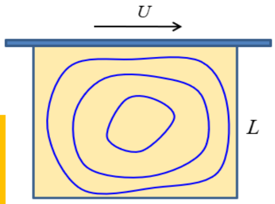
习题 **11.1** 求解方腔问题



问题描述：
如图示边长为**L**的方腔，上表面流体以常速度**U**运动，求解里面的流场（假设流动定常）。
考虑 $\mathrm{Re}=\frac{UL}{\nu}=100,400,1000$ 三种情况

要求：
数值方法不限 （人工压缩性方法、投影法、涡量-流函数方法及**SIMPLE**方法均可）；
空间离散采用差分法，建议采用较高阶精度的方法。
绘制出定常解的流线图。
请详细写明方程及公式的推导过程及计算流程，切勿只上交计算结果。

假定 i 为 y 方向，j 为 x 方向，在行列方向进行排列,采用涡流函数法进行求解，由于是二维问题，这个方法简单，对于三维，由于流函数没有明确定义，难以拓展。对方程$\frac{\partial\omega}{\partial t}+u\frac{\partial\omega}{\partial x}+v\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\omega$ 进行离散

x 方向有$u^{\pm}=\frac{u\pm|u|}{2}$

$$\delta_x^{+}\omega=\frac{(\omega_{j-2}-6\omega_{j-1}+3\omega_j+2\omega_{j+1})}{6\Delta x}.$$

$$\delta_x^{-}\omega=\frac{(-\omega_{j+2}+6\omega_{j+1}-3\omega_j-2\omega_{j-1})}{6\Delta x}.$$

$$\left(u\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_{i,j}=(u^{+}\delta_x^{-}\omega+u^{-}\delta_x^{+}\omega)_{i,j}=\frac{u+|u|}{2}*\frac{(\omega_{j+2}+6\omega_{j+1}-3\omega_j-2\omega_{i-1})}{6\Delta x}+\frac{u-|u|}{2}*\frac{(\omega_{j-2}-6\omega_{j-1}+3\omega_j+2\omega_{i+1})}{6\Delta x}.$$

对于 y 方向有$v^{\pm}=\frac{v\pm|v|}{2}$

$$\delta_y^{+}\omega=\frac{(\omega_{i-2}-6\omega_{i-1}+3\omega_i+2\omega_{i+1})}{6\Delta y}.$$

$$\delta_y^{-}\omega=\frac{(-\omega_{i+2}+6\omega_{i+1}-3\omega_i-2\omega_{i-1})}{6\Delta y}.$$

$$\left(v\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)_{i,j}=(v^{+}\delta_v^{-}\omega+v^{-}\delta_v^{+}\omega)_{i,j}=\frac{v+|v|}{2}*\frac{(\omega_{i+2}+6\omega_{i+1}-3\omega_i-2\omega_{i-1})}{6\Delta x}+\frac{v-|v|}{2}*\frac{(\omega_{i-2}-6\omega_{i-1}+3\omega_i+2\omega_{i+1})}{6\Delta x}.$$

对于黏性项的离散有：

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=\frac{\omega_{i+1,j}+\omega_{i-1,j}-2\omega_{i,j}}{\Delta y^2}$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\frac{\omega_{i,j+1}+\omega_{i,j-1}-2\omega_{i,j}}{\Delta x^2}$$

定义残差为：$Lu=-\left(\left(u\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_{i,j}+\left(v\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)_{i,j}\right)+\frac{1}{Re}*\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right)$

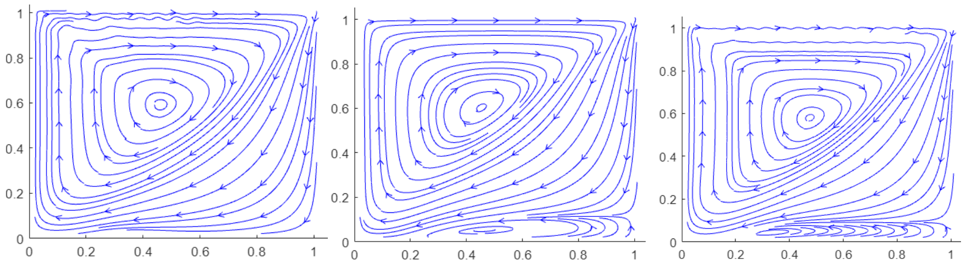
对于$\psi_{i,j}$的求解

$$\frac{\psi_{i+1,j}+\psi_{i-1,j}-2\psi_{i,j}}{\Delta y^2}+\frac{\psi_{i,j+1}+\psi_{i,j-1}-2\psi_{i,j}}{\Delta x^2}=\omega_{i,j}$$

化简可得

$$\psi_{i,j}=-\frac{\omega_{i,j}\Delta x^2\Delta y^2-\Delta x^2\psi_{i+1,j}-\Delta x^2\psi_{i-1,j}-\Delta y^2\psi_{i,j+1}-\Delta y^2\psi_{i,j-1}}{2(\Delta y^2+\Delta x^2)}$$

计算结果:



未能捕捉到左侧角涡的原因可能是用的三阶的迎风来求解的ω，同时计算 u,v 采用的是一阶迎风，经过简单的测试可以发现不同的计算 u,v 方式可以获得捕捉精度不同的结果(这里没有写,在代码内有测试)，如果采用更高阶的格式应该可以获得更好的效果，同时在求解时可以采用其他的迭代方法来加快收敛和收敛的准确性，这样估计可以保证获取较好的结果。

程序说明：

1、 对流场进行初始化，赋予四条边初值，上表面 u=1，其他表面的所有参数均为 0;

2、 采用迎风差分格式来对对流项进行离散，黏性项采用中心差分，时间推进采用一阶 RK;

3、 得到求解的 omega 后求解连续性方程，采用 Jocabi 迭代法，不要求求得稳态，给一个推进值即可；

4、 重复上述过程到给定的时间；

5、 如果需要输出压力，给定参数 P_Flag=True 即可.