

# Mecânica dos Fluidos Computacional

Problema da Cavidade:

Modelo Matemático, Método Numérico, Algoritmo,  
Implementação e Resultados

Iury Igreja

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional  
Departamento de Ciência da Computação  
Universidade Federal de Juiz de Fora  
`iuryigreja@ice.ufjf.br`

## Definições: vorticidade e função corrente

Supondo um caso bidimensional, onde  $\mathbf{u} = (u, v)$ , podemos definir a vorticidade como:

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{em 2D}).$$

Por outro lado, a função corrente é dada por:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

A partir destas definições, podemos apresentar a seguinte relação:

$$\omega = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = -\Delta \psi$$

## Navier-Stokes (Vorticidade/Função Corrente)

Partindo das relações entre  $\omega$  e  $\psi$  com o campo de velocidade é possível reescrever as equações de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0},$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

como:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \mu \Delta \omega + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0,$$

para fechar o sistema, incluímos a seguinte equação que relaciona  $\omega$  com  $\psi$ :

$$\omega = -\Delta \psi.$$

As equações acima formam o sistema de Navier-Stokes escrito nas variáveis vorticidade e função corrente.

## Navier-Stokes escrita em função de $\omega$ e $\psi$ (derivação)

Tomando o rotacional das equações de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \nabla \times \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p \right] = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

ou ainda, desmembrando o problema de Navier-Stokes em  $u$  e  $v$ , temos

$$\nabla \times \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

## Navier-Stokes escrita em função de $\omega$ e $\psi$ (derivação)

Assim,

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v}{\partial t} - \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \right] = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Assim, derivando em relação a  $y$  a Eq.(1), em relação a  $x$  a Eq.(2) e usando a definição da função corrente em (3), obtemos

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x} - \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}} = 0$$

## Navier-Stokes escrita em função de $\omega$ e $\psi$ (derivação)

Somando (4) com (5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \mu \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \cancel{\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y}} = 0 \end{aligned}$$

Usando a definição de vorticidade  $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ , podemos reescrever a equação como segue

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \mu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \cancel{\frac{\partial u}{\partial x} \omega} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y} \omega} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

## Navier-Stokes escrita em função de $\omega$ e $\psi$

A partir das relações entre  $\omega$  e  $\psi$  com o campo de velocidade é possível reescrever as equações de Navier-Stokes como:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \mu \Delta \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0,$$

ou ainda:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \mu \Delta \omega + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

para fechar o sistema, incluímos a seguinte equação que relaciona  $\omega$  com  $\psi$ :

$$\omega = -\Delta \psi. \quad (7)$$

As equações (6) e (7) formam o sistema de Navier-Stokes escrito nas variáveis vorticidade e função corrente.

## Caso Particular: Problema de Oseen

Um caso particular das equações de Navier-Stokes é o problema de Oseen, onde o campo de velocidade associado ao termo convectivo é conhecido. Neste caso, podemos escrever o problema de Navier-Stokes como:

*Dado  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  e  $\mu$ , encontrar a vorticidade  $\omega$ , tal que:*

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{R_e} \Delta \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0,$$

mais condições iniciais e de contorno.

$R_e$  denota o número de Reynolds que por simplicidade pode ser definido como  $R_e = \mu^{-1}$ .



## Solução analítica: Taylor Vortex

Uma solução analítica para o problema de Navier-Stokes transiente é dada por:

$$u = -\cos(\pi x) \sin(\pi y) \exp\left(\frac{-2\pi^2 t}{R_e}\right)$$

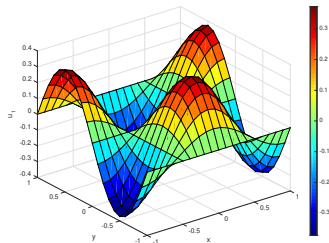
$$v = \sin(\pi x) \cos(\pi y) \exp\left(\frac{-2\pi^2 t}{R_e}\right)$$

$$p = -\frac{1}{4} (\cos(2\pi x) + \cos(2\pi y)) \exp\left(\frac{-4\pi^2 t}{R_e}\right)$$

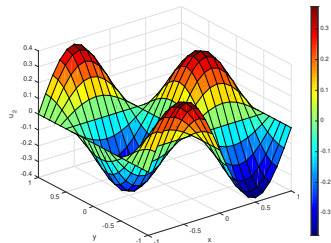
para este caso, a vorticidade é dada por:

$$\omega = 2\pi \cos(\pi x) \cos(\pi y) \exp\left(\frac{-2\pi^2 t}{R_e}\right)$$

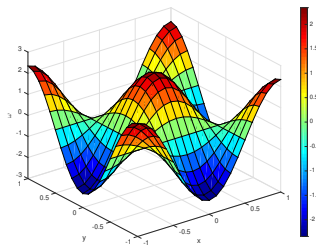
Resultados:  $\Omega = [-1,1]^2$ .  $T = 1$  e  $R_\nu = 20$



$u$



$v$



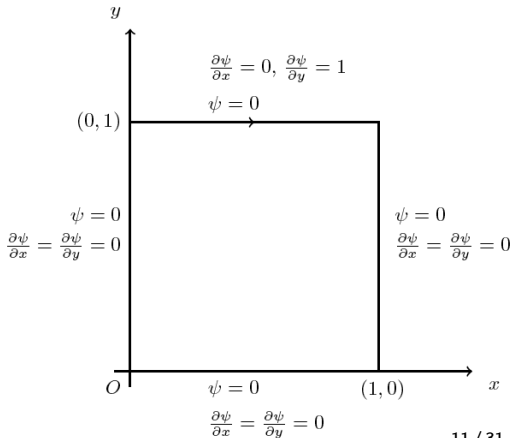
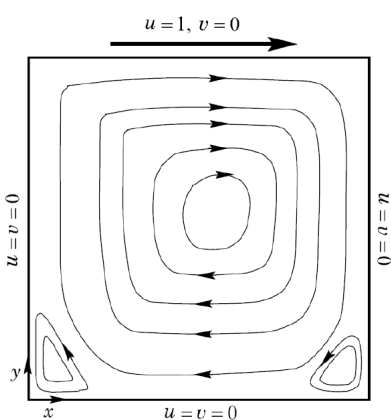
$\omega$

## Problema da cavidade (lid-driven cavity flow)

Dado  $R_e$ , encontrar  $\omega(x, y)$  e  $\psi(x, y)$  em  $\Omega = [0, L] \times [0, L]$ , tal que

$$-\frac{1}{R_e} \Delta \omega + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \quad \text{em } \Omega$$

$$\omega = -\Delta \psi \quad \text{em } \Omega$$



# Problema da cavidade – Aplicação (aneurismas)

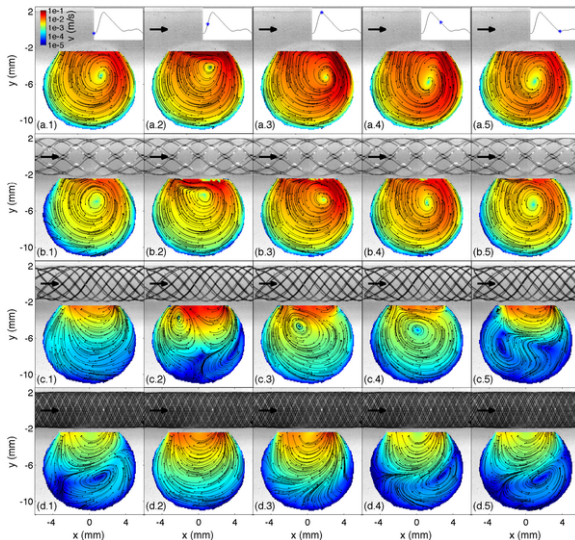


Figura: <https://journals.plos.org/plosone/article/figures?id=10.1371/journal.pone.0113762>

## Problema da cavidade - método ADI

Como o método ADI é dependente do tempo, então vamos aplicar uma abordagem quasi-estacionária com o intuito de iterativamente alcançar o regime estacionário. Assim, reescrevemos as equações como segue

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \Delta \omega + R_e \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - R_e \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi = \omega$$

Assim, quando  $\frac{\partial \omega}{\partial t} \rightarrow 0$  e  $\frac{\partial \psi}{\partial t} \rightarrow 0$  recuperamos o estado estacionário.

## Problema da cavidade - método ADI (função corrente - $\psi$ )

$$\frac{\psi_{i,j}^{n+1/2} - \psi_{i,j}^n}{\Delta t/2} - \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\psi_{i,j}^{n+1/2} + \psi_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} = \omega_{i,j}^n + \frac{\psi_{i,j+1}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2},$$

$$\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} - \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} = \omega_{i,j}^n + \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\psi_{i,j}^{n+1/2} + \psi_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2}.$$

Tomando  $\Delta x = \Delta y = h$  e  $\sigma = \frac{\Delta t}{2h^2}$ , reescrevemos as equações acima como

$$(1 + 2\sigma)\psi_{i,j}^{n+1/2} - \sigma(\psi_{i+1,j}^{n+1/2} + \psi_{i-1,j}^{n+1/2}) = \frac{\Delta t}{2}\omega_{i,j}^n + (1 - 2\sigma)\psi_{i,j}^n + \sigma(\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n),$$

$$(1 + 2\sigma)\psi_{i,j}^{n+1} - \sigma(\psi_{i,j+1}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1}) = \frac{\Delta t}{2}\omega_{i,j}^n + (1 - 2\sigma)\psi_{i,j}^{n+1/2} + \sigma(\psi_{i+1,j}^{n+1/2} + \psi_{i-1,j}^{n+1/2}).$$

## Problema da cavidade - método ADI (vorticidade - $\omega$ )

$$\begin{aligned}
 & \frac{\omega_{i,j}^{n+1/2} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t/2} - \frac{\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\omega_{i,j}^{n+1/2} + \omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} \\
 & + R_e \left( \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \right) \left( \frac{\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - \omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} \right) \\
 & = \frac{\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} + R_e \left( \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \left( \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) \\
 & \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} - \frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^{n+1} + \omega_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \\
 & - R_e \left( \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \left( \frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \right) \\
 & = \frac{\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\omega_{i,j}^{n+1/2} + \omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} \\
 & - R_e \left( \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \right) \left( \frac{\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - \omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} \right)
 \end{aligned}$$

## Problema da cavidade - método ADI (vorticidade - $\omega$ )

$$\text{Tomando } \Delta x = \Delta y = h, \sigma = \frac{\Delta t}{2h^2},$$

$$\rho_x = R_e \left( \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}}{4} \right) \quad \text{e} \quad \rho_y = R_e \left( \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} (1 + 2\sigma)\omega_{i,j}^{n+1/2} + \sigma(\rho_y - 1)\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - \sigma(\rho_y + 1)\omega_{i-1,j}^{n+1/2} \\ = (1 - 2\sigma)\omega_{i,j}^n + \sigma(\rho_x + 1)\omega_{i,j+1}^n + \sigma(1 - \rho_x)\omega_{i,j-1}^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + 2\sigma)\omega_{i,j}^{n+1} - \sigma(\rho_x + 1)\omega_{i,j+1}^{n+1} + \sigma(\rho_x - 1)\omega_{i,j-1}^{n+1} \\ = (1 - 2\sigma)\omega_{i,j}^{n+1/2} + \sigma(1 - \rho_y)\omega_{i+1,j}^{n+1/2} + \sigma(1 + \rho_y)\omega_{i-1,j}^{n+1/2}. \end{aligned}$$



## Problema da cavidade - condições de contorno<sup>1</sup>

Discretizando o domínio  $\Omega$ , temos que para cada contorno seja respeitada a relação

► superior:

$$\omega_{i,J} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{i,J}$$

► inferior:

$$\omega_{i,0} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{i,0}$$

► esquerdo:

$$\omega_{0,j} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{0,j}$$

► direito:

$$\omega_{I,j} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{I,j}$$

---

<sup>1</sup>A definição das condições de contorno é extremamente importante, pois afeta diretamente a estabilidade e a precisão da solução.

## Problema da cavidade - condições de contorno

Considerando a expansão de Taylor para aproximar a derivada de segunda ordem, como, por exemplo, para o contorno superior, obtemos

$$\psi_{i,J-1} = \psi_{i,J} - \Delta y \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{i,J} + \frac{\Delta y^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{i,J},$$

recordando que  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = u$ , temos que

$$-\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{i,J} = 2 \frac{\psi_{i,J} - \psi_{i,J-1}}{\Delta y^2} - \frac{2}{\Delta y} u_{i,J}.$$

Assim,

$$\omega_{i,J} = 2 \frac{\psi_{i,J} - \psi_{i,J-1}}{\Delta y^2} - \frac{2}{\Delta y} u_{i,J}.$$

## Problema da cavidade - condições de contorno

Dessa forma, podemos reescrever as condições para cada contorno, como segue

► superior:

$$\omega_{i,J} = 2 \frac{\psi_{i,J} - \psi_{i,J-1}}{\Delta y^2} - \frac{2}{\Delta y} u_{i,J},$$

► inferior:

$$\omega_{i,0} = 2 \frac{\psi_{i,1} - \psi_{i,0}}{\Delta y^2} - \frac{2}{\Delta y} u_{i,0},$$

► esquerdo:

$$\omega_{1,j} = 2 \frac{\psi_{1,j} - \psi_{0,j}}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta x} v_{0,j},$$

► direito:

$$\omega_{I,j} = 2 \frac{\psi_{I,j} - \psi_{I-1,j}}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta x} v_{I,j}.$$

## Problema da cavidade - condições de contorno

Como  $\psi = 0$  nos contornos  $(\psi_{i,J}, \psi_{i,0}, \psi_{0,j}, \psi_{I,j})$  e somente a componente  $u$  da velocidade no contorno superior é diferente de zero. Então, adotando  $u_{i,J} = 1$  e  $\Delta x = \Delta y = h$ , podemos reescrever as equações como

► superior:

$$\omega_{i,J} = -2 \frac{\psi_{i,J-1}}{h^2} - \frac{2}{h},$$

► inferior:

$$\omega_{i,0} = -2 \frac{\psi_{i,1}}{h^2},$$

► esquerdo:

$$\omega_{0,j} = -2 \frac{\psi_{1,j}}{h^2},$$

► direito:

$$\omega_{I,j} = -2 \frac{\psi_{I-1,j}}{h^2}.$$

## Problema da cavidade - método ADI (estratégia de solução)

- (1) Dada a condição inicial  $\psi_{i,j}^0 = \omega_{i,j}^0 = 0$ ;
- (2) Dada a solução do passo anterior, resolver a equação da função corrente pelo método ADI impondo  $\psi = 0$  nos contornos;
- (3) Dada a solução da função corrente, resolver a equação da vorticidade pelo método ADI impondo as devidas condições de contorno para  $\omega$ ;
- (4) Verificar a convergência adotando o seguinte critério:

$$\max(\|R_{\psi}^{n+1}\|_{\infty}, \|R_{\omega}^{n+1}\|_{\infty}) \leq 10^{-6}$$

onde

$$\|R_{\psi}^{n+1}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq I-1; 1 \leq j \leq J-1} |R_{\psi}^{n+1}(i, j)|$$

e

$$\|R_{\omega}^{n+1}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq I-1; 1 \leq j \leq J-1} |R_{\omega}^{n+1}(i, j)|$$

Se o critério for atingido finaliza o processo iterativo, do contrário retorna para (2).

## Problema da cavidade - método ADI (critério de parada)

Definindo os resíduos associados a função corrente

$$R_{\psi}^{n+1}(i, j) = \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} + \omega_{i,j}^{n+1}$$

e a vorticidade

$$\begin{aligned} R_{\omega}^{n+1}(i, j) = & \frac{1}{R_e} \frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^{n+1} + \omega_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{1}{R_e} \frac{\omega_{i+1,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^{n+1} + \omega_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta y^2} \\ & - \left( \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \right) \left( \frac{\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \\ & + \left( \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \left( \frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \right) \end{aligned}$$

A magnitude desses resíduos indica a convergência da solução para o estado estacionário. Uma vez que estes resíduos tendem a zero a solução tende ao caso estacionário.

## Problema da cavidade – Resultados numéricos

Os resultados da Tabela a seguir foram gerados levando em consideração o **maior valor absoluto** obtido pela função corrente  $\psi$  no domínio. No mesmo ponto, dado pelas coordenadas do maior  $\psi$ , identifica-se o valor da vorticidade  $\omega$ .

malha	$\Delta t$	$\psi$	$\omega$	$x$	$y$
$32 \times 32$	$h^2/10$	0.069855	1.502680	0.5625	0.6250
$64 \times 64$	$h^2/2$	0.105220	1.874321	0.5313	0.5781
$128 \times 128$	$h^2$	0.115466	2.018654	0.5313	0.5703
$256 \times 256$	$h^2$	0.118074	2.055531	0.5313	0.5664
$512 \times 512$	$h^2/2$	0.118722	2.064764	0.5313	0.5645

Tabela: Resultados para  $Re = 1000$

Os resultados demonstram uma boa precisão se comparados com a tabela do próximo slide.

# Problema da cavidade – Tabela de referência $Re = 1000$

Table I. Comparison of the properties of the primary vortex; the maximum streamfunction value, the vorticity value and the location of the centre, for  $Re = 1000$ .

Reference	No	Grid	Spatial accuracy	$\psi$	$\omega$	$x$	$y$
Present		$401 \times 401$	$\Delta h^2$	0.118585	2.062761	0.5300	0.5650
Present		$513 \times 513$	$\Delta h^2$	0.118722	2.064765	0.5313	0.5645
Present		$601 \times 601$	$\Delta h^2$	0.118781	2.065530	0.5300	0.5650
Present		Extrapolated	$\Delta h^6$	<u>0.118942</u>	<u>2.067213</u>	—	—
Barragy and Carey	Reference [2]	$257 \times 257$	$p = 8$	<u>0.118930</u>	—	—	—
Botella and Peyret	Reference [6]	$N = 128$	$N = 128$	<u>0.1189366</u>	<u>2.067750</u>	0.5308	0.5652
Botella and Peyret	Reference [6]	$N = 160$	$N = 160$	<u>0.1189366</u>	<u>2.067753</u>	0.5308	0.5652
Schreiber and Keller	Reference [26]	$100 \times 100$	$\Delta h^2$	0.11315	1.9863	—	—
Schreiber and Keller	Reference [26]	$121 \times 121$	$\Delta h^2$	0.11492	2.0112	—	—
Schreiber and Keller	Reference [26]	$141 \times 141$	$\Delta h^2$	0.11603	2.0268	0.52857	0.56429
Schreiber and Keller	Reference [26]	Extrapolated	$\Delta h^6$	<u>0.11894</u>	<u>2.0677</u>	—	—
Wright and Gaskell	Reference [34]	$1024 \times 1024$	$\Delta h^2$	<u>0.118821</u>	<u>2.06337</u>	0.5308	0.5659
Nishida and Satofuka	Reference [22]	$129 \times 129$	$\Delta h^8$	<u>0.119004</u>	<u>2.068546</u>	0.5313	0.5625
Benjamin and Denny	Reference [5]	$101 \times 101$	$\Delta h^2$	0.1175	2.044	—	—
Benjamin and Denny	Reference [5]	Extrapolated	High order	<u>0.1193</u>	<u>2.078</u>	—	—
Li <i>et al.</i>	Reference [18]	$129 \times 129$	$\Delta h^4$	0.118448	2.05876	0.5313	0.5625
Ghia <i>et al.</i>	Reference [12]	$129 \times 129$	$\Delta h^2$	0.117929	2.04968	0.5313	0.5625
Bruneau and Jouron	Reference [7]	$256 \times 256$	$\Delta h^2$	0.1163	—	0.5313	0.5586
Goyon	Reference [13]	$129 \times 129$	$\Delta h^2$	0.1157	—	0.5312	0.5625
Vanka	Reference [31]	$321 \times 321$	$\Delta h^2$	0.1173	—	0.5438	0.5625
Gupta	Reference [15]	$41 \times 41$	$\Delta h^4$	0.111492	2.02763	0.525	0.575
Hou <i>et al.</i>	Reference [17]	$256 \times 256$	$\Delta h^2$	0.1178	2.0760	0.5333	0.5647
Liao and Zhu	Reference [20]	$129 \times 129$	$\Delta h^2$	0.1160	2.0234	0.5313	0.5625
Grigoriev and Dargush	Reference [14]	—	—	0.11925	—	0.531	0.566



## Problema da cavidade – Resultados numéricos

O próximo estudo foi realizado comparando o valor obtido pela aproximação do campo de velocidade com os valores tabelados dados em *Ghia et al.*<sup>2</sup>

Os campos de velocidade foram obtidos através da seguinte relação:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{h}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{h}$$

Os resultados a seguir foram gerados adotando malhas de  $256 \times 256$  elementos e  $\Delta t = \frac{h^2}{2}$ .

---

<sup>2</sup><http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.413.9651&rep=rep1&type=pdf>

# Problema da cavidade – Resultados numéricos

Results for  $u$ -velocity along Vertical Line through Geometric Center of Cavity

129-grid pt. no.	$y$	Re						
		100	400	1000	3200	5000	7500	10,000
129	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
126	0.9766	0.84123	0.75837	0.65928	0.53236	0.48223	0.47244	0.47221
125	0.9688	0.78871	0.68439	0.57492	0.48296	0.46120	0.47048	0.47783
124	0.9609	0.73722	0.61756	0.51117	0.46547	0.45992	0.47323	0.48070
123	0.9531	0.68717	0.55892	0.46604	0.46101	0.46036	0.47167	0.47804
110	0.8516	0.23151	0.29093	0.33304	0.34682	0.33556	0.34228	0.34635
95	0.7344	0.00332	0.16256	0.18719	0.19791	0.20087	0.20591	0.20673
80	0.6172	-0.13641	0.02135	0.05702	0.07156	0.08183	0.08342	0.08344
65	0.5000	-0.20581	-0.11477	-0.06080	-0.04272	-0.03039	-0.03800	0.03111
59	0.4531	-0.21090	-0.17119	-0.10648	-0.86636	-0.07404	-0.07503	-0.07540
37	0.2813	-0.15662	-0.32726	-0.27805	-0.24427	-0.22855	-0.23176	-0.23186
23	0.1719	-0.10150	-0.24299	-0.38289	-0.34323	-0.33050	-0.32393	-0.32709
14	0.1016	-0.06434	-0.14612	-0.29730	-0.41933	-0.40435	-0.38324	-0.38000
10	0.0703	-0.04775	-0.10338	-0.22220	-0.37827	-0.43643	-0.43025	-0.41657
9	0.0625	-0.04192	-0.09266	-0.20196	-0.35344	-0.42901	-0.43590	-0.42537
8	0.0547	-0.03717	-0.08186	-0.18109	-0.32407	-0.41165	-0.43154	-0.42735
1	0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Figura: Resultados componente  $u$  da velocidade *Ghia et al.*<sup>3</sup> em  $x = 0.5$ .

<sup>3</sup><http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.413.9651&rep=rep1&type=pdf>

# Problema da cavidade – Resultados numéricos

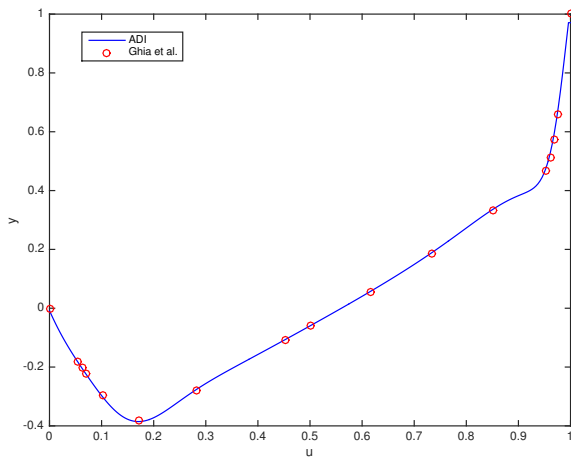
Results for  $v$ -Velocity along Horizontal Line through Geometric Center of Cavity

129- grid pt. no.	$x$	Re						
		100	400	1000	3200	5000	7500	10,000
129	1.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
125	0.9688	-0.05906	-0.12146	-0.21388	-0.39017	-0.49774	-0.53858	-0.54302
124	0.9609	-0.07391	-0.15663	-0.27669	-0.47425	-0.55069	-0.55216	-0.52987
123	0.9531	-0.08864	-0.19254	-0.33714	-0.52357	-0.55408	-0.52347	-0.49099
122	0.9453	-0.10313	-0.22847	-0.39188	-0.54053	-0.52876	-0.48590	-0.45863
117	0.9063	-0.16914	-0.23827	-0.51550	-0.44307	-0.41442	-0.41050	-0.41496
111	0.8594	-0.22445	-0.44993	-0.42665	-0.37401	-0.36214	-0.36213	-0.36737
104	0.8047	-0.24533	-0.38598	-0.31966	-0.31184	-0.30018	-0.30448	-0.30719
65	0.5000	0.05454	0.05186	0.02526	0.00999	0.00945	0.00824	0.00831
31	0.2344	0.17527	0.30174	0.32235	0.28188	0.27280	0.27348	0.27224
30	0.2266	0.17507	0.30203	0.33075	0.29030	0.28066	0.28117	0.28003
21	0.1563	0.16077	0.28124	0.37095	0.37119	0.35368	0.35060	0.35070
13	0.0938	0.12317	0.22965	0.32627	0.42768	0.42951	0.41824	0.41487
11	0.0781	0.10890	0.20920	0.30353	0.41906	0.43648	0.43564	0.43124
10	0.0703	0.10091	0.19713	0.29012	0.40917	0.43329	0.44030	0.43733
9	0.0625	0.09233	0.18360	0.27485	0.39560	0.42447	0.43979	0.43983
1	0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Figura: Resultados componente  $v$  da velocidade *Ghia et al.*<sup>4</sup> em  $y = 0.5$ .

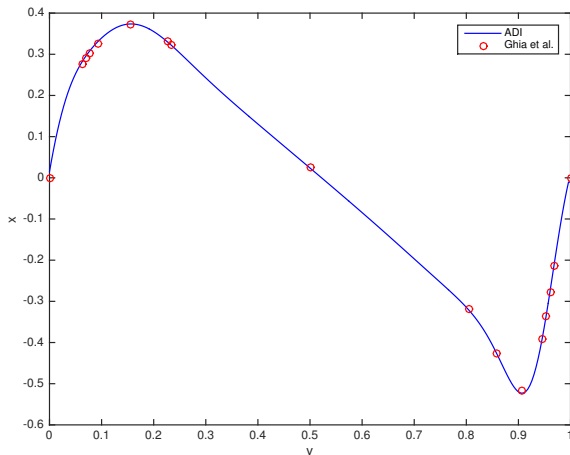
<sup>4</sup><http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.413.9651&rep=rep1&type=pdf>

## Problema da cavidade – Resultados numéricos



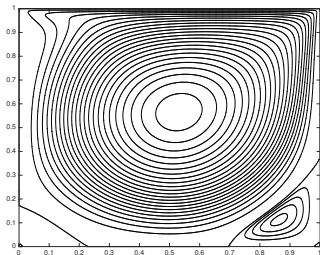
**Figura:** comparação da componente  $u$  da velocidade com *Ghia et al.* em  $x = 0.5$  adotando  $Re = 1000$ .

## Problema da cavidade – Resultados numéricos

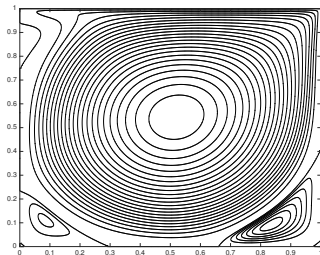


**Figura:** comparação da componente  $v$  da velocidade com *Ghia et al.* em  $y = 0.5$  adotando  $Re = 1000$ .

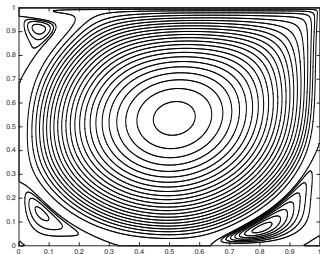
## Problema da cavidade – Função corrente $\psi$



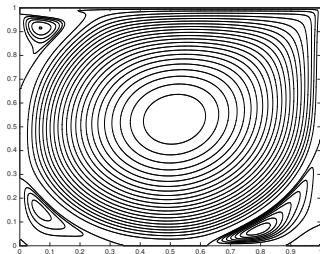
$Re = 1000$



$Re = 2500$

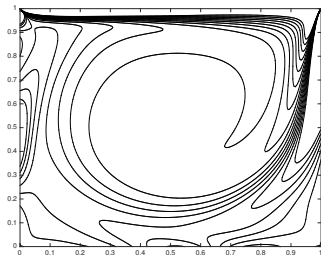


$Re = 5000$

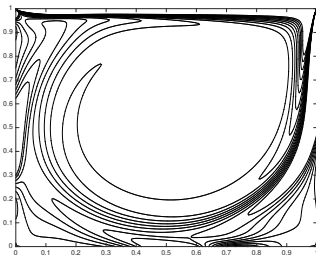


$Re = 7500$

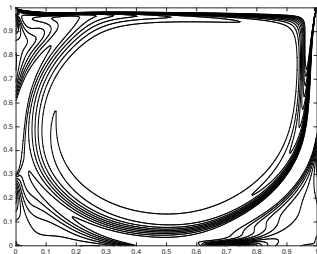
# Problema da cavidade – Vorticidade $\omega$



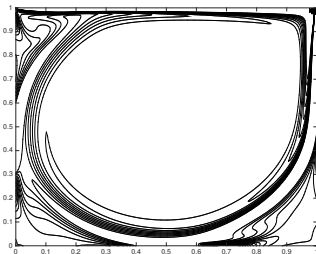
$Re = 1000$



$Re = 2500$



$Re = 5000$



$Re = 7500$