Conservação de massa: equação da continuidade

Prof. Rafael Alves Bonfim de Queiroz
bonfimraf@gmail.com

Universidade Federal de Juiz de Fora
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

Conservação de massa

- Na ausência de fontes de massa ou de locais pelos quais a massa possa desaparecer (sorvedouros), toda a massa que entra no sistema deve sair e/ou se acumular no sistema
- A equação da continuidade pode ser obtida considerando a região infinitesimal δx e δy fixa em um ponto do escoamento

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Variação temporal da}\\ \text{quantidade de massa}\\ \text{no elemento}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{Descarga resultante}\\ \text{através das fronteiras}\\ \text{do elemento}\end{array}}$$

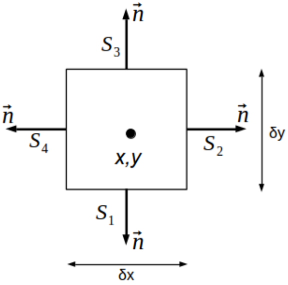
Conservação de massa

- Na ausência de fontes de massa ou de locais pelos quais a massa possa desaparecer (sorvedouros), toda a massa que entra no sistema deve sair e/ou se acumular no sistema
- A equação da continuidade pode ser obtida considerando a região infinitesimal δx e δy fixa em um ponto do escoamento

Variação temporal da quantidade de massa no elemento	=	Descarga resultante através das fronteiras do elemento

Elemento de fluido

- O elemento de fluido tem dimensões pequenas o suficiente para que seja possível escrever as propriedades macroscópicas, na fronteira do elemento de fluido como função dos respectivos valores definidos no centro do elemento

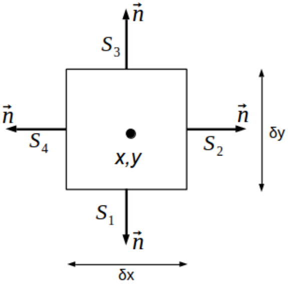


- A massa dentro do elemento de fluido:

$$m = \rho \delta x \delta y$$

Elemento de fluido

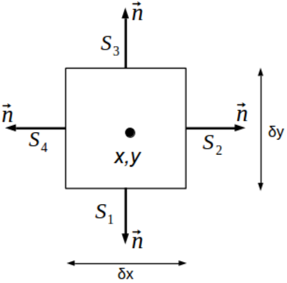
- O elemento de fluido tem dimensões pequenas o suficiente para que seja possível escrever as propriedades macroscópicas, na fronteira do elemento de fluido como função dos respectivos valores definidos no centro do elemento



- A massa dentro do elemento de fluido:

$$m = \rho \delta x \delta y$$

Variação da quantidade total de massa



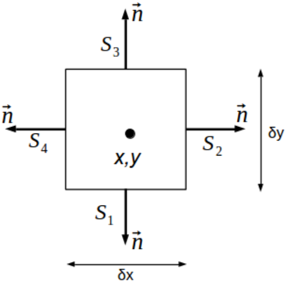
- A variação da quantidade total de massa dentro do elemento de fluido:

$$\frac{\delta m}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}(\rho \delta x \delta y) = \frac{\delta \rho}{\delta t} \delta x \delta y$$

- Relação entre a variação da quantidade total e a descarga de massa

$$\frac{\delta m}{\delta t} \sim \dot{m}$$

Variação da quantidade total de massa



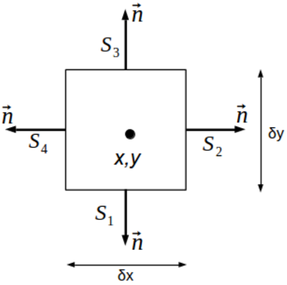
- A variação da quantidade total de massa dentro do elemento de fluido:

$$\frac{\delta m}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}(\rho \delta x \delta y) = \frac{\delta \rho}{\delta t} \delta x \delta y$$

- Relação entre a variação da quantidade total e a descarga de massa

$$\frac{\delta m}{\delta t} \sim \dot{m}$$

Descarga de massa

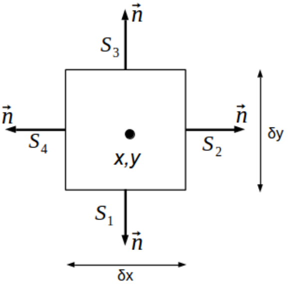


- A descarga de massa através da fronteira $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ é:

$$\boxed{\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS}$$

  - $\dot{m} = 0$: a quantidade de fluxo de massa que entra é a mesma que sai
  - $\dot{m} > 0$: tem mais fluido saindo da região que entrando;
  - $\dot{m} < 0$: tem mais fluido entrando na região do que saindo;

Descarga de massa

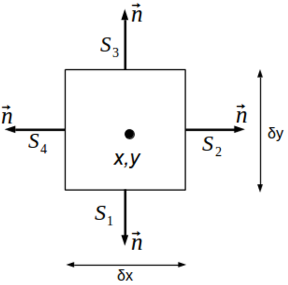


- A descarga de massa através da fronteira $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ é:

$$\boxed{\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS}$$

  - $\dot{m} = 0$: a quantidade de fluxo de massa que entra é a mesma que sai
  - $\dot{m} > 0$: tem mais fluido saindo da região que entrando;
  - $\dot{m} < 0$: tem mais fluido entrando na região do que saindo;

Descarga de massa

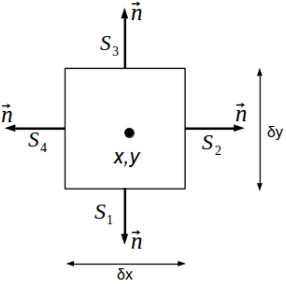


- A descarga de massa através da fronteira $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ é:

$$\boxed{\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS}$$

  - $\dot{m} = 0$: a quantidade de fluxo de massa que entra é a mesma que sai
  - $\dot{m} > 0$: tem mais fluido saindo da região que entrando;
  - $\dot{m} < 0$: tem mais fluido entrando na região do que saindo;

Descarga de massa

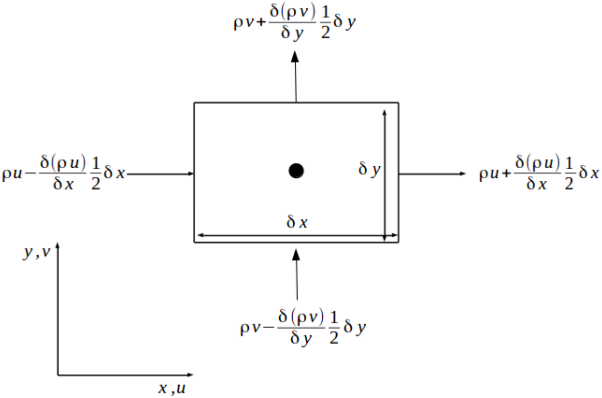


- A descarga de massa através da fronteira $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ é:

$$\boxed{\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS}$$

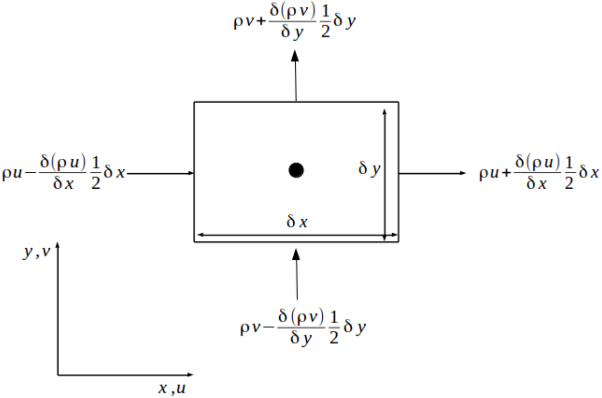
  - $\rho \mathbf{V} = (\rho u, \rho v)$
  - $dS_2 = dS_4 = \delta y$
  - $dS_1 = dS_3 = \delta x$

- Os fluxos de massa ρu e ρv através da fronteira de um elemento de fluido de volume constante e em uma posição fixa no escoamento



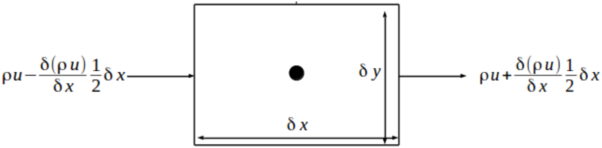
- Expansão até a primeira derivada dos fluxos de massa ρu e ρv na fronteira (polinômio de Taylor)

- Os fluxos de massa ρu e ρv através da fronteira de um elemento de fluido de volume constante e em uma posição fixa no escoamento



- Expansão até a primeira derivada dos fluxos de massa ρu e ρv na fronteira (polinômio de Taylor)

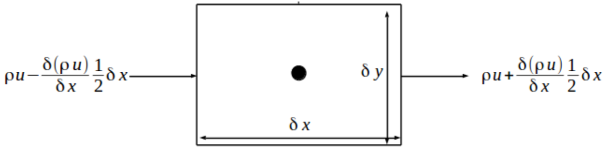
Fluxos de massa ρu



$$\boxed{\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS}$$

- As descargas de massa através das faces esquerda e direita são:
  - Descarga de massa na face esquerda:
  $$\dot{m}_e = -\left[\rho u - \frac{\delta x}{2}\frac{\delta(\rho u)}{\delta x}\right]\delta y$$
  - Descarga de massa na face direita:
  $$\dot{m}_d = \left[\rho u + \frac{\delta x}{2}\frac{\delta(\rho u)}{\delta x}\right]\delta y$$

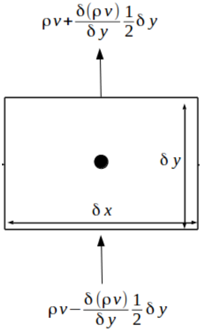
Fluxos de massa ρu



$$\boxed{\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS}$$

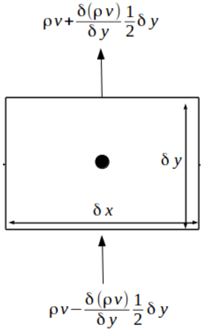
- As descargas de massa através das faces esquerda e direita são:
  - Descarga de massa na face esquerda:
    $$\dot{m}_e = -\left[\rho u - \frac{\delta x}{2}\frac{\delta(\rho u)}{\delta x}\right]\delta y$$
  - Descarga de massa na face direita:
    $$\dot{m}_d = \left[\rho u + \frac{\delta x}{2}\frac{\delta(\rho u)}{\delta x}\right]\delta y$$

Fluxos de massa ρv



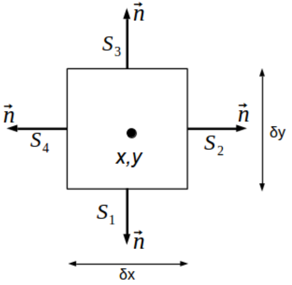
- As descargas de massa através das faces inferior e superior são:
  - Descarga de massa na face inferior:
    $$\dot{m}_i = -\left[\rho v - \frac{\delta y}{2}\frac{\delta(\rho v)}{\delta y}\right]\delta x$$
  - Descarga de massa na face superior:
    $$\dot{m}_s = \left[\rho v + \frac{\delta y}{2}\frac{\delta(\rho v)}{\delta y}\right]\delta x$$

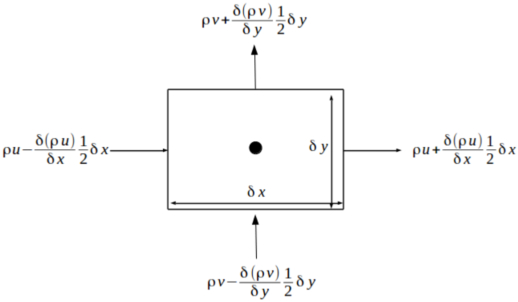
Fluxos de massa ρv



- As descargas de massa através das faces inferior e superior são:
  - Descarga de massa na face inferior:
$$\dot{m}_i = -\left[\rho v - \frac{\delta y}{2}\frac{\delta(\rho v)}{\delta y}\right]\delta x$$
  - Descarga de massa na face superior:
$$\dot{m}_s = \left[\rho v + \frac{\delta y}{2}\frac{\delta(\rho v)}{\delta y}\right]\delta x$$

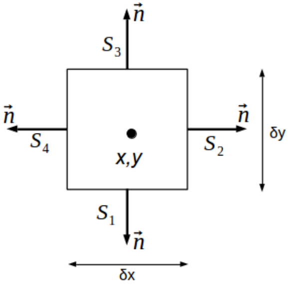
Fluxos de massa ρu e ρv

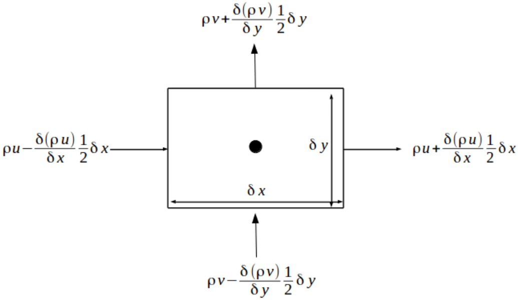




- Descarga na face esquerda: $\dot{m}_e = - \left[\rho u - \frac{\delta x}{2}\frac{\delta(\rho u)}{\delta x}\right]\delta y$
- Descarga na face direita: $\dot{m}_d = \left[\rho u + \frac{\delta x}{2}\frac{\delta(\rho u)}{\delta x}\right]\delta y$
- Descarga na face inferior: $\dot{m}_i = - \left[\rho v - \frac{\delta y}{2}\frac{\delta(\rho v)}{\delta y}\right]\delta x$
- Descarga na face superior: $\dot{m}_s = \left[\rho v + \frac{\delta y}{2}\frac{\delta(\rho v)}{\delta y}\right]\delta x$
- A descarga de massa resultante através do elemento de fluido:

$$\dot{m} = \dot{m}_d + \dot{m}_e + \dot{m}_s + \dot{m}_i = \frac{\delta(\rho u)}{\delta x}\delta x\delta y + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y}\delta x\delta y$$



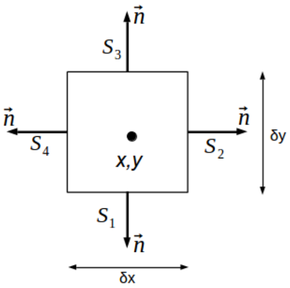


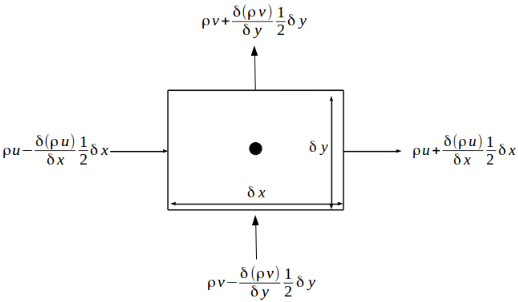
- A descarga de massa através da fronteira do elemento de fluido:

$$\boxed{\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS}$$

- A descarga de massa resultante através do elemento de fluido:

$$\boxed{\dot{m} = \left[\frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y}\right] \delta x \delta y}$$





- A descarga de massa através da fronteira do elemento de fluido:

$$\boxed{\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS}$$

- A descarga de massa resultante através do elemento de fluido:

$$\boxed{\dot{m} = \left[\frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y}\right] \delta x \delta y}$$

$$\dot{m} = \left[\frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y}\right]\delta x \delta y$$

$$\frac{\delta m}{\delta t} = \frac{\delta \rho}{\delta t}\delta x \delta y \sim \dot{m}$$

- $\dot{m} > 0$: tem mais fluido saindo da região que entrando $\Longrightarrow \frac{\delta \rho}{\delta t}\delta x \delta y < 0$: a massa total dentro do elemento diminui
- $\dot{m} < 0$: tem mais fluido entrando na região do que saindo $\Longrightarrow \frac{\delta \rho}{\delta t}\delta x \delta y > 0$: a massa total dentro do elemento aumenta
- $\dot{m} = 0$: a quantidade de fluxo de massa que entra é a mesma que sai $\Longrightarrow \frac{\delta \rho}{\delta t}\delta x \delta y = 0$: a massa total dentro do elemento não se altera $\Longrightarrow \rho = cte$
- $\therefore$ A variação da quantidade total de massa dentro do elemento de fluido é o negativo de $\dot{m}$:

$$\frac{\delta \rho}{\delta t}\delta x \delta y = -\dot{m} = -\left[\frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y}\right]\delta x \delta y$$

$$\dot{m} = \left[\frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y}\right]\delta x \delta y$$

$$\frac{\delta m}{\delta t} = \frac{\delta \rho}{\delta t}\delta x \delta y \sim \dot{m}$$

- $\dot{m} > 0$: tem mais fluido saindo da região que entrando $\implies \frac{\delta \rho}{\delta t}\delta x \delta y < 0$: a massa total dentro do elemento diminui
- $\dot{m} < 0$: tem mais fluido entrando na região do que saindo $\implies \frac{\delta \rho}{\delta t}\delta x \delta y > 0$: a massa total dentro do elemento aumenta
- $\dot{m} = 0$: a quantidade de fluxo de massa que entra é a mesma que sai $\implies \frac{\delta \rho}{\delta t}\delta x \delta y = 0$: a massa total dentro do elemento não se altera $\implies \rho = cte$
- $\therefore$ A variação da quantidade total de massa dentro do elemento de fluido é o negativo de $\dot{m}$:

$$\frac{\delta \rho}{\delta t}\delta x \delta y = -\dot{m} = -\left[\frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y}\right]\delta x \delta y$$

$$\dot{m} = \left[\frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y}\right] \delta x \delta y$$

$$\frac{\delta m}{\delta t} = \frac{\delta \rho}{\delta t}\delta x \delta y \sim \dot{m}$$

- $\dot{m} > 0$: tem mais fluido saindo da região que entrando $\implies \frac{\delta \rho}{\delta t}\delta x \delta y < 0$: a massa total dentro do elemento diminui
- $\dot{m} < 0$: tem mais fluido entrando na região do que saindo $\implies \frac{\delta \rho}{\delta t}\delta x \delta y > 0$: a massa total dentro do elemento aumenta
- $\dot{m} = 0$: a quantidade de fluxo de massa que entra é a mesma que sai $\implies \frac{\delta \rho}{\delta t}\delta x \delta y = 0$: a massa total dentro do elemento não se altera $\implies \rho = cte$
- $\therefore$ A variação da quantidade total de massa dentro do elemento de fluido é o negativo de $\dot{m}$:

$$\frac{\delta \rho}{\delta t}\delta x \delta y = -\dot{m} = -\left[\frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y}\right] \delta x \delta y$$

$$\dot{m} = \left[\frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y}\right]\delta x \delta y$$

$$\frac{\delta m}{\delta t} = \frac{\delta \rho}{\delta t}\delta x \delta y \sim \dot{m}$$

- $\dot{m} > 0$: tem mais fluido saindo da região que entrando $\Longrightarrow \frac{\delta \rho}{\delta t}\delta x \delta y < 0$: a massa total dentro do elemento diminui
- $\dot{m} < 0$: tem mais fluido entrando na região do que saindo $\Longrightarrow \frac{\delta \rho}{\delta t}\delta x \delta y > 0$: a massa total dentro do elemento aumenta
- $\dot{m} = 0$: a quantidade de fluxo de massa que entra é a mesma que sai $\Longrightarrow \frac{\delta \rho}{\delta t}\delta x \delta y = 0$: a massa total dentro do elemento não se altera $\Longrightarrow$ $\rho = cte$
- $\therefore$ A variação da quantidade total de massa dentro do elemento de fluido é o negativo de $\dot{m}$:

$$\frac{\delta \rho}{\delta t}\delta x \delta y = -\dot{m} = -\left[\frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y}\right]\delta x \delta y$$

- A variação da quantidade total de massa dentro do elemento de fluido:

$$\frac{\delta\rho}{\delta t}\delta x\delta y = -\dot{m} = -\left[\frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y}\right]\delta x\delta y$$

$$\Longrightarrow \frac{\delta\rho}{\delta t} = -\left[\frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y}\right]$$

$$\Longrightarrow \frac{\delta\rho}{\delta t} + \frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y} = 0$$

- Quando $\delta x, \delta y, \delta t \to 0$, tem-se a equação da continuidade 2D:

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0}$$

  - $\frac{\partial\rho}{\partial t}$: variação temporal da densidade do fluido
  - $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}$: taxa de variação da massa por unidade de volume de região

- A variação da quantidade total de massa dentro do elemento de fluido:

$$\frac{\delta\rho}{\delta t}\delta x\delta y = -\dot{m} = -\left[\frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y}\right]\delta x\delta y$$

$$\Longrightarrow \frac{\delta\rho}{\delta t} = -\left[\frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y}\right]$$

$$\Longrightarrow \frac{\delta\rho}{\delta t} + \frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y} = 0$$

- Quando $\delta x, \delta y, \delta t \to 0$, tem-se a equação da continuidade 2D:

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0}$$

  - $\frac{\partial\rho}{\partial t}$: variação temporal da densidade do fluido
  - $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}$: taxa de variação da massa por unidade de volume de região

- Equação da continuidade 2D:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0}$$

- Equação da continuidade em função do operador divergente (independente do sistema de coordenadas):

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0},$$

em que $\mathbf{V}$ é a velocidade

- Equação da continuidade 2D:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0}$$

- Equação da continuidade em função do operador divergente (independente do sistema de coordenadas):

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0},$$

em que $\mathbf{V}$ é a velocidade

- Em coordenadas cilíndricas, o produto escalar $\nabla \cdot \mathbf{F}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r f_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta},$$

em que $\mathbf{F} = (f_x \mathbf{x}, f_r \mathbf{r}, f_\theta \boldsymbol{\theta})$.

- Sejam $\mathbf{V} = (u\mathbf{x}, v\mathbf{r}, w\boldsymbol{\theta})$ e $\rho\mathbf{V} = (\rho u\mathbf{x}, \rho v\mathbf{r}, \rho w\boldsymbol{\theta})$, a equação da continuidade em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r \rho v)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho w)}{\partial \theta} = 0$$

- Em coordenadas cilíndricas, o produto escalar $\nabla \cdot \mathbf{F}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r f_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta},$$

  em que $\mathbf{F} = (f_x \mathbf{x}, f_r \mathbf{r}, f_\theta \boldsymbol{\theta})$.

- Sejam $\mathbf{V} = (u\mathbf{x}, v\mathbf{r}, w\boldsymbol{\theta})$ e $\rho\mathbf{V} = (\rho u\mathbf{x}, \rho v\mathbf{r}, \rho w\boldsymbol{\theta})$, a equação da continuidade em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r \rho v)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho w)}{\partial \theta} = 0$$

- No sistema Cartesiano 3D, a velocidade $\mathbf{V} = (u, v, w)$ e o operador ∇:

$$\nabla = \mathbf{x}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

- A equação da continuidade 3D:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0.$$

- No sistema Cartesiano 3D, a velocidade $\mathbf{V} = (u, v, w)$ e o operador ∇:

$$\nabla = \mathbf{x}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

- A equação da continuidade 3D:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

- Descarga de massa resultante através das fronteiras S do elemento de fluido (ou do domínio computacional) é dada por

$$\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

- Caso não existam fontes ou sorvedouros de massa em um volume $\mathcal{V}$, pode-se afirmar que qualquer variação de massa no interior desse volume se deve a variação da descarga resultante para esse volume
- Para esse volume $\mathcal{V}$, pode-se escrever:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = 0$$

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V}},$$

- Quando a quantidade de massa dentro do volume é constante:

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = 0 \Longrightarrow \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = 0$$

- Descarga de massa resultante através das fronteiras S do elemento de fluido (ou do domínio computacional) é dada por

$$\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

- Caso não existam fontes ou sorvedouros de massa em um volume $\mathcal{V}$, pode-se afirmar que qualquer variação de massa no interior desse volume se deve a variação da descarga resultante para esse volume
- Para esse volume $\mathcal{V}$, pode-se escrever:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = 0$$

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V}},$$

- Quando a quantidade de massa dentro do volume é constante:

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = 0 \Longrightarrow \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = 0$$

- Descarga de massa resultante através das fronteiras S do elemento de fluido (ou do domínio computacional) é dada por

$$\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

- Caso não existam fontes ou sorvedouros de massa em um volume $\mathcal{V}$, pode-se afirmar que qualquer variação de massa no interior desse volume se deve a variação da descarga resultante para esse volume
- Para esse volume $\mathcal{V}$, pode-se escrever:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = 0$$

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V}},$$

- Quando a quantidade de massa dentro do volume é constante:

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = 0 \Longrightarrow \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = 0$$

- Descarga de massa resultante através das fronteiras S do elemento de fluido (ou do domínio computacional) é dada por

$$\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

- Caso não existam fontes ou sorvedouros de massa em um volume $\mathcal{V}$, pode-se afirmar que qualquer variação de massa no interior desse volume se deve a variação da descarga resultante para esse volume
- Para esse volume $\mathcal{V}$, pode-se escrever:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = 0$$

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V}},$$

- Quando a quantidade de massa dentro do volume é constante:

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = 0 \Longrightarrow \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = 0$$

Teorema de Gauss - Teorema da divergência

Dado um campo vetorial $\mathbf{F}$ com derivadas de primeira ordem contínuas em $\mathcal{V}$, então:

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{F} d\mathcal{V} = \int_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS},$$

em que $\mathcal{V}$ é um volume e S sua superfície.

- Seja o fluxo de massa $\mathbf{F} = \rho \mathbf{V}$, temos que:

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = \int_{S} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

- Variação de massa no interior do volume $\mathcal{V}$:

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V}$$

- Descarga de massa resultante através das fronteiras S do volume:

$$\int_{S} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \dot{m}$$

Teorema de Gauss - Teorema da divergência

Dado um campo vetorial **F** com derivadas de primeira ordem contínuas em $\mathcal{V}$, então:

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{F} d\mathcal{V} = \int_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS},$$

em que $\mathcal{V}$ é um volume e S sua superfície.

- Seja o fluxo de massa $\mathbf{F} = \rho \mathbf{V}$, temos que:

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = \int_{S} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

  - Variação de massa no interior do volume $\mathcal{V}$:

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V}$$

  - Descarga de massa resultante através das fronteiras S do volume:

$$\int_{S} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \dot{m}$$

Teorema de Gauss - Teorema da divergência

Dado um campo vetorial **F** com derivadas de primeira ordem contínuas em $\mathcal{V}$, então:

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{F} d\mathcal{V} = \int_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS},$$

em que $\mathcal{V}$ é um volume e S sua superfície.

- Seja o fluxo de massa $\mathbf{F} = \rho \mathbf{V}$, temos que:

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = \int_{S} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

  - Variação de massa no interior do volume $\mathcal{V}$:

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V}$$

  - Descarga de massa resultante através das fronteiras S do volume:

$$\int_{S} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \dot{m}$$

- Seja o fluxo de massa $\mathbf{F} = \rho\mathbf{V}$, temos que:

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) d\mathcal{V} = \int_{S} \rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

  - Variação de massa no volume:
  $$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) d\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V}$$
  - Descarga de massa resultante através das fronteiras do volume:
  $$\int_{S} \rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \dot{m}$$

- Escoamento em que a descarga resultante ($\dot{m}$) seja nula, a variação de massa dentro do domínio computacional ($\mathcal{V}$) não se altera

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) d\mathcal{V} = \dot{m} = 0$$

- Como $\mathcal{V}$ é arbitrário, $\nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) = 0$ em todo domínio $\Longrightarrow$ escoamentos incompressíveis

- Nos domínios em que não haja fontes ou sorvedouros de massa, toda a massa que entra no domínio (fronteira de entrada de fluido) deve sair do mesmo (por uma fronteira de saída)

- Seja o fluxo de massa $\mathbf{F} = \rho\mathbf{V}$, temos que:

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) d\mathcal{V} = \int_S \rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

  - Variação de massa no volume:

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) d\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V}$$

  - Descarga de massa resultante através das fronteiras do volume:

$$\int_S \rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \dot{m}$$

- Escoamento em que a descarga resultante ($\dot{m}$) seja nula, a variação de massa dentro do domínio computacional ($\mathcal{V}$) não se altera

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) d\mathcal{V} = \dot{m} = 0$$

- Como $\mathcal{V}$ é arbitrário, $\nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) = 0$ em todo domínio $\Longrightarrow$ escoamentos incompressíveis
- Nos domínios em que não haja fontes ou sorvedouros de massa, toda a massa que entra no domínio (fronteira de entrada de fluido) deve sair do mesmo (por uma fronteira de saída)

- Seja o fluxo de massa $\mathbf{F} = \rho\mathbf{V}$, temos que:

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) d\mathcal{V} = \int_S \rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

  - Variação de massa no volume:

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) d\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V}$$

  - Descarga de massa resultante através das fronteiras do volume:

$$\int_S \rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \dot{m}$$

- Escoamento em que a descarga resultante ($\dot{m}$) seja nula, a variação de massa dentro do domínio computacional ($\mathcal{V}$) não se altera

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) d\mathcal{V} = \dot{m} = 0$$

- Como $\mathcal{V}$ é arbitrário, $\nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) = 0$ em todo domínio $\Longrightarrow$ escoamentos incompressíveis
- Nos domínios em que não haja fontes ou sorvedouros de massa, toda a massa que entra no domínio (fronteira de entrada de fluido) deve sair do mesmo (por uma fronteira de saída)

- Seja o fluxo de massa $\mathbf{F} = \rho\mathbf{V}$, temos que:

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) d\mathcal{V} = \int_{S} \rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

  - Variação de massa no volume:

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) d\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V}$$

  - Descarga de massa resultante através das fronteiras do volume:

$$\int_{S} \rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \dot{m}$$

- Escoamento em que a descarga resultante ($\dot{m}$) seja nula, a variação de massa dentro do domínio computacional ($\mathcal{V}$) não se altera

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) d\mathcal{V} = \dot{m} = 0$$

- Como $\mathcal{V}$ é arbitrário, $\nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) = 0$ em todo domínio $\Longrightarrow$ escoamentos incompressíveis
- Nos domínios em que não haja fontes ou sorvedouros de massa, toda a massa que entra no domínio (fronteira de entrada de fluido) deve sair do mesmo (por uma fronteira de saída)

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V}}$$

- Assumindo

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = 0 \implies \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = 0$$

- A variação de massa dentro do domínio computacional não se altera:

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = 0 \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \implies \rho = cte$$

- Como $\mathcal{V}$ é arbitrário, vimos que $\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$ em todo domínio.
- Do resultado acima, $\rho = cte$, tem-se nos domínios em que não haja fontes ou sorvedouros de massa:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \implies \text{escoamentos incompressíveis}$$

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V}}$$

- Assumindo

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = 0 \Longrightarrow \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = 0$$

- A variação de massa dentro do domínio computacional não se altera:

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Longrightarrow \rho = cte$$

- Como $\mathcal{V}$ é arbitrário, vimos que $\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$ em todo domínio.
- Do resultado acima, $\rho = cte$, tem-se nos domínios em que não haja fontes ou sorvedouros de massa:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \Longrightarrow \text{escoamentos incompressíveis}$$

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V}}$$

- Assumindo

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = 0 \implies \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = 0$$

- A variação de massa dentro do domínio computacional não se altera:

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = 0 \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \implies \rho = cte$$

- Como $\mathcal{V}$ é arbitrário, vimos que $\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$ em todo domínio.
- Do resultado acima, $\rho = cte$, tem-se nos domínios em que não haja fontes ou sorvedouros de massa:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \implies \text{escoamentos incompressíveis}$$

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V}}$$

- Assumindo

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = 0 \Longrightarrow \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = 0$$

- A variação de massa dentro do domínio computacional não se altera:

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Longrightarrow \rho = cte$$

- Como $\mathcal{V}$ é arbitrário, vimos que $\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$ em todo domínio.
- Do resultado acima, $\rho = cte$, tem-se nos domínios em que não haja fontes ou sorvedouros de massa:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \Longrightarrow \text{escoamentos incompressíveis}$$