Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF
Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional
Prof. Iury Igreja

1. Seja o problema de difusão-convecção:

$$-\varepsilon\frac{d^2u}{dx^2} + \kappa\frac{du}{dx} = 1, \quad x \in \Omega = [0,1] \tag{1}$$
$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

A solução exata para este problema é dada por:

$$u(x) = \frac{1}{\kappa}\left(x - \frac{1 - \exp\left(\frac{\kappa x}{\varepsilon}\right)}{1 - \exp\left(\frac{\kappa}{\varepsilon}\right)}\right).$$

a) Apresente a forma fraca e o método de Galerkin, explicitando os espaços.

b) Compare a solução exata e a aproximada para escolhas de h que satisfaçam:

$$Pe_h = \frac{|\kappa|h}{2\varepsilon} = \begin{cases} 1 \\ 5 \\ 10 \end{cases}$$

adotando em todas as simulações $\varepsilon = 10^{-2}$, $\kappa = 1$ e interpolações lineares.

c) Utilizando o método SUPG e um método estável de sua escolha, refaça as simulações do item anterior apresentando no mesmo gráfico o método de Galerkin, o método estável, o método SUPG e a solução exata.

2. Seja o problema:

$$-\varepsilon\frac{d^2u}{dx^2} + \kappa\frac{du}{dx} = 10e^{-5x} - 4e^{-x}, \quad x \in \Omega = [0,1] \tag{3}$$
$$u(0) = 0 \quad \text{e} \quad u(1) = 1. \tag{4}$$

Tomando $\varepsilon = 0.01$ e $\kappa = 1$ é possível derivar a seguinte solução exata

$$u(x) = -1.90476e^{-5x} + 3.9604e^{-x} + 5.99498 \times 10^{-44}e^{100x} - 2.05563.$$

a) Apresente um gráfico que demonstre que o parâmetro ótimo β não apresenta aproximações nodalmente exatas. (**Sugestão:** utilize apenas 10 elementos.)

b) Escolha um método de estabilização, que dependa de β, e encontre um valor ótimo para este parâmetro através de um estudo do erro da aproximação. (**Sugestão:** fixe a malha em 10 elementos e faça um estudo variando beta de 0 a 1 com incrementos de 0.001 e para cada β calcule o erro da aproximação em relação a solução exata. Ao final faça um gráfico relacionando o erro com os valores de β e indique o valor mínimo encontrado.)

c) Mostre que o valor ótimo de β do item anterior é válido para outras abordagens estabilizadas.

3. Seja o problema dependente do tempo:

$$\frac{du}{dt} - \varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} + \kappa \frac{du}{dx} = 0, \quad (x,t) \in [0,2] \times [0,T] \tag{5}$$

$$u(0,t) = \alpha_1(t) \quad \text{e} \quad u(2,t) = \alpha_2(t) \quad \text{(condição de contorno)} \tag{6}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{(condição inicial)} \tag{7}$$

cuja solução solução exata é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left[\frac{(x - \kappa t - 0.5)^2}{\varepsilon(4t+1)}\right].$$

Aplique a solução exata para determinar a condição inicial $\varphi(x)$ e, para cada instante de tempo t, as condições de contorno $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$. Nas questões a seguir, utilize $\varepsilon = 10^{-2}$, $\kappa = 1$, interpolações lineares, $\Delta t = h^2$ e $T = 1,25$.

a) Apresente a formulação fraca do problema (5)-(6) aplicando o método de Euler implícito para o termo temporal;

b) Compare a solução exata e a aproximada para escolhas de h que satisfaçam:

$$Pe_h = \frac{|\kappa| h}{2\varepsilon} = \begin{cases} 5 \\ 10 \\ 20 \end{cases}$$

c) Partindo da formulação proposta na letra (a), apresente a formulação SUPG para o problema (5)-(6) e repita o item (b) fazendo escolhas diferentes para β, onde o parâmetro de estabilização é definido como:

$$\tau = \beta \frac{h}{2\kappa}.$$

O trabalho deve ser escrito em LaTeX e enviado por e-mail dentro do prazo determinado.