Algoritmos e Estruturas de Dados

Marcelo Lobosco

DCC/UFJF

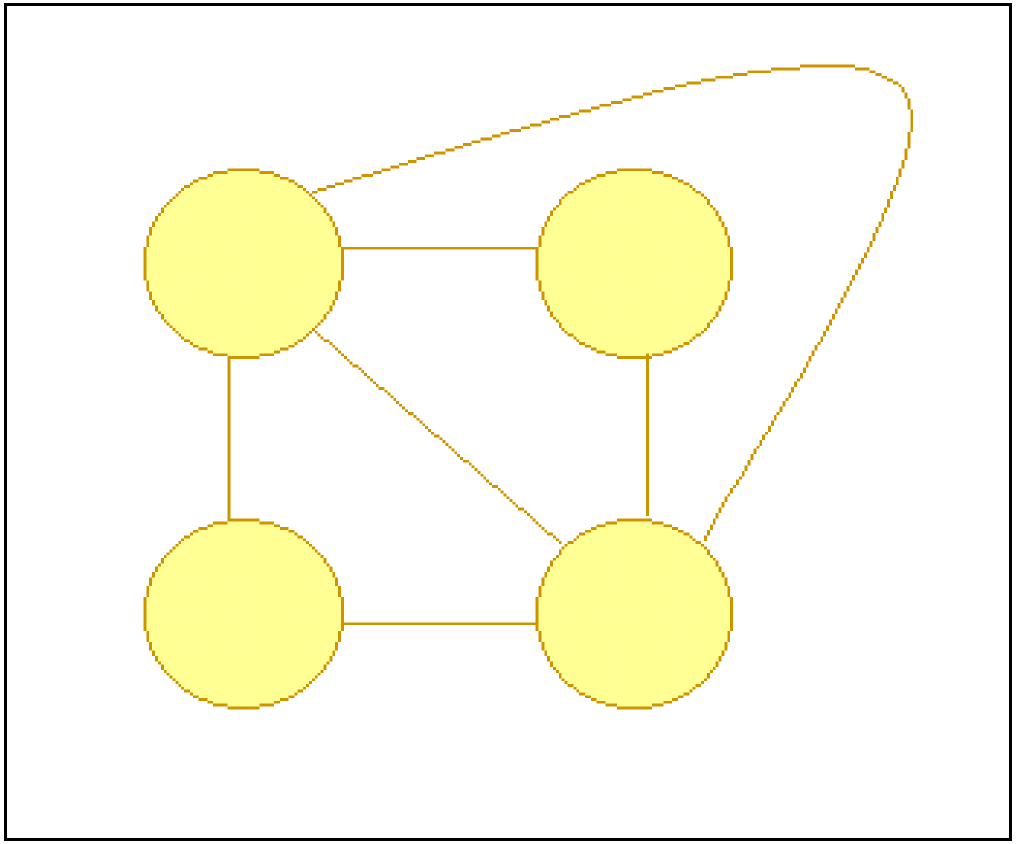
Introdução à Teoria dos Grafos

Segunda Parte - Aula 01

Primeiros Conceitos

- Grafo G = (N,A)
  - N = {1, 2, 3, ..., n}
    - Conjunto dos vértices ou nós
  - A = { (i,j) / i,j ∈ N}
    - Conjunto das arestas
- Grafo pode ser visualizado através de representação geométrica
  - Vértices correspondem a pontos distintos do plano
  - Linhas associadas a cada aresta (v,w), unindo os pontos correspondentes v e w

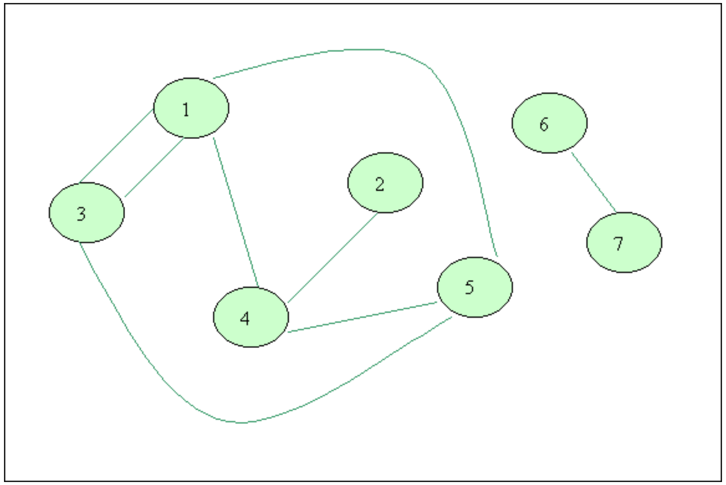
Primeiros Conceitos



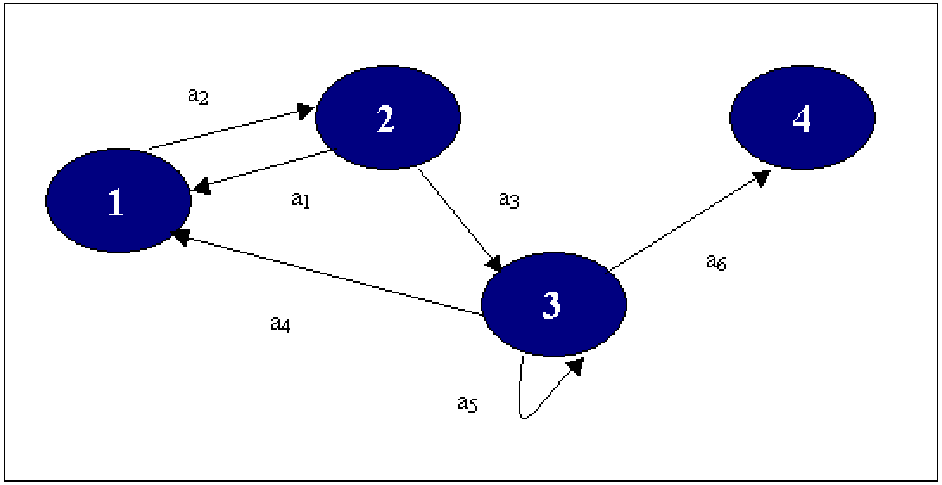
Primeiros Conceitos

- Tipos de Grafos
  - Dado um grafo G = G (N,A)
    - Simétrico: quando toda aresta e_{ij} de A independe do sentido, isto é, pode ser tanto no sentido $i \rightarrow j$ quanto $j \rightarrow i$
    - Direcionado (ou dirigido): quando todas as arestas e_{ij} de A correspondem a um único sentido, por exemplo, de $i \rightarrow j$ (arestas = arcos)
    - Completo: quando existe uma aresta e_{ij} para cada par de vértices i e j de N
    - Bipartido: quando $N = N_1 \cup N_2$ e toda aresta e_{ij} de G é tal que $i \in N_1$ e $j \in N_2$, com $N_1 \neq \emptyset$ e $N_2 \neq \emptyset$

Primeiros Conceitos

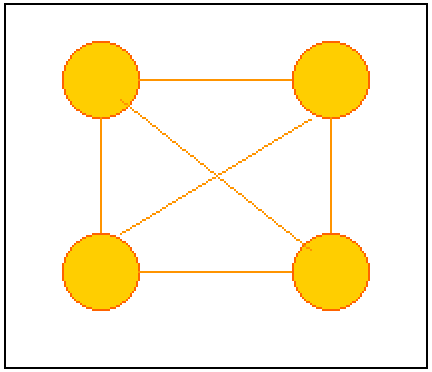


(a) simétrico

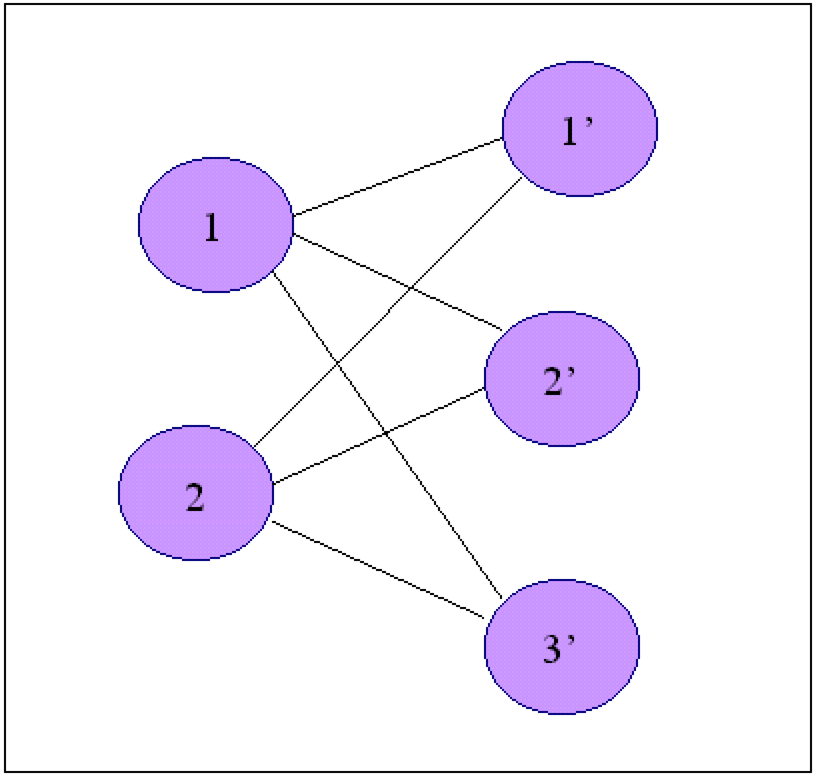


(b) direcionado

Primeiros Conceitos



(c) completo



(d) bipartido

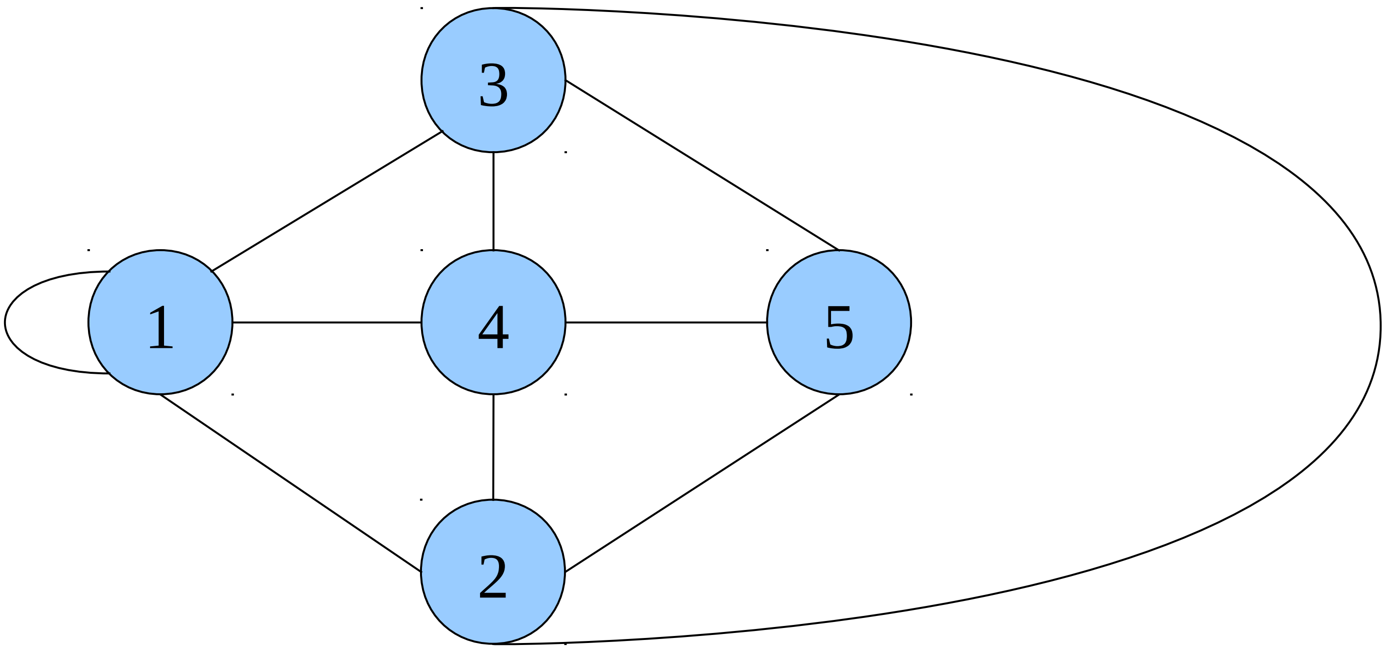
Representação Matricial de Grafos

- Dado um grafo simétrico G = G (N,A), uma forma de representar G é através de uma matriz de adjacências
- Se $A = a_{ij}$ é uma matriz de adjacências

$$a_{ij} \begin{cases} 1, \text{ se existe a aresta } e_{ij} \\ 0, \text{ c.c.} \end{cases}$$

Exemplo

- Escrever matriz de adjacência do seguinte grafo



Exemplo

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	0
2	1	0	1	1	1
3	1	1	0	1	1
4	1	1	1	0	1
5	0	1	1	1	0

$$a_{ij} = a_{ji}$$

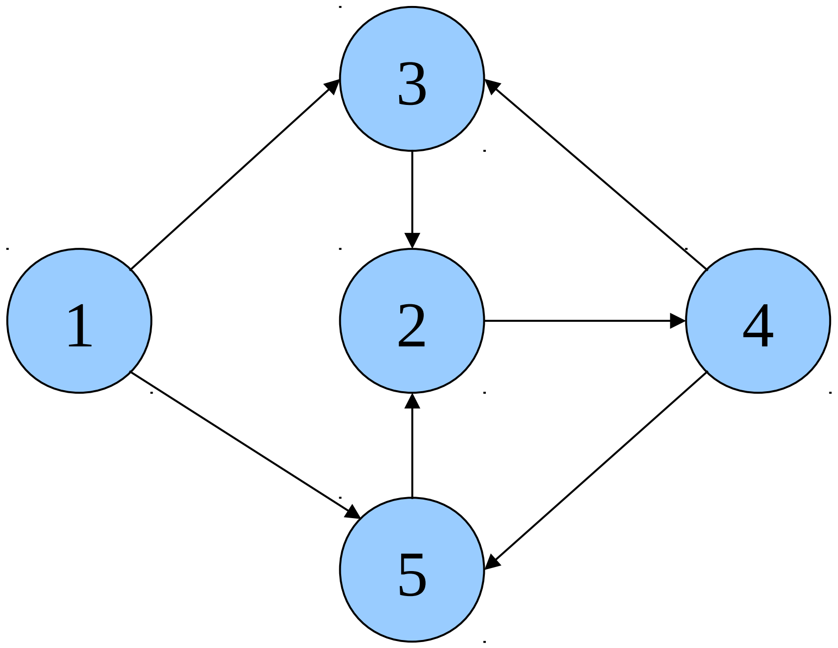
Representação Matricial de Grafos

- Se a matriz G(N,A) é direcionada, existe uma representação mais adequada conhecida como Matriz de Incidências Nó-Arco

$$b_{ij}\begin{cases}\text{linha } r\text{, coluna } (i,j) = +1\text{, se } r = i\\ \text{linha } r\text{, coluna } (i,j) = -1\text{, se } r = j\\ \text{linha } r\text{, coluna } (i,j) = 0\text{, se } r \neq i,\ r \neq j\end{cases}$$

Exemplo

- Escrever matriz de adjacência do seguinte grafo

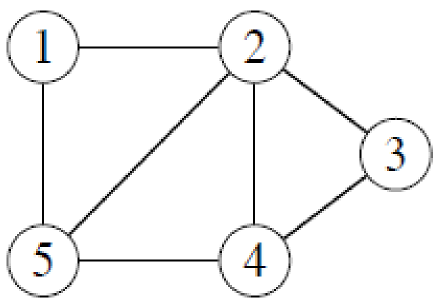


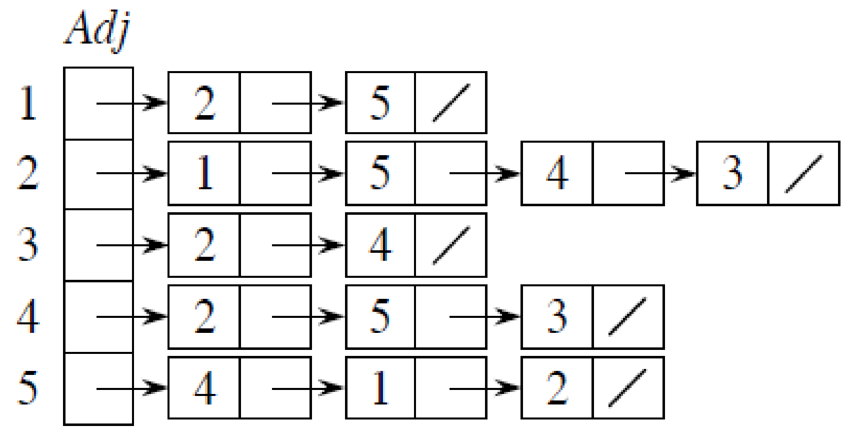
Exemplo

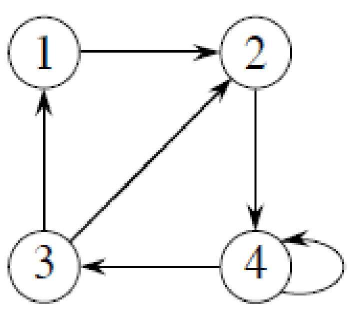
	(1,3)	(1,5)	(2,4)	(3,2)	(4,3)	(4,5)	(5,2)
1	+1	+1	0	0	0	0	0
2	0	0	+1	-1	0	0	-1
3	-1	0	0	+1	-1	0	0
4	0	0	-1	0	+1	+1	0
5	0	-1	0	0	0	-1	+1

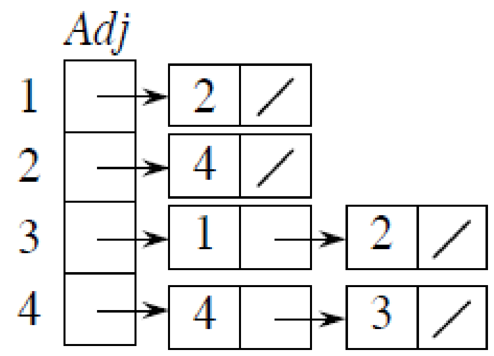
Representação por Lista de Adjacências

- A representação por lista de adjacências pode ser feita por duas listas encadeadas ou por um vetor e uma lista encadeada



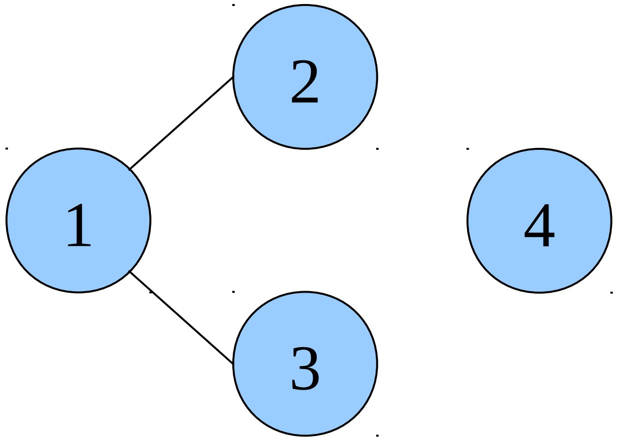






Grau de um Vértice

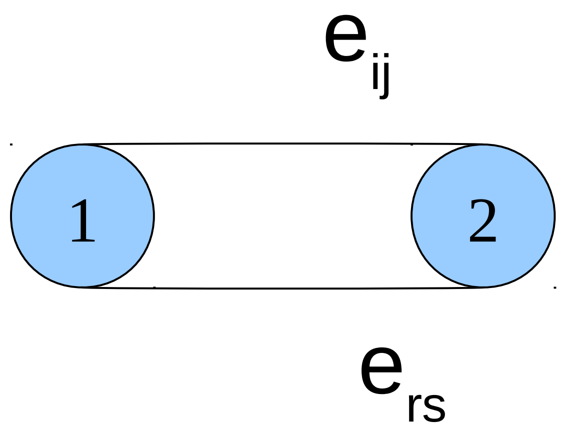
- Dado um vértice i ∈ N, define-se como grau de i (grau(i)) o número de arestas conectadas a i



grau(1) = 2
grau (2) = grau (3) = 1
grau (4) = 0

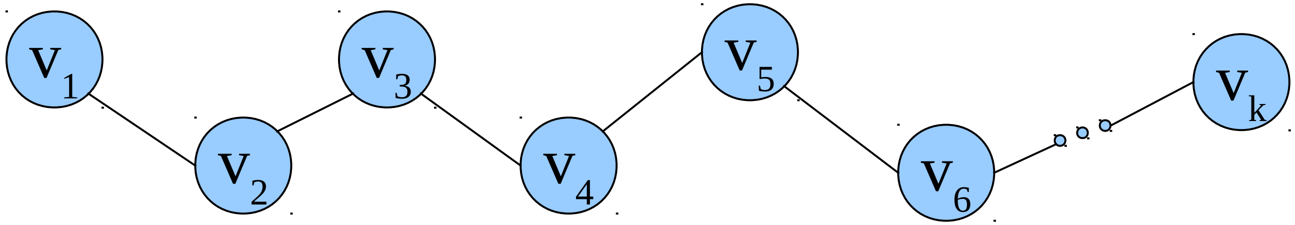
Outras Definições

- Laços: Aresta e_{ii} = (i,i)
- Arestas paralelas: e_{ij} e e_{rs} são arestas paralelas quando i = r e j = s ou i = s e j = r

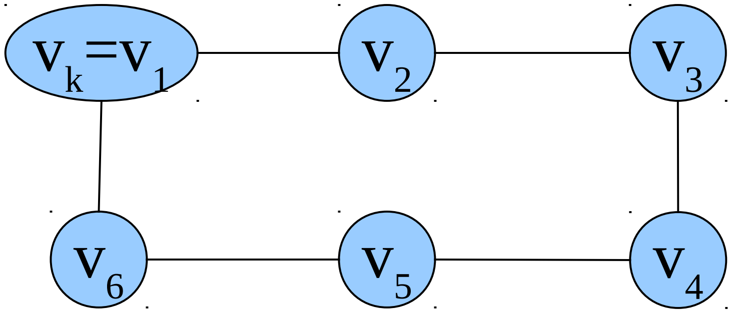


Outras Definições

- Caminho: É uma sequência de vértices v_1, v_2, ..., v_k de N tal que $(v_i, v_{i+1}) \in A$, $1 \leq i \leq k-1$

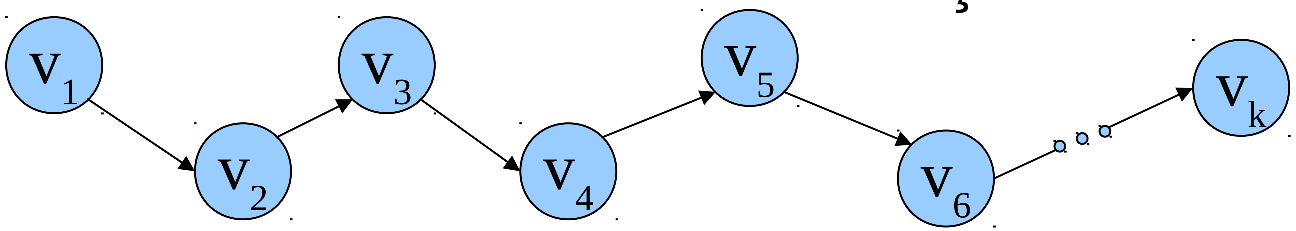


- Ciclo: caminho fechado, isto é, quando $v_k = v_1$

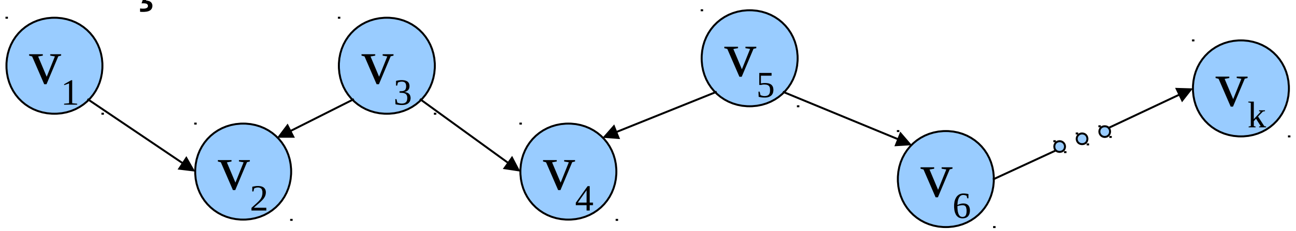


Outras Definições

- Caminho (para grafos direcionados): sequência de vértices $v_1, v_2, ..., v_k$ tal que os arcos $(v_i, v_{i+1}) \in A$ possuem todos a mesma orientação

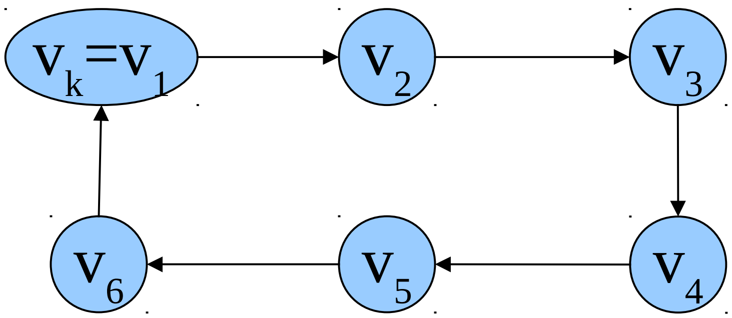


- Cadeia: Sequência de vértices $v_1, v_2, ..., v_k$ de N onde nem todos os arcos (v_i, v_{i+1}), $1 \leq i \leq k-1$ têm a mesma orientação

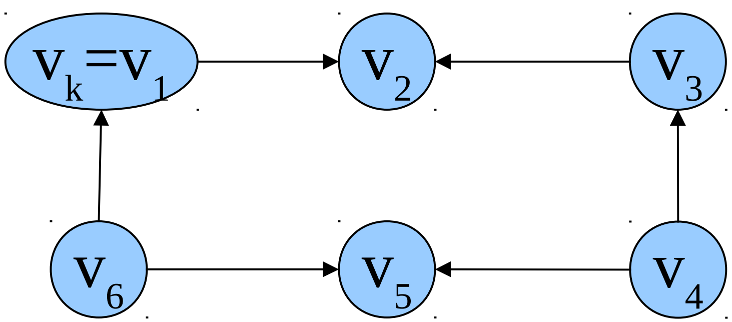


Outras Definições

- Circuito: caminho fechado



- Ciclo: cadeia fechada

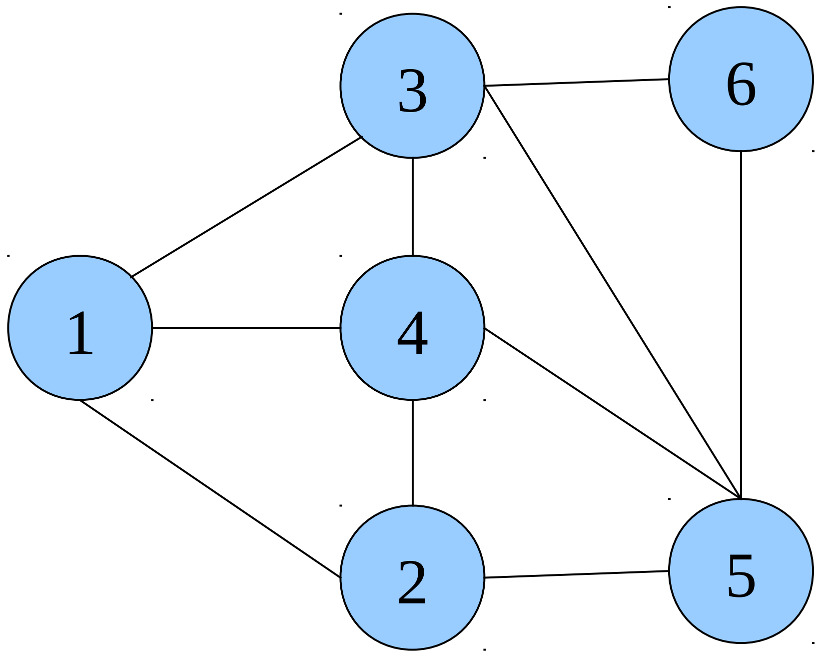


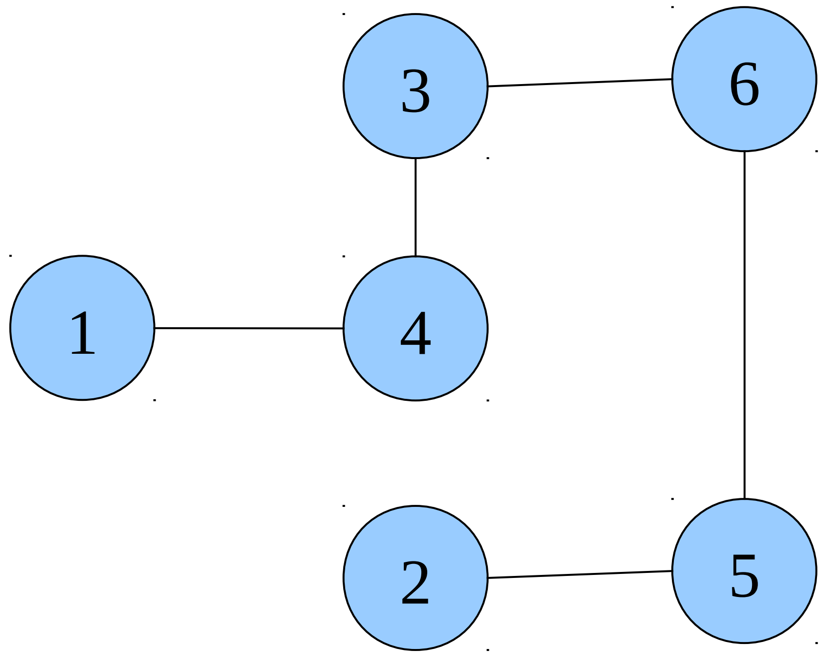
Teorema 1

- Um grafo G(N,A) é bipartido se e somente se todo ciclo de G possui comprimento par
  - Supõe G bipartido
    - $N = N_1 \cup N_2$, $\forall (i,j) \in A$, $i \in N_1$ (N_2) e $j \in N_2$ (N_1)
    - Tome um ciclo arbitrário de G: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, x_1$
    - Sejam $N_1 \cup N_2$ tal que $x_1 \in N_1$, $x_2 \in N_2$, $x_3 \in N_1$, ...
    - $(x_k , x_1) \in A$
    - $x_1 \in N_1 \Rightarrow x_k \in N_2 \Rightarrow k$ é par $\Rightarrow$ todo ciclo de G possui comprimento par

Caminho Hamiltoniano

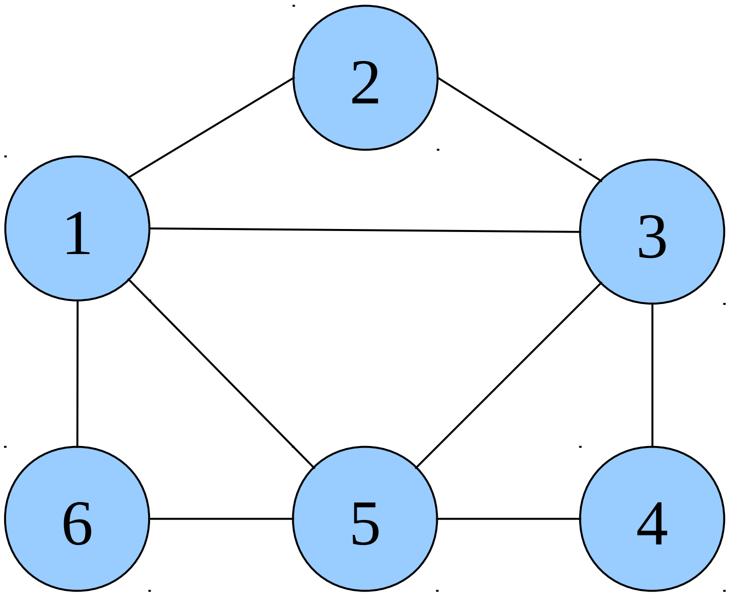
- É um caminho que percorre todos os vértices do grafo uma única vez





Caminho Euleriano

- É um caminho que passa por cada aresta uma única vez



Caminho Euleriano:

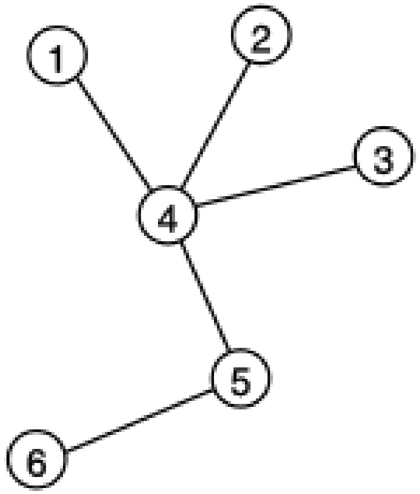
$1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 1$

Outras Definições

- Distância Entre Dois Vértices
  - Dados u e v ∈ N, a distância entre u e v é o menor caminho entre eles no grafo
    - Caminho que utiliza menor número de arestas para chegar de u para v ou v para u
- Grafo acíclico: grafo que não possui ciclo
- Grafo conexo
  - G(N,A) é dito conexo se, para todo par de vértices distintos u e v de N, existir pelo menos um caminho entre eles
    - Representação geométrica de G é descontínua, se G for desconexo

Outras Definições

- Árvore: É um subgrafo conexo e sem ciclos



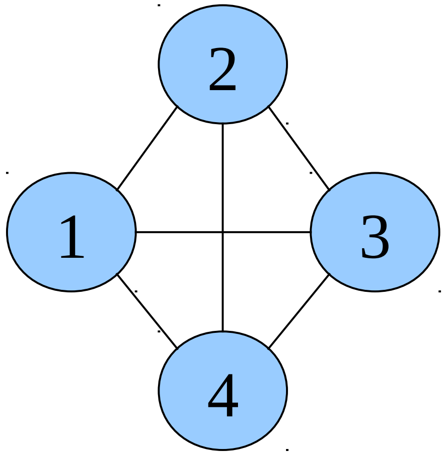
- Árvore Geradora: É uma árvore que contém todos os vértices do grafo

Teorema 2

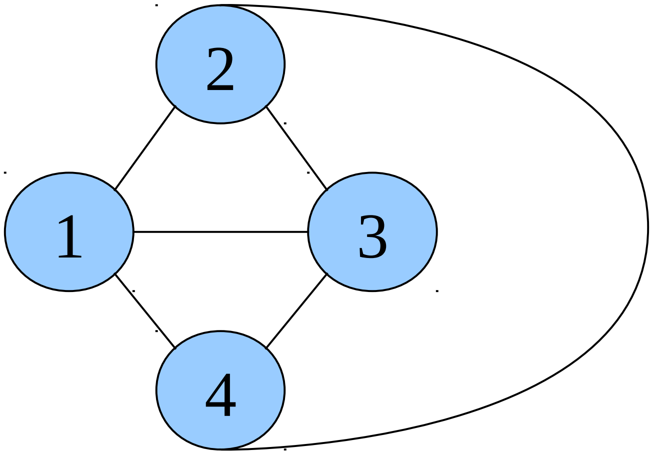
- Um grafo G é uma árvore se e somente se existir um único caminho entre cada par de vértices de G
  - Suponha que G é uma árvore ⇒ G é conexo
    - Dados u, v ∈ N, existe pelo menos um caminho entre u e v, uPv
    - Suponha por absurdo que exista outro caminho Q entre u e v, diferente de P, uQv ⇒ uPvQu ⇒ ∃ um único caminho entre u e v

Outras Definições

- Grafo Planar
  - Uma representação do grafo é planar se neste grafo não houver superposição de arestas



Não é planar

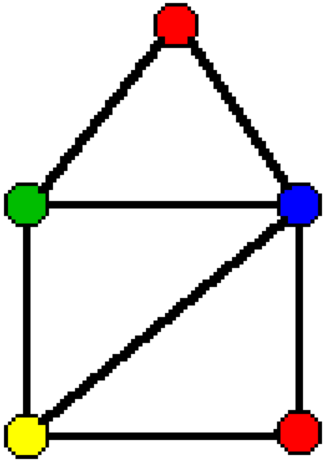


É planar

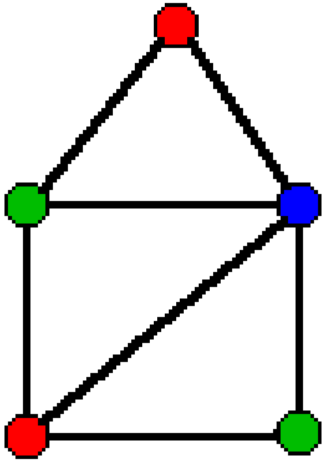
Outras Definições

- K-coloração
  - Seja G(N,A) um grafo e C um conjunto de cores
  - Seja LA(v) = {i ∈ N | i é adjacente ao nó v}
    - Lista de Adjacência
  - Uma coloração de G é uma atribuição de alguma cor de C para cada vértice de V, de tal modo que a dois vértices adjacentes sejam atribuídas cores diferentes
  - Diz-se que G é k-colorível se os vértices de G podem ser coloridos com k cores
- Número cromático do grafo G
  - x(G) é o menor número k tal que exista uma k-coloração de K

Outras Definições



k = 4

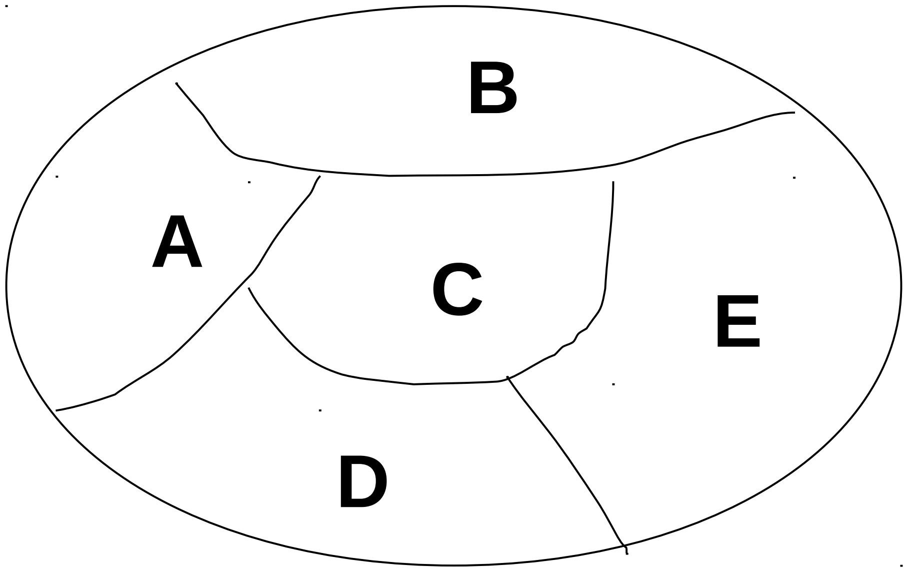


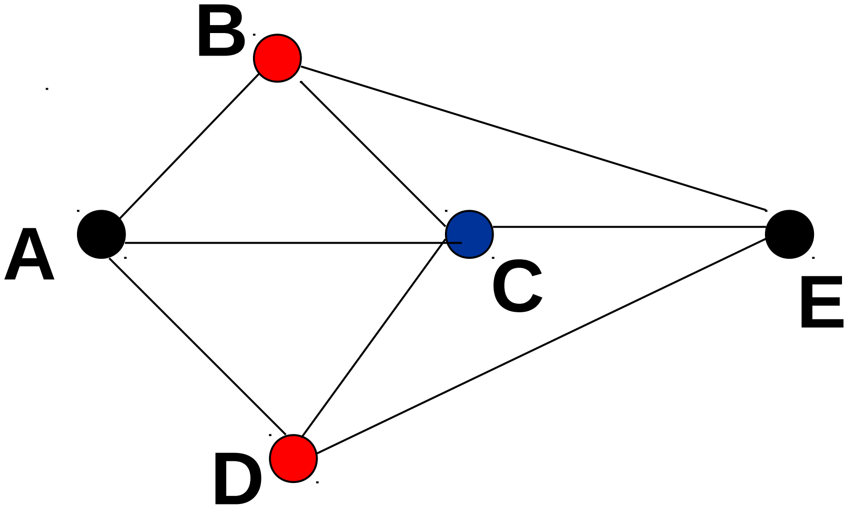
x(G) = 3

Algoritmo de Coloração Aproximada

- Dado G = G(N,A), encontrar X(G) é uma tarefa complexa
  - Problema NP-Completo
    - Difícil solução
- Alternativa: algoritmos aproximados
  - Oferecem uma “boa” solução
  - Não necessariamente a melhor solução para o problema

Algoritmo de Coloração Aproximada





Algoritmo de Coloração Aproximada

- Iniciação do algoritmo: ordenar os nós de G numa ordem não crescente em relação ao seu grau
- $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = \emptyset$
- Colorir v_1 com a cor 1; incluir v_i em C_1
- Para j = 2, ..., n efetuar
  - $r = \min \{i \mid A(v_j) \cap C_i = \emptyset\}$
  - Colorir v_j com a cor r; incluir v_j em C_r

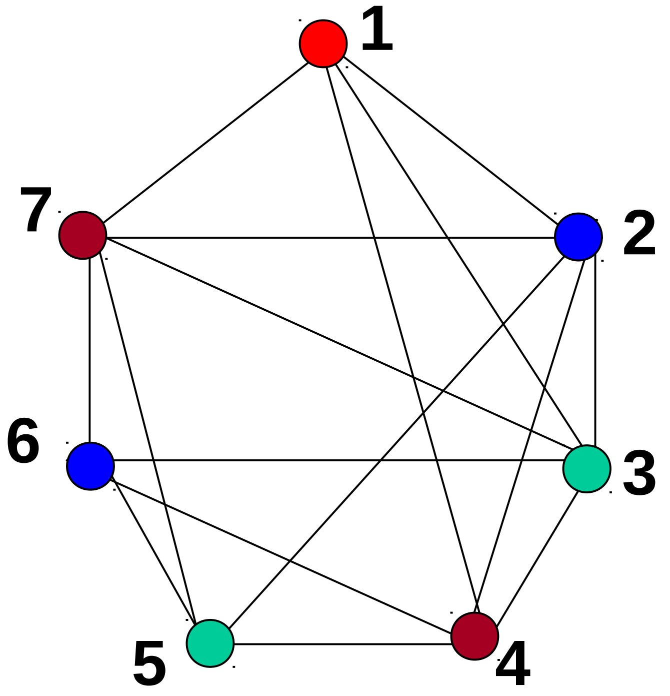
Aplicação do Algoritmo de Coloração Aproximada

- Horário de provas unificadas
  - Como definir horários de provas de um curso de forma que não haja um aluno com duas provas no mesmo horário?
- Modelo
  - Nós representam disciplinas
  - Aresta entre dois nós indica que disciplinas possuem alunos comum
  - Cada cor define o horário para as provas

Aplicação do Algoritmo de Coloração Aproximada

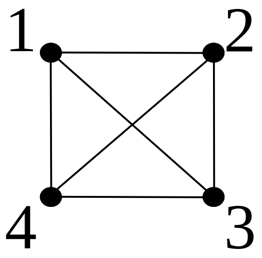
- Exemplo: 7 disciplinas
  - Matriz mostra existência de alunos em comum (*)
  - Simétrica

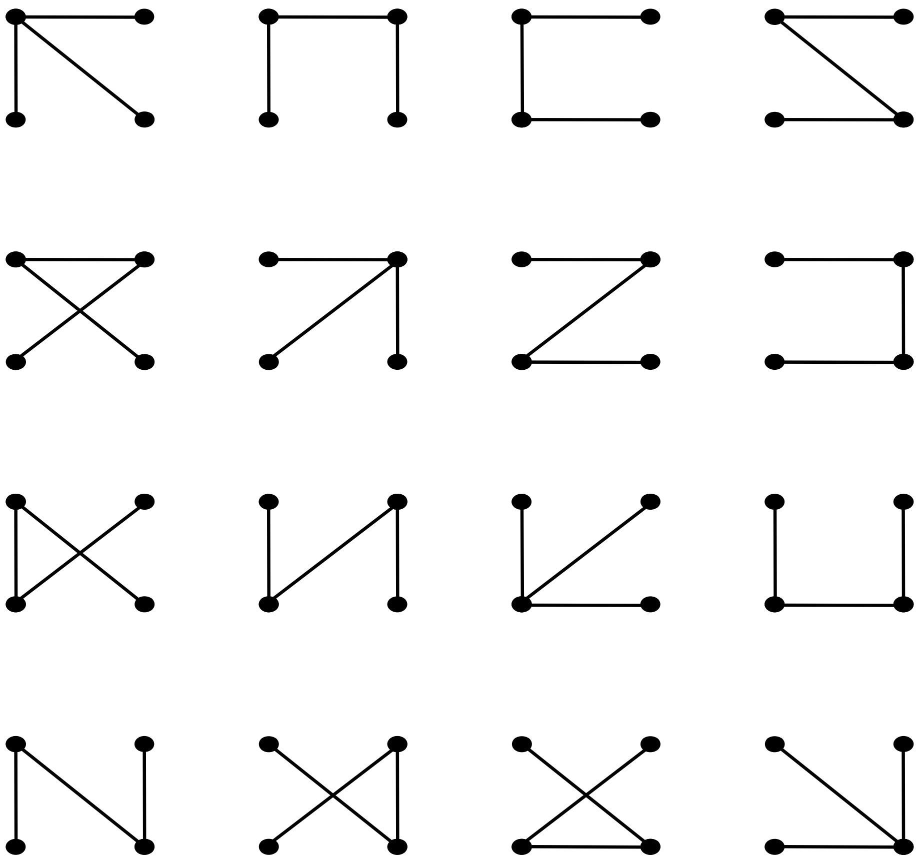
	1	2	3	4	5	6	7
1	-	*	*	*	-	-	*
2		-	*	*	*	-	*
3			-	*	-	*	*
4				-	*	*	-
5					-	*	*
6						-	*
7							-



Árvore Geradora

- Vimos que uma uma árvore geradora para um grafo G é um subgrafo de G que é uma árvore e que contém todos os vértices de G



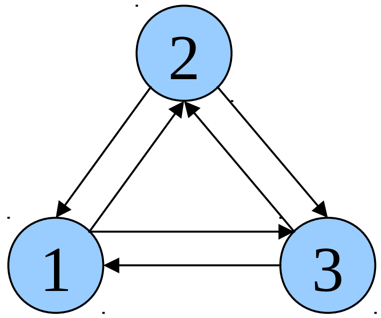


Árvore Geradora

- Dado um grafo G = G (N,A), com |N| = n
  - Se G é simétrico e completo, então o número de árvores geradoras (AGs) de G é dado por n^{n-2} (Cayley)
  - Se G é completo e direcionado, o número de AGs é dado pelo det $(B_o * B_o^T)$, onde B_o é a matriz de incidências nó-arco de G, excluindo uma de suas linhas

Árvore Geradora

	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,3)	(3,1)	(3,2)
1	1	1	-1	0	-1	0
2	-1	0	1	1	0	-1
3	0	-1	0	-1	1	1



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$\det(B_o * B_o^T) = 16 - 4 = 12$

Árvore Geradora Mínima

- Dado um grafo G = G(N,A), AGM é uma árvore geradora de G cuja soma dos pesos de suas arestas é a menor possível
  - Ordenar as arestas de G numa ordem não decrescente em relação aos seus pesos
  - Verificar a ocorrência de ciclos
- Exemplo de aplicações: redes de telecomunicações, transmissão de energia, estradas...

Algoritmo de Kruskal para AGM

Seja T = { conjunto de arestas na solução parcial}

Ordenar arestar em ordem crescente de pesos

Enquanto $|T| < n-1$ e $|A| \neq \emptyset$ faça

  Inicio

    Tomar aresta *e* de menor peso em A

    Se $T \cup \{e\}$ não formar ciclos então

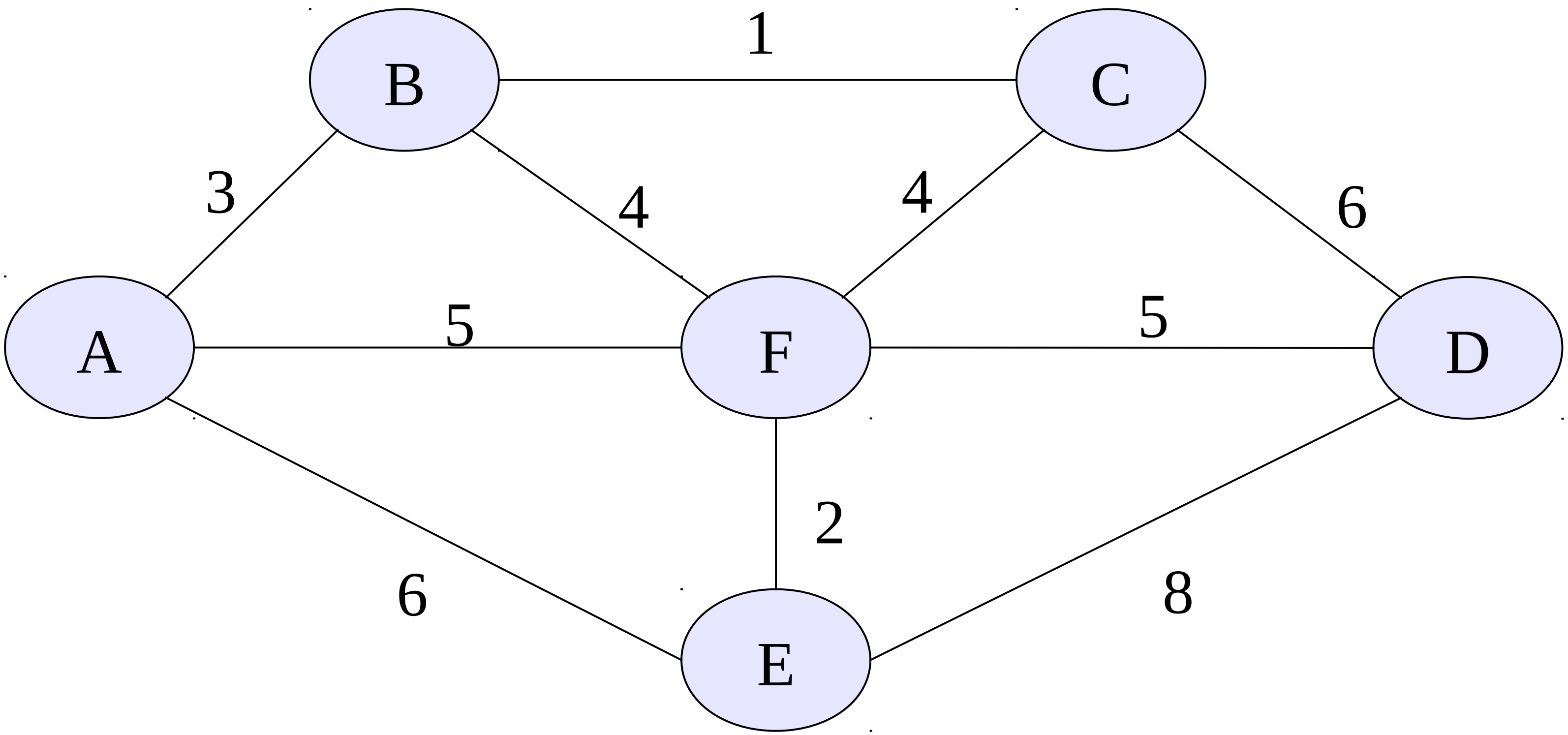
      $T = T \cup \{e\}$, $A = A - \{e\}$

  Fim

Se $|T| < n-1$ então

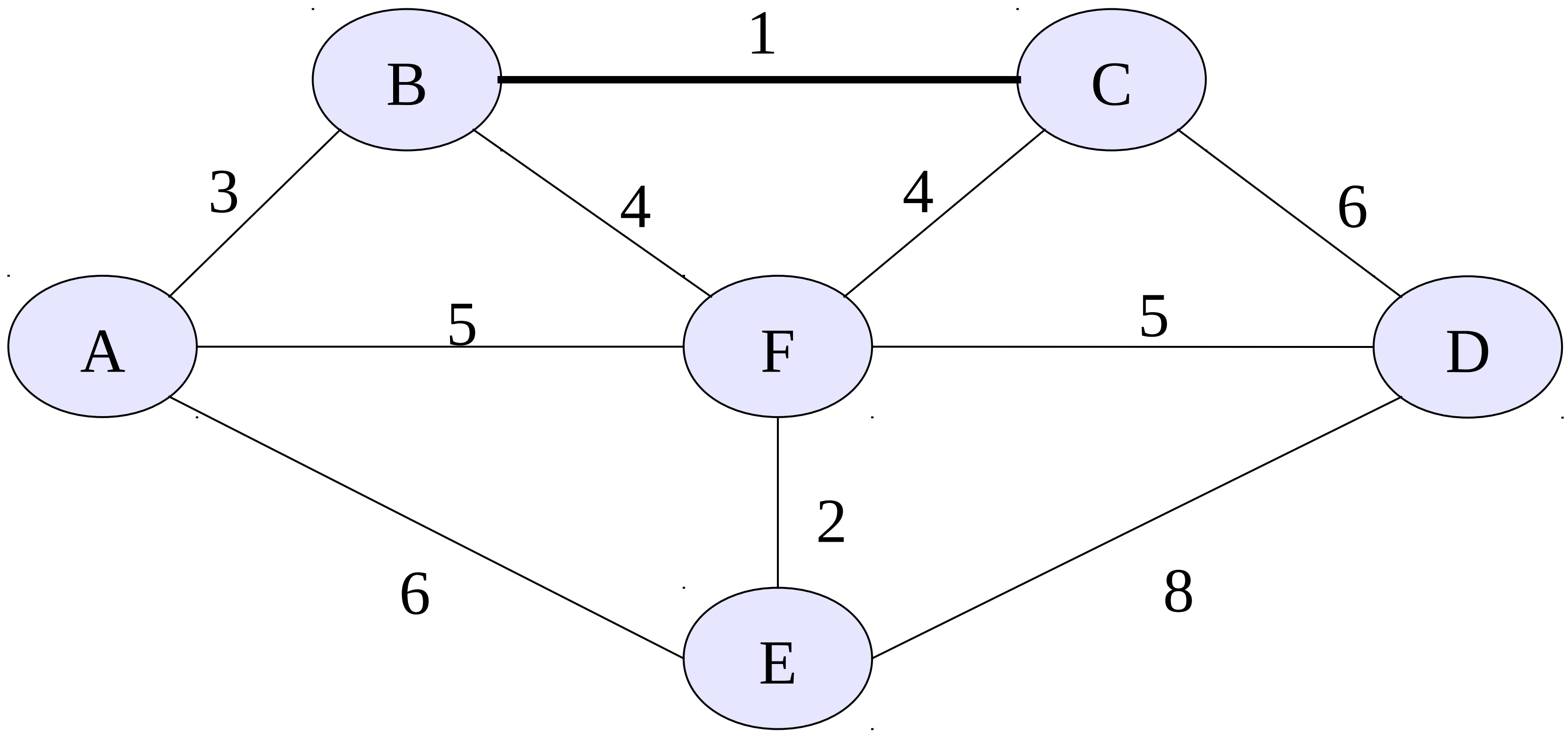
  “G é desconexo”

Algoritmo de Kruskal para AGM



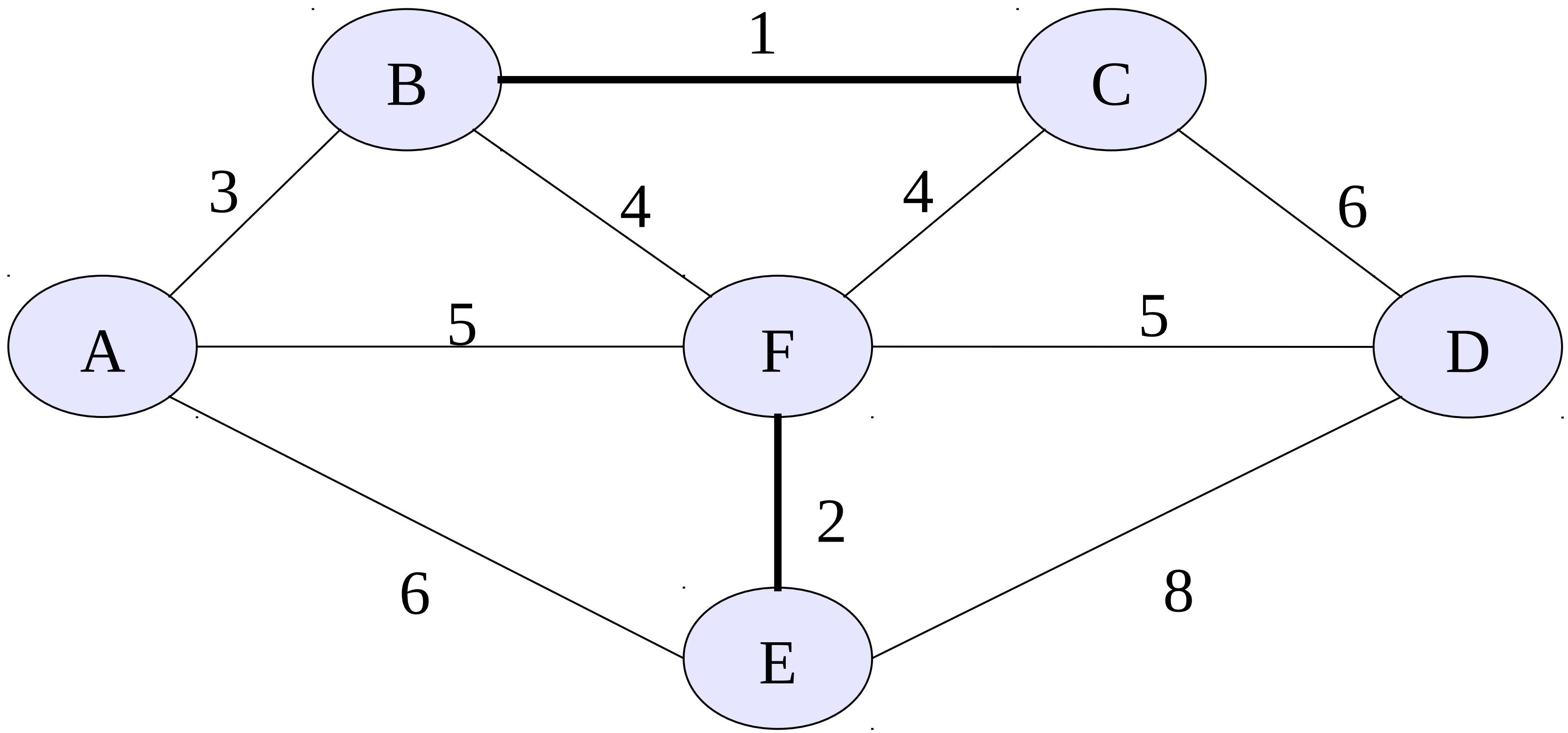
Algoritmo de Kruskal para AGM

bc 1
ef 2
ab 3
bf 4
cf 4
af 5
df 5
ae 6
cd 6
de 8



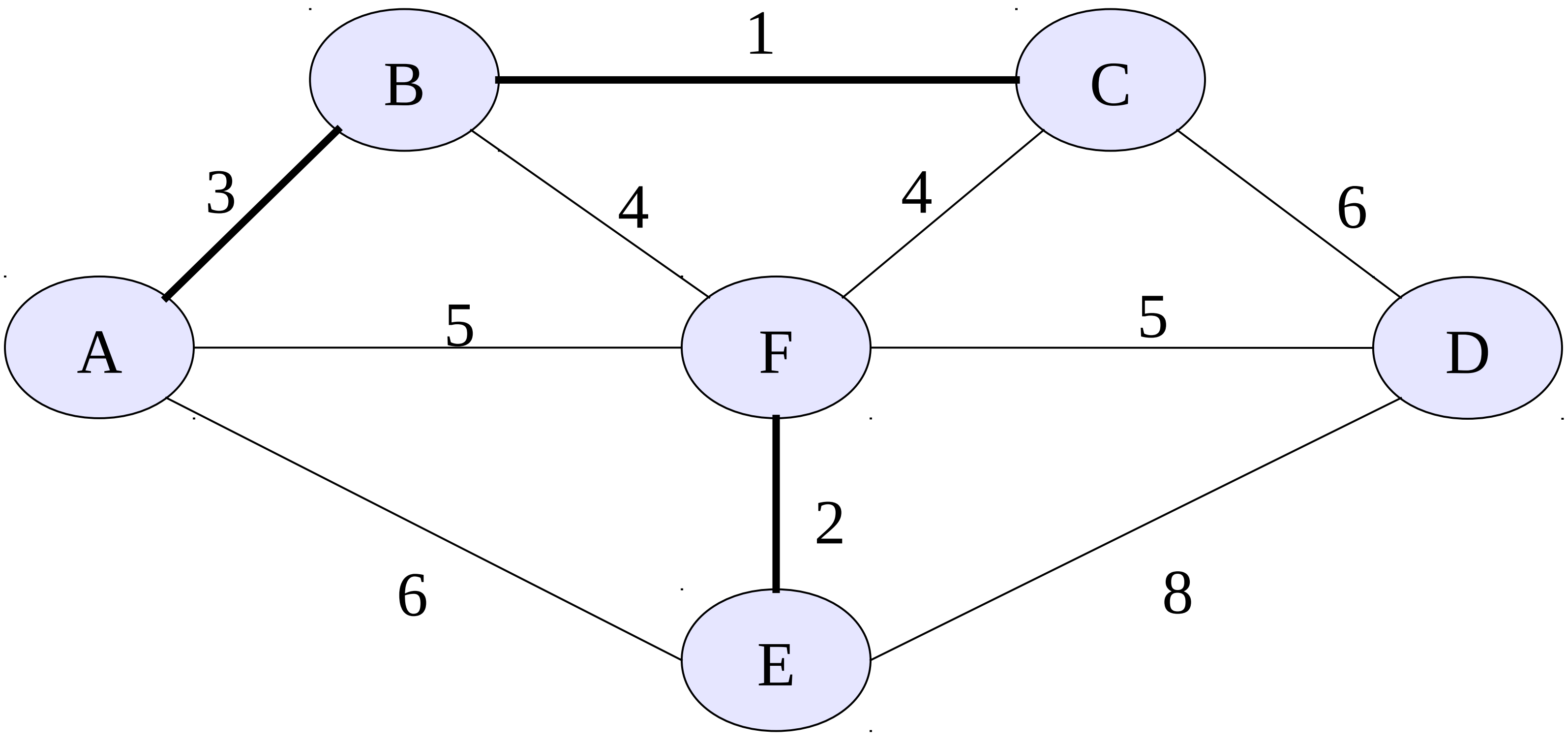
Algoritmo de Kruskal para AGM

ef 2
ab 3
bf 4
cf 4
af 5
df 5
ae 6
cd 6
de 8



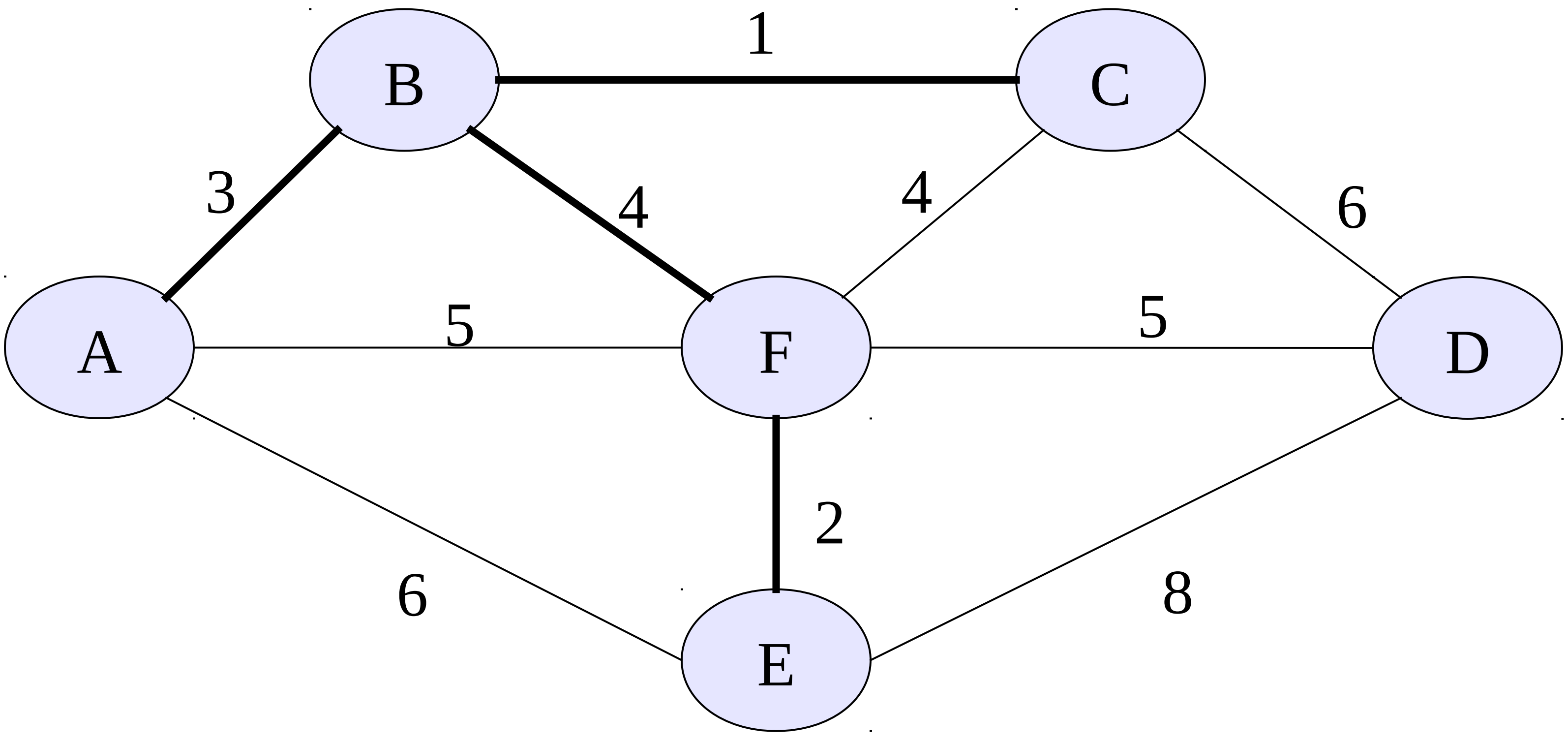
Algoritmo de Kruskal para AGM

ab 3
bf 4
cf 4
af 5
df 5
ae 6
cd 6
de 8



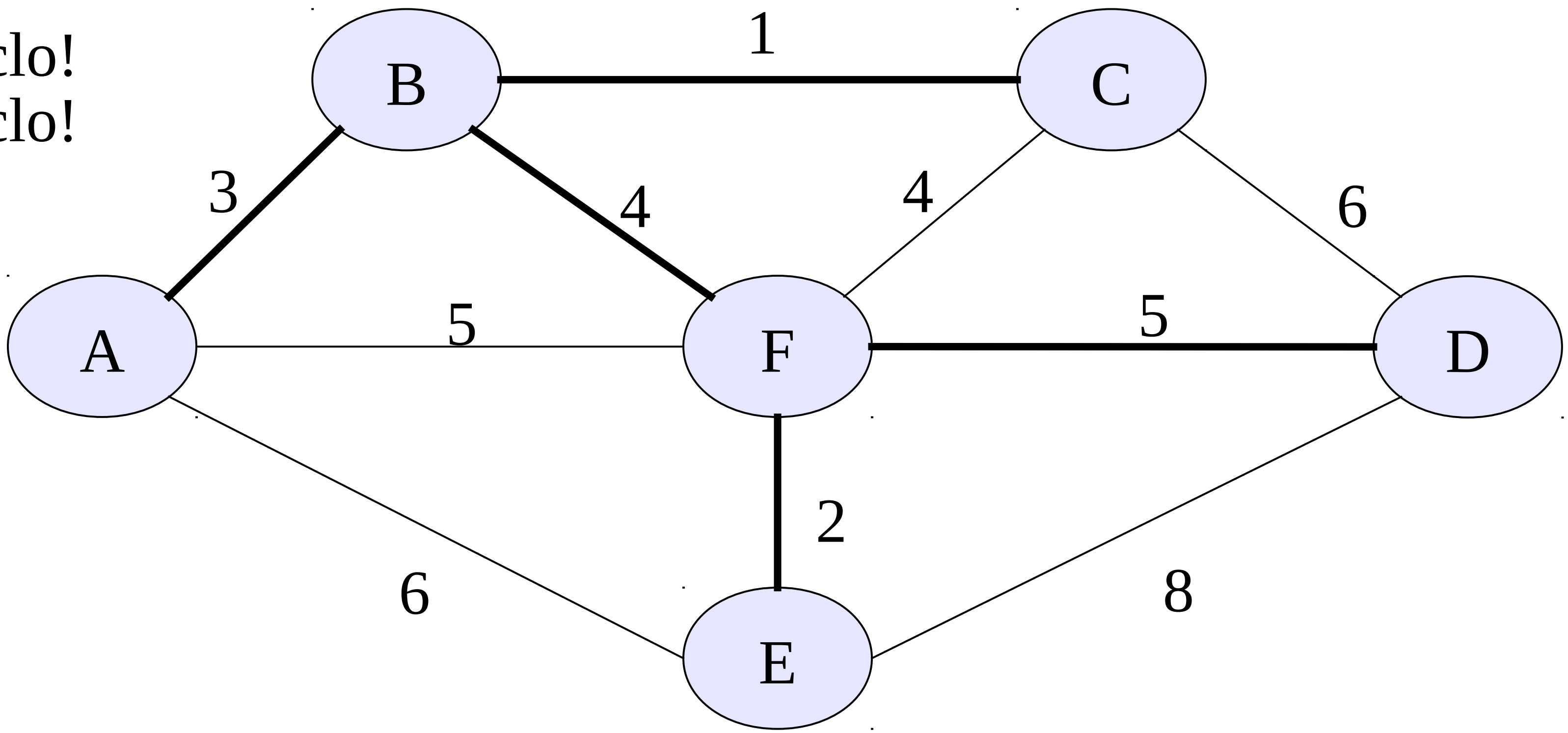
Algoritmo de Kruskal para AGM

bf 4
cf 4
af 5
df 5
ae 6
cd 6
de 8



Algoritmo de Kruskal para AGM

cf 4 ciclo!
af 5 ciclo!
df 5
ae 6
cd 6
de 8



Algoritmo de Prim

Sejam V_T = { um nó inicial s qualquer de G } e E_T = 0

Para i = 1 a |V| - 1 faça

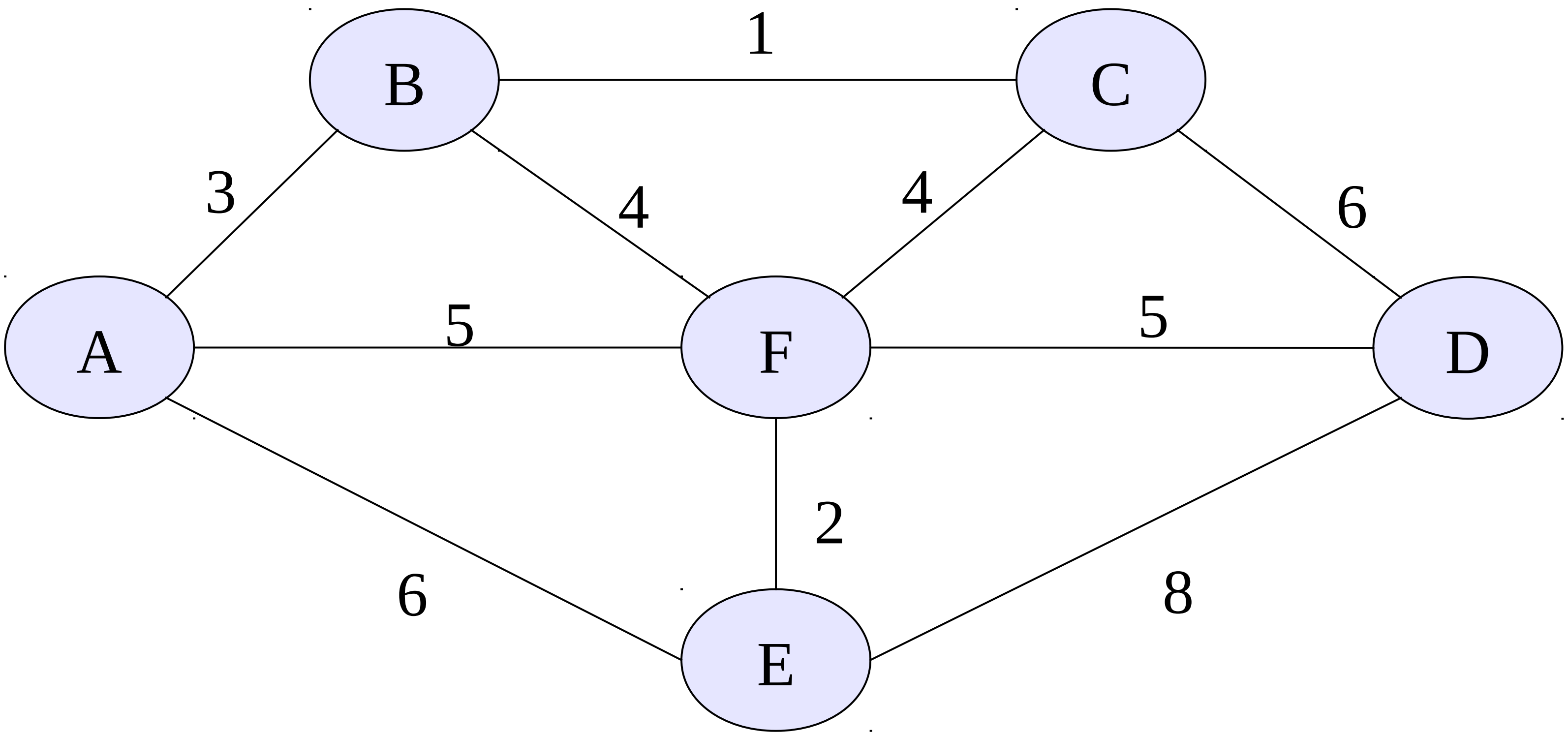
Encontre a aresta de menor peso e* = (v*, u*) entre todas as arestas (v,u) tal que v esteja em V_T e u em V - V_T

$V_T = V_T \cup \{u^*\}$

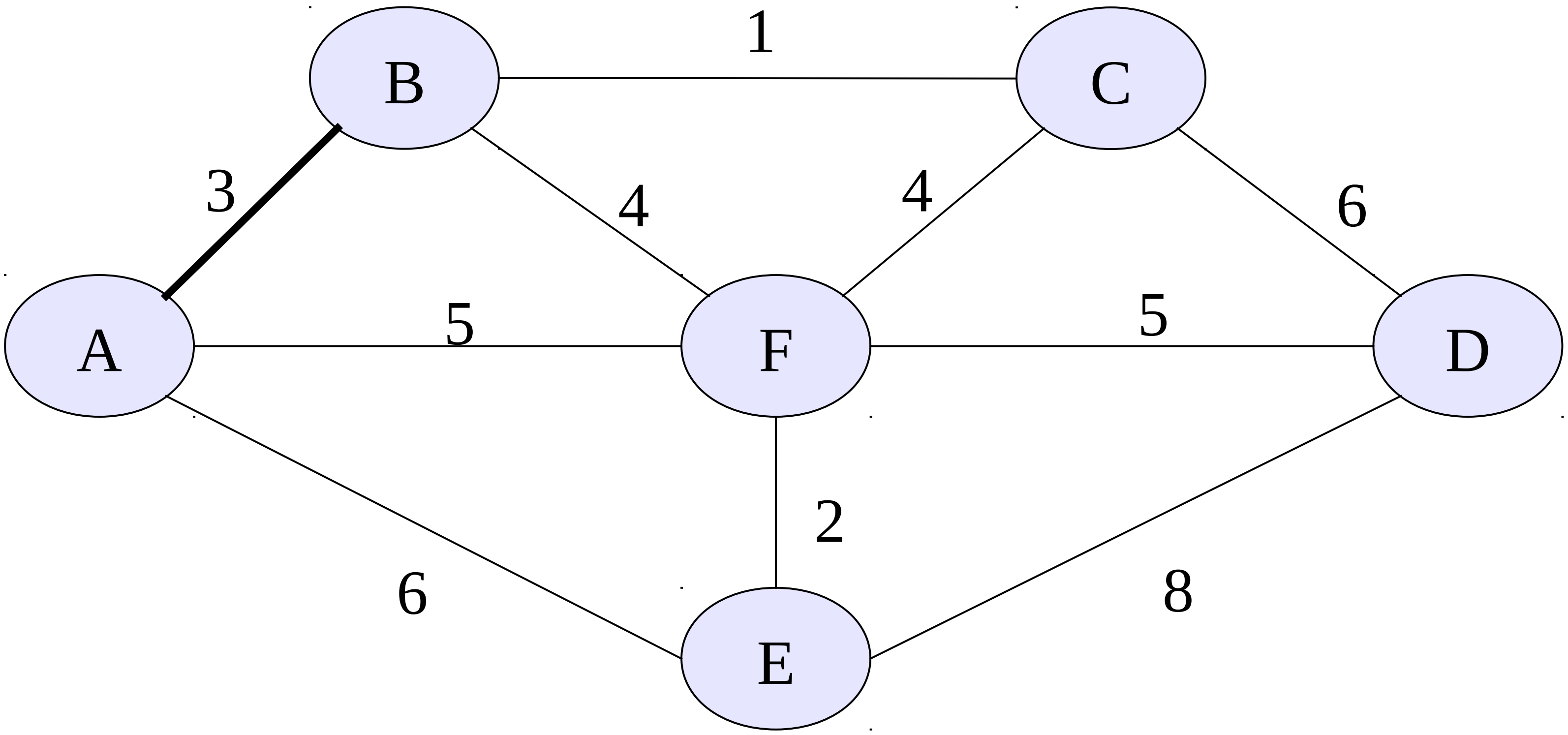
$E_T = E_T \cup \{e^*\}$

- Solução final: E_T

Algoritmo de Prim



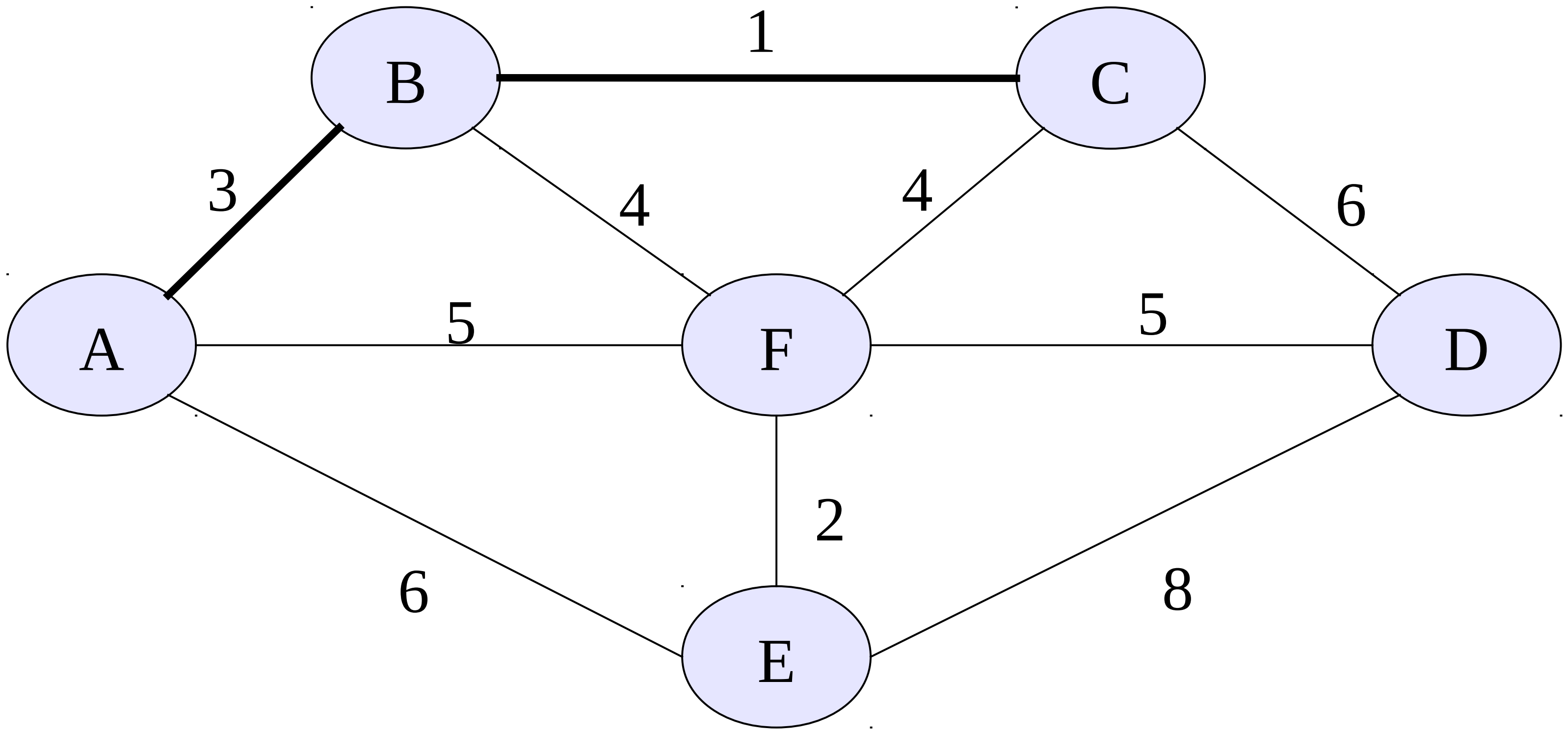
Algoritmo de Prim



Vértice　　　Vértices Restantes

a(-,-)　　　**b(a,3)**, c(-,∞), d(-,∞), e(a,6), f(a, 5)

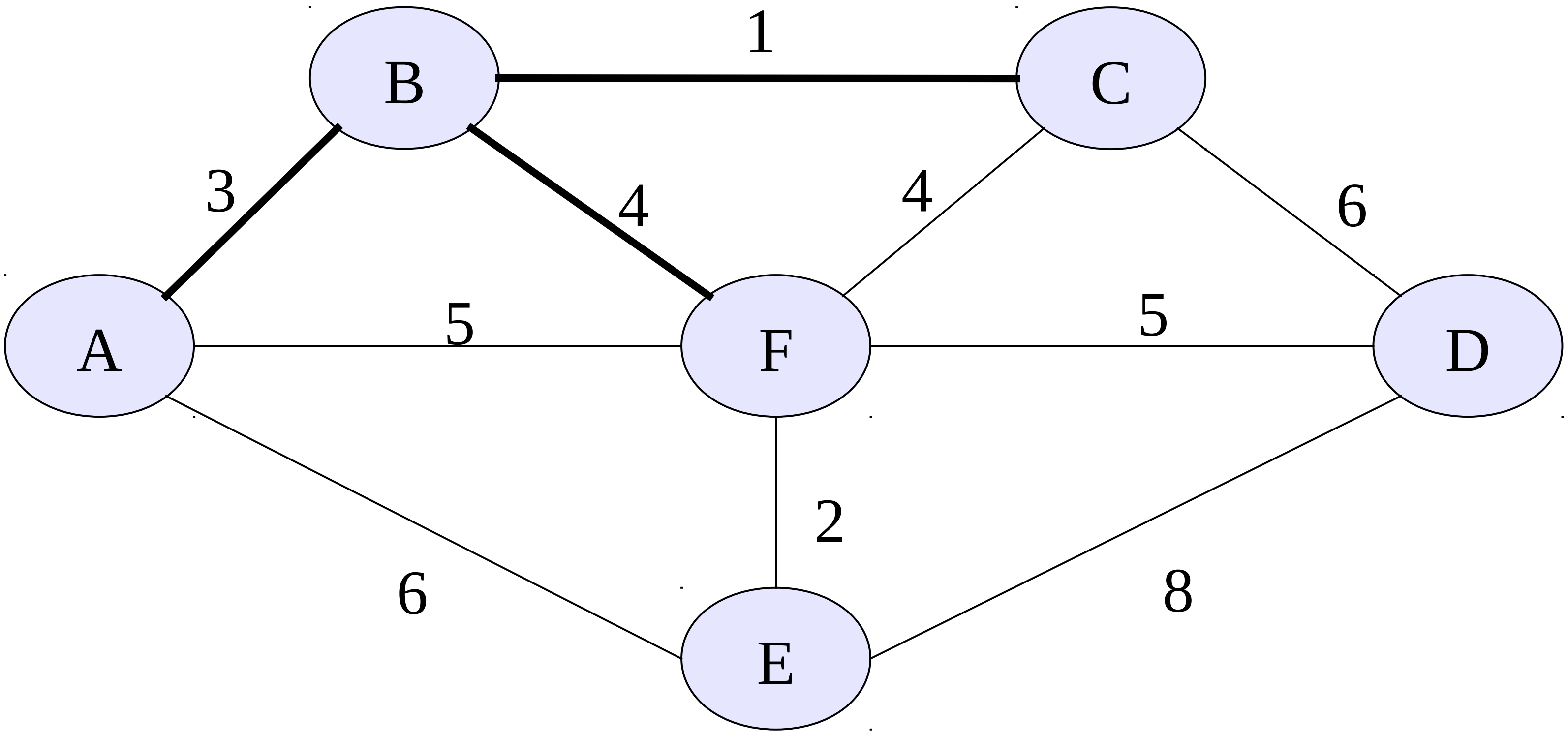
Algoritmo de Prim



Vértice   Vértices Restantes

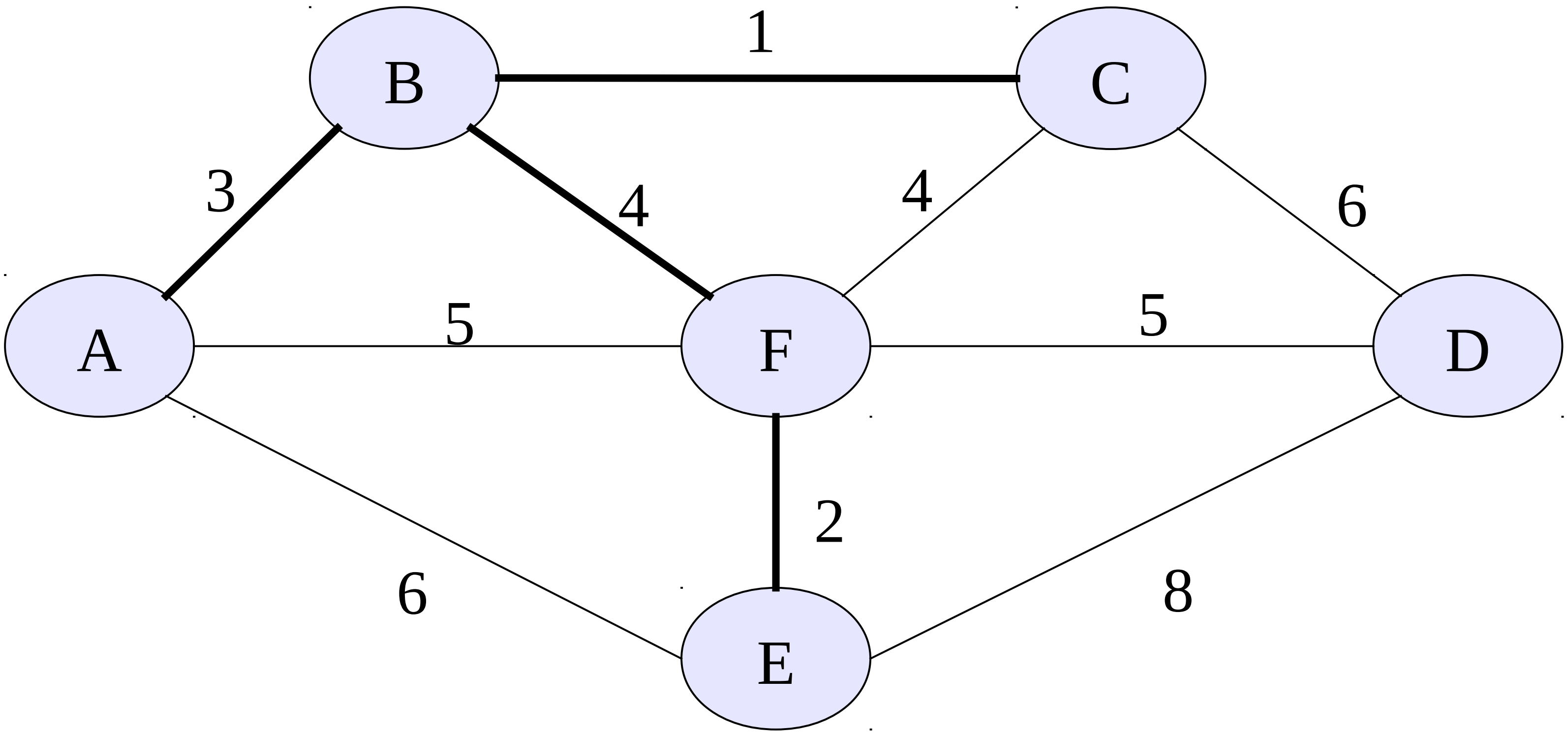
b(a,3)   **c(b,1)**, d(-,∞), e(a,6), f(b, 4)

Algoritmo de Prim



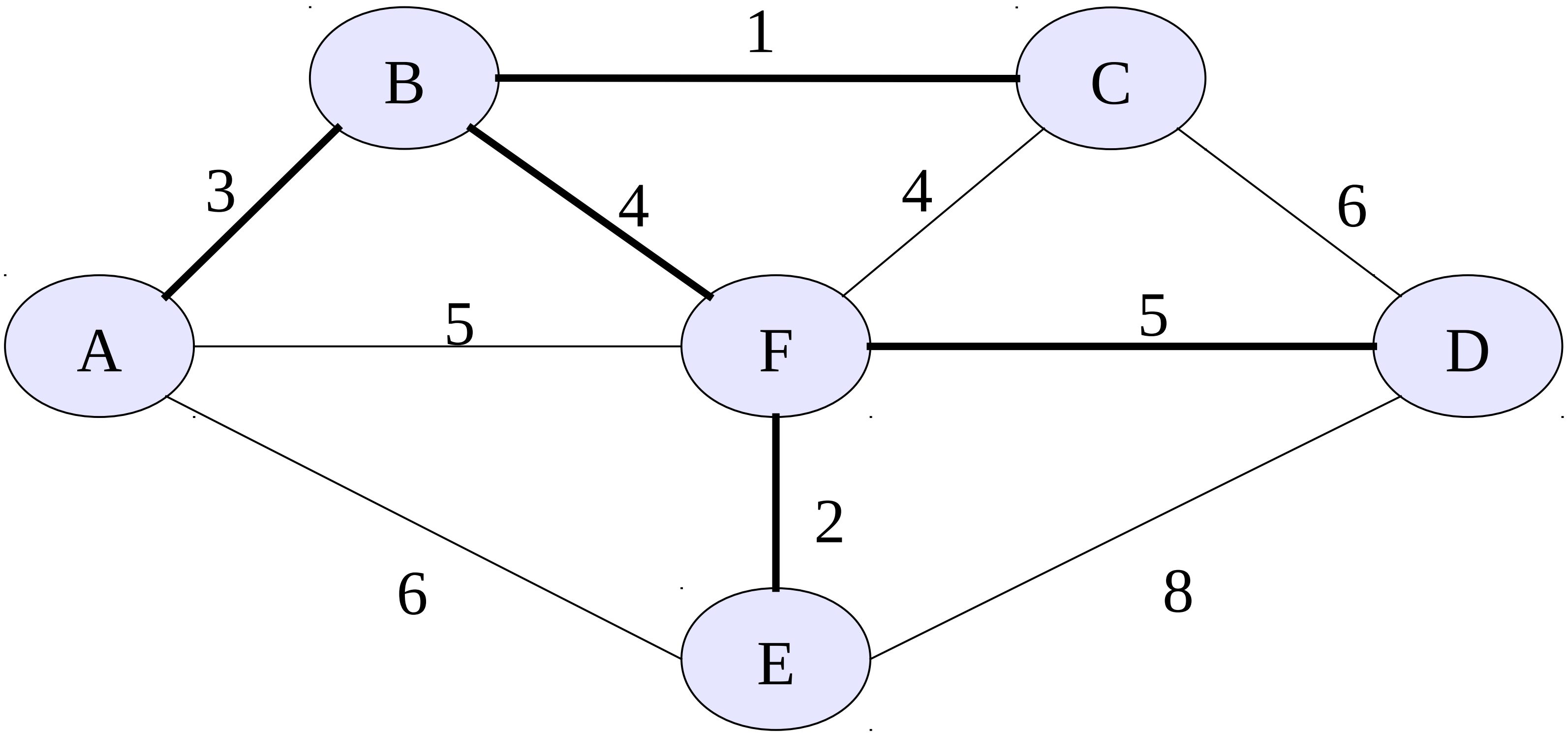
Vértice	Vértices Restantes
c(b,1)	d(c,6), e(a,6), **f(b, 4)**

Algoritmo de Prim



Vértice	Vértices Restantes
f(b,4)	d(f,5), **e(f,2)**

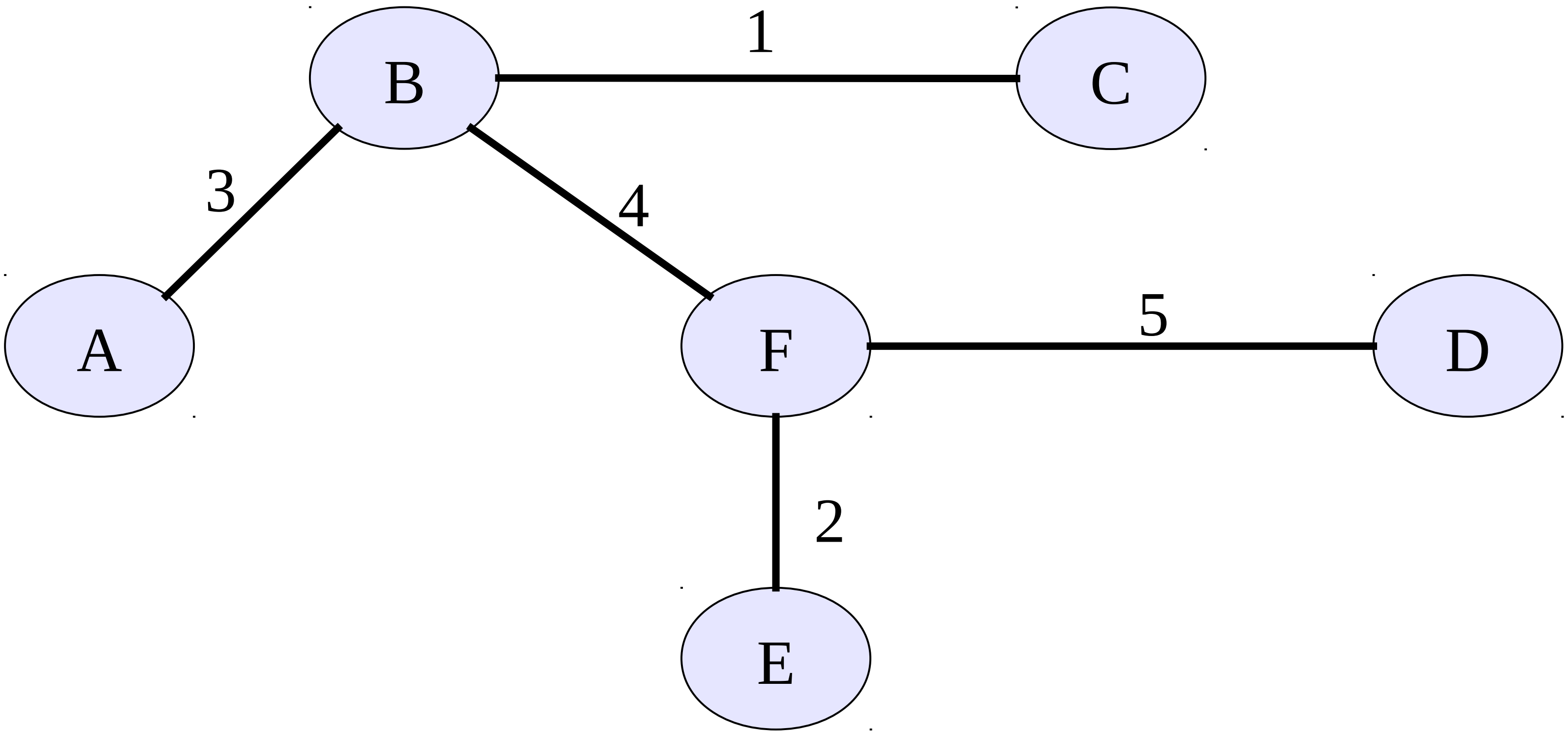
Algoritmo de Prim



Vértice Vértices Restantes

e(f,2) d(f,5)

Algoritmo de Prim



Próxima Aula...

- Grafos
  - O problema do caminho mínimo