

08 a 11 de Outubro de 2018
Instituto Federal Fluminense
Búzios - RJ

UM MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDO COMBINADO COM UM MÉTODO ADI PARA A SOLUÇÃO DE DESLOCAMENTOS MISCÍVEIS

Mateus Teixeira Magalhães¹ - mateusteixeiramagalhaes@ice.ufjf.br

Iury Higor Aguiar da Igreja² - iuryigreja@ice.ufjf.br

¹Universidade Federal de Juiz de Fora, MG, Brazil

²Universidade Federal de Juiz de Fora, Departamento de ciência da computação, MG, Brazil

Abstract. *O desenvolvimento de modelos matemáticos e computacionais para a simulação de escoamento de fluidos em meios porosos é de grande interesse em diversos campos da engenharia e ciências aplicadas como na exploração de reservatórios. A injeção de traçador é um exemplo de problema nessa área sendo um processo que permite obter informações sobre as características do reservatório. Em geral o traçador injetado não interfere nas propriedades do fluido que ali reside o que leva a um problema de escoamento de fluido miscível incompressível. Esse processo pode ser descrito matematicamente por um sistema de equações diferenciais parciais, formado por um subsistema para velocidade e pressão, composto pela conservação de massa e a lei de Darcy, e por uma equação de difusão/dispersão-convecção transiente, que descreve a concentração do traçador injetado. A proposta deste trabalho é obter uma aproximação numérica precisa para o subsistema da velocidade e pressão utilizando um método de elementos finitos misto híbrido dual estabilizado por termos de mínimos quadrados e acoplar a solução deste subsistema a equação de difusão/dispersão-convecção para obter a concentração do meio utilizando o método da direção implícita alternada (ADI) combinado com uma discretização upwind para estabilizar o termo convectivo. A vantagem da utilização do método híbrido estabilizado é a obtenção de taxas ótimas para o campo de velocidade e o tratamento de descontinuidades características de meios heterogêneos, e a vantagem na utilização do método ADI é o menor custo computacional ao resolver somente sistemas lineares tri-diagonais além do método ser incondicionalmente estável. Simulações computacionais em meios porosos homogêneos são realizadas a fim de ilustrar a flexibilidade e taxas de convergências dos métodos propostos.*

Keywords: *Problema de Darcy, Problema do Transporte, Métodos mistos híbridos, Método ADI, Métodos Estabilizados.*

1. Introdução

O desenvolvimento de modelos matemáticos e computacionais para a simulação de escoamento de fluidos em meios porosos é de grande interesse em diversos campos da engenharia e

ciências aplicadas como na exploração de reservatórios. A injeção de traçador é um exemplo de problema nessa área sendo um processo que permite obter informações sobre as características do reservatório. Em geral o traçador injetado não interfere nas propriedades do fluido que ali reside o que leva a um problema de escoamento de fluido miscível incompressível. Esse processo pode ser descrito matematicamente por um sistema de equações diferenciais parciais, formado por um subsistema para velocidade e pressão, composto pela conservação de massa e a lei de Darcy, e por uma equação de difusão/dispersão-convecção transiente, que descreve a concentração do traçador injetado. Apesar da concentração do traçador ser a variável de maior interesse, daremos uma certa atenção para o campo de velocidade, uma vez que a aproximação da concentração do traçador depende diretamente da aproximação do campo de velocidade, pois o mesmo faz com que o traçador se desloque no meio poroso. Métodos de elementos finitos mistos [4], [5], [6] vem sendo muito utilizados nos últimos anos para aproximar o problema de Darcy. A ideia principal dos métodos mistos é aproximar simultaneamente o campo de velocidade e de pressão utilizando diferentes espaços na aproximação de cada um, porém isso leva a um problema de compatibilidade entre os espaços de aproximações [7]. Outra forma mais acurada para se obter uma aproximação do campo de velocidade é através de um pós-processamento [8] no qual primeiro é resolvido o problema de Poisson envolvendo somente o campo de pressão e utilizar a aproximação para o campo de pressão obtida para aproximar o campo de velocidade. Porém essa abordagem possui um problema pois a aproximação para a velocidade fica com ordem de convergência pior do que a aproximação obtida para a pressão. Para resolver o problema de incompatibilidade de espaços métodos mistos estabilizados têm sido propostos em [9] e [10]. No geral essas formulações mistas estabilizadas usam espaços de elementos finitos de Lagrange contínuo para o escoamento de Darcy em meios porosos homogêneos, porém essas formulações não são apropriadas para simulação em meios heterogêneos com propriedades descontínuas. Este trabalho propõe então a solução do problema de injeção de traçador em duas etapas: primeiro o campo de velocidade e pressão do escoamento de Darcy é aproximado utilizando um método de elementos finitos misto híbrido estabilizado. A solução do campo de velocidade obtida é então utilizada para aproximação da concentração do traçador utilizando o método das direções implícitas alternadas (ADI).

2. Definições matemáticas do problema

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d=2$ ou 3) um domínio aberto limitado de contorno regular $\partial\Omega$ e $T > 0$ um número real fixo. Assim, o escoamento de um fluido newtoniano incompressível em um meio poroso rígido é representado por uma equação do tipo convecção-difusão predominantemente convectiva para a concentração da mistura dos fluidos, denotada por $c(\mathbf{x}, t)$, descrita pela equação do transporte

$$\varphi \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c - \operatorname{div}(D \nabla c) + \hat{f}c = g \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \quad (1)$$

com as seguintes condições iniciais e de contorno

$$c(\mathbf{x}, 0) = c_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega, \quad (2)$$

$$D \nabla c \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T). \quad (3)$$

A velocidade de Darcy $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ é dada pela solução do subsistema elíptico:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = f \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, T), \quad (4)$$

$$\mathbf{u} = -K(\mathbf{x}, c) \nabla \rho \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, T), \quad (5)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma = \partial\Omega \times (0, T), \quad (6)$$

composto pelas equações de conservação de massa (4) e de Darcy (5). Temos que ρ representa a pressão hidrostática e $\phi = \phi(\mathbf{x})$ é a porosidade efetiva da rocha. Além disso $K(\mathbf{x}, c)$ é o tensor de condutividade hidráulica, dado por $K(\mathbf{x}, c) = \frac{k(\mathbf{x})}{\mu(c)}$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ onde $k(\mathbf{x})$ é o tensor de permeabilidade absoluta e $\mu(c)$ a viscosidade da mistura dos fluidos. As funções \hat{f} , f e g representam os termos de fonte e sumidouro e $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ denota a normal exterior à fronteira $\partial\Omega$. Além disso o tensor de dispersão é definido por $D = D(\mathbf{u}) = \alpha_{mol}I + |\mathbf{u}| \{ \alpha_l E(\mathbf{u}) + \alpha_t E^\perp(\mathbf{u}) \}$ com $E(\mathbf{u}) = \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$, $E^\perp(\mathbf{u}) = I - E(\mathbf{u})$, onde a norma $|\mathbf{u}|$ é tal que $|\mathbf{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_d^2$, \otimes é o produto tensorial e α_{mol} , α_l e α_t são os coeficientes de difusão molecular e de dispersão longitudinal e transversal, respectivamente. Em geral a dispersão longitudinal (α_l) é maior do que a transversal (α_t), onde supomos $0 < \alpha_{mol} \leq \alpha_l$; $\alpha_l \geq \alpha_t > 0$; e $0 \leq \phi \leq 1$. Seguindo ainda a lei empírica [11] para a viscosidade da mistura $\mu(c) = \mu_{res} [1 - c + M^{\frac{1}{4}} c]^4$, $c \in [0, 1]$ onde M denota a razão de mobilidade que, para escoamentos miscíveis, é definida como sendo a taxa entre viscosidades do fluido residente (μ_{res}) e a do injetado (μ_{inj}), ($M = \mu_{res}/\mu_{inj}$). Quando $M \gg 1$ (razão de mobilidade adversa) o fluido injetado é altamente viscoso, o problema estudado torna-se fortemente não-linear e acoplado exigindo métodos numéricos robustos que busquem de forma precisa e com baixo custo computacional resolver os complexos fenômenos físicos envolvidos.

3. Método de elementos finitos misto híbrido dual estabilizado - Problema de Darcy

Para aproximar o campo de velocidade definido pelo problema de Darcy (4)-(6) utilizaremos um método de elementos finitos misto híbrido dual estabilizado. A seguir apresentamos a formulação para o problema de Darcy como apresentado nos trabalhos [1]. Essa formulação consiste de um conjunto de problemas locais, definido no nível de cada elemento \mathcal{K} da discretização de elementos finitos em uma malha de elementos τ_h , acoplado a um sistema global no qual somente os multiplicadores de Lagrange, definidos como sendo a pressão ρ na interface dos elementos, é calculado. Termos de estabilização são adicionados para gerar uma formulação adjunta consistente e simétrica possibilitando flexibilidade na escolha de funções base dos espaços de aproximação.

Seja τ_h uma malha regular de elementos finitos no domínio $\Omega \left(\Omega = \bigcup_{\mathcal{K}} \mathcal{K} \right)$. Seja o conjunto de todas as arestas dos elementos \mathcal{K} da malha definido como $\mathcal{E}_h = \{e : e \text{ uma aresta de } \mathcal{K} \quad \forall \mathcal{K} \in \tau_h\}$ e $\mathcal{E}_h^0 = \{e \in \mathcal{E}_h \text{ com } e \text{ sendo uma aresta interior}\}$ o conjunto de arestas interiores. Definindo os espaços de funções $U_\delta = \prod_{\mathcal{K}} (H^1(\mathcal{K}) \times (H^1(\mathcal{K})))$, $Q_\delta = \prod_{\mathcal{K}} H^1(\mathcal{K})$ e $M = \{\mu \in L^2(e) \quad \forall e \in \mathcal{E}_h\}$.

Problema: achar $\mathbf{u}_h \in U_h^m$, $\rho_h \in Q_h^l$ e o multiplicador de lagrange $\lambda_h \in M_h^n$, tal que:

$$\sum_{\mathcal{K}} \left[(K^{-1} \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{K}} - (\rho_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)_{\mathcal{K}} + \int_{\partial \mathcal{K}} \lambda_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{K}}) ds + \delta_1 (\operatorname{div} \mathbf{u}_h - f, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)_{\mathcal{K}} \right. \\ \left. + \delta_2 (K^{-1} \mathbf{u}_h + \nabla \rho_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{K}} + \delta_3 (\nabla \times \mathbf{u}_h, \nabla \times \mathbf{v}_h)_{\mathcal{K}} \right] = 0, \forall \mathbf{v}_h \in U_h^m, \quad (7)$$

$$\sum_{\mathcal{K}} \left[-(\operatorname{div} \mathbf{u}_h, q_h)_{\mathcal{K}} + (f, q_h)_{\mathcal{K}} + \delta_2 (K^{-1} \mathbf{u}_h + \nabla \rho_h, \nabla q_h)_{\mathcal{K}} \right. \\ \left. + \int_{\partial \mathcal{K}} \beta (\rho_h - \lambda_h) q_h ds \right] = 0, \forall q_h \in Q_h^l, \quad (8)$$

$$\sum_{\mathcal{K}} \int_{\partial \mathcal{K}} \left[(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{K}}) \mu ds + \int_{\partial \mathcal{K}} \beta (\lambda_h - \rho_h) \mu ds \right] = 0, \forall \mu \in M_h^n. \quad (9)$$

onde m , l e n são os graus dos polinômios utilizados para aproximar \mathbf{u}_h , ρ_h e λ_h utilizando aproximação por elementos finitos. Sendo

$$Q_h^l = \{q \in Q_{\delta} : q|_{\mathcal{K}} \in \mathcal{R}^l \quad \forall \mathcal{K} \in \tau_h\}$$

$$U_h^m = \{\mathbf{v} \in U_{\delta} : \mathbf{v}|_{\mathcal{K}} \in \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^m \quad \forall \mathcal{K} \in \tau_h\}$$

$$M_h^n = \{\mu \in M : \mu|_{\mathcal{K}} \in \mathcal{P}^n \quad \forall e \in \mathcal{E}_h\}$$

onde \mathcal{R}^l é o conjunto de polinômios de grau menor ou igual à l e \mathcal{P}^n é o conjunto de polinômios de grau menor ou igual a n nas arestas e dos elementos. O problema (7)-(9) é resolvido utilizando a estratégia de condensação estática, que consiste em separar o problema em 2 etapas. Na primeira etapa um sistema global é montado para resolver o multiplicador de Lagrange (definido como sendo a pressão ρ) no contorno dos elementos. Conhecido o valor do multiplicador, na segunda etapa é possível calcular a variável de interesse (velocidade \mathbf{u} e pressão ρ) em cada subdomínio, montando assim sistemas locais em cada elemento \mathcal{K} da malha τ_h . A grande vantagem dessa abordagem é que a dimensão do sistema global montado depende somente dos graus de liberdade associados aos multiplicadores, levando a um menor custo computacional [12], uma vez que o custo para solução dos sistemas locais é desprezível em relação ao custo para solução dos sistemas locais.

4. Método da direção implícita alternada (ADI) - Equação de transporte do traçador

Para solução da concentração $c(\mathbf{x}, t)$, dado por (1)-(3) será utilizado uma aproximação utilizando o método de diferenças finitas de direção implícita alternada (ADI, do inglês *alternate direction implicit*) como feito em como [3] porém utilizando o método somente para aproximação da concentração do traçador. Expandindo os termos convectivo $\mathbf{u} \cdot \nabla c$ e difusivo $\operatorname{div}(D(\mathbf{u}) \nabla c)$ para o problema definido em duas dimensões, temos:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla c = u_x \frac{\partial c}{\partial x} + u_y \frac{\partial c}{\partial y} \quad (10)$$

$$\operatorname{div}(D(\mathbf{u})\nabla c) = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{11}\frac{\partial c}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{22}\frac{\partial c}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{12}\frac{\partial c}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{21}\frac{\partial c}{\partial x}\right) \quad (11)$$

Para aproximação das derivadas do termo difusivo (11), temos os seguintes operadores:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial c}{\partial x}\right) \approx \delta_x(a\delta_x)[c_{i,j}] = \frac{1}{h^2}\{a(i+1/2, j)c_{i+1,j} - [a(i+1/2, j) + a(i-1/2, j)]c_{i,j} + a(i-1/2, j)c_{i-1,j}\} \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial c}{\partial y}\right) \approx \delta_y(a\delta_y)[c_{i,j}] = \frac{1}{h^2}\{a(i, j+1/2)c_{i,j+1} - [a(i, j+1/2) + a(i, j-1/2)]c_{i,j} + a(i, j-1/2)c_{i,j-1}\} \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial c}{\partial y}\right) \approx \delta_x(a\delta_y)[c_{i,j}] = \frac{1}{4h^2}\{a(i+1, j)c_{i+1,j+1} - a(i+1, j)c_{i+1,j-1} - a(i-1, j)c_{i-1,j+1} + a(i-1, j)c_{i-1,j-1}\} \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial c}{\partial x}\right) \approx \delta_y(a\delta_x)[c_{i,j}] = \frac{1}{4h^2}\{a(i, j+1)c_{i+1,j+1} - a(i, j+1)c_{i-1,j+1} - a(i, j-1)c_{i+1,j-1} + a(i, j-1)c_{i-1,j-1}\} \quad (15)$$

Como a equação do transporte é um problema difusivo-convectivo predominantemente convectivo temos um número de *Peclet* alto e para estabilizar a aproximação evitando oscilações utilizamos um esquema upwind no qual definimos os operadores:

$$u_x \frac{\partial c}{\partial x} \approx u_x \delta_x[c_{i,j}] = \begin{cases} u_x(i, j) \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h} & \text{se } u_x(i, j) > 0 \\ u_x(i, j) \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{h} & \text{se } u_x(i, j) \leq 0 \end{cases} \quad (16)$$

$$u_y \frac{\partial c}{\partial y} \approx u_y \delta_y[c_{i,j}] = \begin{cases} u_y(i, j) \frac{c_{i,j} - c_{i,j-1}}{h} & \text{se } u_y(i, j) > 0 \\ u_y(i, j) \frac{c_{i,j+1} - c_{i,j}}{h} & \text{se } u_y(i, j) \leq 0 \end{cases} \quad (17)$$

A ideia do método ADI é achar uma aproximação em cada instante de tempo em dois passos. No primeiro passo as derivadas na direção x são aproximadas de forma implícita e os demais termos de forma explícita. No segundo passo as derivadas na direção y são aproximadas de forma implícita e os demais termos de forma implícita. Dessa forma para a equação de transporte (1)-(3) o método é definido como:

Primeiro Passo (Implícito em x)

$$\varphi \frac{c_{i,j}^{n+1/2} - c_{i,j}^n}{\Delta t/2} + u_x \delta_x[c_{i,j}^{n+1/2}] + u_y \delta_y[c_{i,j}^n] - \delta_x(D_{11}\delta_x)[c_{i,j}^{n+1/2}] - \delta_y(D_{22}\delta_y)[c_{i,j}^n] - \delta_x(D_{12}\delta_y)[c_{i,j}^n] - \delta_y(D_{21}\delta_x)[c_{i,j}^n] = g_{i,j}^n \quad (18)$$

Segundo Passo (Implícito em y)

$$\varphi \frac{c_{i,j}^{n+1} - c_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} + u_x \delta_x [c_{i,j}^{n+1/2}] + u_y \delta_y [c_{i,j}^{n+1}] - \delta_x (D_{11} \delta_x) [c_{i,j}^{n+1/2}] - \delta_y (D_{22} \delta_y) [c_{i,j}^{n+1}] - \delta_x (D_{12} \delta_y) [c_{i,j}^{n+1/2}] - \delta_y (D_{21} \delta_x) [c_{i,j}^{n+1/2}] = g_{i,j}^{n+1/2} \quad (19)$$

A vantagem do método ADI em relação aos métodos tradicionais de diferenças finitas está no custo computacional, uma vez que em cada passo um sistema linear $Ax = b$ é montado de forma que A é sempre uma matriz tri-diagonal. Além do custo computacional o método é incondicionalmente estável e de segunda ordem no tempo e primeira ordem no espaço devido à discretização do termo convectivo utilizando o esquema upwind de primeira ordem.

4.1 Taxa de convergência dos métodos

Para analisar a taxa de convergência do método de elementos finitos híbrido dual estabilizado foi considerado a solução analítica conhecida para o problema de Darcy. Foi utilizado uma malha de elementos finitos quadrados de (4×4) elementos dobrando o número de elementos em cada direção até uma malha de (64×64) elementos, os termos de estabilização $\delta_1 = 0.5$, $\delta_2 = -0.5$, $\delta_3 = 0.5$ e $\beta = 0$. Abaixo temos o gráfico de erro com relação à solução analítica conhecida para cada malha utilizando funções base de primeira ordem para velocidade e pressão, onde o coeficiente da reta do gráfico indica a taxa de convergência.

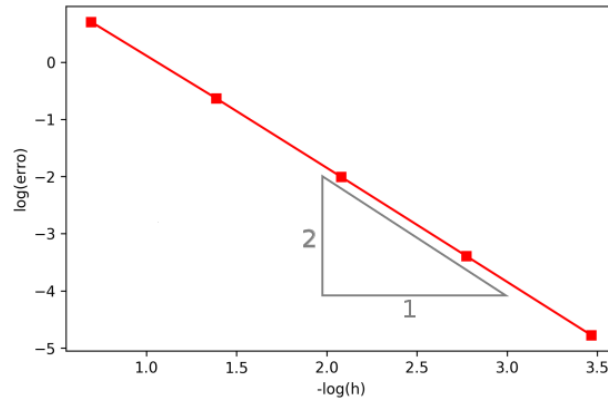


Figure 1- Gráfico de erro da velocidade u para cada malha.

Para analisar a taxa de convergência do método ADI temos o problema: Encontrar $u(x, y, t) \in \Omega \times \Theta$ satisfazendo a seguinte equação:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \epsilon \Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = f(x, y, t) & \Omega \times \theta \\ u(x, y, t) = \bar{u} & \partial\Omega \times \theta \\ u(x, y, 0) = \phi(x, y) & \Omega \end{cases} \quad (20)$$

Onde $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, $\theta = [0, 3]$, $\epsilon = 0.01$ e $\mathbf{b}(x, y) = (-4y, 4x)$. Considerando a solução analítica dada por:

$$u(x, y, t) = \frac{2\gamma^2}{2\gamma^2 + 4\epsilon t} e^{-\frac{(\bar{x}-x_c)^2 + (\bar{y}-y_c)^2}{2\gamma^2 + 4\epsilon t}} \quad (21)$$

- $\bar{x} = x \cos(4t) + y \sin(4t) \quad \bar{y} = -x \sin(4t) + y \cos(4t)$
- $x_c = 0.2, \quad y_c = 0, \quad \gamma = 0.1, \quad f(x, y, t) = 0, \quad \bar{u} = u(x, y, t) \text{ em } \partial\Omega$

Foi utilizado uma malha de 4×4 pontos dobrando o número de pontos em cada direção até termos uma malha de 64×64 pontos e para calcular o erro entre a solução numérica e a analítica foi utilizando a norma do máximo em $t = 3$. Abaixo temos o gráfico de erro com relação à solução analítica para cada malha onde a inclinação da reta no gráfico indica a taxa de convergência.

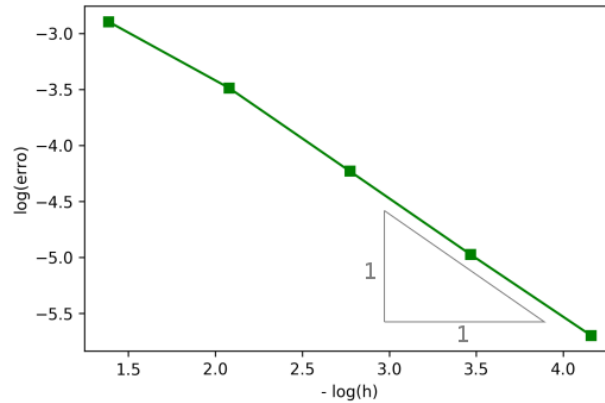


Figure 2- Gráfico de erro de u para diferentes malhas

5. Experimentos computacionais

Os métodos aqui apresentados foram testado em um problema clássico conhecido como *five-spot*. O problema consiste em uma célula quadrada com poços produtores nos vértices e um poço injetor no centro geométrico (ou vice-versa). No poço produtor é injetado o traçador que se mistura com o fluido residente e o empurra até os poços produtores. Apesar de ser necessária uma malha dessas células para simular uma extração, por conta das condições de simetria, podemos considerar apenas um quadrante de uma célula e repetir esse comportamento no espaço, desde que haja condição de contorno de fluxo nulo entre as retas que separam os quadrantes [13]. Para o experimento foi utilizado um quadrante de lado $L = 1000 \text{ ft}$ onde a célula de injeção está localizado no canto inferior esquerdo ($x = y = 0$) e a célula produtora no canto superior direito ($x = y = L$).

A simulação foi feita para um meio poroso homogêneo de permeabilidade constante $k(\mathbf{x}) = k = 1000 \text{ mD}$, porosidade $\varphi = 0.1$, difusão molecular $\alpha_{mol} = 0$, dispersão longitudinal $\alpha_l = 1 \text{ ft}$ e dispersão transversal $\alpha_t = 0 \text{ ft}$. Viscosidade do fluido residente $\mu = 1 \text{ cP}$ e a taxa de injeção do traçador de 200 ft^2 por dia de forma contínua ao longo de 2000 dias. Para aproximação do campo de velocidade em (4)-(6) foi utilizado uma malha de 80×80 elementos finitos quadrados utilizando funções base com polinômios de primeira ordem tanto para a velocidade \mathbf{u} quanto para a pressão p e constantes dos termos de estabilização $\delta_1 = 0.5$, $\delta_2 = -0.5$, $\delta_3 = 0.5$ e $\beta = 0$. A figura abaixo ilustra o campo de velocidade encontrado.

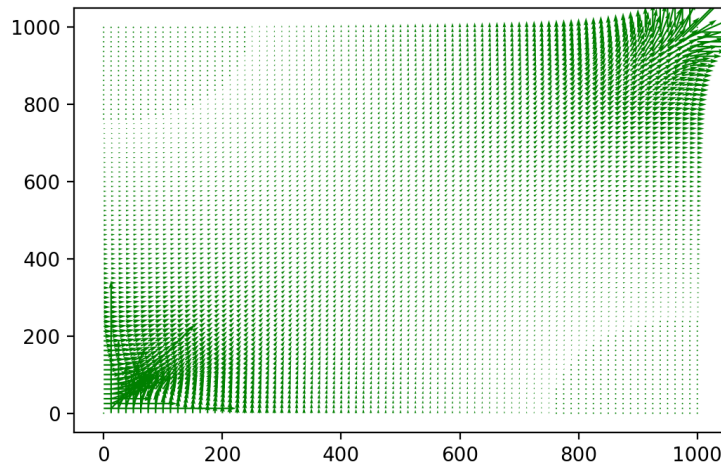


Figure 3- Campo de velocidade para o problema five-spot em meio poroso homogêneo

Para aproximação da concentração do traçador foi utilizado uma malha de diferenças finitas de (81×1) pontos com $\Delta t = 2.5$ dias. O campo de velocidade \mathbf{u} é dado como entrada à partir da solução prévia do problema de Darcy (4)-(6) utilizando o método de elementos finitos com os parâmetros descritos anteriormente. Abaixo temos o resultado para concentração do traçador em diferentes instantes de tempo.

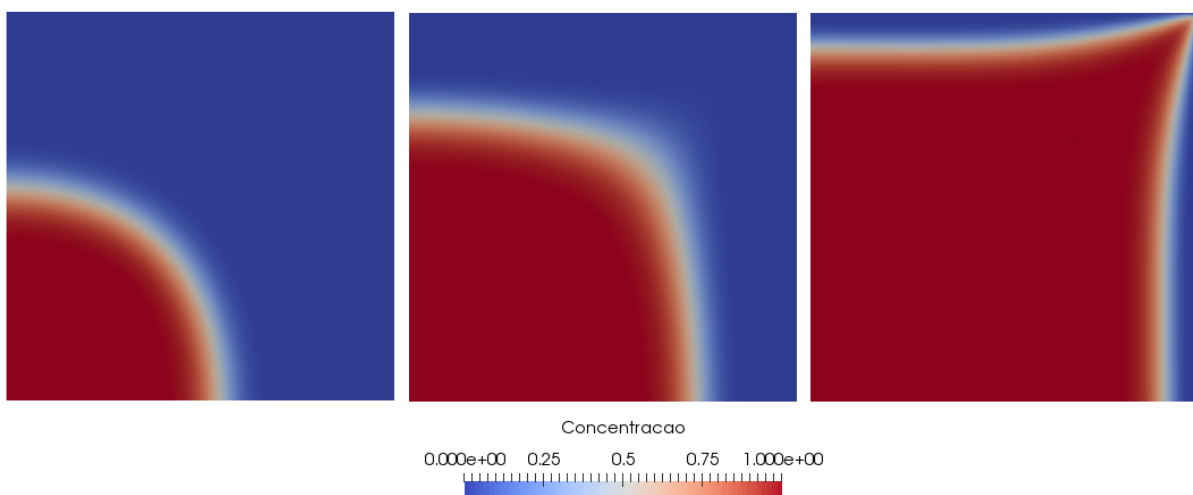


Figure 4- Solução numérica obtida para concentração do traçador em 125, 250 e 500 dias.

6. Conclusões

A combinação dos métodos de elementos finitos com o método ADI se mostrou eficiente para o problema de deslocamentos miscíveis em 2D obtendo uma aproximação de segunda ordem para o campo de velocidade e primeira ordem para a concentração da mistura. Algumas limitações do acoplamento do método de elementos finitos com o método ADI se dão ao transferir informações sobre o campo de velocidade aproximado em uma malha de elementos finitos para uma malha de diferenças finitas utilizada para calcular a concentração do traçador. Trabalhos que tratam o mesmo problema costumam utilizar de um mesmo método para solução campo

de velocidade no problema de Darcy e para concentração do traçador, utilizando o método ADI para aproximar a concentração do traçador traz uma vantagem no custo computacional ao resolver sistemas com matrizes tri-diagonais em cada passo.

REFERENCES

- [1] Nunez, Yoissell R and Faria, Cristiane O and Loula, Abimael FD and Malta, Sandra MC. (2012), “A mixed-hybrid finite element method applied to tracer injection processes”, *International Journal of Modeling and Simulation for the Petroleum Industry*, vol 6.
- [2] Núñez, YR and Faria, CO and Loula, AFD and Malta, SMC. (2017), “Um método híbrido de elementos finitos aplicado a deslocamentos miscíveis em meios porosos heterogêneos”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, vol 33, 45-51.
- [3] Corrêa, MR and Loula, AFD and Garcia, ELM (2004), “Métodos de Diferenças Finitas de Direções Alternadas Implícitos para Modelagem de Águas Subterrâneas”, *Trends in Applied and Computational Mathematics*, vol 5, 65-76.
- [4] P. Raviart and J. Thomas (1997), “A mixed finite element method for second order elliptic problems”, in *Lecture Notes in Math, I. Galligani and E. Magenes*, Springer-Verlag, New York, vol 606.
- [5] F. Brezzi, J. Douglas, and L. Marini (1985), “Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems”, in *Numerische Mathematik*, vol 47, 217-235.
- [6] F. Brezzi and M. Fortin (1991), “Mixed and Hybrid Finite Element Methods.”, Springer-Verlag.
- [7] F. Brezzi (1974), “On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers.”, *Analyse numérique/Numerical Analysis (RAIRO)*, vol 8, 129-151.
- [8] A. Loula, F. Rochinha, and M. A. Murad, 1995, “Higher-order gradient post-processings for second-order elliptic problems.”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol 128, 361-381.
- [9] M. Correa and A. Loula, 2007, “Stabilized velocity post-processings for Darcy flow in heterogeneous porous media.”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol 23, 461-489.
- [10] M. Correa and A. Loula, 2008, “Unconditionally stable mixed finite element methods for Darcy flow.”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol 197.
- [11] A. Settari, H.S. Price, T. Dupont, 1997, “Development and application of variational methods for simulation of miscible displacement in porous media.”, *Soc. Pet. Eng. J. Trans*, 228-246.
- [12] IGREJA, Iury; FARIA, Cristiane; LOULA, Abimael FD, 2015, “Estudo de Convergência de Aproximações por Elementos Finitos Híbridos Estabilizados para o Problema de Stokes.”, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, vol 3.
- [13] E. F. de A. Quintino; L. H. Costa Neto; Aplicação de Simulação Numérica e Análises de Sensibilidade para Tomada de Decisão na Exploração de Reservatórios de Petróleo Produzidos por Malhas *Five-spot* de Injeção de Água, *Anais do XVII Simpósio de Pesquisa Operacional e Logística da Marinha - SPOLM 2014*, v.1, 2014.

A HYBRID FINITE ELEMENT METHOD COMBINED WITH AN ADI METHOD FOR SOLUTION OF MISCIBLE DISPLACEMENTS

Abstract. *The development of mathematical and computational models for the simulation of flow of fluids in porous media is of great interest in several fields of engineering and applied sciences as in the exploration of reservoirs. The tracer injection is an example of a problem in this area being a process that allows to obtain information about the characteristics of the reservoir. In general the injected tracer does not interfere with the properties of the fluid therein which leads to an incompressible miscible fluid flow problem. This process can be mathematically described by a system of partial differential equations, formed by a subsystem for velocity and pressure, composed by mass conservation and Darcy's law, and by a transient diffusion / dispersion-convection equation, which describes the concentration of the injected tracer. The purpose of this work is to obtain a precise numerical approximation for the velocity and pressure subsystem using a dual hybrid mixed finite element method stabilized by least squares terms and to couple the solution of this subsystem to the diffusion / dispersion-convection equation to obtain the concentration of the medium using the alternate implied steering method (ADI) combined with an upwind discretization to stabilize the convective term. The advantage of using the stabilized hybrid method is to obtain optimum rates for the velocity field and the treatment of characteristic discontinuities of heterogeneous media, and the advantage in using the ADI method is the lowest computational cost when solving only tri-diagonal linear systems besides the method being unconditionally stable. Computational simulations in homogeneous porous media are performed to illustrate the flexibility and convergence rates of the proposed methods.*

Keywords: *Darcy problem, Transport equation, Hybrid finite element methods, alternate direction implicit method, Stabilized methods.*