Zadaća 3

Elma Šeremet, 18318

Zadatak 1 [1.8 poena]

Potrebno je transportovati određenu količinu robe iz 5 skladišta S_1, S_2, S_3, S_4 i S_5 u 3 prodavnice P_1, P_2 i P_3. Kapaciteti skladišta iznose 42, 49, 36, 37 i 36 težinskih jedinica respektivno. Potrebe prodavnica iznose 30, 39 i 53 težinskih jedinica respektivno. Jedinične cijene transporta između pojedinih skladišta i prodavnica date su u sljedećoj tabeli:

	P_1	P_2	P_3
S_1	14	6	18
S_2	10	5	7
S_3	17	7	12
S_4	20	11	16
S_5	15	15	6

Vaš zadatak je da uradite sljedeće:

a. Pronađete dopustivi plan transporta primjenom metoda sjeverozapadnog ugla; **[0.2 poena]**

   Budući da imam da je ukupna količina robe u skladištima veća od ukupne potrebe prodavnica, odnosno imam da je 200 > 122, potrebno je da dodam fiktivnog potrošača PF koji će preuzeti višak robe u skladištima. Imam da je: 200 – 122 = 78. Početna tabela data je u nastavku:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe
S_1	14	6	18	0	42
S_2	10	5	7	0	49
S_3	17	7	12	0	36
S_4	20	11	16	0	37
S_5	15	15	6	0	36
Potrebe	30	39	53	78	

Postupak započinjem dodjelom $x_{1,1}$ = min {42,30} = 30. Ovim je potrošač P_1 potpuno podmiren, pa ga isključujem iz razmatranja, dok u skladištu S_1 ostaje 42 – 30 = 12 jedinica. Nova situacija je prikazana u sljedećoj tabeli:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe
S_1	30 / 14	6	18	0	12
S_2	10	5	7	0	49
S_3	17	7	12	0	36
S_4	20	11	16	0	37
S_5	15	15	6	0	36
Potrebe	0	39	53	78	

Gornji lijevi (sjeverozapadni) ugao preostalog dijela tabele sada odgovara promjenjivoj $x_{1,2}$, pa sada vršim dodjelu $x_{1,2}$ = min {12, 39} = 12. Ovim iscrpljujemo skladište S_1, te ga isključujem iz razmatranja, dok potražnju potrošača P_2 smanjujemo za dodijeljeni iznos 12, tj. na iznos 39 – 12 = 27. Nova situacija prikazana je u sljedećoj tabeli:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe
S_1	30 / 14	12 / 6	18	0	0
S_2	10	5	7	0	49
S_3	17	7	12	0	36
S_4	20	11	16	0	37
S_5	15	15	6	0	36
Potrebe	0	27	53	78	

Nastavljam sada s promjenjivom $x_{2,2}$ kojoj ćemo dodijeliti vrijednost $x_{2,2}$ = min {49, 27} = 27. Ovim se u potpunosti podmiruje potrošač P_2, kojeg isključujemo iz razmatranja, dok u skladištu S_2 ostaje količina od 49 – 27 = 22 jedinica. Nova situacija je prikazana u sljedećoj tabeli:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe
S_1	30 / 14	12 / 6	18	0	0
S_2	10	27 / 5	7	0	22
S_3	17	7	12	0	36
S_4	20	11	16	0	37
S_5	15	15	6	0	36
Potrebe	0	0	53	78	

Sljedeća na redu je promjenjiva $x_{2,3}$ kojoj ćemo dodijeliti vrijednost $x_{2,3}$ = min {22, 53} = 22. Na ovaj način se iscrpljuje skladište S_2, te ga isključujem iz razmatranja, dok potražnju potrošača P_3 smanjujem na iznos 53 – 22 = 31 . Ovim sam dobila situaciju koja je data u sljedećoj tabeli:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe
S_1	30 / 14	12 / 6	18	0	0
S_2	10	27 / 5	22 / 7	0	0
S_3	17	7	12	0	36
S_4	20	11	16	0	37
S_5	15	15	6	0	36
Potrebe	0	0	31	78	

Sljedeća na redu je promjenjiva $x_{3,3}$ kojoj ćemo dodijeliti vrijednost $x_{3,3}$ = min {36, 31} = 31. Na ovaj način se potpuno podmiruje potrošač P_3, te ga isključujem iz razmatranja, dok u skladištu S_3

ostaje količina od 36 – 31 = 5 jedinica . Ovim sam dobila situaciju koja je data u sljedećoj tabeli:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe
S_1	30 / 14	12 / 6	18	0	0
S_2	10	27 / 5	22 / 7	0	0
S_3	17	7	31 / 12	0	5
S_4	20	11	16	0	37
S_5	15	15	6	0	36
Potrebe	0	0	0	78	

Sljedeća na redu je promjenjiva $x_{3,4}$ kojoj ćemo dodijeliti vrijednost $x_{3,4}$ = min {5, 78} = 5. Na ovaj način se iscrpljuje skladište S_3, te ga isključujem iz razmatranja, dok potražnju potrošača PF smanjujem na iznos 78 – 5 = 73 . Ovim sam dobila situaciju koja je data u sljedećoj tabeli:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe
S_1	30 / 14	12 / 6	18	0	0
S_2	10	27 / 5	22 / 7	0	0
S_3	17	7	31 / 12	5 / 0	0
S_4	20	11	16	0	37
S_5	15	15	6	0	36
Potrebe	0	0	0	73	

Sljedeća na redu je promjenjiva $x_{4,4}$ kojoj ćemo dodijeliti vrijednost $x_{4,4}$ = min {37, 73} = 37. Na ovaj način se iscrpljuje skladište S_4, te ga isključujem iz razmatranja, dok potražnju potrošača PF smanjujem na iznos 73 – 37 = 36 . Ovim sam dobila situaciju koja je data u sljedećoj tabeli:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe
S_1	30 / 14	12 / 6	18	0	0
S_2	10	27 / 5	22 / 7	0	0
S_3	17	7	31 / 12	5 / 0	0
S_4	20	11	16	37 / 0	0
S_5	15	15	6	0	36
Potrebe	0	0	0	36	

Konačno, posljednja na redu je promjenjiva $x_{5,4}$ kojoj ćemo dodijeliti vrijednost $x_{5,4}$ = min {36, 36} = 36. Na ovaj način se iscrpljuje skladište S_5, te ga isključujem iz razmatranja, ali se u potpunosti podmiruje i potrošač PF, te i njega isključujem iz razmatranja. Ovim su raspodijeljene sve zalihe i zadovoljene sve potrebe, čime je nađeno jedno dozvoljeno bazno rješenje. Ova situacija je prikazana u sljedećoj tabeli:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe
S_1	30 / 14	12 / 6	18	0	0
S_2	10	27 / 5	22 / 7	0	0
S_3	17	7	31 / 12	5 / 0	0
S_4	20	11	16	37 / 0	0
S_5	15	15	6	36 / 0	0
Potrebe	0	0	0	0	

Potrebe svih prodavnica su zadovoljene, te promjenjive kojima nije dodijeljena nikakva vrijednost u ovom početnom rješenju imaju vrijednost 0. Dakle, početno rješenje glasi:

$x_{1,1} = 30$	$x_{2,1} = 0$	$x_{3,1} = 0$	$x_{4,1} = 0$	$x_{5,1} = 0$
$x_{1,2} = 12$	$x_{2,2} = 27$	$x_{3,2} = 0$	$x_{4,2} = 0$	$x_{5,2} = 0$
$x_{1,3} = 0$	$x_{2,3} = 22$	$x_{3,3} = 31$	$x_{4,3} = 0$	$x_{5,3} = 0$
$x_{1,F} = 0$	$x_{2,F} = 0$	$x_{3,F} = 5$	$x_{4,F} = 37$	$x_{5,F} = 36$

Odnosno:
Prodavnica 1 dobiva 30 količinskih jedinica skladišta 1.
Prodavnica 2 dobiva 12 količinskih jedinica skladišta 1 i 27 količinskih jedinica skladišta 2.
Prodavnica 3 dobiva 22 količinskih jedinica skladišta 2 i 31 količinskih jedinica skladišta 3.
Što se tiče fiktivne prodavnice, mogu zaključiti da će u skladištu 3 ostati 5 količinskih jedinica, u skladištu 4 37 količinskih jedinica, a u skladištu 5 36 količinskih jedinica, dok će se skladišta 1 i 2 potpuno isprazniti.

Troškovi transporta iznose:

$$Z = 14 \cdot 30 + 6 \cdot 12 + 5 \cdot 27 + 7 \cdot 22 + 12 \cdot 31 = 1153.$$

Također, broj polja sa nenultim transportom jeste 8 što je jednako m + n - 1 = 5 + 4 - 1 = 8, odakle također mogu vidjeti da rješenje nije degenerirano.

b. Pronađete dopustivi plan transporta primjenom metoda minimalnih jediničnih troškova; [0.2 poena]

Početna tabela data je u nastavku:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe
S_1	14	6	18	0	42
S_2	10	5	7	0	49
S_3	17	7	12	0	36
S_4	20	11	16	0	37
S_5	15	15	6	0	36
Potrebe	30	39	53	78	

Polje s najmanjim troškovima transporta je $c_{2,4} = 0$, pa ćemo prvo pokušati što je god moguće veći transport obaviti preko ovog polja. Kako potrebe potrošača P_F iznose 78 jedinica, dok skladište S_2 ima zalihe od 49 jedinice, maksimalni mogući transport S_2 - P_F iznosi $c_{2,4} = \min\{49, 78\} = 49$. Ovim se potpuno iscrpljuje skladište S_2, kojeg eliminiram iz daljeg razmatranja. Dobijam sljedeću tabelu:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe
S_1	14	6	18	0	42
S_2	10	5	7	49 / 0	0
S_3	17	7	12	0	36
S_4	20	11	16	0	37
S_5	15	15	6	0	36
Potrebe	30	39	53	29	

Sada, u neosjenčenom dijelu tabele polje s najmanjim troškovima transporta je $c_{1,4} = 0$, pa ćemo prvo pokušati što je god moguće veći transport obaviti preko ovog polja. Kako potrebe potrošača P_F iznose 29 jedinica, dok skladište S_1 ima zalihe od 42 jedinice, maksimalni mogući transport S_1 - P_F iznosi $c_{1,4} = \min\{42, 29\} = 29$. Ovim se potpuno podmiruje potrošač P_F, kojeg eliminiram iz daljeg razmatranja. Zalihe skladišta S_1 se smanjuju na iznos 42 – 29 = 13. Dobijam sljedeću tabelu:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe
S_1	14	6	18	29 / 0	13
S_2	10	5	7	49 / 0	0
S_3	17	7	12	0	36
S_4	20	11	16	0	37
S_5	15	15	6	0	36
Potrebe	30	39	53	0	

Sada, u neosjenčenom dijelu tabele polje s najmanjim troškovima transporta je $c_{5,3} = 6$, pa ćemo prvo pokušati što je god moguće veći transport obaviti preko ovog polja. Kako potrebe potrošača P_3 iznose 53 jedinice, dok skladište S_5 ima zalihe od 36 jedinice, maksimalni mogući transport $S_5 - P_3$ iznosi $c_{5,3} = \min\{36, 53\} = 36$. Ovim se potpuno iscrpljuje skladište S_5, kojeg eliminiram iz daljeg razmatranja. Dobijam sljedeću tabelu:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe
S_1	14	6	18	29 / 0	13
S_2	10	5	7	49 / 0	0
S_3	17	7	12	0	36
S_4	20	11	16	0	37
S_5	15	15	36 / 6	0	0
Potrebe	30	39	17	0	

Sada, u neosjenčenom dijelu tabele polje s najmanjim troškovima transporta je $c_{1,2} = 6$, pa ćemo prvo pokušati što je god moguće veći transport obaviti preko ovog polja. Kako potrebe potrošača P_2 iznose 39 jedinica, dok skladište S_1 ima zalihe od 13 jedinica, maksimalni mogući transport $S_1 - P_2$ iznosi $c_{1,2} = \min\{13, 39\} = 13$. Ovim se potpuno iscrpljuje skladište S_1, kojeg eliminiram iz daljeg razmatranja. Dobijam sljedeću tabelu:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe
S_1	14	13 / 6	18	29 / 0	0
S_2	10	5	7	49 / 0	0
S_3	17	7	12	0	36
S_4	20	11	16	0	37
S_5	15	15	36 / 6	0	0
Potrebe	30	26	17	0	

Sada, u neosjenčenom dijelu tabele polje s najmanjim troškovima transporta je $c_{3,2} = 7$, pa ćemo prvo pokušati što je god moguće veći transport obaviti preko ovog polja. Kako potrebe potrošača P_2 iznose 26 jedinica, dok skladište S_3 ima zalihe od 36 jedinice, maksimalni mogući transport S_3 – P_2 iznosi $c_{3,2} = \min\{36, 26\} = 26$. Ovim se potpuno podmiruje potrošač P_2, kojeg eliminiram iz daljeg razmatranja. Zalihe skladišta S_3 se smanjuju na iznos 36 – 26 = 10. Dobijam sljedeću tabelu:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe
S_1	14	13 / 6	18	29 / 0	0
S_2	10	5	7	49 / 0	0
S_3	17	26 / 7	12	0	10
S_4	20	11	16	0	37
S_5	15	15	36 / 6	0	0
Potrebe	30	0	17	0	

Sada, u neosjenčenom dijelu tabele polje s najmanjim troškovima transporta je $c_{3,3} = 12$, pa ćemo prvo pokušati što je god moguće veći transport obaviti preko ovog polja. Kako potrebe potrošača P_3 iznosi 17 jedinica, dok skladište S_3 ima zalihe od 10 jedinica, maksimalni mogući transport S_3 – P_3 iznosi $c_{3,3}$ = min {10, 17} = 10. Ovim se potpuno iscrpljuje skladište S_3, kojeg eliminiram iz daljeg razmatranja. Dobijam sljedeću tabelu:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe
S_1	14	13 / 6	18	29 / 0	0
S_2	10	5	7	49 / 0	0
S_3	17	26 / 7	10 / 12	0	0
S_4	20	11	16	0	37
S_5	15	15	36 / 6	0	0
Potrebe	30	0	7	0	

Sada, u neosjenčenom dijelu tabele polje s najmanjim troškovima transporta je $c_{4,3}$ = 16, pa ćemo prvo pokušati što je god moguće veći transport obaviti preko ovog polja. Kako potrebe potrošača P_3 iznose 7 jedinica, dok skladište S_4 ima zalihe od 37 jedinice, maksimalni mogući transport S_4 – P_3 iznosi $c_{4,3}$ = min {37, 7} = 7. Ovim se potpuno podmiruje potrošač P_3, kojeg eliminiram iz daljeg razmatranja. Zalihe skladišta S_4 se smanjuju na iznos 37 – 7 = 30. Dobijam sljedeću tabelu:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe
S_1	14	13 / 6	18	29 / 0	0
S_2	10	5	7	49 / 0	0
S_3	17	26 / 7	10 / 12	0	0
S_4	20	11	7 / 16	0	30
S_5	15	15	36 / 6	0	0
Potrebe	30	0	0	0	

Sada, u neosjenčenom dijelu tabele polje s najmanjim troškovima transporta je $c_{4,1} = 20$, pa ćemo prvo pokušati što je god moguće veći transport obaviti preko ovog polja. Kako potrebe potrošača P_1 iznose 30 jedinica, dok skladište S_4 ima zalihe od 30 jedinice, maksimalni mogući transport S_4 – P_1 iznosi $c_{4,1} = \min\{30, 30\} = 30$. Ovim se potpuno podmiruje potrošač P_1, kojeg eliminiram iz daljeg razmatranja. Također mogu zaključiti da se nakon ovog koraka podmiruju svi potrošači i iscrpljuju sva skladišta.

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe
S_1	14	13 / 6	18	29 / 0	0
S_2	10	5	7	49 / 0	0
S_3	17	26 / 7	10 / 12	0	0
S_4	30 / 20	11	7 / 16	0	0
S_5	15	15	36 / 6	0	0
Potrebe	0	0	0	0	

Potrebe svih prodavnica su zadovoljene, te promjenjive kojima nije dodijeljena nikakva vrijednost u ovom početnom rješenju imaju vrijednost 0. Dakle, početno bazno rješenje glasi:

$x_{1,1} = 0$	$x_{2,1} = 0$	$x_{3,1} = 0$	$x_{4,1} = 30$	$x_{5,1} = 0$
$x_{1,2} = 13$	$x_{2,2} = 0$	$x_{3,2} = 26$	$x_{4,2} = 0$	$x_{5,2} = 0$
$x_{1,3} = 0$	$x_{2,3} = 0$	$x_{3,3} = 10$	$x_{4,3} = 7$	$x_{5,3} = 36$
$x_{1,F} = 29$	$x_{2,F} = 49$	$x_{3,F} = 0$	$x_{4,F} = 0$	$x_{5,F} = 0$

Odnosno:
Prodavnica 1 dobiva 30 količinskih jedinica iz skladišta 4.
Prodavnica 2 dobiva 13 količinskih jedinica skladišta 2 i 26 količinskih jedinica iz skladišta 3.
Prodavnica 3 dobiva 10 količinskih jedinica skladišta 3, 7 količinskih jedinica skladišta 4 i 36 količinskih jedinica skladišta 5.
Što se tiče fiktivne prodavnice, mogu zaključiti da će u skladištu 1 ostati 29 količinske jedinice, u skladištu 2 49 količinskih jedinica.

Troškovi transporta iznose:

$$Z = 6 \cdot 13 + 7 \cdot 26 + 12 \cdot 10 + 20 \cdot 30 + 16 \cdot 7 + 6 \cdot 36 = 1308.$$

c. Pronađete dopustivi plan transporta primjenom Vogelovog aproksimativnog metoda; **[0.3 poena]**

Proširena početna tabela sa jednim novim redom i jednom novom kolonom „Žaljenje" data je u nastavku:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe	Žaljenje
S_1	14	6	18	0	42	6
S_2	10	5	7	0	49	5
S_3	17	7	12	0	36	7
S_4	20	11	16	0	37	11
S_5	15	15	6	0	36	6
Potrebe	30	39	53	78		
Žaljenje	4	1	1	0		

Vidimo da najveće moguće žaljenje (11) imam u redu koji odgovara S_4. Zbog toga, odlučila sam se da maksimalno mogući transport obavim upravo preko najpovoljnijeg polja u tom redu. Za ovaj slučaj, taj transport iznosi $x_{4,4}$ = min {37, 78} = 37, pri čemu se u potpunosti iscrpljuje skladište S_4. Potrebe potrošača P_F sada iznose 78 – 37 = 41. Nakon što eliminiram red S_4 potrebno je ponovo izračunati „moguća žaljenja" za sve kolone koje se mogu promijeniti jer je red S_4 izbačen „iz igre". To se u ovom slučaju nije desilo, tako da sam dobila sljedeću tabelu:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe	Žaljenje
S_1	14	6	18	0	42	6
S_2	10	5	7	0	49	5
S_3	17	7	12	0	36	7
S_4	20	11	16	37 / 0	0	11
S_5	15	15	6	0	36	6
Potrebe	30	39	53	41		
Žaljenje	4	1	1	0		

Nakon toga, najveće moguće žaljenje (7) imam u redu koji odgovara S_3. Zbog toga, odlučila sam se da maksimalno mogući transport obavim upravo preko najpovoljnijeg polja u tom redu. Za ovaj slučaj, taj transport iznosi $x_{3,4}$ = min {36, 41} = 36, pri čemu se u potpunosti iscrpljuje skladište S_3. Potrebe potrošača P_F sada iznose 41 – 36 = 5. Nakon što eliminiram red S_3 potrebno je ponovo izračunati „moguća žaljenja" za sve kolone koje se mogu promijeniti jer je red S_3 izbačen „iz igre". To se u ovom slučaju nije desilo, tako da sam dobila sljedeću tabelu:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe	Žaljenje
S_1	14	6	18	0	42	6
S_2	10	5	7	0	49	5
S_3	17	7	12	36 / 0	0	7
S_4	20	11	16	37 / 0	0	11
S_5	15	15	6	0	36	6
Potrebe	30	39	53	5		
Žaljenje	4	1	1	0		

Nakon toga, najveće moguće žaljenje (6) imam u redu koji odgovara S_1 i S_5. Zbog toga, odlučila sam se da maksimalno mogući transport obavim upravo preko najpovoljnijeg polja u tim redovima. Za ovaj slučaj, taj transport iznosi $x_{1,4} = \min\{42, 5\} = 5$, pri čemu se u potpunosti podmiruje potrošač P_F. Zalihe skladišta S_1 sada iznose 42 – 5 = 37. Nakon što eliminiram kolonu P_F potrebno je ponovo izračunati „moguća žaljenja" za sve redove koje se mogu promijeniti jer je kolona P_F izbačena „iz igre", tako da sam dobila sljedeću tabelu:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe	Žaljenje
S_1	14	6	18	5 / 0	37	8
S_2	10	5	7	0	49	2
S_3	17	7	12	36 / 0	0	7
S_4	20	11	16	37 / 0	0	11
S_5	15	15	6	0	36	9
Potrebe	30	39	53	0		
Žaljenje	4	1	1	0		

Nakon toga, najveće moguće žaljenje (9) imam u redu koji odgovara S_5. Zbog toga, odlučila sam se da maksimalno mogući transport obavim upravo preko najpovoljnijeg polja u tom redu. Za ovaj slučaj, taj transport iznosi $x_{5,3}$ = min {36, 53} =36, pri čemu se u potpunosti iscrpljuje skladište S_5. Potrebe potrošača P_3 sada iznose 53 – 36 = 17. Nakon što eliminiram red S_5 potrebno je ponovo izračunati „moguća žaljenja“ za sve kolone koje se mogu promijeniti jer je red S_5 izbačen „iz igre“, tako da sam dobila sljedeću tabelu:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe	Žaljenje
S_1	14	6	18	5 / 0	37	8
S_2	10	5	7	0	49	2
S_3	17	7	12	36 / 0	0	7
S_4	20	11	16	37 / 0	0	11
S_5	15	15	36 / 6	0	0	9
Potrebe	30	39	17	0		
Žaljenje	4	1	11	0		

Nakon toga, najveće moguće žaljenje (11) imam u koloni koja odgovara P_3. Zbog toga, odlučila sam se da maksimalno mogući transport obavim upravo preko najpovoljnijeg polja u toj koloni. Za ovaj slučaj, taj transport iznosi $x_{2,3}$ = min {49, 17} = 17, pri čemu se u potpunosti podmiruje potrošač P_3. Zalihe skladišta S_2 sada iznose 49 – 17 = 32. Nakon što eliminiram kolonu P_3 potrebno je ponovo izračunati „moguća žaljenja“ za sve redove koje se mogu promijeniti jer je kolona P_3 izbačena „iz igre“, tako da sam dobila sljedeću tabelu:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe	Žaljenje
S_1	14	6	18	5 / 0	37	8
S_2	10	5	17 / 7	0	32	5
S_3	17	7	12	36 / 0	0	7
S_4	20	11	16	37 / 0	0	11
S_5	15	15	36 / 6	0	0	9
Potrebe	30	39	0	0		
Žaljenje	4	1	11	0		

Nakon toga, najveće moguće žaljenje (8) imam u redu koji odgovara S_1. Zbog toga, odlučila sam se da maksimalno mogući transport obavim upravo preko najpovoljnijeg polja u tom redu. Za ovaj slučaj, taj transport iznosi $x_{1,2} = \min\{37, 39\} = 37$, pri čemu se u potpunosti iscrpljuje skladište S_1. Potrebe potrošača P_2 sada iznose 39 – 37 = 2. Nakon što eliminiram red S_1, pa sva moguća žaljenja za kolone se svode na 0 jer nemamo dva različita najmanja elementa.

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe	Žaljenje
S_1	14	37 / 6	18	5 / 0	0	8
S_2	10	5	17 / 7	0	32	5
S_3	17	7	12	36 / 0	0	7
S_4	20	11	16	37 / 0	0	11
S_5	15	15	36 / 6	0	0	9
Potrebe	30	2	0	0		
Žaljenje	0	0	11	0		

Sada je jasno da je najpovoljnije odabrati transport za $x_{2,2}$ = min {32, 2} = 2, pri čemu se u potpunosti podmiruje potrošač P_2. Zalihe skladišta S_2 sada iznose 32 – 2 = 30. Dobila sam sljedeću tabelu:

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe	Žaljenje
S_1	14	37 / 6	18	5 / 0	0	8
S_2	10	2 / 5	17 / 7	0	30	5
S_3	17	7	12	36 / 0	0	7
S_4	20	11	16	37 / 0	0	11
S_5	15	15	36 / 6	0	0	9
Potrebe	30	0	0	0		
Žaljenje	0	0	11	0		

Sada, u neosjenčenom dijelu tabele polje s najmanjim troškovima transporta je $c_{2,1}$ = 10, pa ćemo prvo pokušati što je god moguće veći transport obaviti preko ovog polja. Kako potrebe potrošača P_1 iznose 30 jedinica, dok skladište S_2 ima zalihe od 30 jedinice, maksimalni mogući transport S_2 – P_1 iznosi $c_{2,1}$ = min {30, 30} = 30. Ovim se potpuno podmiruje potrošač P_1, kojeg eliminiram iz daljeg razmatranja. Također mogu zaključiti da se nakon ovog koraka podmiruju svi potrošači i iscrpljuju sva skladišta.

	P_1	P_2	P_3	PF	Zalihe	Žaljenje
S_1	14	37 / 6	18	5 / 0	0	8
S_2	30 / 10	2 / 5	17 / 7	0	0	5
S_3	17	7	12	36 / 0	0	7
S_4	20	11	16	37 / 0	0	11
S_5	15	15	36 / 6	0	0	9
Potrebe	0	0	0	0		
Žaljenje	0	0	11	0		

Potrebe svih prodavnica su zadovoljene, te promjenjive kojima nije dodijeljena nikakva vrijednost u ovom početnom rješenju imaju vrijednost 0. Dakle, početno bazno rješenje glasi:

$x_{1,1} = 0$	$x_{2,1} = 30$	$x_{3,1} = 0$	$x_{4,1} = 0$	$x_{5,1} = 0$
$x_{1,2} = 37$	$x_{2,2} = 2$	$x_{3,2} = 0$	$x_{4,2} = 0$	$x_{5,2} = 0$
$x_{1,3} = 0$	$x_{2,3} = 17$	$x_{3,3} = 0$	$x_{4,3} = 0$	$x_{5,3} = 36$
$x_{1,F} = 5$	$x_{2,F} = 0$	$x_{3,F} = 36$	$x_{4,F} = 37$	$x_{5,F} = 0$

Odnosno:
Prodavnica 1 dobiva 30 količinskih jedinica iz skladišta 2.
Prodavnica 2 dobiva 37 količinskih jedinica iz skladišta 1 i 2 količinskih jedinica iz skladišta 2.
Prodavnica 3 dobiva 17 količinskih jedinica iz skladišta 2 i 36 količinskih jedinica iz skladišta 5.
Što se tiče fiktivne prodavnice, mogu zaključiti da će u skladištu 1 ostati 5 količinskih jedinica, a u skladištu 4 će ostati 37 količinskih jedinica.

Troškovi transporta iznose:

$$Z = 6 \cdot 37 + 10 \cdot 30 + 2 \cdot 5 + 7 \cdot 17 + 6 \cdot 36 = 867.$$

d. Pronađete optimalni plan transporta primjenom stepping-stone metoda na polazni dopustivi plan transporta dobijen Vogelovim aproksimativnim metodom; [0.5 poena]

U prethodnom podzadatku sam, primjenom Vogelove aproksimativne metode, došla do početnog dopustivog rješenja koje je predstavljeno sljedećom tabelom:

	P_1	P_2	P_3	PF
S_1	14	37 / 6	18	5 / 0
S_2	30 / 10	2 / 5	17 / 7	0
S_3	17	7	12	36 / 0
S_4	20	11	16	37 / 0
S_5	15	15	36 / 6	0

Pri tome je vrijednost funkcije cilja koja odgovara ovom rješenju bila Z = 867. Bitno je uočiti da ovo rješenje nije degenerirano, jer je broj polja s nenultim transportom jednak 8, što je tačno jednako vrijednosti m + n – 1 = 5 + 4 – 1 = 8.
Kako su prazna polja odnosno polja bez dodijeljenog nenultog transporta polja koja odgovaraju promjenjivim $x_{1,1}$, $x_{1,3}$, $x_{2,F}$, $x_{3,1}$, $x_{3,2}$, $x_{3,3}$, $x_{4,1}$, $x_{4,2}$, $x_{4,3}$, $x_{5,1}$, $x_{5,2}$, $x_{5,F}$, potrebno je odrediti odgovarajuće relativne koeficijente troškova: $d_{1,1}$, $d_{1,3}$, $d_{2,F}$, $d_{3,1}$, $d_{3,2}$, $d_{3,3}$, $d_{4,1}$, $d_{4,2}$, $d_{4,3}$, $d_{5,1}$, $d_{5,2}$, $d_{5,F}$. Prvo ću odrediti koeficijent $d_{1,1}$. Da bih povećala transport preko polja $d_{1,1}$, neophodno je umanjiti transport bilo preko polja $x_{1,2}$ ili $x_{1,4}$, da bi ograničenje za skladište 1 ostalo na snazi. Ukoliko umanjim transport preko polja $x_{1,2}$, što će zahtjevati da se poveća transport preko polja $x_{2,2}$, što će dodatno zahtjevati da se smanji transport ili kod $x_{2,1}$ ili $x_{2,3}$. Budući da zahtjev da se smanji transport kod polja $x_{2,1}$ dovodi do savršenog uklapanja s početnim povećanjem $x_{1,1}$ uspjela sam formirati smislen ciklus povećavanja i

smanjenja transporta koji čuva valjanost svih ograničenja i taj ciklus konkretno glasi: $x_{1,1} \rightarrow x_{1,2} \rightarrow x_{2,2} \rightarrow x_{2,1} \rightarrow x_{1,1}$. Pri tome transport se povećava u poljima $x_{1,1}$ i i $x_{2,2}$, a smanjuje u poljima $x_{1,2}$ i $x_{2,1}$, tako da je: $d_{1,1} = c_{1,1} - c_{1,2} + c_{2,2} - c_{2,1} = 14 - 6 + 5 - 10 = 3$.

Na isti način su traženi i ostali koeficijenti, koji su predstavljeni tabelarno:

Prazno polje	Ciklus	d
$x_{1,1}$	$x_{1,1} \rightarrow x_{1,2} \rightarrow x_{2,2} \rightarrow x_{2,1} \rightarrow x_{1,1}$	$d_{1,1} = c_{1,1} - c_{1,2} + c_{2,2} - c_{2,1} = 14 - 6 + 5 - 10 = 3$
$x_{1,3}$	$x_{1,3} \rightarrow x_{1,2} \rightarrow x_{2,2} \rightarrow x_{2,3} \rightarrow x_{1,3}$	$d_{1,3} = c_{1,3} - c_{1,2} + c_{2,2} - c_{2,3} = 18 - 6 + 5 - 7 = 10$
$x_{2,F}$	$x_{2,F} \rightarrow x_{2,2} \rightarrow x_{1,2} \rightarrow x_{1,F} \rightarrow x_{2,F}$	$d_{2,F} = c_{2,F} - c_{2,2} + c_{1,2} - c_{1,F} = 0 - 5 + 6 - 0 = 1$
$x_{3,1}$	$x_{3,1} \rightarrow x_{3,F} \rightarrow x_{1,F} \rightarrow x_{1,2} \rightarrow x_{2,2} \rightarrow x_{2,1} \rightarrow x_{3,1}$	$d_{3,1} = c_{3,1} - c_{3,F} + c_{1,F} - c_{1,2} + c_{2,2} - c_{2,1} = 17 - 0 + 0 - 6 + 5 - 10 = 6$
$x_{3,2}$	$x_{3,2} \rightarrow x_{3,F} \rightarrow x_{1,F} \rightarrow x_{1,2} \rightarrow x_{3,2}$	$d_{3,2} = c_{3,2} - c_{3,F} + x_{1,F} - x_{1,2} = 7 - 0 + 0 - 6 = 1$
$x_{3,3}$	$x_{3,3} \rightarrow x_{3,F} \rightarrow x_{1,F} \rightarrow x_{1,2} \rightarrow x_{2,2} \rightarrow x_{2,3} \rightarrow x_{3,3}$	$d_{3,3} = c_{3,3} - c_{3,F} + c_{1,F} - c_{1,2} + c_{2,2} - c_{2,3} = 12 - 0 + 0 - 6 + 5 - 7 = 4$
$x_{4,1}$	$x_{4,1} \rightarrow x_{4,F} \rightarrow x_{1,F} \rightarrow x_{1,2} \rightarrow x_{2,2} \rightarrow x_{2,1} \rightarrow x_{4,1}$	$d_{4,1} = c_{4,1} - c_{4,F} + c_{1,F} - c_{1,2} + c_{2,2} - c_{2,1} = 20 - 0 + 0 - 6 + 5 - 10 = 9$
$x_{4,2}$	$x_{4,2} \rightarrow x_{4,F} \rightarrow x_{1,F} \rightarrow x_{1,2} \rightarrow x_{4,2}$	$d_{4,2} = c_{4,2} - c_{4,F} + x_{1,F} - x_{1,2} = 11 - 0 + 0 - 6 = 5$
$x_{4,3}$	$x_{4,3} \rightarrow x_{4,F} \rightarrow x_{1,F} \rightarrow x_{1,2} \rightarrow x_{2,2} \rightarrow x_{2,3} \rightarrow x_{4,3}$	$d_{4,3} = c_{4,3} - c_{4,F} + c_{1,F} - c_{1,2} + c_{2,2} - c_{2,3} = 16 - 0 + 0 - 6 + 5 - 7 = 8$
$x_{5,1}$	$x_{5,1} \rightarrow x_{5,3} \rightarrow x_{2,3} \rightarrow x_{2,1} \rightarrow x_{5,1}$	$d_{5,1} = c_{5,1} - c_{5,3} + c_{2,3} - c_{2,1} = 15 - 6 + 7 - 10 = 6$
$x_{5,2}$	$x_{5,2} \rightarrow x_{5,3} \rightarrow x_{2,3} \rightarrow x_{2,2} \rightarrow x_{5,2}$	$d_{5,2} = c_{5,2} - c_{5,3} + c_{2,3} - c_{2,2} = 15 - 6 + 7 - 5 = 11$
$x_{5,F}$	$x_{5,F} \rightarrow x_{5,3} \rightarrow x_{2,3} \rightarrow x_{2,2} \rightarrow x_{1,2} \rightarrow x_{1,F} \rightarrow x_{5,F}$	$d_{5,F} = c_{5,F} - c_{5,3} + c_{2,3} - c_{2,2} + c_{1,2} - c_{1,F} = 0 - 6 + 7 - 5 + 6 - 0 = 2$

Budući da su svi relativni koeficijenti troškova veći ili jednaki nuli, to pokazuje da je rješenje pod c zaista optimalno, te napisano je u rješenju pod c.

e. Pronađete optimalni plan transporta primjenom MODI metoda na polazni dopustivi plan transporta dobijen metodom minimalnih jediničnih troškova; [0.6 poena]

U podzadatku b sam, primjenom metode minimalnih jediničnih troškova, došla do početnog dopustivog rješenja koje je predstavljeno sljedećom tabelom:

	P_1	P_2	P_3	PF
S_1	14	13 / 6	18	29 / 0
S_2	10	5	7	49 / 0
S_3	17	26 / 7	10 / 12	0
S_4	30 / 20	11	7 / 16	0
S_5	15	15	36 / 6	0

U transportnoj tablici uvest ću novi red i kolonu za vrijednosti dualnih promjenjivih, kao na sljedećoj slici:

	P_1	P_2	P_3	PF	ui
S_1	14	13 / 6	18	29 / 0	
S_2	10	5	7	49 / 0	
S_3	17	26 / 7	10 / 12	0	
S_4	30 / 20	11	7 / 16	0	
S_5	15	15	36 / 6	0	
vi					

Na nulu postavljamo onu dualnu promjenjivu koja odgovara redu i koloni s najviše nenultih transporta. U mom slučaju to je P_3, pa stavljam da je $v_3 = 0$. Dalje sam posmatrala polja u tabeli u kojima se vrši transport i računala ono što se može izračunati. Budući da mora biti: $u_3 + v_3 = 12$ imam da je $u_3 = 12$, $u_4 + v_3 = 16$ imam da je $u_4 = 16$, $u_5 + v_3 = 6$ imam da je $u_5 = 6$. Sada mogu iskoristiti da je $u_4 + v_1 = 20$, te dobijem da je $v_1 = 4$. Zatim, mogu iskoristiti da je $u_3 + v_2 = 7$, te dobijem da je $v_2 = -5$. Zatim, mogu iskoristiti da je $v_2 + u_1 = 6$, te dobijem da je $u_1 = 11$. Mogu iskoristiti i da je $u_1 + v_F = 0$, te dobijem da je $v_F = -11$. Također mogu iskoristiti da je $u_2 + v_F = 0$, te dobijem da je $u_2 = 11$. Na kraju postupka tabela izgleda ovako:

	P_1	P_2	P_3	PF	ui
S_1	14	13 / 6	18	29 / 0	11
S_2	10	5	7	49 / 0	11
S_3	17	26 / 7	10 / 12	0	12
S_4	30 / 20	11	7 / 16	0	16
S_5	15	15	36 / 6	0	6
vi	4	-5	0	-11	

Nakon što se odrede osnovne dualne promjenjive relativni koeficijenti troškova se određuju pomoću formule:

$d_{i,j} = c_{i,j} - u_i - v_j$

Dakle, sada imam:

$d_{1,1} = c_{1,1} - u_1 - v_1 = 14 - 11 - 4 = -1$

$d_{1,3} = c_{1,3} - u_1 - v_3 = 18 - 11 + 0 = 7$

$d_{2,1} = c_{2,1} - u_2 - v_1 = 10 - 11 - 4 = -5$

$d_{2,2} = c_{2,2} - u_2 - v_2 = 5 - 11 + 5 = -1$

$d_{2,3} = c_{2,3} - u_2 - v_3 = 7 - 11 - 0 = -4$

$d_{3,1} = c_{3,1} - u_3 - v_1 = 17 - 12 - 4 = 1$

$d_{3,F} = c_{3,F} - u_3 - v_F = 0 - 12 + 11 = -1$

$d_{4,2} = c_{4,2} - u_4 - v_2 = 11 - 16 + 5 = 0$

$d_{4,F} = c_{4,F} - u_4 - v_F = 0 - 16 + 11 = -5$

$d_{5,1} = c_{5,1} - u_5 - v_1 = 15 - 6 - 4 = 5$

$d_{5,2} = c_{5,2} - u_5 - v_2 = 15 - 6 + 5 = 14$

$d_{5,F} = c_{5,F} - u_5 - v_F = 0 - 6 + 11 = 5$

Najnegativniji koeficijent je $d_{2,1} = -5$. Ciklus pri određivanju $d_{2,1}$ glasi: $x_{2,1} \rightarrow x_{2,F} \rightarrow x_{1,F} \rightarrow x_{1,2} \rightarrow x_{3,2} \rightarrow x_{3,3} \rightarrow x_{4,3} \rightarrow x_{4,1} \rightarrow x_{2,1}$.

Najveća moguća promjena transporta t_{max} je jednaka najmanjoj od vrijednosti koje se nalaze u poljima koja se umanjuju, odnosno $t_{max} = \min\{49, 13, 10, 30\} = 10$. Nove vrijednosti transporta u poljima u

kojima dolazi do promjene iznosit će: $x_{2,1} = 10$, $x_{2,F} = 49 - 10 = 39$, $x_{1,F} = 29 + 10 = 39$, $x_{1,2} = 13 - 10 = 3$, $x_{3,2} = 26 + 10 = 36$, $x_{3,3} = 10 - 10 = 0$, $x_{4,3} = 7 + 10 = 17$ i $x_{4,1} = 30 - 10 = 20$.
Novo dopustivo rješenje je prikazano u sljedećoj tabeli:

Napomena:
Budući da sam imala problema sa dijagonalama, crvenom bojom je označeno polje u kojem bi trebao stajati samo broj u donjoj polovici, npr u ovoj tabeli ispod, to je isto kao da u polju piše samo 12.

	P_1	P_2	P_3	PF	ui
S_1	14	3 / 6	18	39 / 0	
S_2	10 / 10	5	7	39 / 0	
S_3	17	36 / 7	0 / 12	0	
S_4	20 / 20	11	17 / 16	0	
S_5	15	15	36 / 6	0	
vi					

Na nulu postavljamo onu dualnu promjenjivu koja odgovara redu i koloni s najviše nenultih transporta. U mom slučaju biram da to je P_3, pa stavljam da je $v_3 = 0$. Dalje sam posmatrala polja u tabeli u kojima se vrši transport i računala ono što se može izračunati. Budući da mora biti: $u_4 + v_3 = 16$ imam da je $u_4 = 16$, $u_5 + v_3 = 6$ imam da je $u_5 = 6$. Sada mogu iskoristiti da je $u_4 + v_1 = 20$, te dobijem da je $v_1 = 4$. Zatim, mogu iskoristiti da je $u_2 + v_1 = 10$, te dobijem da je $u_2 = 6$. Zatim, mogu iskoristiti da je $v_F + u_2 = 0$, te dobijem da je $v_F = -6$. Mogu iskoristiti i da je $u_1 + v_F = 0$, te dobijem da je $u_1 = 6$. Također mogu iskoristiti da je $u_1 + v_2 = 6$, te dobijem da je $v_2 = 0$. I na kraju mogu iskoristiti da je $u_3 + v_2 = 7$, te dobijem da je $u_3 = 7$. Na kraju postupka tabela izgleda ovako:

	P_1	P_2	P_3	PF	ui
S_1	14	3 / 6	18	39 / 0	6
S_2	10 / 10	5	7	39 / 0	6
S_3	17	36 / 7	0 / 12	0	7
S_4	20 / 20	11	17 / 16	0	16
S_5	15	15	36 / 6	0	6
vi	4	0	0	-6	

Nakon što se odrede osnovne dualne promjenjive relativni koeficijenti troškova se određuju pomoću formule:

$d_{i,j} = c_{i,j} - u_i - v_j$

Dakle, sada imam:

$d_{1,1} = c_{1,1} - u_1 - v_1 = 14 - 6 - 4 = 4$

$d_{1,3} = c_{1,3} - u_1 - v_3 = 18 - 6 + 0 = 12$

$d_{2,2} = c_{2,2} - u_2 - v_2 = 5 - 6 + 0 = -1$

$d_{2,3} = c_{2,3} - u_2 - v_3 = 7 - 6 - 0 = 1$

$d_{3,1} = c_{3,1} - u_3 - v_1 = 17 - 7 - 4 = 6$

$d_{3,3} = c_{3,3} - u_3 - v_3 = 12 - 7 - 0 = 5$

$d_{3,F} = c_{3,F} - u_3 - v_F = 0 - 7 + 6 = -1$

$d_{4,2} = c_{4,2} - u_4 - v_2 = 11 - 16 + 0 = -5$

$d_{4,F} = c_{4,F} - u_4 - v_F = 0 - 16 + 6 = -10$

$d_{5,1} = c_{5,1} - u_5 - v_1 = 15 - 6 - 4 = 5$
$d_{5,2} = c_{5,2} - u_5 - v_2 = 15 - 6 - 0 = 9$
$d_{5,F} = c_{5,F} - u_5 - v_F = 0 - 6 + 6 = 0$

Najnegativniji koeficijent je $d_{4,F} = -10$. Ciklus pri određivanju $d_{4,F}$ glasi:
$X_{4,F} \rightarrow x_{4,1} \rightarrow x_{2,1} \rightarrow x_{2,F} \rightarrow x_{4,F}$
Najveća moguća promjena transporta t_{max} je jednaka najmanjoj od vrijednosti koje se nalaze u poljima koja se umanjuju, odnosno $t_{max} = \min\{20, 39\} = 20$. Nove vrijednosti transporta u poljima u kojima dolazi do promjene iznosit će: $x_{4,F} = 20$, $x_{4,1} = 20 - 20 = 0$, $x_{2,1} = 10 + 20 = 30$, $x_{2,F} = 39 - 20 = 19$.
Novo dopustivo rješenje je prikazano u sljedećoj tabeli:

	P_1	P_2	P_3	PF	ui
S_1	14	3 / 6	18	39 / 0	
S_2	30 / 10	5	7	19 / 0	
S_3	17	36 / 7	0 / 12	0	
S_4	0 / 20	11	17 / 16	20 / 0	
S_5	15	15	36 / 6	0	
vi					

Na nulu postavljamo onu dualnu promjenjivu koja odgovara redu i koloni s najviše nenultih transporta. U mom slučaju to je P_F, pa stavljam da je $v_F = 0$. Dalje sam posmatrala polja u tabeli u kojima se vrši transport i računala ono što se može izračunati. Budući da mora biti: $u_4 + v_F = 0$ imam da je $u_4 = 0$, $u_2 + v_F = 0$ imam da je $u_2 = 0$, $u_1 + v_F = 0$ imam da je $u_1 = 0$. Sada mogu iskoristiti da je $u_2 + v_1 = 10$, te dobijem da je $v_1 = 10$. Zatim, mogu iskoristiti da je $u_1 + v_2 = 6$, te dobijem da je $v_2 = 6$. Zatim, mogu iskoristiti da je $v_2 + u_3 = 7$, te dobijem da je $u_3 = 1$. Mogu iskoristiti i da je $u_4 + v_3 = 16$, te dobijem da je $v_3 = 16$. Također mogu iskoristiti da je $u_5 + v_3 = 6$, te dobijem da je $u_5 = -10$. Na kraju postupka tabela izgleda ovako:

	P_1	P_2	P_3	PF	ui
S_1	14	3 / 6	18	39 / 0	0
S_2	30 / 10	5	7	19 / 0	0
S_3	17	36 / 7	0 / 12	0	1
S_4	0 / 20	11	17 / 16	20 / 0	0
S_5	15	15	36 / 6	0	-10
vi	10	6	16	0	

Nakon što se odrede osnovne dualne promjenjive relativni koeficijenti troškova se određuju pomoću formule:

$d_{i,j} = c_{i,j} - u_i - v_j$

Dakle, sada imam:

$d_{1,1} = c_{1,1} - u_1 - v_1 = 14 - 0 - 10 = 4$

$d_{1,3} = c_{1,3} - u_1 - v_3 = 18 - 0 - 6 = 12$

$d_{2,2} = c_{2,2} - u_2 - v_2 = 5 - 0 - 6 = -1$

$d_{2,3} = c_{2,3} - u_2 - v_3 = 7 - 0 - 16 = -9$

$d_{3,1} = c_{3,1} - u_3 - v_1 = 17 - 1 - 10 = 6$

$d_{3,3} = c_{3,3} - u_3 - v_3 = 12 - 1 - 16 = -5$

$d_{3,F} = c_{3,F} - u_3 - v_F = 0 - 1 - 0 = -1$

$d_{4,1} = c_{4,1} - u_4 - v_1 = 20 - 0 - 10 = 10$

$d_{4,2} = c_{4,2} - u_4 - v_2 = 11 - 0 - 6 = 5$

$d_{5,1} = c_{5,1} - u_5 - v_1 = 15 + 10 - 10 = 15$

$d_{5,2} = c_{5,2} - u_5 - v_2 = 15 + 10 - 6 = 19$

$d_{5,F} = c_{5,F} - u_5 - v_F = 0 + 10 - 0 = 10$

Najnegativniji koeficijent je $d_{2,3} = -9$. Ciklus pri određivanju $d_{2,3}$ glasi:

$x_{2,3} \rightarrow x_{2,F} \rightarrow x_{4,F} \rightarrow x_{4,3} \rightarrow x_{2,3}$

Najveća moguća promjena transporta t_{max} je jednaka najmanjoj od vrijednosti koje se nalaze u poljima koja se umanjuju, odnosno t_{max} = {19 17} = 17. Nove vrijednosti transporta u poljima u kojima dolazi do promjene iznosit će: $x_{2,3} = 17$, $x_{2,F} = 19 - 17 = 2$, $x_{4,F} = 20 + 17 = 37$, $x_{4,3} = 17 - 17 = 0$.

Novo dopustivo rješenje je prikazano u sljedećoj tabeli:

	P_1	P_2	P_3	PF	ui
S_1	14	3 / 6	18	39 / 0	
S_2	30 / 10	5	17 / 7	2 / 0	
S_3	17	36 / 7	0 / 12	0	
S_4	0 / 20	11	0 / 16	37 / 0	
S_5	15	15	36 / 6	0	
vi					

Na nulu postavljamo onu dualnu promjenjivu koja odgovara redu i koloni s najviše nenultih transporta. U mom slučaju to je P_F, pa stavljam da je $v_F = 0$. Dalje sam posmatrala polja u tabeli u kojima se vrši transport i računala ono što se može izračunati. Budući da mora biti: $u_4 + v_F = 0$ imam da je $u_4 = 0$, $u_2 + v_F = 0$ imam da je $u_2 = 0$, $u_1 + v_F = 0$ imam da je $u_1 = 0$. Sada mogu iskoristiti da je $u_2 + v_1 = 10$, te dobijem da je $v_1 = 10$. Zatim, mogu iskoristiti da je $u_1 + v_2 = 6$, te dobijem da je $v_2 = 6$. Zatim, mogu iskoristiti da je $v_2 + u_3 = 7$, te dobijem da je $u_3 = 1$. Mogu iskoristiti i da je $u_2 + v_3 = 7$, te dobijem da je $v_3 = 7$. Također mogu iskoristiti da je $u_5 + v_3 = 6$, te dobijem da je $u_5 = -1$. Na kraju postupka tabela izgleda ovako:

	P_1	P_2	P_3	PF	ui
S_1	14	3 / 6	18	39 / 0	0
S_2	30 / 10	5	17 / 7	2 / 0	0
S_3	17	36 / 7	0 / 12	0	1
S_4	0 / 20	11	0 / 16	37 / 0	0
S_5	15	15	36 / 6	0	-1
vi	10	6	7	0	

Nakon što se odrede osnovne dualne promjenjive relativni koeficijenti troškova se određuju pomoću formule:

$d_{i,j} = c_{i,j} - u_i - v_j$

Dakle, sada imam:

$d_{1,1} = c_{1,1} - u_1 - v_1 = 14 - 0 - 10 = 4$

$d_{1,3} = c_{1,3} - u_1 - v_3 = 18 - 0 - 7 = 11$

$d_{2,2} = c_{2,2} - u_2 - v_2 = 5 - 0 - 6 = -1$

$d_{3,1} = c_{3,1} - u_3 - v_1 = 17 - 1 - 10 = 6$

$d_{3,3} = c_{3,3} - u_3 - v_3 = 12 - 1 - 7 = 4$

$d_{3,F} = c_{3,F} - u_3 - v_F = 0 - 1 - 0 = -1$

$d_{4,1} = c_{4,1} - u_4 - v_1 = 20 - 0 - 10 = 10$

$d_{4,2} = c_{4,2} - u_4 - v_2 = 11 - 0 - 6 = 5$

$d_{4,3} = c_{4,3} - u_4 - v_3 = 16 - 0 - 7 = 9$

$d_{5,1} = c_{5,1} - u_5 - v_1 = 15 + 1 - 10 = 6$

$d_{5,2} = c_{5,2} - u_5 - v_2 = 15 + 1 - 6 = 10$

$d_{5,F} = c_{5,F} - u_5 - v_F = 0 - 1 - 0 = -1$

Najnegativniji koeficijent je $d_{2,2} = -1$. Ciklus pri određivanju $d_{2,2}$ glasi:

$x_{2,2} \rightarrow x_{2,F} \rightarrow x_{1,F} \rightarrow x_{1,2} \rightarrow x_{2,2}$

Najveća moguća promjena transporta t_{max} je jednaka najmanjoj od vrijednosti koje se nalaze u poljima koja se umanjuju, odnosno t_{max} = {2,3} = 2. Nove vrijednosti transporta u poljima u kojima dolazi do promjene iznosit će: $x_{2,2} = 2$, $x_{2,F} = 2 - 2 = 0$, $x_{1,F} = 39 + 2 = 41$, $x_{1,2} = 3 - 2 = 1$.

	P_1	P_2	P_3	PF	ui
S_1	14	1 / 6	18	41 / 0	
S_2	30 / 10	2 / 5	17 / 7	0 / 0	
S_3	17	36 / 7	0 / 12	0	
S_4	0 / 20	11	0 / 16	37 / 0	
S_5	15	15	36 / 6	0	
vi					

Na nulu postavljamo onu dualnu promjenjivu koja odgovara redu i koloni s najviše nenultih transporta. U mom slučaju to je P_2, pa stavljam da je $v_2 = 0$. Dalje sam posmatrala polja u tabeli u kojima se vrši transport i računala ono što se može izračunati. Budući da mora biti: $u_3 + v_2 = 7$ imam da je $u_3 = 7$, $u_2 + v_2 = 5$ imam da je $u_2 = 5$, $u_1 + v_2 = 6$ imam da je $u_1 = 6$. Sada mogu iskoristiti da je $u_2 + v_1 = 10$, te dobijem da je $v_1 = 5$. Zatim, mogu iskoristiti da je $u_1 + v_F = 0$, te dobijem da je $v_F = -6$. Zatim, mogu iskoristiti da je $v_F + u_4 = 0$, te dobijem da je $u_4 = 6$. Mogu iskoristiti i da je $u_2 + v_3 = 7$, te dobijem da je $v_3 = 2$. Također mogu iskoristiti da je $u_5 + v_3 = 6$, te dobijem da je $u_5 = 4$. Na kraju postupka tabela izgleda ovako:

	P_1	P_2	P_3	PF	ui
S_1	14	1 / 6	18	41 / 0	6
S_2	30 / 10	2 / 5	17 / 7	0 / 0	5
S_3	17	36 / 7	0 / 12	0	7
S_4	0 / 20	11	0 / 16	37 / 0	6
S_5	15	15	36 / 6	0	4
vi	5	0	2	-6	

Nakon što se odrede osnovne dualne promjenjive relativni koeficijenti troškova se određuju pomoću formule:

$d_{i,j} = c_{i,j} - u_i - v_j$

Dakle, sada imam:

$d_{1,1} = c_{1,1} - u_1 - v_1 = 14 - 6 - 5 = 3$

$d_{1,3} = c_{1,3} - u_1 - v_3 = 18 - 6 - 2 = 10$

$d_{2,F} = c_{2,F} - u_2 - v_F = 0 - 5 + 6 = 1$

$d_{3,1} = c_{3,1} - u_3 - v_1 = 17 - 7 - 5 = 5$

$d_{3,3} = c_{3,3} - u_3 - v_3 = 12 - 7 - 2 = 3$

$d_{3,F} = c_{3,F} - u_3 - v_F = 0 - 7 + 6 = -1$

$d_{4,1} = c_{4,1} - u_4 - v_1 = 20 - 6 - 5 = 9$

$d_{4,2} = c_{4,2} - u_4 - v_2 = 11 - 6 - 0 = 5$

$d_{4,3} = c_{4,3} - u_4 - v_3 = 16 - 6 - 2 = 8$

$d_{5,1} = c_{5,1} - u_5 - v_1 = 15 - 4 - 5 = 6$

$d_{5,2} = c_{5,2} - u_5 - v_2 = 15 - 4 = 11$

$d_{5,F} = c_{5,F} - u_5 - v_F = 0 - 4 + 6 = 2$

Najnegativniji koeficijent je $d_{3,F} = -1$. Ciklus pri određivanju $d_{2,2}$ glasi:

$X_{3,F} \rightarrow x_{3,2} \rightarrow x_{1,2} \rightarrow x_{1,F} \rightarrow x_{3,F}$

Najveća moguća promjena transporta t_{max} je jednaka najmanjoj od vrijednosti koje se nalaze u poljima koja se umanjuju, odnosno $t_{max} = \{36, 41\} = 36$. Nove vrijednosti transporta u poljima u kojima dolazi do promjene iznosit će: $x_{3,F} = 36$, $x_{3,2} = 36 - 36 = 0$, $x_{1,2} = 1 + 36 = 37$, $x_{1,F} = 41 - 36 = 5$.

	P_1	P_2	P_3	PF	ui
S_1	14	37 / 6	18	5 / 0	
S_2	30 / 10	2 / 5	17 / 7	0 / 0	
S_3	17	0 / 7	0 / 12	36 / 0	
S_4	0 / 20	11	0 / 16	37 / 0	
S_5	15	15	36 / 6	0	
vi					

Na nulu postavljamo onu dualnu promjenjivu koja odgovara redu i koloni s najviše nenultih transporta. U mom slučaju to je P_F, pa stavljam da je $v_F = 0$. Dalje sam posmatrala polja u tabeli u kojima se vrši transport i računala ono što se može izračunati. Budući da mora biti: $u_1 + v_F = 0$ imam da je $u_1 = 0$, $u_3 + v_F = 0$ imam da je $u_3 = 0$, $u_4 + v_F = 0$ imam da je $u_4 = 0$. Sada mogu iskoristiti da je $u_1 + v_2 = 6$, te dobijem da je $v_2 = 6$. Zatim, mogu iskoristiti da je $u_2 + v_2 = 5$, te dobijem da je $u_2 = -1$. Zatim, mogu iskoristiti da je $v_1 + u_2 = 10$, te dobijem da je $v_1 = 11$. Mogu iskoristiti i da je $u_2 + v_3 = 7$, te dobijem da je $v_3 = 8$. Također mogu iskoristiti da je $u_5 + v_3 = 6$, te dobijem da je $u_5 = -2$. Na kraju postupka tabela izgleda ovako:

	P_1	P_2	P_3	PF	ui
S_1	14	37 / 6	18	5 / 0	0
S_2	30 / 10	2 / 5	17 / 7	0 / 0	-1
S_3	17	0 / 7	0 / 12	36 / 0	0
S_4	0 / 20	11	0 / 16	37 / 0	0
S_5	15	15	36 / 6	0	-2
vi	11	6	8	0	

Nakon što se odrede osnovne dualne promjenjive relativni koeficijenti troškova se određuju pomoću formule:

$d_{i,j} = c_{i,j} - u_i - v_j$

Dakle, sada imam:

$d_{1,1} = c_{1,1} - u_1 - v_1 = 14 - 0 - 11 = 3$

$d_{1,3} = c_{1,3} - u_1 - v_3 = 18 - 0 - 8 = 10$

$d_{2,F} = c_{2,F} - u_2 - v_F = 0 + 1 - 0 = 1$

$d_{3,1} = c_{3,1} - u_3 - v_1 = 17 - 0 - 11 = 6$

$d_{3,2} = c_{3,2} - u_3 - v_2 = 7 - 0 - 6 = 1$

$d_{3,3} = c_{3,3} - u_3 - v_3 = 12 - 0 - 8 = 4$

$d_{3,F} = c_{3,F} - u_3 - v_F = 0 - 7 + 6 = -1$

$d_{4,1} = c_{4,1} - u_4 - v_1 = 20 - 0 - 11 = 9$

$d_{4,2} = c_{4,2} - u_4 - v_2 = 11 - 0 - 6 = 5$

$d_{4,3} = c_{4,3} - u_4 - v_3 = 16 - 0 - 8 = 8$

$d_{5,1} = c_{5,1} - u_5 - v_1 = 15 + 2 - 11 = 6$

$d_{5,2} = c_{5,2} - u_5 - v_2 = 15 + 2 - 6 = 11$

$d_{5,F} = c_{5,F} - u_5 - v_F = 0 + 2 - 0 = 2$

Budući da su svi $d_{i,j}$ rješenje je optimalno.

U nastavku je prikazana tabela bez dualnih vrijednosti:

	P_1	P_2	P_3	PF
S_1	14	37 6	18	5 0
S_2	30 10	2 5	17 7	0
S_3	17	7	12	36 0
S_4	20	11	16	37 0
S_5	15	15	36 6	0

Potrebe svih prodavnica su zadovoljene, te promjenjive kojima nije dodijeljena nikakva vrijednost u ovom početnom rješenju imaju vrijednost 0. Dakle, početno bazno rješenje glasi:

$x_{1,1} = 0$	$x_{2,1} = 30$	$x_{3,1} = 0$	$x_{4,1} = 0$	$x_{5,1} = 0$
$x_{1,2} = 37$	$x_{2,2} = 2$	$x_{3,2} = 0$	$x_{4,2} = 0$	$x_{5,2} = 0$
$x_{1,3} = 0$	$x_{2,3} = 17$	$x_{3,3} = 0$	$x_{4,3} = 0$	$x_{5,3} = 36$
$x_{1,F} = 5$	$x_{2,F} = 0$	$x_{3,F} = 36$	$x_{4,F} = 37$	$x_{5,F} = 0$

Odnosno:
Prodavnica 1 dobiva 30 količinskih jedinica iz skladišta 2.
Prodavnica 2 dobiva 37 količinskih jedinica iz skladišta 1 i 2 količinskih jedinica iz skladišta 2.
Prodavnica 3 dobiva 17 količinskih jedinica iz skladišta 2 i 36 količinskih jedinica iz skladišta 5.
Što se tiče fiktivne prodavnice, mogu zaključiti da će u skladištu 1 ostati 5 količinskih jedinica, a u skladištu 4 će ostati 37 količinskih jedinica.

Troškovi transporta iznose:

$$Z = 6 \cdot 37 + 10 \cdot 30 + 2 \cdot 5 + 7 \cdot 17 + 6 \cdot 36 = 867.$$

Zadatak 2 [1.8 poena]

Neka fabrika je nabavila 5 različitih mašina M_1, M_2, M_3, M_4 i M_5 za proizvodnju pojedinih dijelova jednog proizvoda. Pošto jednom mašinom može da jednovremeno rukuje samo jedan radnik, potrebno je zaposliti 5 radnika. Od prijavljenih 5 radnika R_1, R_2, R_3, R_4 i R_5, svi su zadovoljili opće uvjete konkursa, pa je izvršena provjera njihove stručne sposobnosti. Za proizvodnju svakog od dijelova proizvoda na pojedinačnim mašinama, radnicima je bilo potrebno vrijeme prikazano u sljedećoj tabeli (vrijeme je izraženo u minutama):

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	15	34	15	14	20
R2	15	25	22	31	30
R3	24	27	26	31	26
R4	28	13	19	16	27
R5	6	30	7	30	22

Vaš zadatak je da primjenom mađarskog algoritma raspoređivanja pronađete optimalni raspored radnika na mašine koji će garantirati minimalni ukupni utrošak vremena na mašinama potreban za proizvodnju jednog proizvoda. Rješenje nađite na više različitih načina:

a. Redukcijom matrice C prvo po redovima, a zatim po kolonama prije ulaska u glavni ciklus algoritma; [0.3 poena]

   U prvom koraku, od svih članova svakog reda oduzima se vrijednost najmanjeg elementa tog reda. Najmanji elementi redova R1-R5 su resprektivno: 14, 15, 24, 13, 6. Nakon prvog koraka dobila sam sljedeću tablicu:

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	1	20	1	0	6
R2	0	10	7	16	15
R3	0	3	2	7	2
R4	15	0	6	3	14
R5	0	24	1	24	16

U drugom koraku, od svih članova svake kolone oduzima se vrijednost najmanjeg elementa te kolone. Najmanji elementi kolona M1-M5 su resprektivno: 0, 0, 1, 0, 2. Nakon drugog koraka dobila sam sljedeću tablicu:

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	1	20	0	0	4
R2	0	10	6	16	13
R3	0	3	1	7	0
R4	15	0	5	3	12
R5	0	24	0	24	14

Sada je potrebno razvrstati sve nule u tablici na zavisne i nezavisne. Koristeći postupak sa strane 259 dobila sam sljedeće (■ → nezavisne, Ø → zavisne).

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	1	20	Ø	■	4
R2	■	10	6	16	13
R3	Ø	3	1	7	■
R4	15	■	5	3	12
R5	Ø	24	■	24	14

Budući da odmah na početku imam 5 nezavisnih nula (n = k), pronađeno rješenje je i optimalno rješenje. Optimalan raspored radnika na mašine, kao i trošak koji sam pročitala iz početne tabele, prikazan je sljedećom tabelom:

Radnik	Mašina	Trošak
R1	M4	14
R2	M1	15
R3	M5	26
R4	M2	13
R5	M3	7
	Ukupno	75

b. Redukcijom matrice C prvo po kolonama, a zatim po redovima prije ulaska u glavni ciklus algoritma; [0.3 poena]

U prvom koraku, od svih članova svake kolone oduzima se vrijednost najmanjeg elementa te kolone. Najmanji elementi kolona M1-M5 su resprektivno: 6, 13, 7, 14, 20. Nakon prvog koraka dobila sam sljedeću tablicu:

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	9	21	8	0	0
R2	9	12	15	17	10
R3	18	14	19	17	6
R4	22	0	12	2	7
R5	0	17	0	16	2

U drugom koraku, od svih članova svakog reda oduzima se vrijednost najmanjeg elementa tog reda. Najmanji elementi redova R1-R5 su resprektivno: 0, 9, 6, 0, 0. Nakon drugog koraka dobila sam sljedeću tablicu:

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	9	21	8	0	0
R2	0	3	6	8	1
R3	12	8	13	11	0
R4	22	0	12	2	7
R5	0	17	0	16	2

Sada je potrebno razvrstati sve nule u tablici na zavisne i nezavisne. Koristeći postupak sa strane 259 dobila sam sljedeće (■ → nezavisne, Ø → zavisne).

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	9	21	8	■	Ø
R2	■	3	6	8	1
R3	12	8	13	11	■
R4	22	■	12	2	7
R5	Ø	17	■	16	2

Budući da odmah na početku imam 5 nezavisnih nula, pronađeno rješenje je i optimalno rješenje. Optimalan raspored radnika na mašine, kao i trošak koji sam pročitala iz početne tabele, prikazan je sljedećom tabelom:

Radnik	Mašina	Trošak
R1	M4	14
R2	M1	15
R3	M5	26
R4	M2	13
R5	M3	7
	Ukupno	75

U oba podzadatka sam dobila isti rezultat.

c. Redukcijom matrice C samo po redovima (bez redukcije po kolonama) prije ulaska u glavni ciklus algoritma (ovo će kasnije tražiti više iteracija nego što je uobičajeno); [0.4 poena]

   U prvom koraku, od svih članova svakog reda oduzima se vrijednost najmanjeg elementa tog reda. Najmanji elementi redova R1-R5 su resprektivno: 14, 15, 24, 13, 6. Nakon prvog koraka dobila sam sljedeću tablicu:

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	1	20	1	0	6
R2	0	10	7	16	15
R3	0	3	2	7	2
R4	15	0	6	3	14
R5	0	24	1	24	16

Sada je potrebno razvrstati sve nule u tablici na zavisne i nezavisne. Koristeći postupak sa strane 259 dobila sam sljedeće (■ → nezavisne, Ø → zavisne).

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	1	20	1	■	6
R2	■	10	7	16	15
R3	Ø	3	2	7	2
R4	15	■	6	3	14
R5	Ø	24	1	24	16

Budući da mi nedostaju dvije nezavisne nule, optimalno rješenje nije nađeno, te moram nastaviti postupak. Potrebno je precrtati sve nule u tablici sa 3 linije. To sam uradila na sljedeći način:

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	1	20	1	■	6
R2	■	10	7	16	15
R3	Ø	3	2	7	2
R4	15	■	6	3	14
R5	Ø	24	1	24	16

Najmanji element u tablici koji je ostao neprecrtan nakon koraka 4 jeste 1. Sada je njega potrebno oduzeti od svih elemenata tablice koji su ostali neprecrtani, a dodati ga na sve elemente tablice koji su precrtani i horizontalnom i vertikalnom linijom. Dobila sam sljedeće:

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	2	20	1	0	6
R2	0	9	6	15	14
R3	0	2	1	6	1
R4	16	0	6	3	14
R5	0	23	0	23	15

Sada se ponovo vraćam na korak u kojem je potrebno razvrstati sve nule u tablici na zavisne i nezavisne. Dobila sam sljedeće (■ → nezavisne, Ø → zavisne).

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	2	20	1	■	6
R2	■	9	6	15	14
R3	Ø	2	1	6	1
R4	16	■	6	3	14
R5	Ø	23	■	23	15

Budući da mi nedostaje nezavisna nula, optimalno rješenje nije nađeno, te moram nastaviti postupak. Potrebno je precrtati sve nule u tablici sa 4 linije. To sam uradila na sljedeći način:

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	2	20	1	■	6
R2	■	9	6	15	14
R3	Ø	2	1	6	1
R4	16	■	6	3	14
R5	Ø	23	■	23	15

Najmanji element u tablici koji je ostao neprecrtan nakon koraka 4 jeste 1. Sada je njega potrebno oduzeti od svih elemenata tablice koji su ostali neprecrtani, a dodati ga na sve elemente tablice koji su precrtani i horizontalnom i vertikalnom linijom. Dobila sam sljedeće:

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	3	20	1	**0**	6
R2	**0**	8	5	14	13
R3	**0**	1	0	5	0
R4	17	**0**	6	3	14
R5	**1**	23	**0**	23	15

Sada se ponovo vraćam na korak u kojem je potrebno razvrstati sve nule u tablici na zavisne i nezavisne. Dobila sam sljedeće (■ → nezavisne, Ø → zavisne).

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	3	20	1	■	6
R2	■	8	5	14	13
R3	Ø	1	Ø	5	■
R4	17	■	6	3	14
R5	**1**	23	■	23	15

Budući da imam 5 nezavisnih nula, pronađeno rješenje je i optimalno rješenje. Optimalan raspored radnika na mašine, kao i trošak koji sam pročitala iz početne tabele, prikazan je sljedećom tabelom:

Radnik	Mašina	Trošak
R1	M4	14
R2	M1	15
R3	M5	26
R4	M2	13
R5	M3	7
	Ukupno	75

Vidimo da sam i u ovom podzadatku dobila isti rezultat.

d. Varijantom mađarskog algoritma prilagođenom za izvedbu za računaru. Ukoliko pri rješavanju na način a) niste dobili optimalno rješenje odmah nakon redukcije, obavite ovaj dio zadatka tako što ćete prvo odrediti dualne promjenljive ui a zatim vj (pandan redukcije prvo po redovima). U suprotnom, ukoliko pri rješavanju na način b) niste dobili optimalno rješenje odmah nakon redukcije, obavite ovaj dio zadatka tako što ćete prvo odrediti dualne promjenljive vj a zatim ui (pandan redukcije prvo po kolonama). Ukoliko ste bili te sreće da ste dobili problem kod kojeg i pod a) i pod b) dobijate optimalno rješenje odmah nakon obavljenih redukcija, obavite ovaj dio zadatka tako što ćete prvo odrediti dualne promjenjive ui, a zatim uzeti da su sve dualne promjenljive vj jednake nuli (pandan redukcije samo po redovima). [0.8 poena]

Kao što se može vidjeti u mom podzadatku a i b, dobila sam optimalno rješenje odmah nakon obavljenih redukcija, te ovaj dio zadatka ću obaviti tako što ću prvo odrediti dualne promjenjive ui, a zatim ću uzeti da su sve dualne promjenjive vj jednake nule.

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	15	34	15	14	20
R2	15	25	22	31	30
R3	24	27	26	31	26
R4	28	13	19	16	27
R5	6	30	7	30	22

Sada imam sljedeće:

$u_1 = \min\{15, 34, 15, 14, 20\} = 14$
$u_2 = \min\{15, 25, 22, 31, 30\} = 15$
$u_3 = \min\{24, 27, 26, 31, 26\} = 24$
$u_4 = \min\{28, 13, 19, 16, 27\} = 13$
$u_5 = \min\{6, 30, 7, 30, 22\} = 6$

$v_1 = 0$
$v_2 = 0$
$v_3 = 0$
$v_4 = 0$
$v_5 = 0$

Sada je potrebno razvrstati sve nule u tablici na zavisne i nezavisne (■ → nezavisne, Ø → zavisne).

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	1	20	1	■	6
R2	■	10	7	16	15
R3	Ø	3	2	7	2
R4	15	■	6	3	14
R5	Ø	24	1	24	16

Kao što vidimo, nedostaju mi dvije nezavisne nule, pa optimalno rješenje nije pronađeno. Prvo ću označiti red koji nema nijednu nezavisnu nulu, a to je red R5. Zatim ću označiti kolonu M1, budući da ona u označenom redu ima zavisnu nulu. I još je potrebno da označim red koji ima nezavisnu nulu u upravo označenoj koloni, a to je u mom slučaju R2.

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	1	20	1	■	6
R2	■	10	7	16	15
R3	Ø	3	2	7	2
R4	15	■	6	3	14
R5	Ø	24	1	24	16

Sada je potrebno da pronađem najmanji element među vrijednostima izravnavajućih dualnih promjenjivih koji pripadaju označenim redovima i neoznačenim kolonama, a to je 1. Sada je potrebno da uvećam dualne promjenjive u_2 i u_5 za 1, a da v_1 umanjim za 1. Nove vrijednosti dualnih promjenjivih su sljedeće:

$u_1 = 14$
$u_2 = 16$
$u_3 = 24$
$u_4 = 13$
$u_5 = 7$

$v_1 = -1$
$v_2 = 0$
$v_3 = 0$
$v_4 = 0$
$v_5 = 0$

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	2	20	1	■	6
R2	■	9	6	15	14
R3	1	3	2	7	2
R4	16	■	6	3	14
R5	Ø	23	0	23	15

Pojavila se nova nula, u presjeku R5 reda i M3 kolone. Nastavak je moguć, budući da se pojavila nova nula.
Označit ću kolonu M3 budući da se u njoj nalazi zavisna nula u redu R5. Kako sam sada označila kolonu koja nema nezavisnih nula, prelazim na korak u kojem je potrebno naći povećavajući put, koji počinje u koloni koju sam upravo označila, a završava u redu kojeg sam prvog označila.
Dobila sam sljedeće:

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	2	20	1	■	6
R2	■	9	6	15	14
R3	1	3	2	7	2
R4	16	■	6	3	14
R5	Ø	23	■	23	15

Sada, označit ću red R3 kao jedini koji nema nezavisnih nula. Već sada nisam u stanju da nastavim dalje sa označavanjem jer red R3 ne sadrži nijednu zavisnu nulu. Tako da je potrebno odmah da pređem na korak 5 opisan u knjizi. Što se tiče tog koraka, nalazim najmanji element među vrijednostima izravnavajućih dualnih promjenjivih u redu R3. To je 1. Jedina dualna promjenjiva koju nakon toga treba promijeniti jeste u_3 koja se treba povećati za 1, te ona sada iznosi 25. Nove vrijednosti dualnih promjenjivih su prikazane u sljedećoj tabeli:

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	2	20	1	■	6
R2	■	9	6	15	14
R3	Ø	2	1	6	1
R4	16	■	6	3	14
R5	Ø	23	■	23	15

Red R3 je sada dobio nulu u koloni M1, koju ću označiti. Slijedi označavanje reda R2 koji u koloni M1 ima nezavisnu nulu.

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	2	20	1	■	6
R2	■	9	6	15	14
R3	Ø	2	1	6	1
R4	16	■	6	3	14
R5	Ø	23	■	23	15

Sada je potrebno da pronađem najmanji element među vrijednostima izravnavajućih dualnih promjenjivih koji pripadaju označenim redovima i neoznačenim kolonama, a to je 1. Sada je potrebno da uvećam dualne promjenjive u_2 i u_3 za 1, a da v_1 umanjim za 1. Nove vrijednosti dualnih promjenjivih su sljedeće:

$u_1 = 14$

$u_2 = 17$

$u_3 = 26$

$u_4 = 13$
$u_5 = 7$

$v_1 = -2$
$v_2 = 0$
$v_3 = 0$
$v_4 = 0$
$v_5 = 0$

Na kraju dobila sam sljedeće:

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	3	20	1	■	6
R2	■	8	5	14	13
R3	Ø	1	Ø	5	■
R4	17	■	6	3	14
R5	1	23	■	23	15

Budući da imam 5 nezavisnih nula, pronađeno rješenje je i optimalno rješenje. Optimalan raspored radnika na mašine, kao i trošak koji sam pročitala iz početne tabele, prikazan je sljedećom tabelom:

Radnik	Mašina	Trošak
R1	M4	14
R2	M1	15
R3	M5	26
R4	M2	13
R5	M3	7
	Ukupno	75

Vidimo da sam i u ovom podzadatku dobila isti rezultat.

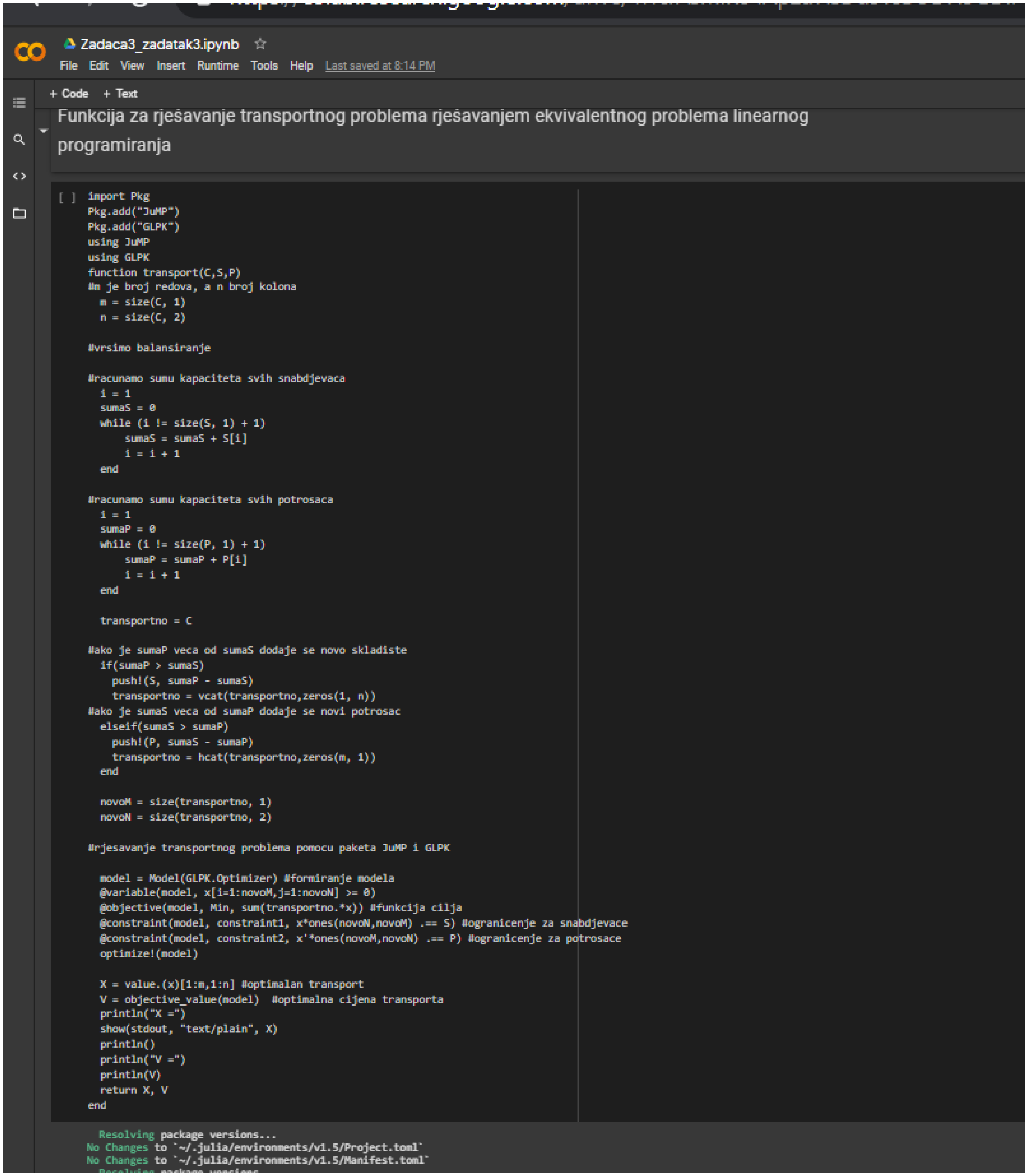
Zadatak 3 [1 poen]

Vaš zadatak je da napravite funkciju za rješavanje transportnog problema rješavanjem ekvivalentnog problema linearnog programiranja pomoću Julia paketa GLPK, JuMP. Sintaksa ove funkcije treba da bude

X,V=transport(C,S,P)

gdje je C matrica jediničnih cijena transporta (ci,j je cijena transporta od i-tog snabdjevača do j-tog potrošača), S je vektor kapaciteta snabdjevača, dok je P vektor kapaciteta potrošača. Kao rezultat, u matrici X treba da se dobije rješenje koje predstavlja optimalan transport (xi,j je optimalna količina transporta od i-tog snabdjevača do j-tog potrošača), dok je V optimalna cijena transporta. Funkcija treba da podržava kako zatvorene (balansirane), tako i otvorene (nebalansirane) transportne probleme (prethodni primjer je otvoreni transportni problem).

Trebate imati na umu da pri rješavanju transportnih problema pomoću paketa JuMP i GLPK, može nastati problem zbog činjenice da podrazumijevano ova funkcija ne koristi Simplex algoritam, nego neki algoritam unutrašnje tačke, koji je brži za probleme velikih dimenzija od Simplex-a. Ovo normalno ne bi trebao da bude problem. Međutim, u slučaju kada rješenje nije jedinstveno, algoritmi vršne tačke mogu kao rezultat dati optimalno rješenje koje nije u vršnoj tački (iako je optimalno), za razliku od Simplex algoritma koji uvijek daje rješenje u vršnoj tački. Pri rješavanju transportnih problema, ovo može dovesti do toga da funkcija optimize! u slučaju kada optimum nije jedinstven da necjelobrojno rješenje iako postoji i cjelobrojno optimalno rješenje. Da bi se ovo izbjeglo, optimizer GLPK treba "natjerati" da radi cjelobrojno programiranje. To se može postići tako da se funkciji variable kao treći parametar pošalje Int. Primjer: @variable(m,x11>=0,Int).



Zadaca3_zadatak3.ipynb

File Edit View Insert Runtime Tools Help Last saved at 8:14 PM

+ Code + Text

Funkcija za rješavanje transportnog problema rješavanjem ekvivalentnog problema linearnog programiranja

```
import Pkg
Pkg.add("JuMP")
Pkg.add("GLPK")
using JuMP
using GLPK
function transport(C,S,P)
#m je broj redova, a n broj kolona
  m = size(C, 1)
  n = size(C, 2)

#vrsimo balansiranje

#racunamo sumu kapaciteta svih snabdjevaca
  i = 1
  sumaS = 0
  while (i != size(S, 1) + 1)
      sumaS = sumaS + S[i]
      i = i + 1
  end

#racunamo sumu kapaciteta svih potrosaca
  i = 1
  sumaP = 0
  while (i != size(P, 1) + 1)
      sumaP = sumaP + P[i]
      i = i + 1
  end

  transportno = C

#ako je sumaP veca od sumaS dodaje se novo skladiste
  if(sumaP > sumaS)
    push!(S, sumaP - sumaS)
    transportno = vcat(transportno,zeros(1, n))
#ako je sumaS veca od sumaP dodaje se novi potrosac
  elseif(sumaS > sumaP)
    push!(P, sumaS - sumaP)
    transportno = hcat(transportno,zeros(m, 1))
  end

  novoM = size(transportno, 1)
  novoN = size(transportno, 2)

#rjesavanje transportnog problema pomocu paketa JuMP i GLPK

  model = Model(GLPK.Optimizer) #formiranje modela
  @variable(model, x[i=1:novoM,j=1:novoN] >= 0)
  @objective(model, Min, sum(transportno.*x)) #funkcija cilja
  @constraint(model, constraint1, x*ones(novoN,novoM) .== S) #ogranicenje za snabdjevace
  @constraint(model, constraint2, x'*ones(novoM,novoN) .== P) #ogranicenje za potrosace
  optimize!(model)

  X = value.(x)[1:m,1:n] #optimalan transport
  V = objective_value(model)  #optimalna cijena transporta
  println("X =")
  show(stdout, "text/plain", X)
  println()
  println("V =")
  println(V)
  return X, V
end
```

```
  Resolving package versions...
No Changes to `~/.julia/environments/v1.5/Project.toml`
No Changes to `~/.julia/environments/v1.5/Manifest.toml`
```

Zadatak 4 [0.4 poena]

Napišite kratki izvještaj koji opisuje kako ste implementirali funkciju transport iz prethodnog zadatka, kao i rezultate testiranja ove funkcije na bar tri transportna problema za koje znate rješenje. Izvještaj treba biti u .pdf formatu.

Testiranje funkcije

```
C=[3 2 10; 5 8 12; 4 10 5; 7 15 10]
S=[20, 50, 60, 10]
P=[20, 40, 30]
transport(C,S,P)
```

```
X =
4×3 Array{Float64,2}:
  0.0  20.0   0.0
  0.0  20.0   0.0
 20.0   0.0  30.0
  0.0   0.0   0.0
V =
430.0
([0.0 20.0 0.0; 0.0 20.0 0.0; 20.0 0.0 30.0; 0.0 0.0 0.0], 430.0)
```

```
C1=[8 18 16 9 10; 10 12 10 3 15; 12 15 7 16 4]
S1=[90,50,80]
P1=[30,50,40,70,30]
transport(C1,S1,P1)
```

```
X =
3×5 Array{Float64,2}:
 30.0  40.0   0.0  20.0   0.0
  0.0   0.0   0.0  50.0   0.0
  0.0  10.0  40.0   0.0  30.0
V =
1840.0
([30.0 40.0 … 20.0 0.0; 0.0 0.0 … 50.0 0.0; 0.0 10.0 … 0.0 30.0], 1840.0)
```

```
C2=[10 12 0;8 4 3;6 9 4;7 8 5]
S2=[20, 30, 20, 10]
P2=[40, 10, 30]
transport(C2,S2,P2)
```

```
X =
4×3 Array{Float64,2}:
  0.0   0.0  20.0
 10.0  10.0  10.0
 20.0   0.0   0.0
 10.0   0.0   0.0
V =
340.0
([0.0 0.0 20.0; 10.0 10.0 10.0; 20.0 0.0 0.0; 10.0 0.0 0.0], 340.0)
```

Što se tiče objašnjenja, ono je prikazano detaljno kroz komentare u prethodnom zadatku.