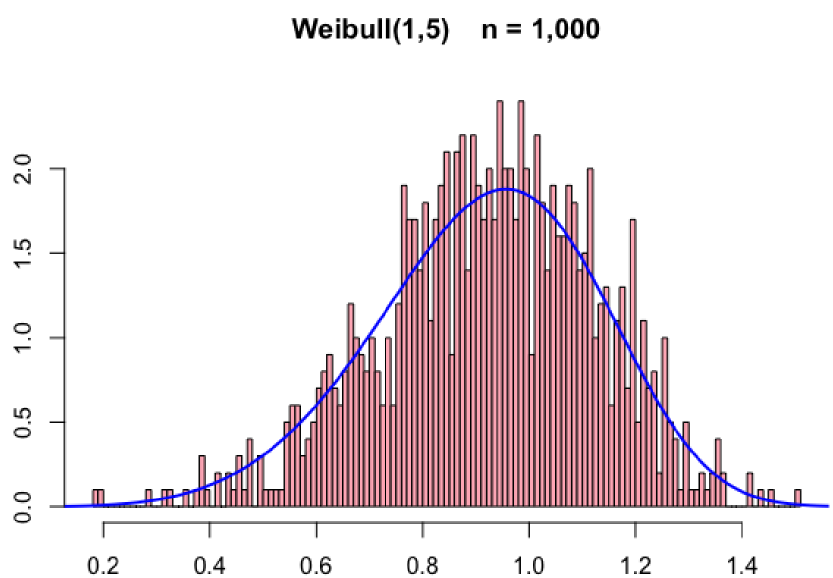

Figura 4: Gráfica Weibull con $n = 1000$

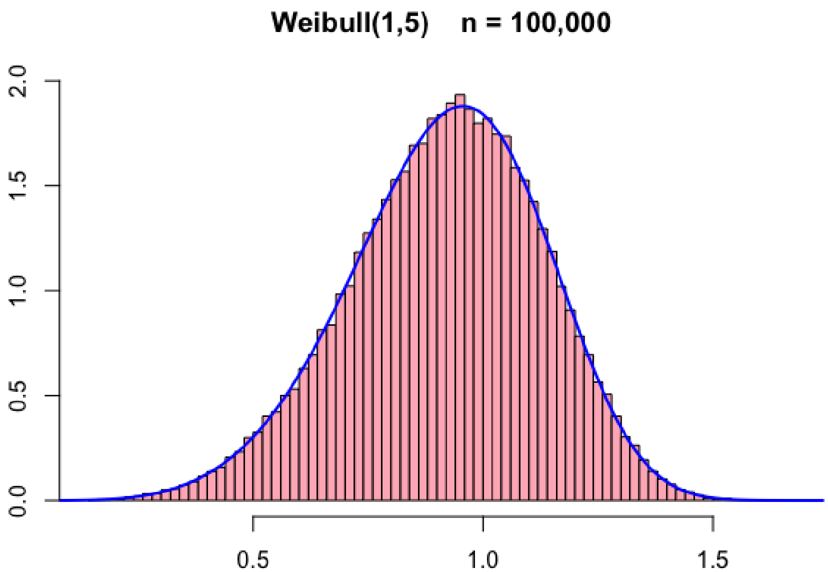

Figura 5: Gráfica Weibull con $n = 100000$

Ahora se presentan los resultados de las simulaciones de Pareto.

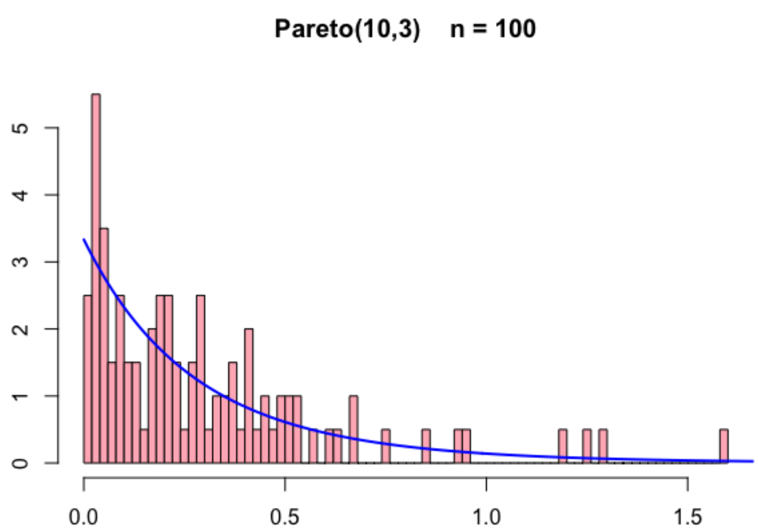

Figura 6: Gráfica Pareto con $n = 100$

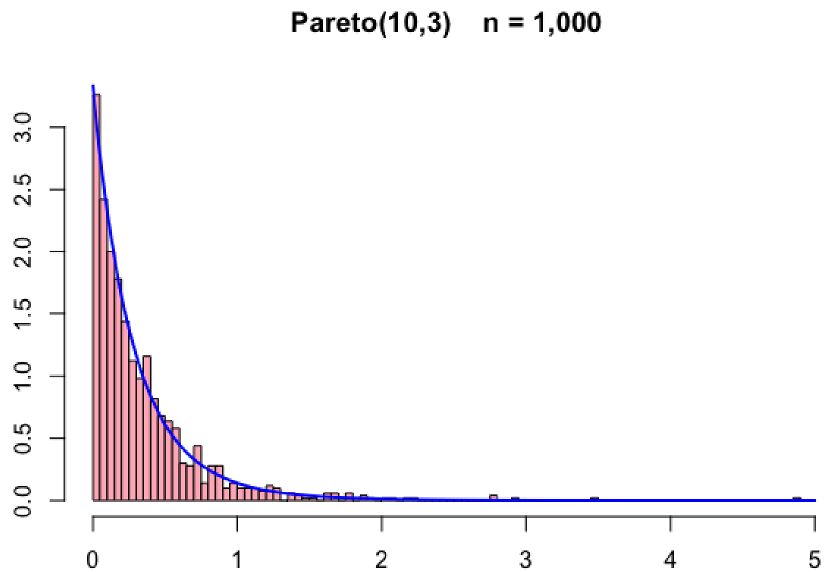

Figura 7: Gráfica de Pareto con $n = 1000$

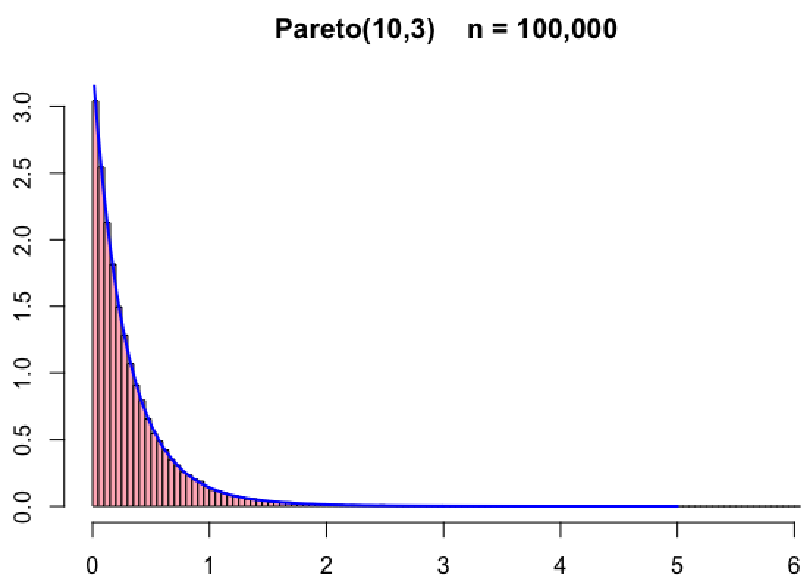

Figura 8: Gráfica de Pareto con $n = 100000$

Como se puede apreciar mientras el número de n crece, las simulaciones cada vez son más parecidas a la función de densidad teórica la cual puede observarse con una línea de color azul. En este caso el método de la transformada inversa fue de gran utilidad sin embargo este no siempre es el mejor método que se pueda aplicar. Por ejemplo para una distribución normal, calcular su función de densidad es imposible de hacer analíticamente, por lo que otros métodos podrían ser preferidos computacionalmente.