Práctica 6: Método de Aceptación-Rechazo

García Pérez Rodrigo Alan
No. de alumno: 58

Probabilidad aplicada y simulación estocástica
Profesora: Dra. Laura Clementina Eslava Fernández
23 de septiembre del 2021

Resumen

Como parte de esta práctica número cinco se reviso el funcionamiento del método de aceptación-rechazo y se aplico a la variable aleatoria Beta para simularlas y apreciar su gráfica. Este metodo de aceptación-rechazo se creo como una función en el lenguaje de programación R y se gráfico como un histograma.

Método de Aceptación-Rechazo

Este método es una forma de simular muestras aleatorias de una distribución desconocida (o difícil de muestrear) denominada distribución objetivo mediante el uso de muestras aleatorias de una distribución de probabilidad similar y más conveniente. Se rechaza un subconjunto aleatorio de las muestras generadas y el resto se aceptan. El objetivo es que las muestras aceptadas se distribuyan como si fueran de la distribución de probabilidad objetivo. Podemos generar una realización de $X \sim f$ con los siguientes pasos:

1. Generar un número aleatorio X $\sim$ Uniforme(a,b)
2. Generar Y $\sim$ Uniforme(0,c)
3. Si Y $\leq$ f(X) regresa X, si no vuelve al paso 1.

Distribución Beta

La variable aleatoria Beta tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} 1_{0\leq x\leq 1}$$

Donde 1 es la función indicadora y $B(\alpha, \beta)$ es la función Beta que tiene la siguiente propiedad:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

A continuación se presenta la función que fue programada en R para obtener el valor de función de densidad de esta distribución Beta. Esta función recibe como parámetros a x que es la probabilidad de que algo ocurra y α, β que son los parámetros de forma.

```r
b=function(x,y){
  #Se usa la función gamma que ya viene incluída en R
  #alpha será x, beta será y
  gamma(x)*gamma(y)/(gamma(x+y))
}

#Función de densidad
#Recibe de argumentos x,alpha,beta
pdf=function(x,alpha,beta){
  (x^(alpha-1)*(1-x)^(beta-1))/b(alpha,beta)
}
```

Figura 1: Función de densidad de probabilidad Beta

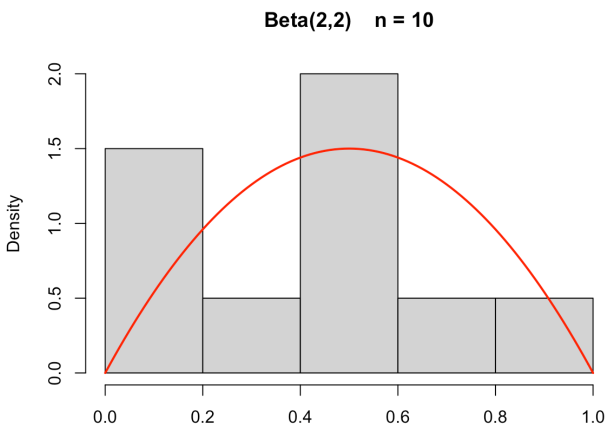
Una vez programada, ahora se realizo otra función para realizar las simulaciones de Beta y que además mediante el método de aceptación-rechazo decidirá si el punto x, y generado de forma aleatoria se acepta. En caso de ser aceptado se cuenta como un éxito, en caso de ser rechazado solo se cuenta como un intento y se devuelve al final el número total de intentos.

```r
# Método de aceptación-rechazo
#input: alpha, beta, número de éxitos
sim_beta <- function(a,b,n){
  exitos=0 #Contador de éxitos
  puntos=c() #Vector de puntos generados
  totales=0 #Contador de intentos
  if(a>1 & b>1){
    c = pdf((a-1)/(a+b-2),a,b) #Se asigna un valor para c
    #según los valores de alpha, beta
  }
  while(exitos<n){ #Mientas los exitos no sean los solicitados

    totales=totales+1 #Se cuenta un intento
    p_1 = runif(1) #Se genera número aleatorio X entre 0,1 por el soporte de Beta


    p_2 = runif(1,0,c) #Se genera número aleatorio Y  entre 0,c

    if(pdf(p_1,a,b)>=p_2){ #Se evalua el punto con la pdf beta
      #Si el resultado de evaluar p_1 es mayor al p_2 significa que esta
      #dentro de la f(x) por lo que se acepta p_2, se cuenta un éxito y se agrega
      #al vector de puntos
      exitos=exitos+1
      puntos=c(puntos,p_1)
    }

  }
  return(list(puntos, totales, n))
}
```

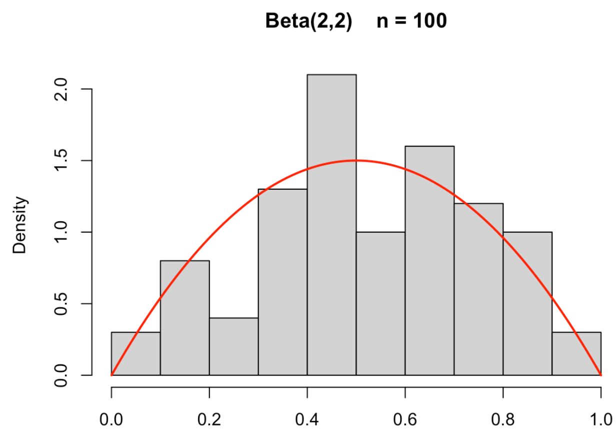
Figura 2: Método Aceptación-Rechazo

Gráficas y Resultados

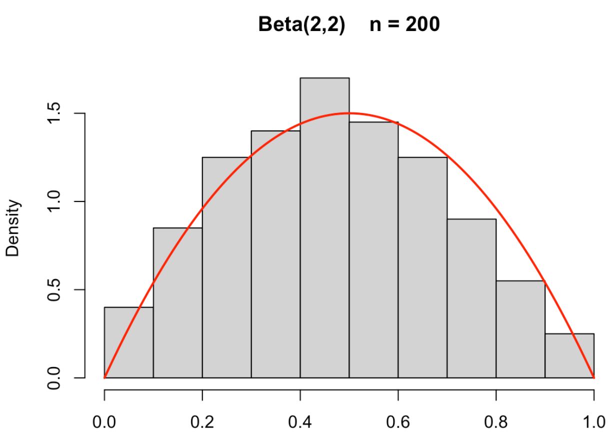
Como parte del desarrollo de la práctica se solicito utilizar el método de aceptación-rechazo para simular las variables Beta(2,2) y Beta(2,5). A continuación se muestran los histogramas obtenidos junto con la función de densidad.



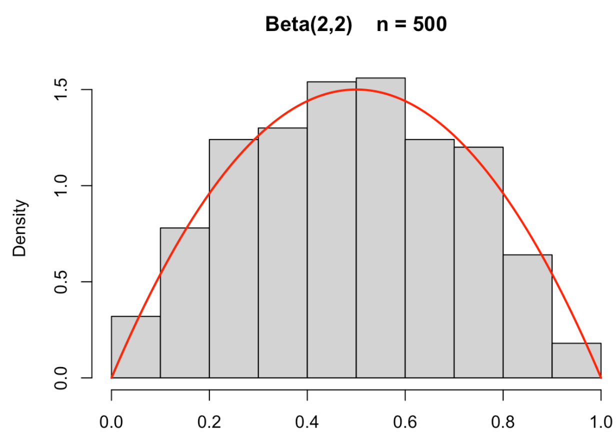
(a) n=10



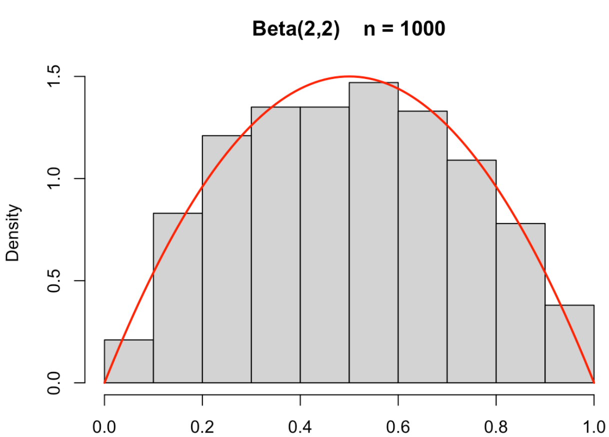
(b) n=100



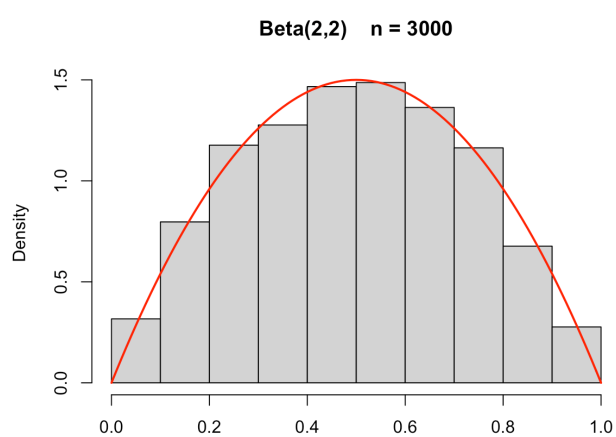
(c) n=200



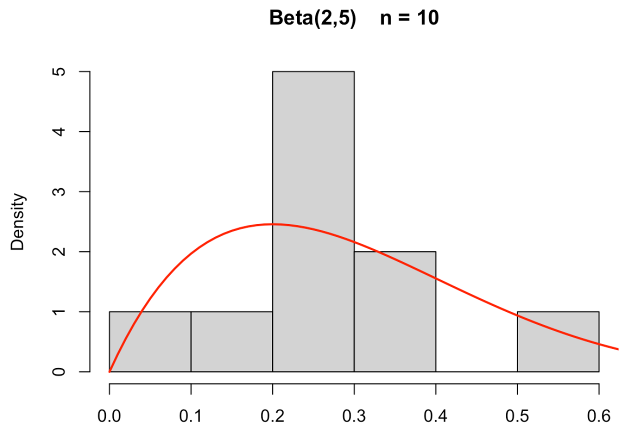
(d) n=500



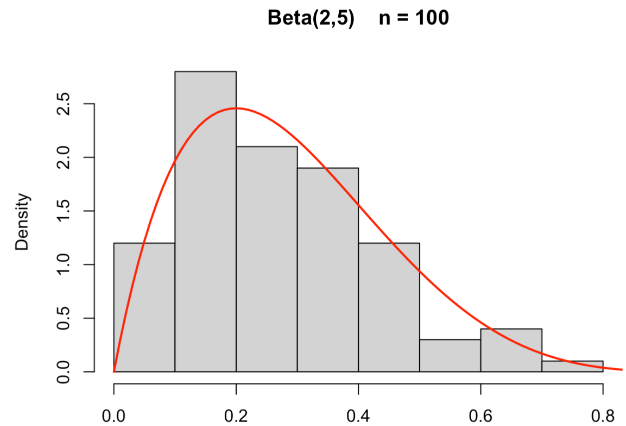
(e) n=1000



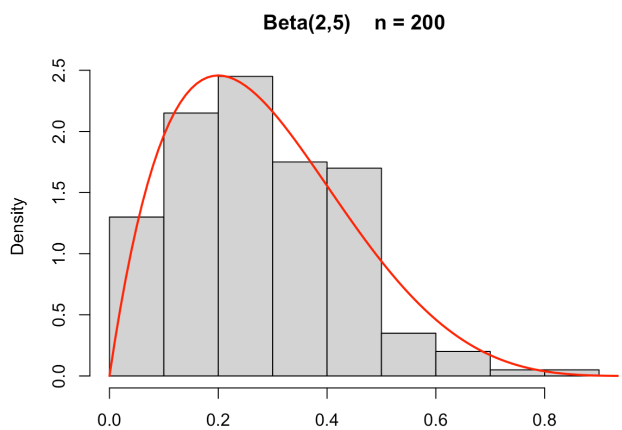
(f) n=3000



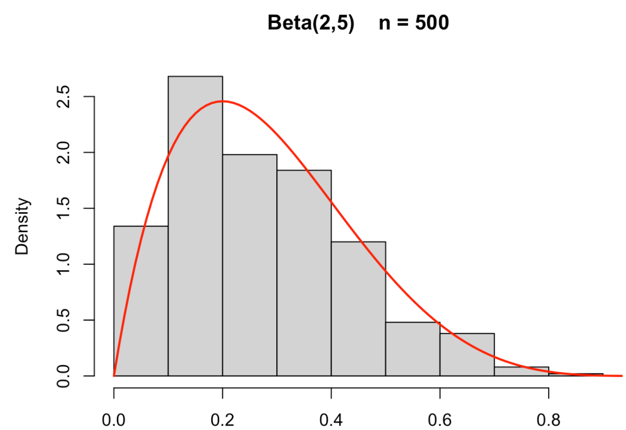
(g) n=10



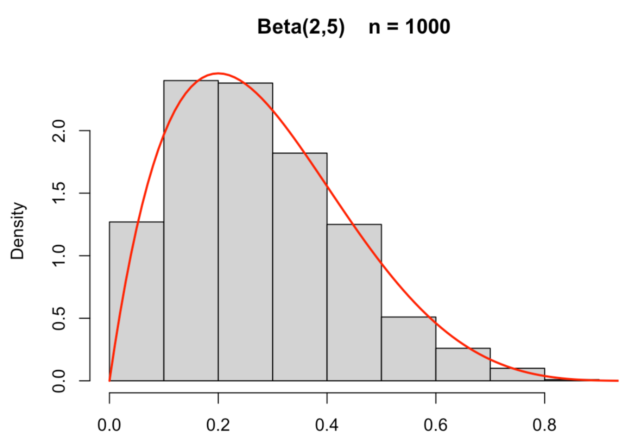
(h) n=100



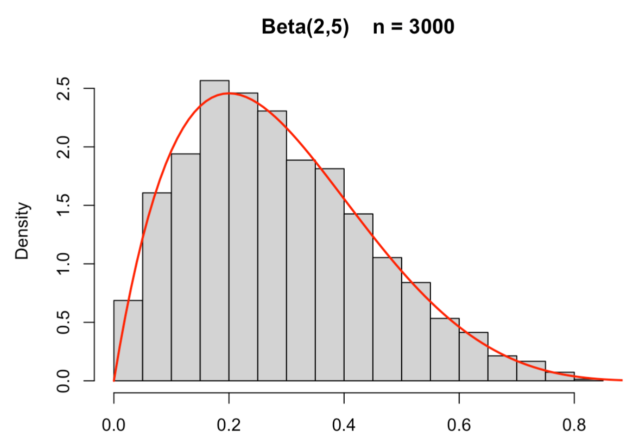
(i) n=200



(j) n=500



(k) n=1000



(l) n=3000

Como última parte de la gráfica se solicito estimar el número de iteraciones promedio que hay que realizar para simular n variables Beta, es decir, cuántos intentos se hicieron en total para obtener los n valores aceptados, por esta razón se manejo un contador de intentos totales. A continuación se muestra la gráfica encontrada.

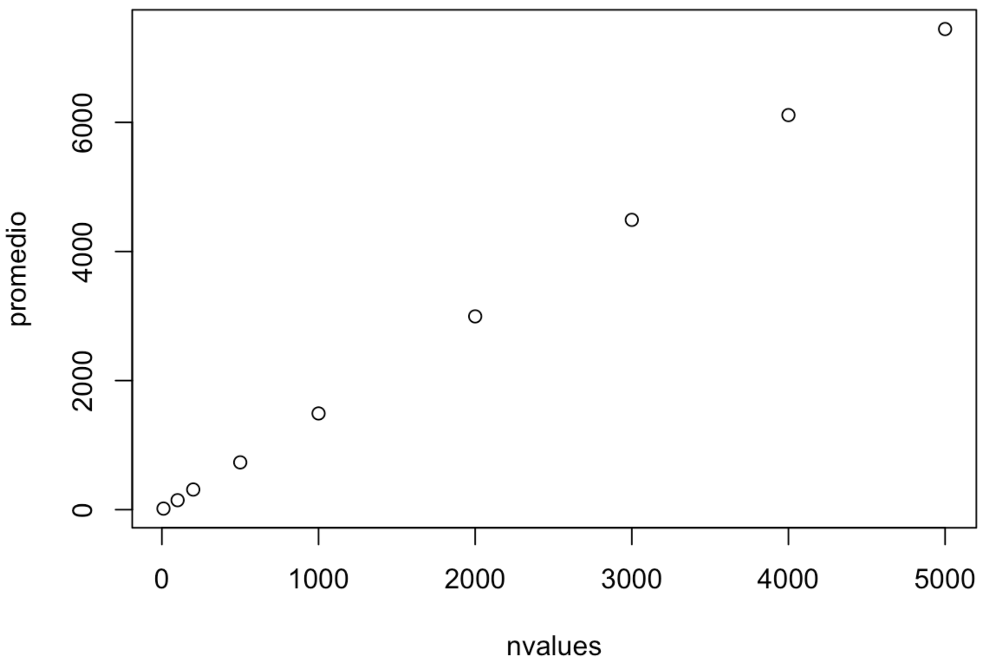


Figura 3: Promedio de iteraciones para n variables Beta

Se puede observar claramente que la complejidad del método de Aceptación-Rechazo que se programo es lineal o en notación O grande es complejidad **O(n)** ya que el promedio de iteraciones que tiene que realizar aumenta casi de la misma manera que aumenta la n de las variables Beta.

Alfa y Beta

Estos son parametros de forma de la distribución Beta, estos se pueden elegir como se crea que deben ser. Si se cree que la probabilidad de éxito es muy alta, digamos 90 %, establezca 90 para α y 10 para β. Si piensa lo contrario, 90 para β y 10 para α.

A medida que α se vuelve más grande (eventos más exitosos), la mayor parte de la distribución de probabilidad se desplazará hacia la derecha, mientras que un aumento en β mueve la distribución hacia la izquierda (más fallas) como se puede apreciar en las gráficas de arriba para Beta(2,5).

En el caso cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 1$ la variable aleatoria Beta se transforma en una variable uniforme continua en el rango de $[0, 1]$ con una densidad $f(x) = 1$. A continuación se observa claramente esto.

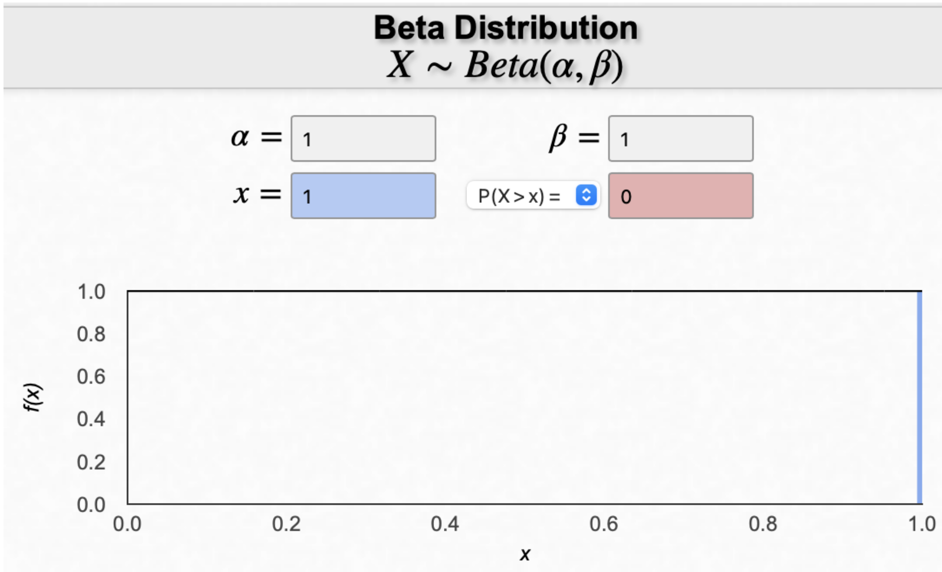


Figura 4: Beta(1,1)