作业　6.2

针对如下Shu-Osher 激波-密度扰动波干扰问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho u^2+p)}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho Eu+pu)}{\partial x}=0\end{cases}\qquad x\in[-5,5]$$

初值为: $\rho=3.857, u=2.629, p=10.333 \qquad (x<-4)$

$\rho=1+A\sin(\omega x), u=0, p=1 \qquad (A=0.3,\omega=40) \quad (x\geq -4)$

用5阶WENO格式计算其数值解，画出t=0.1时刻密度、速度及压力的分布

要求：1）空间网格数200，时间推进格式选用3阶Runge-Kutta,时间步长自选。

2）使用2000个网格点计算，其结果作为“精确解”，与其它结果画在一起，便于比较。

该题目选用 Roe 格式对其进行求解，激波捕捉格式采用五阶 WENO，对 NND 方程进行镜像对称，可以得到正负通量的表达式如下所示

负通量

对于公式：$f_{j+1/2}^{\text{WENOR}}=\omega_0 f_{j+1/2}^{(0)}+\omega_1 f_{j+1/2}^{(1)}+\omega_2 f_{j+1/2}^{(2)}$，有

$$\begin{cases}f_{j+1/2}^{(0)}=\frac{1}{3}f_{j+1}+\frac{5}{6}f_j-\frac{1}{6}f_{j-1}\\ f_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}=-\frac{1}{6}f_{j+2}+\frac{5}{6}f_{j+1}+\frac{1}{3}f_j\\ f_{j+\frac{1}{2}}^{(2)}=\frac{1}{3}f_{j+3}-\frac{7}{6}f_{j+2}+\frac{11}{6}f_{j+1}\end{cases}\text{与}\begin{cases}\omega_0=\frac{\alpha_0}{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2}\\ \omega_1=\frac{\alpha_1}{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2}\\ \omega_2=\frac{\alpha_2}{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2}\end{cases}$$

其中:

$$\begin{cases}\alpha_0=\frac{C_0}{(\varepsilon+IS_0)^2}=\frac{0.3}{(10^{-6}+IS_0)^2}\\ \alpha_1=\frac{C_2}{(\varepsilon+IS_1)^2}=\frac{0.6}{(10^{-6}+IS_1)^2}\\ \alpha_2=\frac{C_2}{(\varepsilon+IS_2)^2}=\frac{0.1}{(10^{-6}+IS_2)^2}\end{cases},\ \text{与}\begin{cases}C_0=\frac{3}{10}\\ C_1=\frac{3}{5}\\ C_2=\frac{1}{10}\end{cases}$$

$$\begin{cases}IS_0=\frac{13}{12}\left(f_{j+1}-2f_j+f_{j-1}\right)^2+\frac{1}{4}\left(3f_{j+1}-4f_j+f_{j-1}\right)^2\\ IS_1=\frac{13}{12}\left(f_{j+2}-2f_{j+1}+f_j\right)^2+\frac{1}{4}\left(f_{j+2}-f_j\right)^2\\ IS_2=\frac{13}{12}\left(f_{j+3}-2f_{j+2}+f_{j+1}\right)^2+\frac{1}{4}\left(f_{j+3}-4f_{j+2}+3f_{j+1}\right)^2\end{cases}.$$

正通量

$$f_{j+1/2}^{\text{WENOL}}=\omega_0 f_{j+1/2}^{(0)}+\omega_1 f_{j+1/2}^{(1)}+\omega_2 f_{j+1/2}^{(2)}$$

$$\begin{cases}f_{j+1/2}^{(0)}=\frac{1}{3}f_j+\frac{5}{6}f_{j+1}-\frac{1}{6}f_{j+2}\\ f_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}=-\frac{1}{6}f_{j-1}+\frac{5}{6}f_j+\frac{1}{3}f_{j+1}\\ f_{j+\frac{1}{2}}^{(2)}=\frac{1}{3}f_{j-2}-\frac{7}{6}f_{j-1}+\frac{11}{6}f_j\end{cases}\text{与}\begin{cases}\omega_0=\frac{\alpha_0}{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2}\\ \omega_1=\frac{\alpha_1}{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2}\\ \omega_2=\frac{\alpha_2}{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2}\end{cases}$$

其中:

$$\begin{cases}\alpha_0=\frac{C_0}{(\varepsilon+IS_0)^2}=\frac{0.3}{(10^{-6}+IS_0)^2}\\ \alpha_1=\frac{C_2}{(\varepsilon+IS_1)^2}=\frac{0.6}{(10^{-6}+IS_1)^2}\\ \alpha_2=\frac{C_2}{(\varepsilon+IS_2)^2}=\frac{0.1}{(10^{-6}+IS_2)^2}\end{cases}，与\begin{cases}C_0=\frac{3}{10}\\ C_1=\frac{3}{5}\\ C_2=\frac{1}{10}\end{cases}$$

$$\begin{cases}IS_0=\frac{13}{12}\left(f_j-2f_{j+1}+f_{j+2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(3f_j-4f_{j+1}+f_{j+2}\right)^2\\ IS_1=\frac{13}{12}\left(f_{j-1}-2f_j+f_{j+1}\right)^2+\frac{1}{4}\left(f_{j-1}-f_{j+1}\right)^2\\ IS_2=\frac{13}{12}\left(f_{j-2}-2f_{j-1}+f_j\right)^2+\frac{1}{4}\left(f_{j-2}-4f_{j-1}+3f_j\right)^2\end{cases}.$$

其他步骤同 6.1 作业相似，仅更换差分格式

1） 利用差分格式计算中间节点处的值，U_R,U_L;

2） 采用 Roe 平均公式计算 Roe 平均值$\bar{\mathbf{U}}$；

3） 将 Jacobian 矩阵$\mathbf{A}(\bar{\mathbf{U}})$，并对其进行特征分解: $\mathbf{A}(\bar{\mathbf{U}})=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}$计算$\mathbf{S}^{-1}$，$\mathbf{\Lambda}$，$\mathbf{S}$;

4） 计算$\left|\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R,\mathbf{U}_L)\right|=\mathbf{S}^{-1}|\Lambda|\mathbf{S}$;

5） 计算$\mathbf{f}_{j+1/2}=\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{U}_\mathrm{R},\mathbf{U}_\mathrm{L})=\frac{1}{2}[\mathbf{f}(\mathbf{U}_\mathrm{R})+\mathbf{f}(\mathbf{U}_L)]-\frac{1}{2}\left|\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_\mathrm{R},\mathbf{U}_\mathrm{L})\right|(\mathbf{U}_R-\mathbf{U}_\mathrm{L})$;

6） 计算空间导数;

7） 时间推进，计算下一时间步的值。

对于$\mathbf{\Lambda}$，由于其可能在驻点，音速点出现 0 的情况,对其进行熵修正，修正表达式:$\begin{cases}|\lambda| \text{ 当 } |\lambda|>\varepsilon\\ (\lambda^2+\varepsilon^2)/2\varepsilon \text{ 当 } |\lambda|\le\varepsilon\end{cases}$

代码请见文件 Source Code;

过程中对于$\mathbf{S}^{-1}$，$\mathbf{\Lambda}$，$\mathbf{S}$三个数值，其表达式如下所示:

$$S^{-1}=\begin{bmatrix}-\dfrac{\gamma-1}{c^2} & -\dfrac{1}{2c} & \dfrac{1}{2c}\\ -\dfrac{\gamma-1}{c^2}u & -\dfrac{u-c}{2c} & \dfrac{u+c}{2c}\\ -\dfrac{\gamma-1}{c^2}\dfrac{u^2}{2} & -\dfrac{1}{2c}\left[\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{c^2}{\gamma-1}-uc\right] & \dfrac{1}{2c}\left[\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{c^2}{\gamma-1}+uc\right]\end{bmatrix}$$

$$S=\begin{bmatrix}\dfrac{u^2}{2}-\dfrac{c^2}{\gamma-1} & -u & 1\\ -u-\dfrac{\gamma-1}{c}\dfrac{u^2}{2} & 1+\dfrac{\gamma-1}{c}u & -\dfrac{\gamma-1}{c}\\ -u+\dfrac{\gamma-1}{c}\dfrac{u^2}{2} & 1-\dfrac{\gamma-1}{c}u & \dfrac{\gamma-1}{c}\end{bmatrix}$$

$$\Lambda=\begin{bmatrix}u & 0 & 0\\ 0 & u-c & 0\\ 0 & 0 & u+c\end{bmatrix}$$

计算步长取 0.001，计算次数 1800 次。与题目略微差别的是计算中时间取 1.8 秒，x⩾-4 时，A=0.2，ω=5.

计算结果如下图所示，可以发现在激波产生的间断位置产生较大的波动，其他数值解在 200 网格时均能较好地毕竟 2000 网格的情况，但是 200 网格数求解的不够光滑。