Mecânica dos Fluidos Computacional
Escoamentos compressíveis

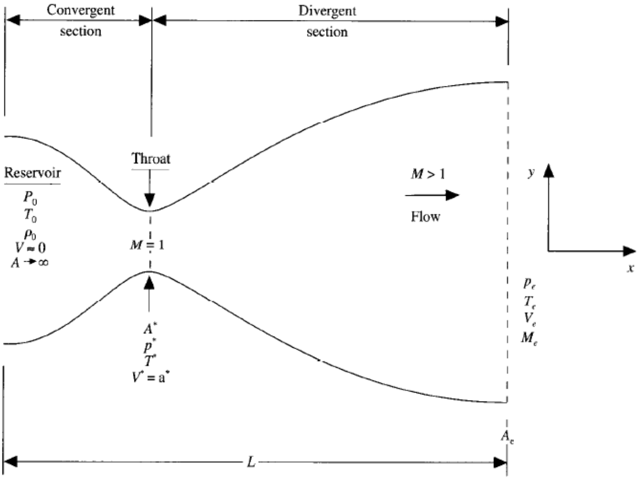
Iury Higor Aguiar da Igreja
Patricia Habib Hallak
Rafael Alves Bonfim de Queiroz

patricia.hallak@ufjf.edu.br
patriciahallak@yahoo.com

14 September 2020

Estudo de caso - Escoamento Isentrópico Subsônico-Supersônico

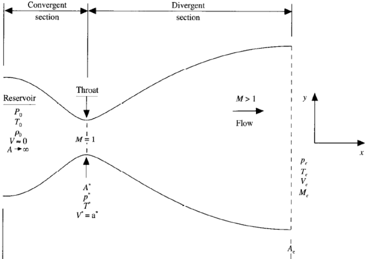
Definição do problema



Estudo de caso - Escoamento Isentrópico Subsônico-Supersônico

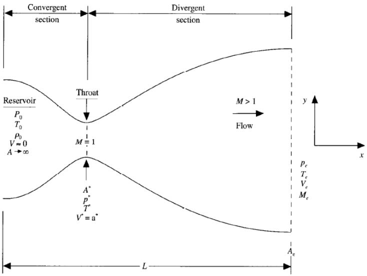
Definição do problema

- Escoamento estacionário, isentrópico em um bocal convergente - divergente.
- *inlet*: p_0, T_0 e ρ_o são valores de estagnação (pressão total, temperatura total e densidade total).
- *exit*: o escoamento expande-se de forma isentrópica a velocidades supersônicas até a saída. Nesta região, a pressão, temperatura, velocidade e Mach são denotados por p_e, T_e, V_e e M_e, respectivamente.



Definição do problema

- O escoamento é localmente subsônico na seção convergente, sônico na garganta (área mínima) e supersônico na seção divergente.
- O escoamento sônico no estrangulamento ($M = 1$) significa que a velocidade local nesta região é igual a velocidade local do som.



Definição do problema

Hipótese: assume-se que em uma determinada seção, onde a área da seção transversal é A, as propriedades de escoamento são uniformes ao longo dessa seção. Assim, embora a área do bocal mude em função da distância e, portanto, na realidade, o escoamento é bidimensional (o fluxo varia no espaço bidimensional), faz-se o suposição de que as propriedades de fluxo variam apenas com x. Este escoamento é definido como "quase unidimensional".

- Equações de conservação (escoamento unidimensional, estacionário, isentrópico):
    - Continuidade: $\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$
    - Quantidade de movimento:
      $p_1 A_1 + \rho_1 V_1^2 A_1 + \int_{A_1}^{A_2} p dA = p_2 A_2 + \rho_2 V_2^2 A_2$
    - Energia: $h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$

  os subscritos 1 e 2 denotam diferentes localizações ao longo do bocal.
- Equações de estado
    - $p = \rho R T$ e $h = c_p T$

Definição do problema

Comentários:

- Existe solução analítica para o problema. Nesta, o número de Mach varia exclusivamente com a proporção da razão de área A/A^* (John D.Anderson Jr. , *Computational Fluid Dynamic - the basics with applications*).

$$\left(\frac{A}{A*}\right)^2 = \frac{1}{M^2}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)}$$

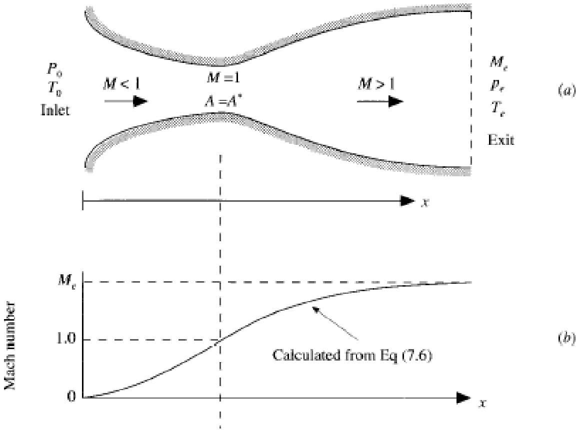
$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1/(\gamma-1)}$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1}$$

$\gamma = c_p/c_v$ (razão de calor específico). Para o ar em condições padrões, $\gamma = 1.4$

Definição do problema

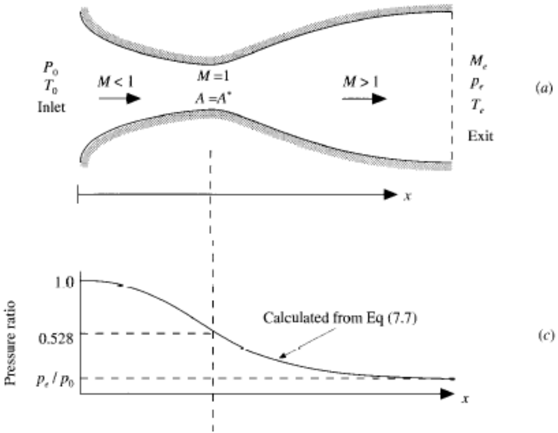
Solução analítica - aspectos qualitativos da solução:



$$\left(\frac{A}{A*}\right)^2 = \frac{1}{M^2}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}$$

Definição do problema

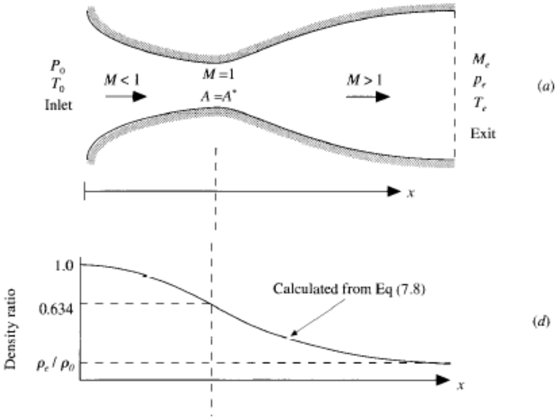
Solução analítica - aspectos qualitativos da solução:



$$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)}$$

Definição do problema

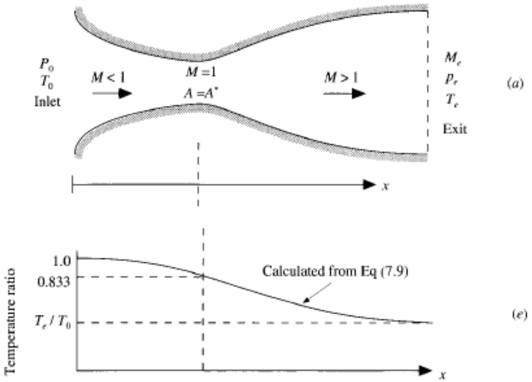
Solução analítica - aspectos qualitativos da solução:



$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1/(\gamma-1)}$$

Definição do problema

Solução analítica - aspectos qualitativos da solução:



$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1}$$

Definição do problema

Comentários:

- Este tipo de escoamento simplesmente não acontece "por si só". Como em todo sistema mecânico, é necessária uma força para acelerar a massa do fluido no interior do bocal. Neste caso, a força exercida sobre o fluido para acelerá-lo através do bocal é fornecida pela relação de pressão através do bocal p_0/p_e. Para um bocal com uma relação de área especificada $A_e/A*$, a razão de pressão necessária para estabelecer o fluxo isentrópico subsônico-supersônico deve ser um valor muito específico. Essa relação de pressão é uma condição de contorno aplicada ao escoamento.
  Para reproduzir esta situação em um laboratório, esta condição é imposta por um reservatório de alta pressão na região do *inlet* e uma fonte de vácuo na região *exit*.

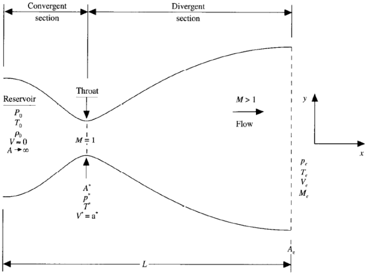
Solução pela CFD

Steps

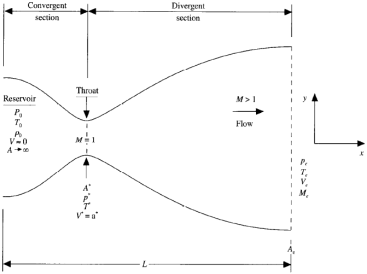
- *Step 1*: **Equações governantes**: equações diferenciais parciais adequadas para soluções em marcha no tempo.
- *Step 2*: **Métodos das diferenças finitas**:
  - solução pela CFD - passos intermediários
  - Solução em diferenças finitas e técnica MacCormack para avanço no tempo.
  - Condições de contorno, condições iniciais e escolha do passo de tempo.
- *Step 3*: **Solução final.**

As equações governantes são as de conservação de massa, quantidade de movimento e de energia para escoamento inviscido *quasi unidimensional*.
John Anderson, em seu livro "*Computational Fluid Dynamics - a basic with applications*", faz uma discussão muito elegante sobre esta hipótese simplificadora. Segundo o autor:
"*... What we are really doing with our quasi-one-dimensional assumptions is constructing a* **simplified engineering model** *of the flow. Such modelling to simplify more complicated problems is done very frequently in engineering and physical science. Of course, the price we pay for such modeling is usually some compromise with the real physics of the flow.*"

Step 1 - equações governantes



Ao observar a figura do problema original, vê-se que o problema é bidimensional pois, com a variação da área com a posição x, tem-se uma variação no campo de escoamento nas direções x e y.



Assim, para a dedução das equações que são apropriadas para o problema, pretende-se que os princípios físicos gerais se mantenham exatos. Para isso, retorna-se a forma integral das equações governantes em um volume de controle consistente com a hipótese de escoamento quase unidimensional.

Step 1 - equações governantes

- Equação de continuidade na sua forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{\vartheta}\rho d\vartheta+\int\int_{S}\rho\mathbf{V}.\mathbf{dS}=0$$

ϑ: volume; **S** : área.

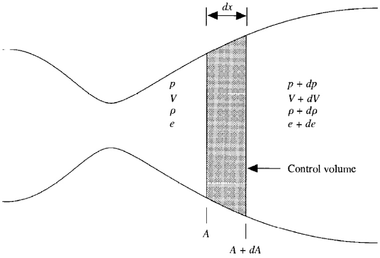


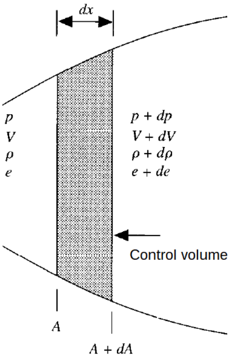
Figure: Volume de controle de tamanho dx.

Step 1 - equações governantes

- Equação de continuidade (forma integral)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{\vartheta}\rho d\vartheta + \int\int_{S}\rho \mathbf{V}.\mathbf{dS} = 0$$

ϑ: volume; $\mathbf{S}$: área.



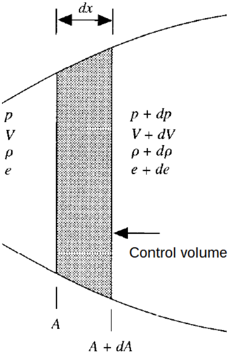
- Primeiro termo da equação: $dx \Rightarrow 0$, volume $= Adx$: $\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{\vartheta}\rho d\vartheta = \frac{\partial}{\partial t}(\rho A dx)$

Step 1 - equações governantes

- Equação de continuidade (forma integral)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{\vartheta}\rho d\vartheta+\int\int_{S}\rho\mathbf{V}.\mathbf{dS}=0$$

ϑ: volume; $\mathbf{S}$: área.



- Segundo termo da equação:
  $\int\int_S \rho\mathbf{V}.\mathbf{dS}=$
  $-\rho VA+(\rho+d\rho)(V+dV)(A+dA)$
  Expandindo o produto, negligenciando termos de ordem superior e fazendo $dx \Rightarrow 0$:
  $\int\int_S \rho\mathbf{V}.\mathbf{dS}=\rho VdA+\rho AdV+AVd\rho=d(\rho AV)$

Step 1 - equações governantes

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{\vartheta}\rho d\vartheta + \int\int_{S}\rho\mathbf{V}.\mathbf{dS} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{\vartheta}\rho d\vartheta = \frac{\partial}{\partial t}(\rho A dx)$$

$$\int\int_{S}\rho\mathbf{V}.\mathbf{dS} = d(\rho A V)$$

Combinando as equações e dividindo por dx, vem:

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho A V)}{\partial x} = 0$$

Equação de continuidade (conservação de massa) na forma diferencial para um escoamento transiente, quase unidimensional.

Step 1 - equações governantes

- Equação de continuidade (conservação de massa) na forma diferencial para um escoamento instável, quase unidimensional:

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho A V)}{\partial x} = 0$$

- Equação de continuidade para um escoamento puramente unidimensional:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$

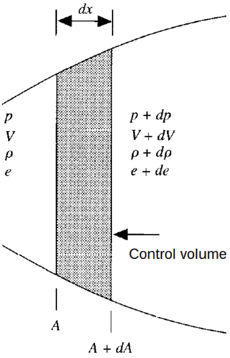
As duas equações acima são distintas. Na primeira, $A = A(x)$ enquanto na segunda A é constante.

Step 1 - equações governantes

- Equação de conservação da quantidade de movimento (escoamento invíscido e sem forças de corpo):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{\vartheta}(\rho u)d\vartheta + \int\int_{S}(\rho u\mathbf{V}).\mathbf{dS} = -\int\int_{S}(pdS)_x$$

onde $(pdS)_x$ é a componente em x do vetor $p\mathbf{dS}$



- Equação de conservação da quantidade de movimento (escoamento invíscido e sem forças de corpo):

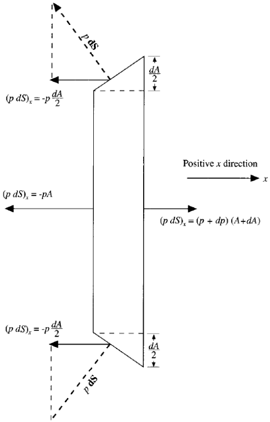
$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{\vartheta}(\rho u)d\vartheta + \int\int_{S}(\rho u\mathbf{V}).\mathbf{dS} = -\int\int_{S}(pdS)_x$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{\vartheta}(\rho u)d\vartheta = \frac{\partial}{\partial t}(\rho VAdx)$$

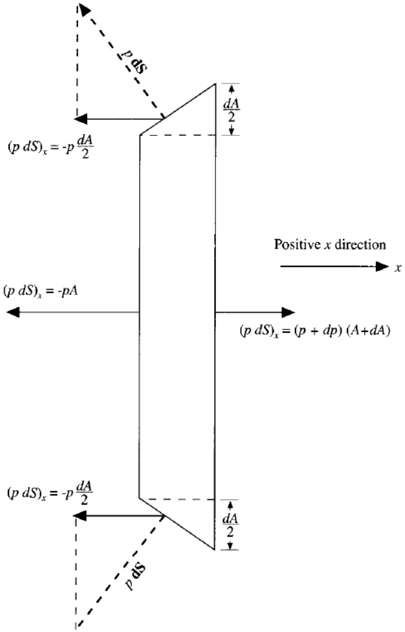
$$\int\int_{S}(\rho u\mathbf{V}).\mathbf{dS} = -\rho V^2A + (\rho + d\rho)(V + dV)^2(A + dA)$$

Step 1 - equações governantes

- Equação de conservação da quantidade de movimento (escoamento invíscido e sem forças de corpo): avaliação do termo de pressão $\int\int_S (pdS)_x$:

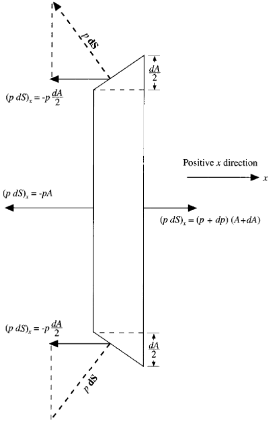


Forças na direção x do volume de controle.



Step 1 - equações governantes

- Avaliação do termo de pressão $\int\int_S (pdS)_x$:



$$\int\int_S (pdS)_x = -pA + (p+dp)(A+dA) - 2p\left(\frac{dA}{2}\right)$$

Step 1 - equações governantes

- Equação de conservação da quantidade de movimento (escoamento invíscido e sem forças de corpo): combinando as expressões

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{\vartheta}(\rho u)d\vartheta + \int\int_{S}(\rho u\mathbf{V}).\mathbf{dS} = -\int\int_{S}(pdS)_x$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{\vartheta}(\rho u)d\vartheta = \frac{\partial}{\partial t}(\rho VAdx)$$

$$\int\int_{S}(\rho u\mathbf{V}).\mathbf{dS} = -\rho V^2 A + (\rho + d\rho)(V + dV)^2(A + dA)$$

$$\int\int_{S}(pdS)_x = -pA + (p + dp)(A + dA) - 2p\left(\frac{dA}{2}\right)$$

tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho VAdx) - \rho V^2 A + (\rho + d\rho)(V + dV)^2(A + dA) = pA - (p + dp)(A + dA) + pdA$$

- Equação de conservação da quantidade de movimento (escoamento invíscido e sem forças de corpo):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V A dx) - \rho V^2 A + (\rho + d\rho)(V + dV)^2 (A + dA) = pA - (p + dp)(A + dA) + p dA$$

Rearranjando, ignorando os termos com produtos de deferenciais, dividindo por dx e fazendo $dx \to 0$, tem-se:

$$\frac{\partial(\rho V A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V^2 A)}{\partial x} = -A \frac{\partial p}{\partial x}$$

Forma conservativa da equação de conservação da quantidade de movimento para um escoamento *quasi-one-dimensional*.

- Forma conservativa:

$$\frac{\partial \rho VA}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V^2 A)}{\partial x} = -A\frac{\partial p}{\partial x}$$

Forma não conservativa equivalente: consiste em multiplicar a equação de continuidade por V:

$$V\frac{\partial \rho}{\partial t} + V\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$

e subtrair da equação de quantidade de movimento. Tem-se:

$$\frac{\partial(\rho VA)}{\partial t} - V\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V^2 A)}{\partial x} - V\frac{\partial(\rho VA)}{\partial x} = -A\frac{\partial p}{\partial x}$$

Step 1 - equações governantes

- Equação de conservação da quantidade de movimento (escoamento invíscido e sem forças de corpo):

$$\frac{\partial(\rho VA)}{\partial t} - V\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V^2 A)}{\partial x} - V\frac{\partial(\rho VA)}{\partial x} = -A\frac{\partial p}{\partial x}$$

Expandindo as derivadas e rearranjando, tem-se a equação de conservação de quantidade de movimento na forma não conservativa:

$$\rho\frac{\partial V}{\partial t} + \rho V\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

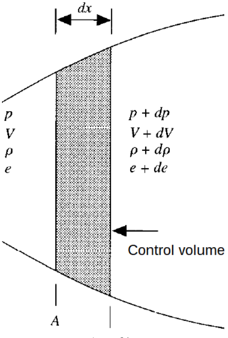
Para um escoamento unidimensional, a equação de consevação de quantidade de movimento toma a forma (equação de Euler, escoamento irrotacional):

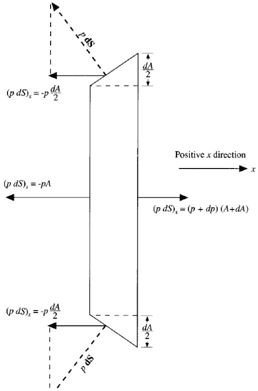
$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

Step 1 - equações governantes

- Equação de energia (escoamento adiabático $\dot{q} = 0$, sem forças de corpo e sem efeitos viscosos):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{\vartheta}\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)d_{\vartheta}+\int\int_{S}\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\mathbf{V}.\mathbf{dS}=-\int\int_{S}(p\mathbf{V}).\mathbf{dS}$$





- Equação de energia (escoamento adiabático $\dot{q} = 0$, sem forças de corpo e sem efeitos viscosos):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)Adx\right]-\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)VA$$
$$+(\rho+d\rho)\left[e+de+\frac{(V+dV)^2}{2}\right](V+dV)(A+dA)=$$
$$-\left[-pVA+(p+dp)(V+dV)(A+dA)-2\left(pV\frac{dA}{2}\right)\right]$$

- Equação de energia (escoamento adiabático $\dot{q} = 0$, sem forças de corpo e sem efeitos viscosos):
  Negligenciando termos de ordem superior e fazendo $dx \Rightarrow 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)A\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)VA\right]=-\frac{\partial(pAV)}{\partial x}$$

  Esta é a equação de energia na forma conservativa, expressa em termos da energia total $e+\frac{V^2}{2}$, apropriada para escoamento transiente, *quasi-one-dimensional*.

Step 1 - equações governantes

- Equação de energia (escoamento adiabático $\dot{q} = 0$, sem forças de corpo e sem efeitos viscosos):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)A\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right)VA\right] = -\frac{\partial(pAV)}{\partial x}$$

Forma não conservativa, expressa em termos da energia interna: é obtida multiplicando-se a equação de conservação de quantidade de movimento $\frac{\partial \rho VA}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V^2 A)}{\partial x} = -A\frac{\partial p}{\partial x}$ por V:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{V^2}{2}\right)A\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho\left(\frac{V^3}{2}\right)A\right] = -AV\frac{\partial p}{\partial x}$$

Subtraindo as equações, tem-se a forma conservativa da equação de energia, expressa em termos da energia interna e:

$$\frac{\partial(\rho e A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e V A)}{\partial x} = -p\frac{\partial(AV)}{\partial x}$$

Step 1 - equações governantes

- Equação de energia (escoamento adiabático $\dot{q} = 0$, sem forças de corpo e sem efeitos viscosos):

$$\frac{\partial(\rho e A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e V A)}{\partial x} = -p\frac{\partial(AV)}{\partial x}$$

Multiplicando a equação $\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho A V)}{\partial x} = 0$ (eq. de continuidade) por e:

$$e\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + e\frac{\partial(\rho A V)}{\partial x} = 0$$

Subtraindo as duas equações, expandindo o RHS e dividindo por A:

$$\rho\frac{\partial e}{\partial t} + \rho V\frac{\partial e}{\partial x} = -p\frac{\partial V}{\partial x} - p\frac{V}{A}\frac{\partial A}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho V \frac{\partial e}{\partial x} = -p \frac{\partial V}{\partial x} - p \frac{V}{A} \frac{\partial A}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho V \frac{\partial e}{\partial x} = -p \frac{\partial V}{\partial x} - pV \frac{\partial (\ln A)}{\partial x}$$

- Equação de energia na forma não conservativa e em termos da energia interna e:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho V \frac{\partial e}{\partial x} = -p \frac{\partial V}{\partial x} - pV \frac{\partial (\ln A)}{\partial x}$$

O motivo em se escrever a equação de energia nesta forma é que, para um gás caloricamente perfeito, ela leva diretamente a uma forma da equação de energia em termos de temperatura T, ou seja:

$$e = c_v T$$

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho V c_v \frac{\partial T}{\partial x} = -p \frac{\partial V}{\partial x} - pV \frac{\partial (\ln A)}{\partial x}$$

Step 1 - equações governantes

- Resumo das equações:
  As equações de conservação de massa, de quantidade de movimento e energia formam um conjunto de 3 equações com 4 incógnitas (ρ, p, V e T). A pressão pode ser eliminada deste conjunto introduzindo a equação de estado:

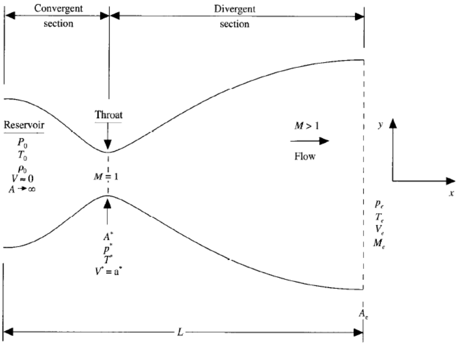
$$p = \rho R T \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = R\left(\rho \frac{\partial T}{\partial x} + T\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)$$

Assim, o sistema de equações fica:

- Continuidade: $\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \rho A \frac{\partial V}{\partial x} + \rho V \frac{\partial A}{\partial x} + VA\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$
- *Momentum:* $\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho V \frac{\partial V}{\partial x} = -R\left(\rho \frac{\partial T}{\partial x} + T\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)$
- Energia: $\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho V c_v \frac{\partial T}{\partial x} = -\rho R T\left[\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial(\ln A)}{\partial x}\right]$

- Continuidade: $\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \rho A \frac{\partial V}{\partial x} + \rho V \frac{\partial A}{\partial x} + VA \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$
- *Momentum:* $\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho V \frac{\partial V}{\partial x} = -R\left(\rho \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial \rho}{\partial x}\right)$
- Energia: $\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho V c_v \frac{\partial T}{\partial x} = -\rho R T \left[\frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial(\ln A)}{\partial x}\right]$

As equações acima, escritas com as variáveis dimensionais, são suficientes para a solução do problema. Pode-se escrevê-las na forma adimensional, em função das variáveis iniciais do problema.



Adimensionalização das equações:

$$T' = \frac{T}{T_0} \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_0} \quad x' = \frac{x}{L} \quad A' = \frac{A}{A*}$$
$$a_0 = \sqrt{\gamma R T_0} \quad V' = \frac{V}{a_0} \quad t' = \frac{t}{\frac{L}{a_0}}$$

onde L é o comprimento do bocal, a_0 é a velocidade do som (a velocidade do som se relaciona com a temperatura), $\gamma = c_p/c_v$). A variável A' é função unicamente de x, não é função do tempo.

Step 1 - equações governantes

- Resumo das equações adimensionalizadas:
  - Continuidade:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} = -\rho \frac{\partial V'}{\partial x'} - \rho' V' \frac{\partial (\ln A')}{\partial x'} - V' \frac{\partial \rho'}{\partial x'}$$

  - *Momentum:*

$$\frac{\partial V'}{\partial t'} = -V' \frac{\partial V'}{\partial x'} - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial T'}{\partial x'} + \frac{T'}{\rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial x'} \right)$$

  - Energia:

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} = -V' \frac{\partial T'}{\partial x'} - (\gamma - 1) T' \left[\frac{\partial V'}{\partial x'} + V' \frac{\partial (\ln A')}{\partial x'} \right]$$