



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Lista 1- Métodos dos Elementos Finitos

Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional

Autor: Rodrigo Perobeli Silva Costa
Professor: Iury Igreja

Juiz de Fora, 15 de Janeiro de 2021

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Exercício 1	2
2.1	Apresentação da Formulação	2
2.2	Aproximação linear	2
2.3	Aproximação por graus maiores	2
2.4	Estudo de Convergência	3
2.5	Comparação das Convergências	3
3	Exercício 2	4
3.1	Aproximações	4
3.2	Estudo de convergência	5

1 Introdução

O presente relatório é um método de avaliação para a disciplina Método dos Elementos Finitos, do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional (PPGMC) da UFJF. O trabalho consiste em 2 etapas:

- Considerando uma malha contínua, calcular a projeção L2 da função $\sin^2(\pi x)$ no espaço V_h determinando a taxa de convergência do método.
- Executar o exercício anterior, para uma malha descontínua por partes.

2 Exercício 1

2.1 Apresentação da Formulação

Sejam (u, v) funções escalares definidas em um intervalo Ω , com espaço de Hilbert $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$. E sendo $V_h \subset L^2(\Omega)$. Define-se a projeção de u em V_h como u_h , tal que:

$$(u - u_h, v_h)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (1)$$

Como $u_h \in V_h$, então u_h pode ser escrito como a seguinte combinação linear:

$$u_h = \sum_{i=0}^k \alpha_i \varphi_i \quad (2)$$

Onde α_i são os graus de liberdade/incógnitas do problema e φ_i sendo funções base do subespaço V_h . Tomando $v_h = \varphi_j$, o problema é então encontrar α_i tal que:

$$u_h = \sum_{i=0}^k \alpha_i (\varphi_i, \varphi_j)_{L^2(\Omega)} = (u, \varphi_j)_{L^2(\Omega)} \text{ com } j = 0, 1, 2, \dots, k \quad (3)$$

E tal problema pode ser escrito na forma:

$$M\alpha = b \quad (4)$$

Onde M é a matriz formada por $(\varphi_i, \varphi_j)_{L^2(\Omega)}$, α é o vetor de incógnitas e b é o vetor fonte definido por:

$$b = (u, \varphi_j)_{L^2(\Omega)} \quad (5)$$

Com a solução do sistema, é possível aproximar u_h através da combinação linear dos α com as funções de base.

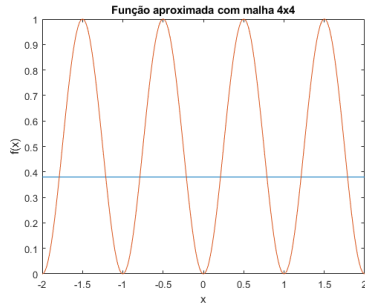
2.2 Aproximação linear

Para aproximar a função $\sin^2(x)$, foram usadas malhas 4×4 , 8×8 , 16×16 e 32×32 e aproximação por base linear.

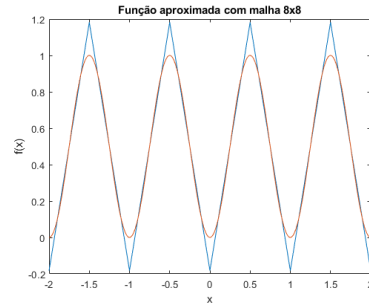
Nota-se que, com uma derivada mais acentuada, a aproximação linear fica bem ruim com as primeiras malhas, e com uma malha de 32×32 elementos, o erro ainda é considerável (e visível a olho nu, conforme Figura 1d).

2.3 Aproximação por graus maiores

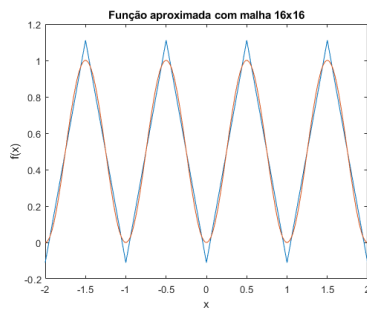
As aproximações para funções base de graus 2, 3 e 4 são mostradas nas Figuras 2, 3 e 4 respectivamente.



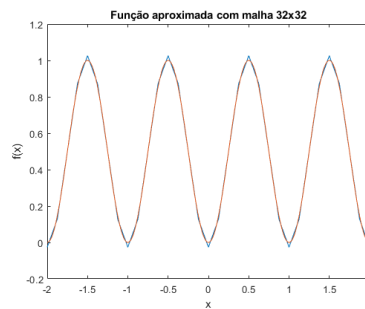
(a) 4 x 4.



(b) 8 x 8.



(c) 16 x 16.



(d) 32 x 32.

Figura 1: Aproximações lineares

2.4 Estudo de Convergência

Os resultados de convergência obtidos são apresentados pela Figura 5. Foi utilizada a norma do máximo para encontrar o valor do erro, que é da forma:

$$\|u - u_h\|_{\infty} = \max_{x_i \in \tau_h} (u_i - u(x_i))$$

2.5 Comparação das Convergências

Era esperado uma taxa de convergência próxima da linear, com coeficiente de regressão linear igual ao grau da aproximação utilizada, k , mais 1. Os resultados obtidos para as regressões das aproximações feitas foram:

1. Para grau 1, $k + 1 = 1.22$;
2. Para grau 2, $k + 1 = 2.89$;
3. Para grau 3, $k + 1 = 3.54$;
4. Para grau 4, $k + 1 = 4.90$;

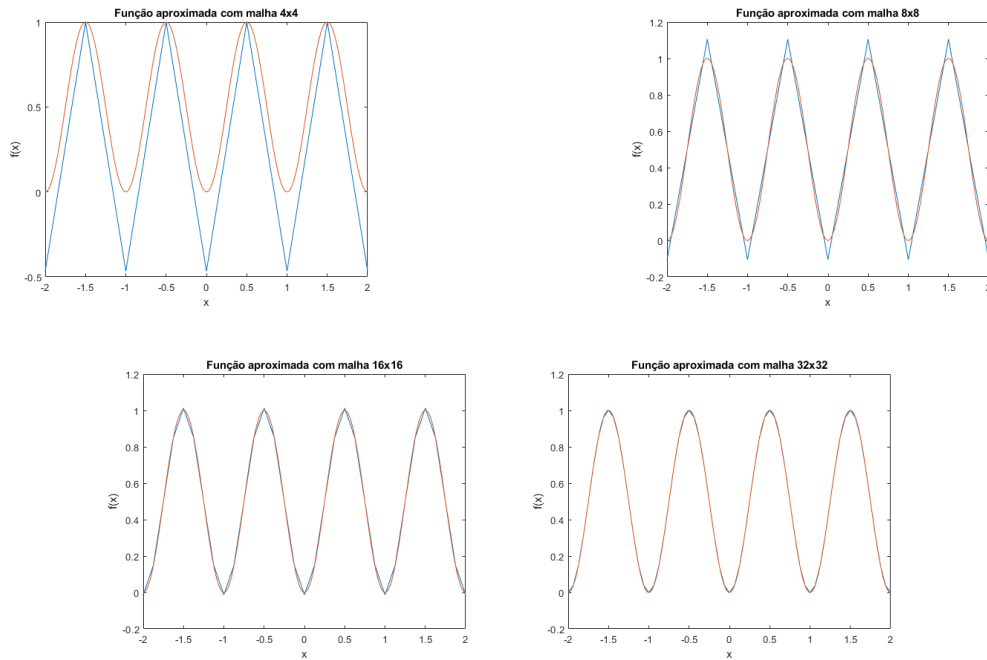


Figura 2: Aproximações quadráticas.

Os valores esboçaram os resultados esperados, nota-se que para aproximações de grau ímpar, o valor da taxa de convergência se distanciou mais do valor esperado, no entanto, essas disparidades não ocasionaram uma situação de inversão (um grau menor tendo melhor convergência do que um grau maior).

3 Exercício 2

Para o segundo exercício, utiliza-se uma malha descontínua, isto é, o problema é resolvido elemento a elemento, de forma que o custo computacional diminua (resolver n matrizes 2×2 , ao invés de resolver 1 matriz $n \times n$). Dessa maneira, apesar de 2 elementos possuírem um ponto em comum ($x = 0.5$, por exemplo) esses elementos não trocam informação entre si durante a resolução do sistema linear.

3.1 Aproximações

As aproximações para diferentes graus do polinômio da função base são vistos nas Figuras 6, 7, 8 e 9.

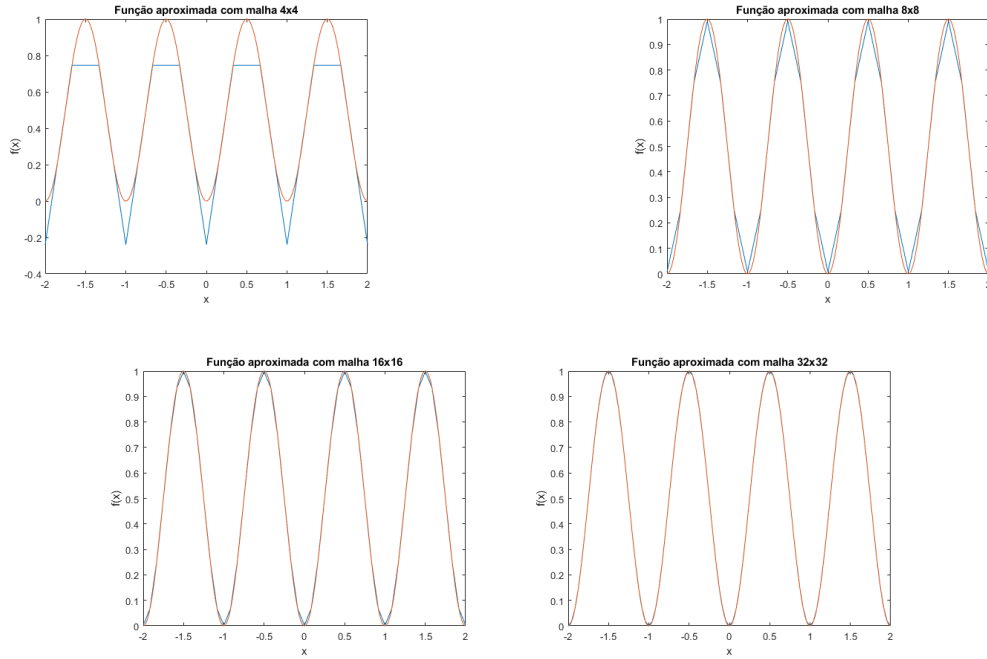


Figura 3: Aproximações cúbicas.

Nota-se que as soluções ficaram visualmente próximas das soluções da malha contínua.

3.2 Estudo de convergência

Os resultados obtidos estão apresentados na Figura 10.

Para a malha descontínua, os resultados esperados eram os mesmos do caso contínuo (taxa $k + 1$) e os obtidos pelo experimento foram:

1. Para grau 1, $k + 1 = 1.29$;
2. Para grau 2, $k + 1 = 2.68$;
3. Para grau 3, $k + 1 = 3.59$;
4. Para grau 4, $k + 1 = 4.59$;

Com esses valores é notório que a diferença na convergência é pouca em relação aos casos de malha contínua. Levando em consideração que o custo computacional para malhas maiores é bem reduzido usando a técnica da malha descontínua, essa técnica se mostra efetiva para resolução desse tipo de problema de projeção L2.

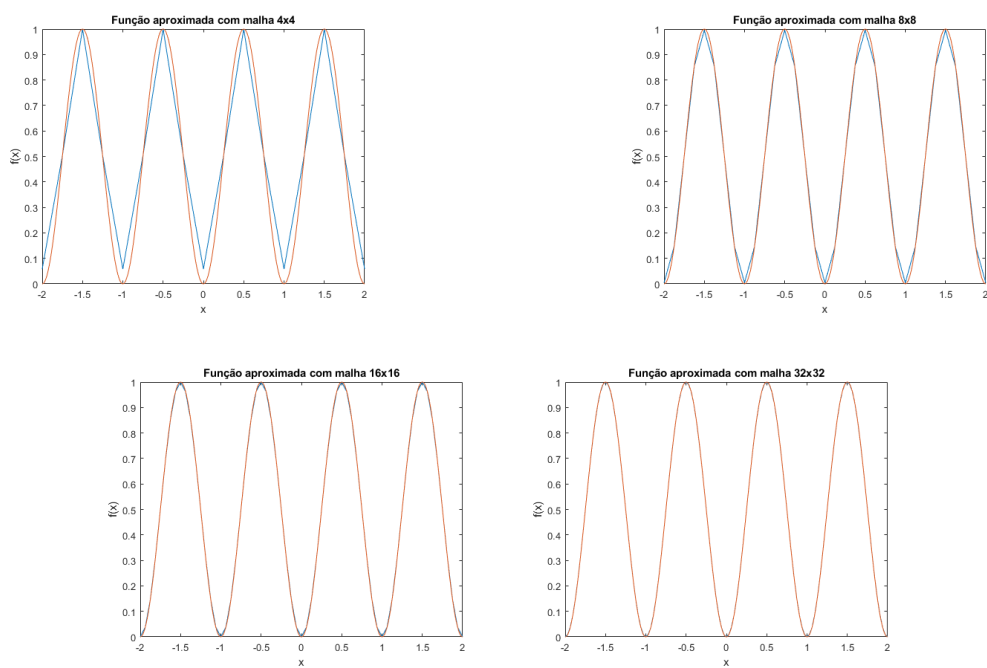
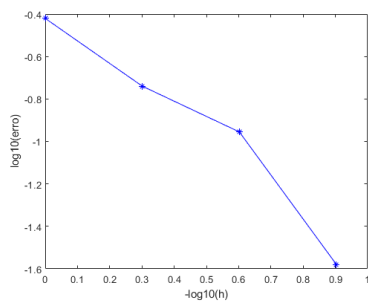
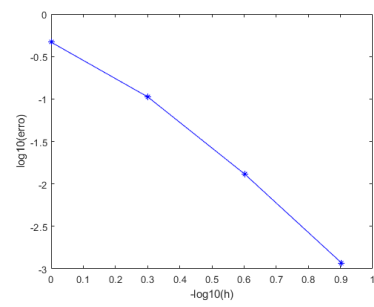


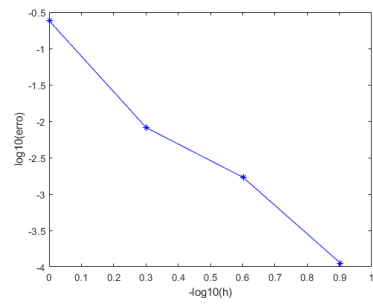
Figura 4: Aproximações quárticas.



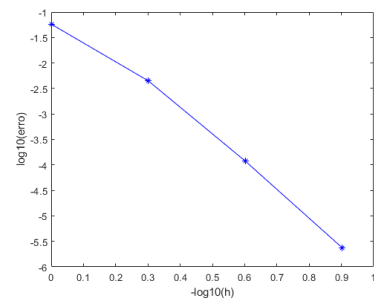
(a) Convergência para grau 1



(b) Convergência para grau 2

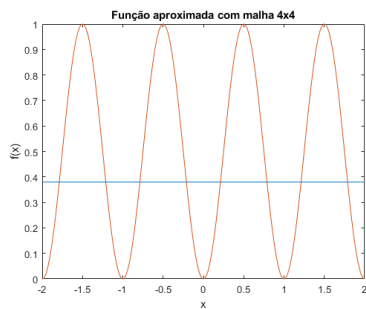


(c) Convergência para grau 3

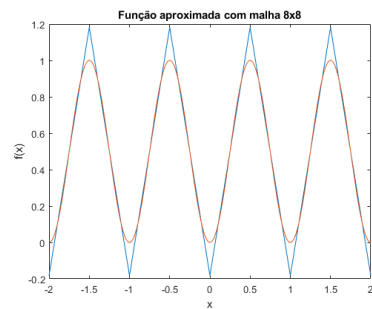


(d) Convergência para grau 4

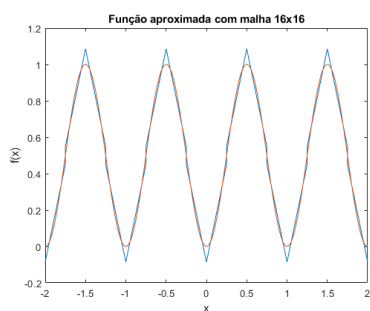
Figura 5: Convergências para malha contínua.



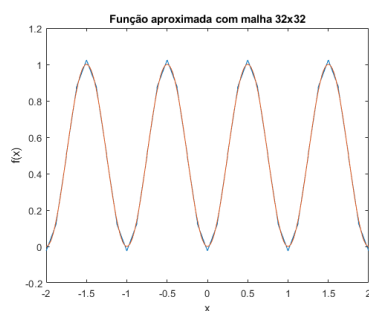
(a) 4 x 4.



(b) 8 x 8.



(c) 16 x 16.



(d) 32 x 32.

Figura 6: Aproximações lineares para malha descontínua

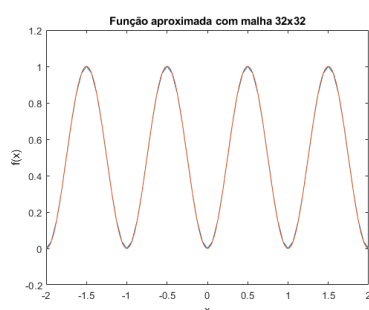
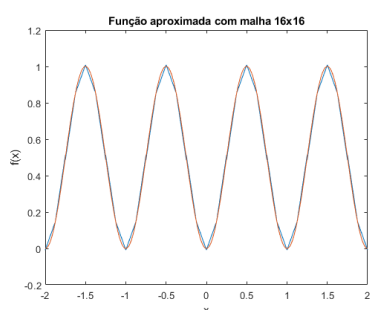
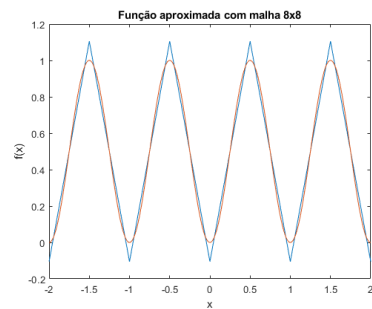
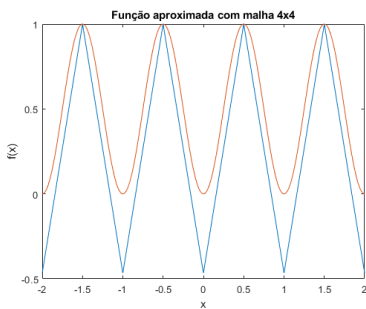


Figura 7: Aproximações quadráticas para malhas descontínuas.

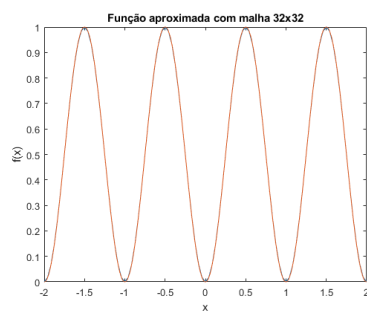
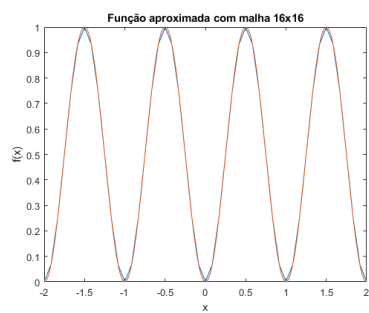
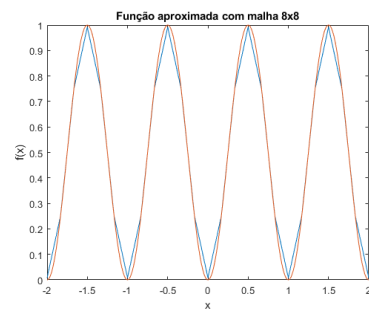
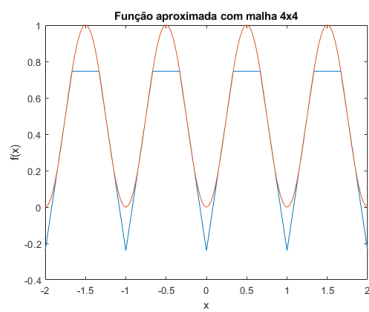


Figura 8: Aproximações cúbicas para malhas descontínuas.

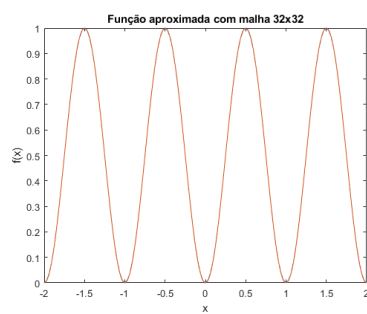
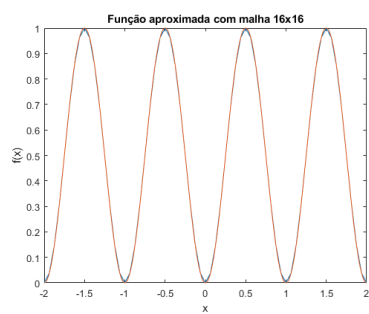
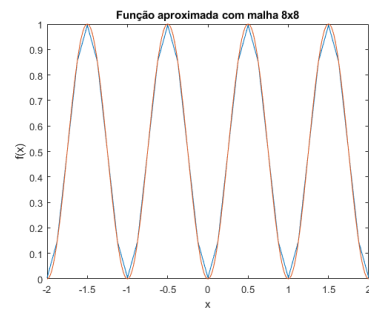
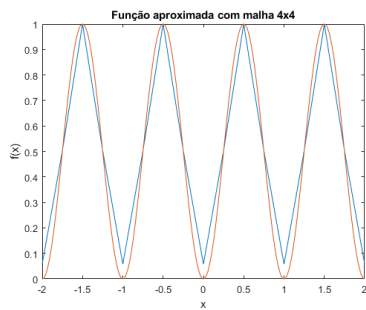
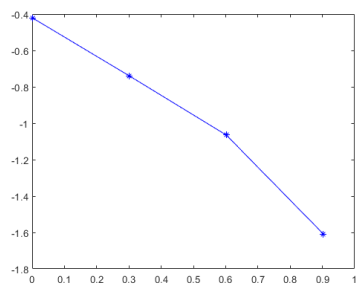
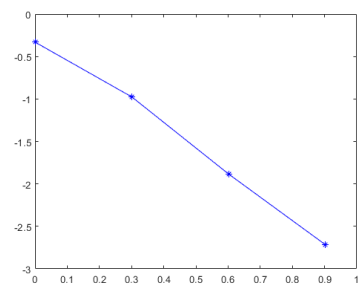


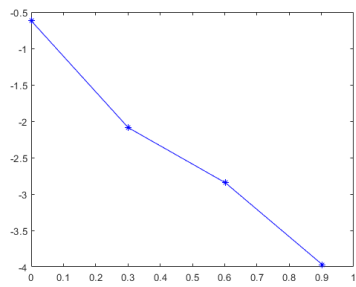
Figura 9: Aproximações quárticas para malha descontínua.



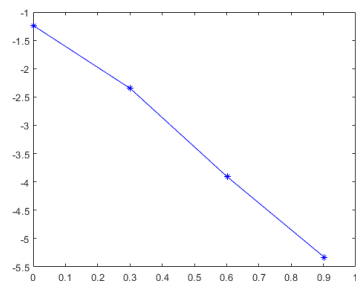
(a) Convergência para grau 1



(b) Convergência para grau 2



(c) Convergência para grau 3



(d) Convergência para grau 4

Figura 10: Convergências para malha descontínua.