A partir do problema de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \dfrac{1}{R_e}\Delta \mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0} \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

supondo um caso bidimensional, onde $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, podemos definir a vorticidade como:

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

Neste contexto, podemos reescrever as equações de Navier-Stokes como:

*Encontrar $\omega(x,y,t) \in \Omega\times\Theta$ satisfazendo a seguinte equação:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t} - \dfrac{1}{R_e}\Delta\omega + \mathbf{u}\cdot\nabla\omega = f(x,y,t) & \text{em} \quad \Omega\times\Theta \\ \omega(x,y,t) = \overline{\omega} & \text{sobre} \quad \partial\Omega\times\Theta \\ \omega(x,y,0) = \varphi(x,y) & \text{em} \quad \Omega \end{cases} \tag{1}$$

**1.** Supondo $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , discretize o problema (1) pelo método de direções alternadas (ADI) e implemente um código computacional para simular este problema.

a) Considerando o domínio espacial $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ e temporal $\Theta = [0, 0.5]$ e adotando $R_e = 1$, valide sua implementação utilizando a seguinte solução exata:

$$\omega(x,y,t) = e^{-2\pi^2 t}\sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

Plote a solução aproximada para diferentes malhas e a solução exata para comparação.

b) Determine a ordem de convergência do método ADI na norma do máximo utilizando as seguintes malhas $4\times4, 8\times8, 16\times16, 32\times32, 64\times64$, $\Delta t = h$ e $\Delta t = h^2$, calculada no tempo final $T = 0.5$.

**2.** Inclua no código do item anterior o termo convectivo, ou seja, suponha $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ em (1). Discretize o termo convectivo utilizando o esquema central.

a) Considerando o domínio espacial $\Omega = [-1,1]\times[-1,1]$ e temporal $\Theta = [0,1]$ e adotando $R_e = 20$, valide seu código através da solução exata:

$$\omega = 2\pi\cos(\pi x)\cos(\pi y)\exp\left(\frac{-2\pi^2 t}{R_e}\right)$$

com

$$u_1 = -\cos(\pi x)\sin(\pi y)\exp\left(\frac{-2\pi^2 t}{R_e}\right) \qquad u_2 = \sin(\pi x)\cos(\pi y)\exp\left(\frac{-2\pi^2 t}{R_e}\right)$$

e plote a solução aproximada para diferentes malhas e a solução exata para comparação.

b) Determine a ordem de convergência do método na norma do máximo utilizando as seguintes malhas $8\times8, 16\times16, 32\times32, 64\times64, 128\times128$ e $\Delta t = h$, calculada no tempo final $T = 1$.