作业题3.2 对如下单波方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad a>0$$

构建的差分格式如下：

$$\frac{1}{\Delta t}\left(u_j^{n+1}-u_j^n\right)=-a\frac{1}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n\right)$$

试利用Fourier方法，分析其稳定性

第二题:

针对单波方程$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$，$a>0$，构造的差分格式有$\frac{1}{\Delta t}\left(u_j^{n+1}-u_j^n\right)=-a\frac{1}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n\right)$

令$\varepsilon_j^n=G^n e^{ikx_j}$，$\varepsilon_{j+1}^n=G^n e^{ikx_j+\Delta x}$，$\varepsilon_{j-1}^n=G^n e^{ikx_j-\Delta x}$，$\varepsilon_j^{n+1}=G^{n+1}e^{ikx_j}$

带入方程可得$\frac{G^{n+1}-G^n}{\Delta t}e^{ikx_j}=-aG^n\frac{e^{ikx_{j-1}}\left(e^{ik2\Delta x}-1\right)}{2\Delta x}$，对其进行化简可以得到:

$$G^{n+1}-G^n=-\frac{\sigma}{2}G^n\left(e^{\alpha i}-e^{-\alpha i}\right)$$

代入欧拉公式: $e^{ix}=\cos\,x+i\sin\,x$，求解出放大因子有

$$G^{n+1}=G^n(1-i\sigma\sin\alpha)$$

令放大因子为$G=\frac{G^{n+1}}{G^n}$，稳定性条件为对于所有的α，$|G|\leq 1$

因此有$|G|^2=1+\sigma^2(\sin\alpha)^2$

无法满足条件，故不稳定