Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da UFJF

Trabalho 1 - Mecânica dos Fluidos Computacional

Prof. Rafael Alves Bonfim de Queiroz

Agosto/2020

Abaixo, segue a descrição do trabalho. A data de entrega é o dia **20/08/2020** para o email (**bonfimraf@gmail.com**). Envie um relatório com extensão pdf contendo a solução dos três exercícios a seguir. Além do pdf, envie-me a implementação computacional realizada do trabalho.

O trabalho terá nota máxima 100 pontos. Caso o aluno atrase na entrega do trabalho, perderá 10 pontos a cada dia de atraso.

A implementação computacional do método numérico pode ser feita em Python, C/C++, Fortran, Octave. Para quem fizer em C/C++ ou Fortan, os dados da simulação podem ser plotados utilizando o Gnuplot (anexar o script para plotar). Utilize o mínimo possível de bibliotecas e o programa não necessita de interface gráfica.

Parte 1: Simplificação das Equações de Navier-Stokes 3D

No curso foram apresentadas as equações de Navier-Stokes que governam o escoamento de fluidos. Descreva todas simplificações que necessitam ser realizadas ou hipóteses que são satisfeitas para se chegar na equação (1).

Exercício 1 (20 pontos) – Detalhar todas hipóteses e simplificações para se chegar na equação (1).

Parte 2: Resolução da Equação de Convecção-Difusão 1D: Burgers viscosa

Para a simulação da equação de Burgers, o seguinte modelo é adotado:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \sin(2.0\pi x), \quad x \in [0,1],$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0.$$

em que $\nu > 0$ é o coeficiente de viscosidade (constante), t é o tempo; $u = u(x,t)$ é a variável dependente, assemelhando-se a velocidade de um escoamento num meio fluido;

Esquemas polinomiais upwind para o tratamento do termo convectivo da equação (1) a serem implementados pelos respectivos alunos:

- Andres – TOPUS ($\alpha = 2$)

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} 2\hat{\phi}_U^4 - 3\hat{\phi}_U^3 + 2\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

- Elias – TOPUS ($\alpha = 0$)

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} \hat{\phi}_U^3 - 2,5\hat{\phi}_U^2 + 2,5\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

- Evandro – TOPUS ($\alpha = 1$)

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} \hat{\phi}_U^4 - \hat{\phi}_U^3 - 1,25\hat{\phi}_U^2 + 2,25\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

- Rosmery – TOPUS ($\alpha = -1$)

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} -\hat{\phi}_U^4 + 3\hat{\phi}_U^3 - \frac{15}{4}\hat{\phi}_U^2 + \frac{11}{4}\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

- Luis – TOPUS ($\alpha = -2$)

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} -2\hat{\phi}_U^4 + 5\hat{\phi}_U^3 - 5\hat{\phi}_U^2 + 3\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

- Mateus – FSFL ($\beta = 0$)

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} 4\hat{\phi}_U^4 - 8\hat{\phi}_U^3 + 4\hat{\phi}_U^2 + \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

- Rael – FSFL ($\beta = 1$)

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} 2\hat{\phi}_U^4 - 4\hat{\phi}_U^3 + 1,5\hat{\phi}_U^2 + 1,5\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

- Rodrigo – FSFL ($\beta = 1.5$)

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} \hat{\phi}_U^4 - 2\hat{\phi}_U^3 + 0,25\hat{\phi}_U^2 + 1,75\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

- Jaime – FSFL ($\beta = 2$)

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} -\hat{\phi}_U^2 + 2\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

- No código exemplo (**burgerfinal-040820.c**), o professor apresentou a implementação do esquema ADBQUICKEST formulado abaixo:

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} (2-\theta)\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0,a), \\ \hat{\phi}_U + \frac{1}{2}(1-|\theta|)(1-\hat{\phi}_U) - \frac{1}{6}(1-\theta^2)(1-2\hat{\phi}_U), & \hat{\phi}_U \in [a,b], \\ 1-\theta+\theta\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in (b,1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1], \end{cases}$$

nos quais θ, a e b são dados por:

$$\theta = \frac{u\delta t}{\delta x}; \quad a = \frac{2 - 3|\theta| + \theta^2}{7 - 6\theta - 3|\theta| + 2\theta^2}; \quad b = \frac{-4 + 6\theta - 3|\theta| + \theta^2}{-5 + 6\theta - 3|\theta| + 2\theta^2}.$$

Exercício 2 (40 pontos) – Parâmetros para as simulações: viscosidade $\nu = 0.001$; número de CFL $\theta \in \{0.1; 0.5; 0.9\}$, tempo final de simulação $t \in \{0.1; 0.3, 0.5\}$. Esquemas a considerar: aquele que você implementou e o ADBQUICKEST.

Neste exercício, você poderá ter para cada esquema (resultado indicado por A e B) os resultados mostrados em três figuras a saber:

- Figura 1: comportamento da simulação com os parâmetros – $\nu = 0.001$, $\theta = 0.1$, $t \in \{0.1; 0.3, 0.5\}$ (Figura 1A e Figura 1B);
- Figura 2: comportamento da simulação com os parâmetros – $\nu = 0.001$, $\theta = 0.5$, $t \in \{0.1; 0.3, 0.5\}$ (Figura 2A e Figura 2B);
- Figura 3: comportamento da simulação com os parâmetros – $\nu = 0.001$, $\theta = 0.9$, $t \in \{0.1; 0.3, 0.5\}$ (Figura 3A e Figura 3B).

- Caso prefira, você poderá colocar em cada figura acima mencionada, os resultados dos dois métodos juntos. Assim, produzirá três figuras (Figura 1, Figura 2, Figura 3).

- Comente o resultado das três figuras comparandos os métodos. Os esquemas tiveram o mesmo comportamento?

Exercício 3 (40 pontos) – Parâmetros para as simulações: número de CFL $\theta = 0.5$; viscosidade $\nu \in \{0.001; 0.0005; 0.00025\}$, tempo final de simulação $t \in \{0.1; 0.3, 0.5\}$.

Este exercício segue a mesma abordagem do exercício 2 para mostrar os resultados dos esquemas: aquele que você implementou (A) e o ADBQUICKEST (B).

Você poderá ter para cada esquema os resultados mostrados em três figuras a saber:

- Figura 4: comportamento da simulação com os parâmetros – $\nu = 0.001$, $\theta = 0.1$, $t \in \{0.1; 0.3, 0.5\}$ (Figura 4A e Figura 4B)
- Figura 5: comportamento da simulação com os parâmetros – $\nu = 0.001$, $\theta = 0.5$, $t \in \{0.1; 0.3, 0.5\}$ (Figura 5A e Figura 5B)
- Figura 6: comportamento da simulação com os parâmetros – $\nu = 0.001$, $\theta = 0.9$, $t \in \{0.1; 0.3, 0.5\}$ (Figura 6A e Figura 6B)

Caso prefira, você poderá colocar em cada figura acima mencionada, os resultados dos dois métodos juntos. Assim, produzirá três figuras (Figura 4, Figura 5, Figura 6).

- Comente o resultado das Figuras 4, 5 e 6 comparandos os métodos. Os esquemas tiveram o mesmo comportamento?