针对单波方程：$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$

对于空间导数，构造出一种不超过6点格式，要求能够分辨的波数范围尽量宽；

1) 给出差分的具体表达式，说明构造格式的阶数，并给出的精度验证；进行Fourier误差分析，画出kr,ki的曲线。

形如：

$$\delta u_j=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j=a_1u_{j-3}+a_2u_{j-1}+a_3u_{j-1}+a_4u_j+a_5u_{j+1}+a_6u_{j+2}$$

……

$$\delta u_j=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j=a_1u_{j-4}+a_2u_{j-3}+a_3u_{j-2}+a_4u_{j-1}+a_5u_j+a_6u_{j+1}$$

2） 进行如下数值验证：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0, x\in[0,2\pi]$$
$$u(x,0)=\sin(x)$$

空间采用20个网格点，采用新构造的差分格式离散；时间推进采用3步Runge-Kutta方法，时间步长可足够小（例如0.01）。给出t=20,50两个时刻的数值解，与精确解比较（画图），并给出数值解的L2模误差。

第一题第一问：

求解过程：

1、首先选定 j+2 节点作为可调点，对其余节点在u_j上进行泰勒展开，可以得到：

$$u_{j-3}=u_j-3*(\Delta x)*u_j'+\frac{(3*\Delta x)^2}{2}u_j''-\frac{(3*\Delta x)^3}{6}u_j'''+\frac{(3*\Delta x)^4}{24}u_j''''$$

$$u_{j-2}=u_j-2*(\Delta x)*u_j'+\frac{(2*\Delta x)^2}{2}u_j''-\frac{(2*\Delta x)^3}{6}u_j'''+\frac{(2*\Delta x)^4}{24}u_j''''$$

$$u_{j-1}=u_j-1*(\Delta x)*u_j'+\frac{(1*\Delta x)^2}{2}u_j''-\frac{(1*\Delta x)^3}{6}u_j'''+\frac{(1*\Delta x)^4}{24}u_j''''$$

$$u_j=u_j+0*(\Delta x)*u_j'+\frac{(0*\Delta x)^2}{2}u_j''+\frac{(0*\Delta x)^3}{6}u_j'''+\frac{(0*\Delta x)^4}{24}u_j''''$$

$$u_{j+1}=u_j+1*(\Delta x)*u_j'+\frac{(1*\Delta x)^2}{2}u_j''+\frac{(1*\Delta x)^3}{6}u_j'''+\frac{(1*\Delta x)^4}{24}u_j''''$$

$$u_{j+2}=u_j+2*(\Delta x)*u_j'+\frac{(2*\Delta x)^2}{2}u_j''+\frac{(2*\Delta x)^3}{6}u_j'''+\frac{(2*\Delta x)^4}{24}u_j''''$$

2、联立上述方程组，得到如下矩阵形式，该方程非适定，系数a_6与Δx组为待定的参数进行求解，矩阵化简过程如下所示：

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\-3&-2&-1&0&1&2\\9&4&1&0&1&4\\-27&-8&-1&0&1&8\\81&16&1&0&1&16\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\Delta x}\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4&5\\0&-5&-8&-9&-8&-5\\0&19&26&27&28&35\\0&-65&-80&-81&-80&-65\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\Delta x}\\0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4&5\\0&0&2&6&12&20\\0&0&-12&-30&-48&-60\\0&0&50&114&180&245\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\Delta x}\\\frac{5}{\Delta x}\\\frac{-19}{\Delta x}\\\frac{65}{\Delta x}\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4&5\\0&0&2&6&12&15\\0&0&0&6&24&60\\0&0&0&-36&-120&-240\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\Delta x}\\\frac{5}{\Delta x}\\\frac{11}{\Delta x}\\\frac{-60}{\Delta x}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4&5\\0&0&2&6&12&15\\0&0&0&6&24&60\\0&0&0&0&24&120\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\Delta x}\\\frac{5}{\Delta x}\\\frac{11}{\Delta x}\\\frac{6}{\Delta x}\end{bmatrix}.$$

解得：
$$\begin{cases}a_1=\left(-\frac{1}{12\Delta x}-a_6\right)\\a_2=\frac{1}{2\Delta x}+5a_6\\a_3=-\frac{3}{2\Delta x}-10a_6\\a_4=\frac{5}{6\Delta x}+10a_6\\a_5=-5a_6+\frac{1}{4\Delta x}\\a_6=a_6\end{cases}$$

3、将系数带入差分表达式，可以得到 x 方向的差分为：

$$\delta u_j=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j=\left(-\frac{1}{12\Delta x}-a_6\right)u_{j-3}+\left(\frac{1}{2\Delta x}+5a_6\right)u_{j-2}+\left(-\frac{3}{2\Delta x}-10a_6\right)u_{j-1}+\left(\frac{5}{6\Delta x}+10a_6\right)u_j+\left(-5a_6+\frac{1}{4\Delta x}\right)u_{j+1}+a_6u_{j+2}=\frac{\tilde{k}}{\Delta x}e^{ikx_j}$$

4、为了进行傅里叶分析，我们令 $u_{j-3}=e^{ik(x_j-3*\Delta x)}$，$u_{j-2}=e^{ik(x_j-2*\Delta x)}$，$u_{j-1}=e^{ik(x_j-\Delta x)}$，

$u_j=e^{ikx_j}$，$u_{j+1}=e^{ik(x_j+\Delta x)}$，$u_{j+2}=e^{ik(x_j+2*\Delta x)}$，

5、代入步骤三得到的差分方程，并化简可得

$$\delta u_j=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j=e^{ikx_j}*\left[\left(-\frac{1}{12\Delta x}-a_6\right)*e^{ik(-3*\Delta x)}+\left(\frac{1}{2\Delta x}+5a_6\right)*e^{ik(-2*\Delta x)}+\left(-\frac{3}{2\Delta x}-10a_6\right)*e^{ik(-\Delta x)}+\left(\frac{5}{6\Delta x}+10a_6\right)+\left(-5a_6+\frac{1}{4\Delta x}\right)*e^{ik(\Delta x)}+a_6*e^{ik(2\Delta x)}\right]=\frac{\tilde{k}}{\Delta x}e^{ikx_j}.$$

6、令$\alpha=k*\Delta x$，化简上式，则有

$$\delta u_j=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j=e^{ikx_j}*\left[\left(-\frac{1}{12\Delta x}-a_6\right)*e^{i(-3\alpha)}+\left(\frac{1}{2\Delta x}+5a_6\right)*e^{i(-2\alpha)}+\left(-\frac{3}{2\Delta x}-10a_6\right)*e^{i(-\alpha)}+\left(\frac{5}{6\Delta x}+10a_6\right)+\left(-5a_6+\frac{1}{4\Delta x}\right)*e^{i\alpha}+a_6*e^{i2\alpha}\right]=\frac{\tilde{k}}{\Delta x}e^{ikx_j}$$

7、提取表达式中$\tilde{k}$部分，并且代入欧拉公式即可得k_r与k_i

$$\tilde{k}=\left[\left(-\frac{1}{12}-(a_6*\Delta x)\right)*e^{i(-3\alpha)}+\left(\frac{1}{2}+5a_6\Delta x\right)*e^{i(-2\alpha)}+\left(-\frac{3}{2}-10(a_6*\Delta x)\right)*e^{i(-\alpha)}+\left(\frac{5}{6}+10(a_6*\Delta x)\right)+\left(-5(a_6*\Delta x)+\frac{1}{4}\right)*e^{i\alpha}+(a_6*\Delta x)*e^{i2\alpha}\right].$$

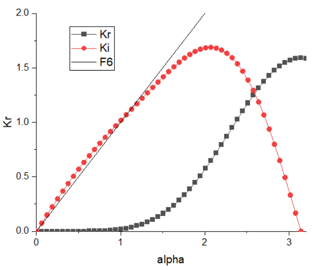
代入：$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$，$e^{i(-3\alpha)}=\cos(-3\alpha)+i\sin(-3\alpha)$，$e^{i(-2\alpha)}=\cos(-2\alpha)+i\sin(-2\alpha)$，$e^{i(-\alpha)}=\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)$，$e^{i(2\alpha)}=\cos(2\alpha)+i\sin(2\alpha)$

8、最后得到有k_r与k_i表达式如下所示

$$k_r=\left(-\frac{1}{12}-(a_6*\Delta x)\right)*\cos(-3\alpha)+\left(\frac{1}{2}+5a_6\Delta x\right)*\cos(-2\alpha)+\left(-\frac{3}{2}-10(a_6*\Delta x)\right)*\cos(-\alpha)+\left(\frac{5}{6}+10(a_6*\Delta x)\right)+\left(-5(a_6*\Delta x)+\frac{1}{4}\right)\cos\alpha+(a_6*\Delta x)*\cos(2\alpha)$$

$$k_i=\left(-\frac{1}{12}-(a_6*\Delta x)\right)*\sin(-3\alpha)+\left(\frac{1}{2}+5a_6\Delta x\right)*\sin(-2\alpha)+\left(-\frac{3}{2}-10(a_6*\Delta x)\right)*\sin(-\alpha)+\left(-5(a_6*\Delta x)+\frac{1}{4}\right)\sin\alpha+(a_6*\Delta x)*\sin(2\alpha)$$

假定Δx=0.001，对参数采用$\left|1-\frac{k_i}{\alpha}\right|<2\%$以及$k_r<2\%$，则可以得到下图：此时$a_6=-9.59$，接近最优情况



在这种情况下，该差分格式具体形式为：

$$\delta u_j=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j=-97.718*u_{j-3}+500*u_{j-2}-1428.075*u_{j-1}+737.4333*u_j+297.95*u_{j+1}-9.59*u_{j+2}$$

第一题第二问：

程序编制流程：

1、 读取参数文件 para.ini，其包含网格数，时间步长，系数最优化的探索范围与步长等；
2、 根据读取得到的网格间距Δx，重新优化得到最逼近结果的 a6 系数值；
3、 将得到的系数进行应用，得到新的差分格式；
4、 将初值定位 sin(x)的精确解，采用三阶 Runge-Kutta 法，采用差分格式对偏微分方程的数值解进行时间推进；
5、 差分格式优化结果以及最终时间推进计算结果分别输出至当前目录下的 txt 文件

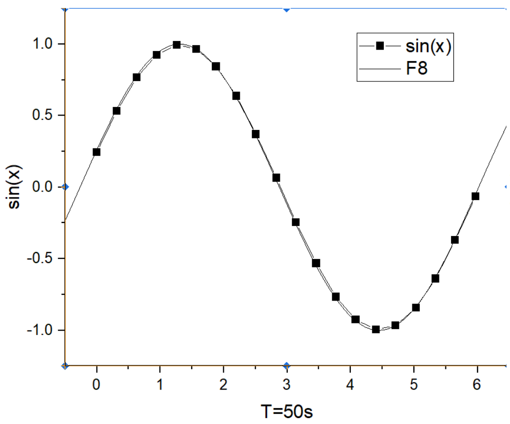
*Runge-Kutta 法迭代公式：

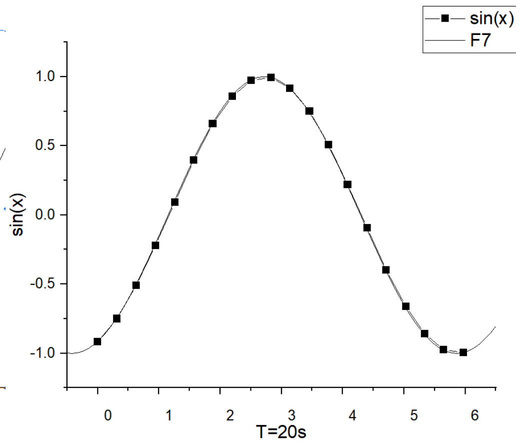
$$U^{(1)} = U^n + \Delta t L(U^n)$$
$$U^{(2)} = 3/4U^n + 1/4\left[U^{(1)} + \Delta t L\left(U^{(1)}\right)\right]$$
$$U^{n+1} = 1/3U^n + 2/3\left[U^{(2)} + \Delta t L\left(U^{(2)}\right)\right]$$

其中$L(u)$定义如下所示：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(u), \ L(u) = -(-97.718 * u_{j-3} + 500 * u_{j-2} - 1428.075 * u_{j-1} + 737.4333 * u_j + 297.95 * u_{j+1} - 9.59 * u_{j+2})$$

给定时间步长 0.01，T=20 时刻推进 2000 步，这里最优化取样范围已经提前计算得到初值，大致位于-10~10 之间，故直接定义为这个范围。





计算可得：L2 模误差=1.754*10^{-3}