Dedução da Equação de Bernouilli

Prof. Rafael Alves Bonfim de Queiroz
bonfimraf@gmail.com

Universidade Federal de Juiz de Fora
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

Dedução da Equação de Bernouilli

- Escoamento de fluidos com as condições:
  - Não há dissipação de energia devido a atritos internos entre os elementos de volume do fluido ou do fluido com o ambiente
  - Não há trocas de calor entre os elementos de volume do fluido ou do fluido com o ambiente
    - A entropia do elemento permanece constante
    - A entropia, unidade [J/K] (joules por kelvin), é uma grandeza termodinâmica que mede o grau de liberdade molecular de um sistema[1]
- Movimento de um fluido ideal ou perfeito
  - Viscosidade nula

[1] https://pt.wikipedia.org/wiki/Entropia

Dedução da Equação de Bernouilli

- Escoamento de fluidos com as condições:
  - Não há dissipação de energia devido a atritos internos entre os elementos de volume do fluido ou do fluido com o ambiente
  - Não há trocas de calor entre os elementos de volume do fluido ou do fluido com o ambiente
    - A entropia do elemento permanece constante
    - A entropia, unidade [J/K] (joules por kelvin), é uma grandeza termodinâmica que mede o grau de liberdade molecular de um sistema[1]
- Movimento de um fluido ideal ou perfeito
  - Viscosidade nula

[1] https://pt.wikipedia.org/wiki/Entropia

Dedução da Equação de Bernouilli

- Escoamento de fluidos com as condições:
  - Não há dissipação de energia devido a atritos internos entre os elementos de volume do fluido ou do fluido com o ambiente
  - Não há trocas de calor entre os elementos de volume do fluido ou do fluido com o ambiente
    - A entropia do elemento permanece constante
    - A entropia, unidade [J/K] (joules por kelvin), é uma grandeza termodinâmica que mede o grau de liberdade molecular de um sistema[1]
- Movimento de um fluido ideal ou perfeito
  - Viscosidade nula

[1] https://pt.wikipedia.org/wiki/Entropia

Dedução da Equação de Bernouilli

- Escoamento de fluidos com as condições:
  - Não há dissipação de energia devido a atritos internos entre os elementos de volume do fluido ou do fluido com o ambiente
  - Não há trocas de calor entre os elementos de volume do fluido ou do fluido com o ambiente
    - A entropia do elemento permanece constante
    - A entropia, unidade [J/K] (joules por kelvin), é uma grandeza termodinâmica que mede o grau de liberdade molecular de um sistema[1]
- Movimento de um fluido ideal ou perfeito
  - Viscosidade nula

[1] https://pt.wikipedia.org/wiki/Entropia

Dedução da Equação de Bernouilli

- Escoamento de fluidos com as condições:
  - Não há dissipação de energia devido a atritos internos entre os elementos de volume do fluido ou do fluido com o ambiente
  - Não há trocas de calor entre os elementos de volume do fluido ou do fluido com o ambiente
    - A entropia do elemento permanece constante
    - A entropia, unidade [J/K] (joules por kelvin), é uma grandeza termodinâmica que mede o grau de liberdade molecular de um sistema[1]
- Movimento de um fluido ideal ou perfeito
  - Viscosidade nula

[1] https://pt.wikipedia.org/wiki/Entropia

Dedução da Equação de Bernouilli

- Escoamento de fluidos com as condições:
    - Não há dissipação de energia devido a atritos internos entre os elementos de volume do fluido ou do fluido com o ambiente
    - Não há trocas de calor entre os elementos de volume do fluido ou do fluido com o ambiente
        - A entropia do elemento permanece constante
        - A entropia, unidade [J/K] (joules por kelvin), é uma grandeza termodinâmica que mede o grau de liberdade molecular de um sistema[1]
- Movimento de um fluido ideal ou perfeito
    - Viscosidade nula

[1] https://pt.wikipedia.org/wiki/Entropia

Dedução da Equação de Bernouilli

- Escoamento de fluidos com as condições:
  - Não há dissipação de energia devido a atritos internos entre os elementos de volume do fluido ou do fluido com o ambiente
  - Não há trocas de calor entre os elementos de volume do fluido ou do fluido com o ambiente
    - A entropia do elemento permanece constante
    - A entropia, unidade [J/K] (joules por kelvin), é uma grandeza termodinâmica que mede o grau de liberdade molecular de um sistema[1]
- Movimento de um fluido ideal ou perfeito
  - Viscosidade nula

[1] https://pt.wikipedia.org/wiki/Entropia

Equação de Euler

- De acordo com a segunda lei de Netwon:

$$\underbrace{\delta m}_{\rho\delta V} \times \underbrace{\mathbf{a}}_{\frac{D\mathbf{v}}{Dt}} = \underbrace{\mathbf{F}}_{-\nabla p\delta V - \rho\nabla\phi\delta V}$$

$$\rho\delta V \times \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p\delta V - \rho\nabla\phi\delta V$$

$$\Longrightarrow \rho \times \underbrace{\frac{D\mathbf{v}}{Dt}}_{\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}} = -\nabla p - \rho\nabla\phi$$

  - Força de superfície devido à pressão p: $\mathbf{F_p} = -\nabla p\delta V$
  - Força de campo devida ao potencial gravitacional ϕ: $\mathbf{F_g} = -\rho\nabla\phi\delta V$

- Equação de Euler:

$$\boxed{\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi}$$

Equação de Euler

- De acordo com a segunda lei de Netwon:

$$\underbrace{\delta m}_{\rho\delta V} \times \underbrace{\mathbf{a}}_{\frac{D\mathbf{v}}{Dt}} = \underbrace{\mathbf{F}}_{-\nabla p\delta V - \rho\nabla\phi\delta V}$$

$$\rho\delta V \times \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p\delta V - \rho\nabla\phi\delta V$$

$$\Longrightarrow \rho \times \underbrace{\frac{D\mathbf{v}}{Dt}}_{\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}} = -\nabla p - \rho\nabla\phi$$

  - Força de superfície devido à pressão p: $\mathbf{F_p} = -\nabla p\delta V$
  - Força de campo devida ao potencial gravitacional ϕ: $\mathbf{F_g} = -\rho\nabla\phi\delta V$

- Equação de Euler:

$$\boxed{\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi}$$

Equação de Euler

- De acordo com a segunda lei de Netwon:

$$\underbrace{\delta m}_{\rho \delta V} \times \underbrace{\mathbf{a}}_{\frac{D\mathbf{v}}{Dt}} = \underbrace{\mathbf{F}}_{-\nabla p \delta V - \rho \nabla \phi \delta V}$$

$$\rho \delta V \times \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p \delta V - \rho \nabla \phi \delta V$$

$$\Longrightarrow \rho \times \underbrace{\frac{D\mathbf{v}}{Dt}}_{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}} = -\nabla p - \rho \nabla \phi$$

  - Força de superfície devido à pressão p: $\mathbf{F_p} = -\nabla p \delta V$
  - Força de campo devida ao potencial gravitacional ϕ: $\mathbf{F_g} = -\rho \nabla \phi \delta V$

- Equação de Euler:

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla \phi}$$

Equação de Euler

- De acordo com a segunda lei de Netwon:

$$\underbrace{\delta m}_{\rho\delta V} \times \underbrace{\mathbf{a}}_{\frac{D\mathbf{v}}{Dt}} = \underbrace{\mathbf{F}}_{-\nabla p\delta V - \rho\nabla\phi\delta V}$$

$$\rho\delta V \times \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p\delta V - \rho\nabla\phi\delta V$$

$$\Longrightarrow \rho \times \underbrace{\frac{D\mathbf{v}}{Dt}}_{\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}} = -\nabla p - \rho\nabla\phi$$

  - Força de superfície devido à pressão p: $\mathbf{F_p} = -\nabla p\delta V$
  - Força de campo devida ao potencial gravitacional ϕ: $\mathbf{F_g} = -\rho\nabla\phi\delta V$
- Equação de Euler:

$$\boxed{\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi}$$

Adiabaticidade

- Um sistema adiabático é, na física, um sistema que está isolado de quaisquer trocas de calor[2]
- Ao longo do movimento, supõe-se que em δV não há troca calor, assim a entropia do elemento permanece constante ($\delta S =$ constante)
- Definindo $s = \frac{\delta S}{\delta m}$, tem-se:

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 = \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)s$$

- A equação acima exprime a adiabaticidade do δV ao longo de seu percurso

[2] https://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_adiab%C3%A1tico

Adiabaticidade

- Um sistema adiabático é, na física, um sistema que está isolado de quaisquer trocas de calor[2]
- Ao longo do movimento, supõe-se que em δV não há troca calor, assim a entropia do elemento permanece constante ($\delta S =$ constante)
- Definindo $s = \frac{\delta S}{\delta m}$, tem-se:

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 = \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s$$

- A equação acima exprime a adiabaticidade do δV ao longo de seu percurso

[2] https://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_adiab%C3%A1tico

Adiabaticidade

- Um sistema adiabático é, na física, um sistema que está isolado de quaisquer trocas de calor[2]
- Ao longo do movimento, supõe-se que em δV não há troca calor, assim a entropia do elemento permanece constante ($\delta S =$ constante)
- Definindo $s = \frac{\delta S}{\delta m}$, tem-se:

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 = \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)s$$

- A equação acima exprime a adiabaticidade do δV ao longo de seu percurso

[2] https://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_adiab%C3%A1tico

Adiabaticidade

- Um sistema adiabático é, na física, um sistema que está isolado de quaisquer trocas de calor[2]
- Ao longo do movimento, supõe-se que em δV não há troca calor, assim a entropia do elemento permanece constante (δS = constante)
- Definindo $s = \frac{\delta S}{\delta m}$, tem-se:

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 = \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s$$

- A equação acima exprime a adiabaticidade do δV ao longo de seu percurso

[2] https://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_adiab%C3%A1tico

Fluxo de energia

- Equação de Euler:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi$$

- Multiplicando ambos os membros da equação de Euler por $\delta m\mathbf{v}$:

$$\delta m\mathbf{v}\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{\delta m\mathbf{v}}{\rho}\nabla p - \delta m\mathbf{v}\cdot\nabla\phi$$

$$\frac{D}{Dt}\left[\frac{1}{2}\delta m\mathbf{v}^2\right] = -\frac{\delta m\mathbf{v}}{\rho}\nabla p - \delta m\mathbf{v}\cdot\nabla\phi$$

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\left[\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2\delta V\right] = -\mathbf{v}\cdot\nabla p\delta V - \rho\mathbf{v}\cdot\nabla\phi\delta V}$$

- Manipulação deste termo: $-\mathbf{v}\cdot\nabla p\delta V$
- Manipulação deste termo: $-\rho\mathbf{v}\cdot\nabla\phi\delta V$

Fluxo de energia

- Equação de Euler:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi$$

- Multiplicando ambos os membros da equação de Euler por $\delta m\mathbf{v}$:

$$\delta m\mathbf{v}\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{\delta m\mathbf{v}}{\rho}\nabla p - \delta m\mathbf{v}\cdot\nabla\phi$$

$$\frac{D}{Dt}\left[\frac{1}{2}\delta m\mathbf{v}^2\right] = -\frac{\delta m\mathbf{v}}{\rho}\nabla p - \delta m\mathbf{v}\cdot\nabla\phi$$

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\left[\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2\delta V\right] = -\mathbf{v}\cdot\nabla p\delta V - \rho\mathbf{v}\cdot\nabla\phi\delta V}$$

- Manipulação deste termo: $-\mathbf{v}\cdot\nabla p\delta V$
- Manipulação deste termo: $-\rho\mathbf{v}\cdot\nabla\phi\delta V$

Fluxo de energia

- Equação de Euler:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi$$

- Multiplicando ambos os membros da equação de Euler por $\delta m\mathbf{v}$:

$$\delta m\mathbf{v}\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{\delta m\mathbf{v}}{\rho}\nabla p - \delta m\mathbf{v}\cdot\nabla\phi$$

$$\frac{D}{Dt}\left[\frac{1}{2}\delta m\mathbf{v}^2\right] = -\frac{\delta m\mathbf{v}}{\rho}\nabla p - \delta m\mathbf{v}\cdot\nabla\phi$$

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\left[\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2\delta V\right] = -\mathbf{v}\cdot\nabla p\delta V - \rho\mathbf{v}\cdot\nabla\phi\delta V}$$

- Manipulação deste termo: $-\mathbf{v}\cdot\nabla p\delta V$
- Manipulação deste termo: $-\rho\mathbf{v}\cdot\nabla\phi\delta V$

Fluxo de energia

- Equação de Euler:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi$$

- Multiplicando ambos os membros da equação de Euler por $\delta m\mathbf{v}$:

$$\delta m\mathbf{v}\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{\delta m\mathbf{v}}{\rho}\nabla p - \delta m\mathbf{v}\cdot\nabla\phi$$

$$\frac{D}{Dt}\left[\frac{1}{2}\delta m\mathbf{v}^2\right] = -\frac{\delta m\mathbf{v}}{\rho}\nabla p - \delta m\mathbf{v}\cdot\nabla\phi$$

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\left[\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2\delta V\right] = -\mathbf{v}\cdot\nabla p\delta V - \rho\mathbf{v}\cdot\nabla\phi\delta V}$$

- Manipulação deste termo: $-\mathbf{v}\cdot\nabla p\delta V$
- Manipulação deste termo: $-\rho\mathbf{v}\cdot\nabla\phi\delta V$

Manipulação deste termo: $-\mathbf{v} \cdot \nabla p \delta V$

$$\frac{D}{Dt}(p\delta V) = \frac{Dp}{Dt}\delta V + p\frac{D(\delta V)}{Dt}$$
$$\frac{D}{Dt}(p\delta V) = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p\right)\delta V + p\left(\frac{\partial(\delta V)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \delta V\right)$$
$$\frac{D}{Dt}(p\delta V) = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p\right)\delta V + p\nabla \cdot \mathbf{v}\delta V$$
$$\frac{D}{Dt}(p\delta V) = \frac{\partial p}{\partial t}\delta V + \mathbf{v} \cdot \nabla p\delta V + p\nabla \cdot \mathbf{v}\delta V$$

- Resulta em:

$$\boxed{-\mathbf{v} \cdot \nabla p\delta V = -\frac{D}{Dt}(p\delta V) + \frac{\partial p}{\partial t}\delta V + p\nabla \cdot \mathbf{v}\delta V}$$

Manipulação deste termo: $-\mathbf{v} \cdot \nabla \phi \rho \delta V$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi \Longrightarrow \mathbf{v} \cdot \nabla \phi = \frac{D\phi}{Dt} - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

- Temos que

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \phi \rho \delta V = \left(\frac{D\phi}{Dt} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \rho \delta V$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \phi \rho \delta V = \frac{D\phi}{Dt} \rho \delta V - \frac{\partial \phi}{\partial t} \rho \delta V$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \phi \rho \delta V = \frac{D\phi}{Dt} \rho \delta V + \phi \frac{D}{Dt} (\rho \delta V) - \frac{\partial \phi}{\partial t} \rho \delta V$$

$$\boxed{-\mathbf{v} \cdot \nabla \phi \rho \delta V = -\frac{D}{Dt} (\rho \delta V \phi) + \frac{\partial \phi}{\partial t} \rho \delta V}$$

Equação de Euler

$$\boxed{-\mathbf{v}\cdot\nabla p\delta V = -\frac{D}{Dt}(p\delta V) + \frac{\partial p}{\partial t}\delta V + p\nabla\cdot\mathbf{v}\delta V}$$

$$\boxed{-\mathbf{v}\cdot\nabla \phi\rho\delta V = -\frac{D}{Dt}(\rho\delta V\phi) + \frac{\partial \phi}{\partial t}\rho\delta V}$$

- Retornando para equação de Euler multiplicada por $\delta m\mathbf{v}$:

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\left[\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2\delta V\right] = -\mathbf{v}\cdot\nabla p\delta V - \mathbf{v}\cdot\nabla\phi\rho\delta V}$$

$$\frac{D}{Dt}\left[\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2\delta V\right] = -\frac{D}{Dt}(p\delta V) + \frac{\partial p}{\partial t}\delta V + p\nabla\cdot\mathbf{v}\delta V - \frac{D}{Dt}(\rho\delta V\phi) + \frac{\partial\phi}{\partial t}\rho\delta V$$

ou ainda,

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\left[\left(\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + p + \rho\phi\right)\delta V\right] = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\delta V + p\nabla\cdot\mathbf{v}\delta V}$$

Variação da energia interna

- Transformação isentrópica: em termodinâmica, uma transformação isentrópica é aquela em que a entropia do sistema permanece constante[3]

- A variação da energia interna U da partícula de fluido ao longo de sua trajetória num caso isentrópico:

$$DU = TDs - pD(\delta V)$$

- A variação da energia interna U da partícula de fluido

$$DU = -p(\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta V Dt = -p(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta V Dt$$

[3] https://pt.wikipedia.org/wiki/Transforma%C3%A7%C3%A3o_isentr%C3%B3pica

Variação da energia interna

- Transformação isentrópica: em termodinâmica, uma transformação isentrópica é aquela em que a entropia do sistema permanece constante[3]
- A variação da energia interna U da partícula de fluido ao longo de sua trajetória num caso isentrópico:

$$DU = TDs - pD(\delta V)$$

  - $s = \frac{\delta S}{\delta m}$, em que δS é a entropia do elemento que é mantida constante

$$Ds = 0$$

  - $D(\delta V)$ pode ser expresso por:

$$\frac{D(\delta V)}{Dt} = \frac{\partial(\delta V)}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta V \Longrightarrow \frac{D(\delta V)}{Dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta V$$

$$D(\delta V) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta V Dt$$

- A variação da energia interna U da partícula de fluido

$$DU = -p(\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta V Dt = -p(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta V Dt$$

[3] https://pt.wikipedia.org/wiki/Transforma%C3%A7%C3%A3o_isentr%C3%B3pica

Variação da energia interna

- Transformação isentrópica: em termodinâmica, uma transformação isentrópica é aquela em que a entropia do sistema permanece constante[3]
- A variação da energia interna U da partícula de fluido ao longo de sua trajetória num caso isentrópico:

$$DU = TDs - pD(\delta V)$$

  - $s = \frac{\delta S}{\delta m}$, em que δS é a entropia do elemento que é mantida constante

$$Ds = 0$$

  - $D(\delta V)$ pode ser expresso por:

$$\frac{D(\delta V)}{Dt} = \frac{\partial(\delta V)}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\delta V \Longrightarrow \frac{D(\delta V)}{Dt} = (\mathbf{v}\cdot\nabla)\delta V$$

$$D(\delta V) = (\mathbf{v}\cdot\nabla)\delta V Dt$$

- A variação da energia interna U da partícula de fluido

$$DU = -p(\mathbf{v}\cdot\nabla)\delta V Dt = -p(\nabla\cdot\mathbf{v})\delta V Dt$$

[3] https://pt.wikipedia.org/wiki/Transforma%C3%A7%C3%A3o_isentr%C3%B3pica

Variação da energia interna

- Transformação isentrópica: em termodinâmica, uma transformação isentrópica é aquela em que a entropia do sistema permanece constante[3]
- A variação da energia interna U da partícula de fluido ao longo de sua trajetória num caso isentrópico:

$$DU = TDs - pD(\delta V)$$

  - $s = \frac{\delta S}{\delta m}$, em que δS é a entropia do elemento que é mantida constante

$$Ds = 0$$

  - $D(\delta V)$ pode ser expresso por:

$$\frac{D(\delta V)}{Dt} = \frac{\partial(\delta V)}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta V \Longrightarrow \frac{D(\delta V)}{Dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta V$$

$$D(\delta V) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta V Dt$$

- A variação da energia interna U da partícula de fluido

$$DU = -p(\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta V Dt = -p(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta V Dt$$

[3] https://pt.wikipedia.org/wiki/Transforma%C3%A7%C3%A3o_isentr%C3%B3pica

Variação da energia interna

- Transformação isentrópica: em termodinâmica, uma transformação isentrópica é aquela em que a entropia do sistema permanece constante[3]
- A variação da energia interna U da partícula de fluido ao longo de sua trajetória num caso isentrópico:

$$DU = TDs - pD(\delta V)$$

  - $s = \frac{\delta S}{\delta m}$, em que δS é a entropia do elemento que é mantida constante

$$Ds = 0$$

  - $D(\delta V)$ pode ser expresso por:

$$\frac{D(\delta V)}{Dt} = \frac{\partial(\delta V)}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta V \Longrightarrow \frac{D(\delta V)}{Dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta V$$

$$D(\delta V) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta V Dt$$

- A variação da energia interna U da partícula de fluido

$$DU = -p(\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta V Dt = -p(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta V Dt$$

[3] https://pt.wikipedia.org/wiki/Transforma%C3%A7%C3%A3o_isentr%C3%B3pica

Variação da energia interna

- A variação da energia interna U da partícula de fluido

$$DU = -p(\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta V Dt = -p(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta V Dt$$

$$\frac{DU}{Dt} = -p(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta V$$

- Considerando $e = \frac{U}{\delta m}$, temos: $U = e\delta m$
- A variação da energia interna U da partícula de fluido torna-se:

$$\frac{D}{Dt}(e\delta m) = -p(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta V$$

$$\boxed{\frac{D}{Dt}(e\rho\delta V) = -p(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta V}$$

Variação da energia interna

- A variação da energia interna U da partícula de fluido

$$DU = -p(\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta V Dt = -p(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta V Dt$$

$$\frac{DU}{Dt} = -p(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta V$$

- Considerando $e = \frac{U}{\delta m}$, temos: $U = e\delta m$
- A variação da energia interna U da partícula de fluido torna-se:

$$\frac{D}{Dt}(e\delta m) = -p(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta V$$

$$\boxed{\frac{D}{Dt}(e\rho\delta V) = -p(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta V}$$

Variação da energia interna

- A variação da energia interna U da partícula de fluido

$$DU = -p(\mathbf{v} \cdot \nabla)\delta V Dt = -p(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta V Dt$$

$$\frac{DU}{Dt} = -p(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta V$$

- Considerando $e = \frac{U}{\delta m}$, temos: $U = e\delta m$
- A variação da energia interna U da partícula de fluido torna-se:

$$\frac{D}{Dt}(e\delta m) = -p(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta V$$

$$\boxed{\frac{D}{Dt}(e\rho\delta V) = -p(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta V}$$

- A variação da energia interna U da partícula de fluido torna-se:

$$\boxed{\frac{D}{Dt}(e\rho\delta V) = -p(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta V}$$

- Retornando para equação de Euler multiplicada por $\delta m\mathbf{v}$:

$$\frac{D}{Dt}\left[\left(\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + p + \rho\phi\right)\delta V\right] = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \rho\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)\delta V + p\nabla\cdot\mathbf{v}\delta V$$

$$\frac{D}{Dt}\left[\left(\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + p + \rho\phi + \rho e\right)\delta V\right] = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \rho\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)\delta V$$

- Assumindo escoamento incompressível, temos que:

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\left[\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \phi + e\right] = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t}}$$

- A variação da energia interna U da partícula de fluido torna-se:

$$\boxed{\frac{D}{Dt}(e\rho\delta V) = -p(\nabla\cdot\mathbf{v})\delta V}$$

- Retornando para equação de Euler multiplicada por $\delta m\mathbf{v}$:

$$\frac{D}{Dt}\left[\left(\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + p + \rho\phi\right)\delta V\right] = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\delta V + p\nabla\cdot\mathbf{v}\delta V$$

$$\frac{D}{Dt}\left[\left(\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + p + \rho\phi + \rho e\right)\delta V\right] = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\delta V$$

- Assumindo escoamento incompressível, temos que:

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\left[\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \phi + e\right] = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial t}}$$

- A variação da energia interna U da partícula de fluido torna-se:

$$\boxed{\frac{D}{Dt}(e\rho\delta V) = -p(\nabla\cdot\mathbf{v})\delta V}$$

- Retornando para equação de Euler multiplicada por $\delta m\mathbf{v}$:

$$\frac{D}{Dt}\left[\left(\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + p + \rho\phi\right)\delta V\right] = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\delta V + p\nabla\cdot\mathbf{v}\delta V$$

$$\frac{D}{Dt}\left[\left(\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + p + \rho\phi + \rho e\right)\delta V\right] = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\delta V$$

- Assumindo escoamento incompressível, temos que:

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\left[\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \phi + e\right] = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial t}}$$

Equação de Bernouilli

- A equação de de Bernouilli é apresentada sob muitas formas, dependendo das condições de fluxo
- A expressão mais geral é obtida da expressão abaixo levando em conta a entalpia $h = e + \frac{p}{\rho}$ e que $Dh = \frac{Dp}{\rho}$ no caso adiabático:

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} + \phi\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t}}$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + h + \phi\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$D\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) + Dh + D\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}Dt + \frac{\partial \phi}{\partial t}Dt$$

$$\boxed{D\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) + \frac{Dp}{\rho} + D\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}Dt + \frac{\partial \phi}{\partial t}Dt}$$

Equação de Bernouilli

- A equação de de Bernouilli é apresentada sob muitas formas, dependendo das condições de fluxo
- A expressão mais geral é obtida da expressão abaixo levando em conta a entalpia $h = e + \frac{p}{\rho}$ e que $Dh = \frac{Dp}{\rho}$ no caso adiabático:

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} + \phi\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t}}$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + h + \phi\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

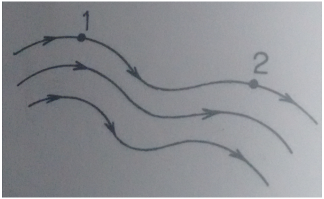
$$D\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) + Dh + D\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}Dt + \frac{\partial \phi}{\partial t}Dt$$

$$\boxed{D\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) + \frac{Dp}{\rho} + D\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}Dt + \frac{\partial \phi}{\partial t}Dt}$$

Equação de Bernouilli

- Integrando a equação abaixo entre os pontos 1 e 2 quaisquer ao longo de uma mesma linha de corrente

$$\boxed{D\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)+\frac{Dp}{\rho}+D\phi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}Dt+\frac{\partial \phi}{\partial t}Dt}$$



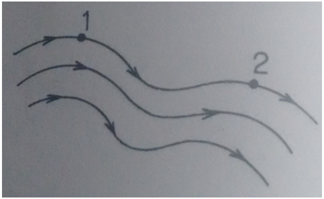
- Obtemos a equação de Bernouilli generalizada:

$$\boxed{\frac{\mathbf{v}_2^2}{2}-\frac{\mathbf{v}_1^2}{2}+\int_1^2\frac{Dp}{\rho}Dt+\phi_2-\phi_1=\int_1^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)Dt}$$

Equação de Bernouilli

- Integrando a equação abaixo entre os pontos 1 e 2 quaisquer ao longo de uma mesma linha de corrente

$$\boxed{D\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) + \frac{Dp}{\rho} + D\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}Dt + \frac{\partial \phi}{\partial t}Dt}$$



- Obtemos a equação de Bernouilli generalizada:

$$\boxed{\frac{\mathbf{v}_2^2}{2} - \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{Dp}{\rho}Dt + \phi_2 - \phi_1 = \int_1^2 \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) Dt}$$

Equação de Bernouilli

- A equação de Bernouilli generalizada

$$\boxed{\frac{\mathbf{v}_2^2}{2} - \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{Dp}{\rho} Dt + \phi_2 - \phi_1 = \int_1^2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) Dt}$$

- Quando o movimento for estacionário

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

- Lembrando que $\frac{Dp}{\rho} = Dh$ no caso adiabático
- A equação de Bernouilli assumindo movimento estacionário e caso adiabático:

$$\boxed{\frac{\mathbf{v}_2^2}{2} + \phi_2 + h_2 = \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} + \phi_1 + h_1 = constante}$$

Equação de Bernouilli

- A equação de Bernouilli generalizada

$$\boxed{\frac{\mathbf{v}_2^2}{2} - \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{Dp}{\rho} Dt + \phi_2 - \phi_1 = \int_1^2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) Dt}$$

- Quando o movimento for estacionário

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

- Lembrando que $\frac{Dp}{\rho} = Dh$ no caso adiabático
- A equação de Bernouilli assumindo movimento estacionário e caso adiabático:

$$\boxed{\frac{\mathbf{v}_2^2}{2} + \phi_2 + h_2 = \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} + \phi_1 + h_1 = constante}$$

Equação de Bernouilli

- A equação de Bernouilli generalizada

$$\boxed{\frac{\mathbf{v}_2^2}{2} - \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{Dp}{\rho} Dt + \phi_2 - \phi_1 = \int_1^2 \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) Dt}$$

- Quando o movimento for estacionário

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

- Lembrando que $\frac{Dp}{\rho} = Dh$ no caso adiabático
- A equação de Bernouilli assumindo movimento estacionário e caso adiabático:

$$\boxed{\frac{\mathbf{v}_2^2}{2} + \phi_2 + h_2 = \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} + \phi_1 + h_1 = constante}$$

Equação de Bernouilli

- A equação de Bernouilli generalizada

$$\boxed{\frac{\mathbf{v}_2^2}{2} - \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{Dp}{\rho} Dt + \phi_2 - \phi_1 = \int_1^2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) Dt}$$

- Quando o movimento for estacionário

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

- Lembrando que $\frac{Dp}{\rho} = Dh$ no caso adiabático
- A equação de Bernouilli assumindo movimento estacionário e caso adiabático:

$$\boxed{\frac{\mathbf{v}_2^2}{2} + \phi_2 + h_2 = \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} + \phi_1 + h_1 = constante}$$

Equação de Bernouilli

- A equação de Bernouilli generalizada

$$\boxed{\frac{\mathbf{v}_2^2}{2} - \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{Dp}{\rho} Dt + \phi_2 - \phi_1 = \int_1^2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) Dt}$$

- Quando o movimento for estacionário

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

- Quando o escoamento for incompressível: $\rho =$ constante
- A equação de Bernouilli assumindo escoamento estacionário e incompressível:

$$\boxed{\frac{\mathbf{v}_2^2}{2} + \phi_2 + \frac{p_2}{\rho} = \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} + \phi_1 + \frac{p_1}{\rho} = constante}$$

Equação de Bernouilli

- A equação de Bernouilli generalizada

$$\boxed{\frac{\mathbf{v}_2^2}{2} - \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{Dp}{\rho} Dt + \phi_2 - \phi_1 = \int_1^2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) Dt}$$

- Quando o movimento for estacionário

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

- Quando o escoamento for incompressível: $\rho =$ constante
- A equação de Bernouilli assumindo escoamento estacionário e incompressível:

$$\boxed{\frac{\mathbf{v}_2^2}{2} + \phi_2 + \frac{p_2}{\rho} = \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} + \phi_1 + \frac{p_1}{\rho} = constante}$$

Equação de Bernouilli

- A equação de Bernouilli generalizada

$$\boxed{\frac{\mathbf{v}_2^2}{2} - \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{Dp}{\rho} Dt + \phi_2 - \phi_1 = \int_1^2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) Dt}$$

- Quando o movimento for estacionário

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

- Quando o escoamento for incompressível: $\rho =$ constante
- A equação de Bernouilli assumindo escoamento estacionário e incompressível:

$$\boxed{\frac{\mathbf{v}_2^2}{2} + \phi_2 + \frac{p_2}{\rho} = \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} + \phi_1 + \frac{p_1}{\rho} = constante}$$

Equação de Bernouilli

- A equação de Bernouilli generalizada

$$\boxed{\frac{\mathbf{v}_2^2}{2} - \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{Dp}{\rho} Dt + \phi_2 - \phi_1 = \int_1^2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) Dt}$$

- Quando o movimento for estacionário

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

- Quando o escoamento for incompressível: $\rho = \text{constante}$
- A equação de Bernouilli assumindo escoamento estacionário e incompressível:

$$\boxed{\frac{\mathbf{v}_2^2}{2} + \phi_2 + \frac{p_2}{\rho} = \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} + \phi_1 + \frac{p_1}{\rho} = constante}$$

Equação de Bernoulli

$$\boxed{\frac{\mathbf{v}_2^2}{2} + \phi_2 + \frac{p_2}{\rho} = \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} + \phi_1 + \frac{p_1}{\rho} = constante}$$

- Escoamento não viscoso (não há tensões de cisalhamento)
- Não há dissipação de energia devido a atritos internos entre os elementos de volume do fluido ou do fluido com o ambiente
- Não há trocas de calor entre os elementos de volume do fluido ou do fluido com o ambiente (sistema adiabático)
  - A entropia do elemento permanece constante (caso isentrópico)
- Escoamento estacionário, ou seja, permanente $\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = 0\right)$
- Ao longo de uma linha de corrente
- Densidade constante $(\rho = 0)$
- Referencial inercial

Referência

- Mauro S.D. Cattani, Elementos de Mecânica dos Fluidos, Editora Blucher, 2ed. 2005.