Mecânica dos Fluidos Computacional
Escoamentos compressíveis

Iury Higor Aguiar da Igreja
Patricia Habib Hallak
Rafael Alves Bonfim de Queiroz

patricia.hallak@ufjf.edu.br
patriciahallak@yahoo.com

21 September 2020

Enunciado do trabalho

- Desenvolvimento computacionais do problema e solução final para ρ, V e T. Comparação dos resultados com os resultados analíticos.
  Adotar:
  - $\Delta(x/L)$=0.1;
  - $x/L = 0$ no *inflow*;
  - $x/L = 3$ no *outflow*;
  - $C = 0.5$

Roteiro:

1. Inicialiação da geometria e condições iniciais.

$$A = 1 + 2,2(x - 1,5)^2 \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$\rho = 1 - 0,3146x$$
$$T = 1 - 0,2314x$$
$$V = (0,1 + 1,09x)\,T^{1/2}$$

Substituir estes valores nas equações

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i^t = -\rho_i^t \frac{V_{i+1}^t - V_i^t}{\Delta x} - \rho_i^t V_i^t \frac{\ln A_{i+1} - \ln A_i}{\Delta x} - V_i^t \frac{\rho_{i+1}^t - \rho_i^t}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_i^t = -V_i^t \frac{V_{i+1}^t - V_i^t}{\Delta x} - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{T_{i+1}^t - T_i^t}{\Delta x} + \frac{T_i^t}{\rho_i^t}\frac{\rho_{i+1}^t - \rho_i^t}{\Delta x}\right)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^t = -V_i^t \frac{T_{i+1}^t - T_i^t}{\Delta x} - (\gamma - 1)\,T_i^t \left(\frac{V_{i+1}^t - V_i^t}{\Delta x} + V_i^t \frac{\ln A_{i+1} - \ln A_i}{\Delta x}\right)$$

para iniciar a etapa do passo preditor

2. Calcular os valores previstos (quantidades com as barras)

$$\overline{\rho}_i^{t+\Delta t} = \rho_i^t + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i^t \Delta t$$

$$\overline{V}_i^{t+\Delta t} = V_i^t + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_i^t \Delta t$$

$$\overline{T}_i^{t+\Delta t} = T_i^t + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^t \Delta t$$

Avaliar o passo de tempo ($C = 0.5$ e $\sqrt{T}$):

$$\Delta t = \mathrm{minimum}(\Delta_1^t, \Delta_2^t, ..., \Delta_i^t, ..., \Delta_N^t)$$

Step -3 - Resultados numéricos.

3. Passo corretor

$$\left(\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t}}\right)_i^{t+\Delta t} = -\overline{\rho}_i^{t+\Delta t}\frac{\overline{V}_i^{t+\Delta t} - \overline{V}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} + -\overline{\rho}_i^{t+\Delta t}\overline{V}_i^{t+\Delta t}\frac{\ln A_i - \ln A_{i-1}}{\Delta x} - \overline{V}_i^{t+\Delta t}\frac{\overline{\rho}_i^{t+\Delta t} - \overline{\rho}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x}$$

Passo corretor:

$$\left(\frac{\overline{\partial V}}{\partial t}\right)_i^{t+\Delta t} = -\overline{V}_i^{t+\Delta t}\frac{\overline{V}_i^{t+\Delta t} - \overline{V}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} -$$
$$\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\overline{T}_i^{t+\Delta t} - \overline{T}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \frac{\overline{T}_i^{t+\Delta t}}{\overline{\rho}_i^{t+\Delta t}}\frac{\overline{\rho}_i^{t+\Delta t} - \overline{\rho}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x}\right)$$

$$\left(\frac{\overline{\partial T}}{\partial t}\right)_i^{t+\Delta t} = -\overline{V}_i^{t+\Delta t}\frac{\overline{T}_i^{t+\Delta t} - \overline{T}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} -$$
$$(\gamma - 1)\overline{T}_i^{t+\Delta t} \times \left(\frac{\overline{V}_i^{t+\Delta t} - \overline{V}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \overline{V}_i^{t+\Delta t}\frac{\ln A_i - \ln A_{i-1}}{\Delta x}\right)$$

4. Calcular as derivadas médias no tempo

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{av} = 0.5\left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i^t + \left(\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t}}\right)_i^{t+\Delta t}\right]$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{av} = 0.5\left[\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_i^t + \left(\overline{\frac{\partial V}{\partial t}}\right)_i^{t+\Delta t}\right]$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{av} = 0.5\left[\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^t + \left(\overline{\frac{\partial T}{\partial t}}\right)_i^{t+\Delta t}\right]$$

5. Correção final para o próximo passo de tempo

$$\rho_i^{t+\Delta t} = \rho_i^t + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{av} \Delta t$$
$$V_i^{t+\Delta t} = V_i^t + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{av} \Delta t$$
$$T_i^{t+\Delta t} = T_i^t + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{av} \Delta t$$

6. Inserir as condições de contorno
   - Nó 1:

$$\text{Slope} = \frac{V_3 - V_1}{\Delta x} \rightarrow V_1 = 2V_2 - V3$$

   - Nó N:

$$V_N = 2V_{N-1} - V_{N-2}$$
$$\rho_N = 2\rho_{N-1} - \rho_{N-2}$$
$$T_N = 2T_{N-1} - T_{N-2}$$

7. Repetir os passos anteriores até se alcançar o regime estacionário.

Step -3 - Resultados numéricos.

8. Solução final:
   8.1 Monitorar o nó no bocal.
      - Apresentar a evolução das variáveis no tempo.
      - Apresentar o resíduo ao longo do tempo (valor absoluto) para o nó monitorado, ou seja, plotar $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{av}$ e $\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{av}$ com o tempo.

   8.2 Comparar os resultados em regime estacionário com os resultados analíticos.

$$\left(\frac{A}{A*}\right)^2 = \frac{1}{M^2}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \qquad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1/(\gamma-1)}$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1}$$

9. Fazer teste de malha e com outro passo de tempo (entre $C = 0,5$ a $C = 1$).

10. Apresentação: gravar um vídeo de 15 minutos com os seus desenvolvimentos. Fazer o upload no drive da disciplina na pasta compartilhada com o seu nome.
    url = `https://drive.google.com/drive/folders/1g0Jg-FkGjRFqPo0EaNBvUoiV9Yc9uTxl?usp=sharing`
    Data para entrega: 02/10/2020