Tratamento numérico do termo convectivo de EDPs

Rafael Alves Bonfim de Queiroz
bonfimraf@gmail.com

Universidade Federal de Juiz de Fora
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

Conteúdo

Equação de convecção-difusão 1D

Equação de Convecção-Difusão 1D

- EDP simples linear ou não que modela uma variedade de problemas em dinâmica dos fluidos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(f(u)\Big) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

  em que $f(u)$ é a função fluxo, ν é o coeficiente de viscosidade (constante) e $u = u(x,t)$.

- Condição inicial ($t = 0$):

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (x_L, x_R),$$

- Condição de contorno/fronteira (x_L e x_R):

$$u(x_L,t) = u_L, \quad u(x_R,t) = u_R \quad (u_L \text{ e } u_R \text{ são constantes}).$$

- Propensa à formação de choques, mesmo nos casos de dados iniciais suaves

Equação de Convecção-Difusão 1D

- EDP simples linear ou não que modela uma variedade de problemas em dinâmica dos fluidos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(f(u)\Big) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

em que $f(u)$ é a função fluxo, ν é o coeficiente de viscosidade (constante) e $u = u(x, t)$.

- Condição inicial ($t = 0$):

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (x_L, x_R),$$

- Condição de contorno/fronteira (x_L e x_R):

$$u(x_L, t) = u_L, \quad u(x_R, t) = u_R \quad (u_L \text{ e } u_R \text{ são constantes}).$$

- Propensa à formação de choques, mesmo nos casos de dados iniciais suaves

Equação de Convecção-Difusão 1D

- EDP simples linear ou não que modela uma variedade de problemas em dinâmica dos fluidos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(f(u)\Big) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

  em que $f(u)$ é a função fluxo, ν é o coeficiente de viscosidade (constante) e $u = u(x,t)$.
- Condição inicial ($t = 0$):

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (x_L, x_R),$$

- Condição de contorno/fronteira (x_L e x_R):

$$u(x_L,t) = u_L, \quad u(x_R,t) = u_R \quad (u_L \text{ e } u_R \text{ são constantes}).$$

- Propensa à formação de choques, mesmo nos casos de dados iniciais suaves

Equação de Convecção-Difusão 1D

- EDP simples linear ou não que modela uma variedade de problemas em dinâmica dos fluidos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(f(u)\Big) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

  em que $f(u)$ é a função fluxo, ν é o coeficiente de viscosidade (constante) e $u = u(x,t)$.
- Condição inicial ($t = 0$):

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (x_L, x_R),$$

- Condição de contorno/fronteira (x_L e x_R):

$$u(x_L,t) = u_L, \quad u(x_R,t) = u_R \quad (u_L \text{ e } u_R \text{ são constantes}).$$

- Propensa à formação de choques, mesmo nos casos de dados iniciais suaves

Equação de Convecção-Difusão 1D: Burgers viscosa

- Equação de Burgers viscosa 1D:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(f(u)\Big) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

em que $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ é a função fluxo, ν é o coeficiente de viscosidade (constante) e $u = u(x,t)$.

- Condição inicial ($t = 0$):

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (x_L, x_R),$$

- Condição de contorno/fronteira (x_L e x_R):

$$u(x_L,t) = u_L, \quad u(x_R,t) = u_R \quad (u_L \text{ e } u_R \text{ são constantes}).$$

Equação de Convecção-Difusão 1D: Burgers viscosa

- Equação de Burgers viscosa 1D:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(f(u)\Big) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

em que $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ é a função fluxo, ν é o coeficiente de viscosidade (constante) e $u = u(x,t)$.

- Condição inicial ($t = 0$):

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (x_L, x_R),$$

- Condição de contorno/fronteira (x_L e x_R):

$$u(x_L,t) = u_L, \quad u(x_R,t) = u_R \quad (u_L \text{ e } u_R \text{ são constantes}).$$

Equação de Convecção-Difusão 1D: Burgers viscosa

- Equação de Burgers viscosa 1D:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(f(u)\Big) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

em que $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ é a função fluxo, ν é o coeficiente de viscosidade (constante) e $u = u(x,t)$.

- Condição inicial ($t = 0$):

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (x_L, x_R),$$

- Condição de contorno/fronteira (x_L e x_R):

$$u(x_L,t) = u_L, \quad u(x_R,t) = u_R \quad (u_L \text{ e } u_R \text{ são constantes}).$$

Discretização da equação de Burgers viscosa 1D

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2\right) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

- Termo transiente

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t}$$

- Termo viscoso

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^n - u_i^n + u_{i-1}^n}{(\delta x)^2}$$

- Termo convectivo

$$\frac{\partial (uu)}{\partial x} \approx ??? = \mathrm{CONV}(u^n u^n)$$

- Método numérico explícito:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \delta t \mathrm{CONV}(u^n u^n) + \frac{\nu \delta t}{(\delta x)^2}\left(u_{i+1}^n - u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

Discretização da equação de Burgers viscosa 1D

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2\right) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

- Termo transiente

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t}$$

- Termo viscoso

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^n - u_i^n + u_{i-1}^n}{(\delta x)^2}$$

- Termo convectivo

$$\frac{\partial (uu)}{\partial x} \approx ??? = \mathrm{CONV}(u^n u^n)$$

- Método numérico explícito:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \delta t \mathrm{CONV}(u^n u^n) + \frac{\nu \delta t}{(\delta x)^2}\left(u_{i+1}^n - u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

Discretização da equação de Burgers viscosa 1D

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2\right) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

- Termo transiente

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t}$$

- Termo viscoso

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^n - u_i^n + u_{i-1}^n}{(\delta x)^2}$$

- Termo convectivo

$$\frac{\partial (uu)}{\partial x} \approx ??? = \mathrm{CONV}(u^n u^n)$$

- Método numérico explícito:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \delta t \mathrm{CONV}(u^n u^n) + \frac{\nu \delta t}{(\delta x)^2}\left(u_{i+1}^n - u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

Discretização da equação de Burgers viscosa 1D

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2\right) = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

- Termo transiente

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t}$$

- Termo viscoso

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^n - u_i^n + u_{i-1}^n}{(\delta x)^2}$$

- Termo convectivo

$$\frac{\partial (uu)}{\partial x} \approx ??? = \mathrm{CONV}(u^n u^n)$$

- Método numérico explícito:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \delta t \mathrm{CONV}(u^n u^n) + \frac{\nu \delta t}{(\delta x)^2}\left(u_{i+1}^n - u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

Esquemas upwind de alta resolução

Formulação de Variáveis Normalizadas – NVF

- A metodologia NVF (*Normalised Variable Formulation*) foi proposta por Leonard[1]
- Obter esquemas convectivos capazes de resolver gradientes elevados e, ao mesmo tempo, manter estabilidade nas soluções numéricas
- Considerando as posições D (*Downstream*), R (*Remote-Upstream*) e U (*Upstream*) em relação a face computacional f da célula computacional, uma variável genérica ϕ é definida como segue:

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_R}{\phi_D - \phi_R},$$

em que ϕ_D e ϕ_R são, respectivamente, os valores não normalizados da grandeza ϕ nos pontos D e R da malha computacional

[1] B. Leonard, Simple high-accuracy resolution program for convective modeling of discontinuities, Int. J. Numer. Methods Fluids, 8:1291–1318, 1988.

Formulação de Variáveis Normalizadas – NVF

- A metodologia NVF (*Normalised Variable Formulation*) foi proposta por Leonard[1]
- Obter esquemas convectivos capazes de resolver gradientes elevados e, ao mesmo tempo, manter estabilidade nas soluções numéricas
- Considerando as posições D (*Downstream*), R (*Remote-Upstream*) e U (*Upstream*) em relação a face computacional f da célula computacional, uma variável genérica ϕ é definida como segue:

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_R}{\phi_D - \phi_R},$$

em que ϕ_D e ϕ_R são, respectivamente, os valores não normalizados da grandeza ϕ nos pontos D e R da malha computacional

[1] B. Leonard, Simple high-accuracy resolution program for convective modeling of discontinuities, Int. J. Numer. Methods Fluids, 8:1291–1318, 1988.

Formulação de Variáveis Normalizadas – NVF

- A metodologia NVF (*Normalised Variable Formulation*) foi proposta por Leonard[1]
- Obter esquemas convectivos capazes de resolver gradientes elevados e, ao mesmo tempo, manter estabilidade nas soluções numéricas
- Considerando as posições D (*Downstream*), R (*Remote-Upstream*) e U (*Upstream*) em relação a face computacional f da célula computacional, uma variável genérica ϕ é definida como segue:

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_R}{\phi_D - \phi_R},$$

em que ϕ_D e ϕ_R são, respectivamente, os valores não normalizados da grandeza ϕ nos pontos D e R da malha computacional

[1] B. Leonard, Simple high-accuracy resolution program for convective modeling of discontinuities, Int. J. Numer. Methods Fluids, 8:1291–1318, 1988.

Formulação de Variáveis Normalizadas

- Variável genérica ϕ normalizada:

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_R}{\phi_D - \phi_R},$$

em que ϕ_D e ϕ_R são, respectivamente, os valores não normalizados da grandeza ϕ nos pontos D e R da malha computacional

- Variável ϕ normalizada na face f:

$$\hat{\phi}_f = \frac{\phi_f - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$$

- Variável ϕ normalizada no nó D:

$$\hat{\phi}_D = 1$$

- Variável ϕ normalizada no nó R:

$$\hat{\phi}_R = 0$$

- Variável ϕ normalizada no nó U:

$$\hat{\phi}_U = \frac{\phi_U - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$$

Formulação de Variáveis Normalizadas

- Variável genérica ϕ normalizada:

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_R}{\phi_D - \phi_R},$$

  em que ϕ_D e ϕ_R são, respectivamente, os valores não normalizados da grandeza ϕ nos pontos D e R da malha computacional

- Variável ϕ normalizada na face f:

$$\hat{\phi}_f = \frac{\phi_f - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$$

- Variável ϕ normalizada no nó D:

$$\hat{\phi}_D = 1$$

- Variável ϕ normalizada no nó R:

$$\hat{\phi}_R = 0$$

- Variável ϕ normalizada no nó U:

$$\hat{\phi}_U = \frac{\phi_U - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$$

Formulação de Variáveis Normalizadas

- Variável genérica ϕ normalizada:

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_R}{\phi_D - \phi_R},$$

em que ϕ_D e ϕ_R são, respectivamente, os valores não normalizados da grandeza ϕ nos pontos D e R da malha computacional

- Variável ϕ normalizada na face f:

$$\hat{\phi}_f = \frac{\phi_f - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$$

- Variável ϕ normalizada no nó D:

$$\hat{\phi}_D = 1$$

- Variável ϕ normalizada no nó R:

$$\hat{\phi}_R = 0$$

- Variável ϕ normalizada no nó U:

$$\hat{\phi}_U = \frac{\phi_U - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$$

Formulação de Variáveis Normalizadas

- Variável genérica ϕ normalizada:

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_R}{\phi_D - \phi_R},$$

em que ϕ_D e ϕ_R são, respectivamente, os valores não normalizados da grandeza ϕ nos pontos D e R da malha computacional

- Variável ϕ normalizada na face f:

$$\hat{\phi}_f = \frac{\phi_f - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$$

- Variável ϕ normalizada no nó D:

$$\hat{\phi}_D = 1$$

- Variável ϕ normalizada no nó R:

$$\hat{\phi}_R = 0$$

- Variável ϕ normalizada no nó U:

$$\hat{\phi}_U = \frac{\phi_U - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$$

Formulação de Variáveis Normalizadas

- Variável genérica ϕ normalizada:

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_R}{\phi_D - \phi_R},$$

em que ϕ_D e ϕ_R são, respectivamente, os valores não normalizados da grandeza ϕ nos pontos D e R da malha computacional

- Variável ϕ normalizada na face f:

$$\hat{\phi}_f = \frac{\phi_f - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$$

- Variável ϕ normalizada no nó D:

$$\hat{\phi}_D = 1$$

- Variável ϕ normalizada no nó R:

$$\hat{\phi}_R = 0$$

- Variável ϕ normalizada no nó U:

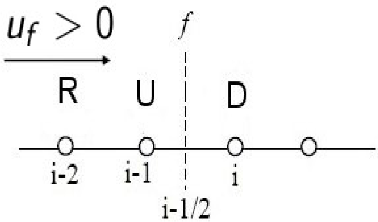
$$\hat{\phi}_U = \frac{\phi_U - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$$

Variáveis Normalizadas

- Seja ϕ a variação de um escalar na direção normal a uma face f, a sua transformação em variáveis normalizadas é definida por:

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$$

- Posições dos nós computacionais D, R e U em relação à face f considerando a velocidade do fluido nesta face $u_f > 0$

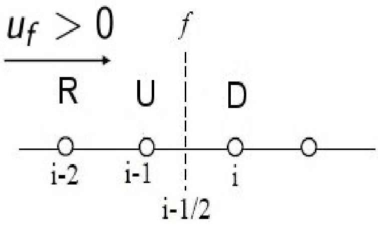


Variáveis Normalizadas

- Seja ϕ a variação de um escalar na direção normal a uma face f, a sua transformação em variáveis normalizadas é definida por:

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$$

- Posições dos nós computacionais D, R e U em relação à face f considerando a velocidade do fluido nesta face $u_f > 0$



Critério de limitação CBC

- Considerando-se a importância de soluções limitadas no transporte de propriedades físicas, Gaskell e Lau[2] propuseram o critério de limitação CBC (*Convection Boundedness Criterion*)
- No contexto NVF, um esquema convectivo produz solução limitada se ele está inteiramente contido na região CBC, isto é, o esquema deve satisfazer às seguintes condições:

$$
\begin{cases}
\hat{\phi}_f \in [\hat{\phi}_U, 1], & \text{para } \hat{\phi}_f \in [0,1], \\
\hat{\phi}_f = 0, & \text{para } \hat{\phi}_U = 0, \\
\hat{\phi}_f = 1, & \text{para } \hat{\phi}_U = 1, \\
\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_U, & \text{para } \hat{\phi}_f \notin [0,1].
\end{cases}
$$

[2] P. Gaskell and A. Lau, Curvature-compensated convective transport: Smart, a new boundedness preserving transport algorithm, Int. J. Numer. Methods Fluids, 8:617–641, 1988.

Critério de limitação CBC

- Considerando-se a importância de soluções limitadas no transporte de propriedades físicas, Gaskell e Lau[2] propuseram o critério de limitação CBC (*Convection Boundedness Criterion*)
- No contexto NVF, um esquema convectivo produz solução limitada se ele está inteiramente contido na região CBC, isto é, o esquema deve satisfazer às seguintes condições:

$$\begin{cases} \hat{\phi}_f \in [\hat{\phi}_U, 1], & \text{para } \hat{\phi}_f \in [0,1], \\ \hat{\phi}_f = 0, & \text{para } \hat{\phi}_U = 0, \\ \hat{\phi}_f = 1, & \text{para } \hat{\phi}_U = 1, \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_U, & \text{para } \hat{\phi}_f \notin [0,1]. \end{cases}$$

[2] P. Gaskell and A. Lau, Curvature-compensated convective transport: Smart, a new boundedness preserving transport algorithm, Int. J. Numer. Methods Fluids, 8:617–641, 1988.

Critério de convergência TVD

- Apesar do critério CBC tratar o problema de estabilidade adequadamente, ele não garante convergência da solução numérica
- Para convergência, as restrições TVD (*Total Variation Diminishing*) de Harten [3] devem ser satisfeitas
- No contexto NVF, essas restrições são expressas por:

$$\begin{cases} \hat{\phi}_f \in [\hat{\phi}_U, 2\hat{\phi}_U] \quad \text{e} \quad \hat{\phi}_f \leq 1, & \text{para } \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_U, & \text{para } \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

[3] A. Harten, High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, J. Comput. Phys., 49:357–393, 1983.

Critério de convergência TVD

- Apesar do critério CBC tratar o problema de estabilidade adequadamente, ele não garante convergência da solução numérica
- Para convergência, as restrições TVD (*Total Variation Diminishing*) de Harten [3] devem ser satisfeitas
- No contexto NVF, essas restrições são expressas por:

$$\begin{cases} \hat{\phi}_f \in [\hat{\phi}_U, 2\hat{\phi}_U] \quad \text{e} \quad \hat{\phi}_f \leq 1, & \text{para } \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_U, & \text{para } \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

[3] A. Harten, High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, J. Comput. Phys., 49:357–393, 1983.

Critério de convergência TVD

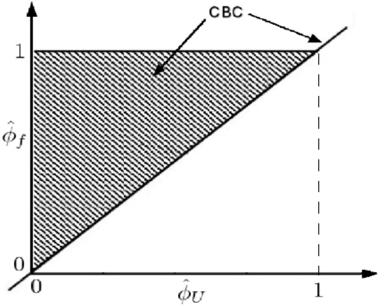
- Apesar do critério CBC tratar o problema de estabilidade adequadamente, ele não garante convergência da solução numérica
- Para convergência, as restrições TVD (*Total Variation Diminishing*) de Harten [3] devem ser satisfeitas
- No contexto NVF, essas restrições são expressas por:

$$\begin{cases} \hat{\phi}_f \in [\hat{\phi}_U, 2\hat{\phi}_U] \quad \text{e} \quad \hat{\phi}_f \leq 1, & \text{para } \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_U, & \text{para } \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

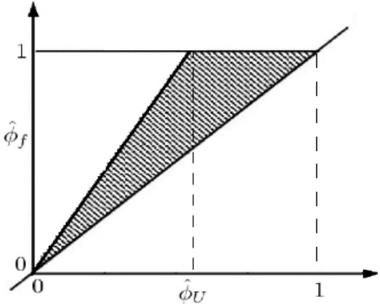
[3] A. Harten, High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, J. Comput. Phys., 49:357–393, 1983.

Regiões CBC e TVD

(a) região CBC (solução limitada)



(b) região TVD (convergência)



Esquemas upwind de alta resolução

- Há vários esquemas upwind para tratamento do termo convectivo
- Apresentarei a formulação de três esquemas[4] no contexto NVF que satisfazem as condições CBC e restrições TVD
  - Esquema TOPUS (*Third Order Polynomial Upwind Scheme*)
  - Esquema ALUS ( )
  - Esquema FSFL (*Flexible and Symmetric Flux Limiter*)

[4] R.A.B. Queiroz, Desenvolvimento e teste de esquemas upwind de alta resolução e suas aplicações em escoamentos incompressíveis com superfícies livres, Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, 2009.

Esquemas upwind de alta resolução

- Há vários esquemas upwind para tratamento do termo convectivo
- Apresentarei a formulação de três esquemas[4] no contexto NVF que satisfazem as condições CBC e restrições TVD
  - Esquema TOPUS (*Third-Order Polynomial Upwind Scheme*)
  - Esquema ALUS (*Adaptive Linear Upwind Scheme*)
  - Esquema FSFL (*Flexible and Symmetric Flux Limiter*)

[4] R.A.B. Queiroz, Desenvolvimento e teste de esquemas upwind de alta resolução e suas aplicações em escoamentos incompressíveis com superfícies livres, Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, 2009.

Esquemas upwind de alta resolução

- Há vários esquemas upwind para tratamento do termo convectivo
- Apresentarei a formulação de três esquemas[4] no contexto NVF que satisfazem as condições CBC e restrições TVD
  - Esquema TOPUS (*Third-Order Polynomial Upwind Scheme*)
  - Esquema ALUS (*Adaptive Linear Upwind Scheme*)
  - Esquema FSFL (*Flexible and Symmetric Flux Limiter*)

[4] R.A.B. Queiroz, Desenvolvimento e teste de esquemas upwind de alta resolução e suas aplicações em escoamentos incompressíveis com superfícies livres, Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, 2009.

Esquemas upwind de alta resolução

- Há vários esquemas upwind para tratamento do termo convectivo
- Apresentarei a formulação de três esquemas[4] no contexto NVF que satisfazem as condições CBC e restrições TVD
  - Esquema TOPUS (*Third-Order Polynomial Upwind Scheme*)
  - Esquema ALUS (*Adaptive Linear Upwind Scheme*)
  - Esquema FSFL (*Flexible and Symmetric Flux Limiter*)

[4] R.A.B. Queiroz, Desenvolvimento e teste de esquemas upwind de alta resolução e suas aplicações em escoamentos incompressíveis com superfícies livres, Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, 2009.

Esquemas upwind de alta resolução

- Há vários esquemas upwind para tratamento do termo convectivo
- Apresentarei a formulação de três esquemas[4] no contexto NVF que satisfazem as condições CBC e restrições TVD
  - Esquema TOPUS (*Third-Order Polynomial Upwind Scheme*)
  - Esquema ALUS (*Adaptive Linear Upwind Scheme*)
  - Esquema FSFL (*Flexible and Symmetric Flux Limiter*)

[4] R.A.B. Queiroz, Desenvolvimento e teste de esquemas upwind de alta resolução e suas aplicações em escoamentos incompressíveis com superfícies livres, Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, 2009.

Esquema TOPUS

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} \alpha(\hat{\phi}_U)^4 + (-2\alpha+1)\,(\hat{\phi}_U)^3 + \left(\frac{5\alpha-10}{4}\right)(\hat{\phi}_U)^2 + \left(\frac{-\alpha+10}{4}\right)\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

- Variável normalizada $\hat{\phi}_U$:

$$\hat{\phi}_U = \frac{\phi_U - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$$

- Para $\alpha \in [-2, 2]$, o esquema TOPUS está inteiramente contido na região CBC
- No caso em que $\alpha = 2$, o esquema TOPUS é TVD
- O esquema SMARTER é obtido fazendo-se $\alpha = 0$

Esquema TOPUS

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} \alpha(\hat{\phi}_U)^4 + (-2\alpha + 1)\,(\hat{\phi}_U)^3 + \left(\frac{5\alpha - 10}{4}\right)(\hat{\phi}_U)^2 + \left(\frac{-\alpha + 10}{4}\right)\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

- Variável normalizada $\hat{\phi}_U$:

$$\hat{\phi}_U = \frac{\phi_U - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$$

- Para $\alpha \in [-2, 2]$, o esquema TOPUS está inteiramente contido na região CBC
- No caso em que $\alpha = 2$, o esquema TOPUS é TVD
- O esquema SMARTER é obtido fazendo-se $\alpha = 0$

Esquema TOPUS

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} \alpha(\hat{\phi}_U)^4 + (-2\alpha+1)\,(\hat{\phi}_U)^3 + \left(\frac{5\alpha-10}{4}\right)(\hat{\phi}_U)^2 + \left(\frac{-\alpha+10}{4}\right)\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \hat{\phi}_U, \quad \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

- Variável normalizada $\hat{\phi}_U$:

$$\hat{\phi}_U = \frac{\phi_U - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$$

- Para $\alpha \in [-2, 2]$, o esquema TOPUS está inteiramente contido na região CBC
- No caso em que $\alpha = 2$, o esquema TOPUS é TVD
- O esquema SMARTER é obtido fazendo-se $\alpha = 0$

Esquema TOPUS

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} \alpha(\hat{\phi}_U)^4 + (-2\alpha+1)(\hat{\phi}_U)^3 + \left(\frac{5\alpha-10}{4}\right)(\hat{\phi}_U)^2 + \left(\frac{-\alpha+10}{4}\right)\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

- Variável normalizada $\hat{\phi}_U$:

$$\hat{\phi}_U = \frac{\phi_U - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$$

- Para $\alpha \in [-2, 2]$, o esquema TOPUS está inteiramente contido na região CBC
- No caso em que $\alpha = 2$, o esquema TOPUS é TVD
- O esquema SMARTER é obtido fazendo-se $\alpha = 0$

Esquema ALUS

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} 2\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0,\lambda_a\ ], \\ 0.5\left[(1+|\theta|)\hat{\phi}_U + (1-|\theta|)\right], & \hat{\phi}_U \in (\lambda_a,1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

- λ_a é a intersecção das retas $0.5\left[(1+|\theta|)\hat{\phi}_U + (1-|\theta|)\right]$ e $2\hat{\phi}_U$:

$$\lambda_a = \frac{1-|\theta|}{3-|\theta|}$$

- θ é número de Courant (CFL):

$$\theta = \frac{u\delta t}{\delta x}$$

Esquema ALUS

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} 2\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0,\lambda_a\ ], \\ 0.5\left[(1+|\theta|)\hat{\phi}_U + (1-|\theta|)\right], & \hat{\phi}_U \in (\lambda_a,1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

- λ_a é a intersecção das retas $0.5\left[(1+|\theta|)\hat{\phi}_U + (1-|\theta|)\right]$ e $2\hat{\phi}_U$:

$$\lambda_a = \frac{1-|\theta|}{3-|\theta|}$$

- θ é número de Courant (CFL):

$$\theta = \frac{u\delta t}{\delta x}$$

Esquema FSFL

- Esquema baseado no esquema TOPUS

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} (-2\beta + 4)(\hat{\phi}_U)^4 + (4\beta - 8)\left(\hat{\phi}_U\right)^3 + \left(\frac{-5\beta+8}{2}\right)\left(\hat{\phi}_U\right)^2 + \left(\frac{\beta+2}{2}\right)\hat{\phi}_U; \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \hat{\phi}_U, \quad \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

em que $\beta \in [0, 2]$.

Discretização do termo convectivo usando abordagem upwind

Discretização do termo convectivo

- Voltando na equação de Burgers viscosa

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

- Um representante típico para os termos convectivos das equações de transporte pode ser colocado na forma 2D:

$$\left.\frac{\partial (u_j \phi)}{\partial x_j}\right|_P = \left(\left.\frac{\partial (u\phi)}{\partial x}\right|_P + \left.\frac{\partial (v\phi)}{\partial y}\right|_P \right),$$

  - ϕ é a variável convectada (por exemplo u, v, κ, ε, etc.)
  - u_j é a velocidade de convecção
  - O ponto P representa a posição em que o termo convectivo é avaliado

Discretização do termo convectivo

- Voltando na equação de Burgers viscosa

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

- Um representante típico para os termos convectivos das equações de transporte pode ser colocado na forma 2D:

$$\left.\frac{\partial (u_j \phi)}{\partial x_j}\right|_P = \left(\left.\frac{\partial (u\phi)}{\partial x}\right|_P + \left.\frac{\partial (v\phi)}{\partial y}\right|_P \right),$$

- ϕ é a variável convectada (por exemplo u, v, κ, ε, etc.)
- u_j é a velocidade de convecção
- O ponto P representa a posição em que o termo convectivo é avaliado

Discretização do termo convectivo

- Voltando na equação de Burgers viscosa

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

- Um representante típico para os termos convectivos das equações de transporte pode ser colocado na forma 2D:

$$\left.\frac{\partial (u_j \phi)}{\partial x_j}\right|_P = \left(\left.\frac{\partial (u\phi)}{\partial x}\right|_P + \left.\frac{\partial (v\phi)}{\partial y}\right|_P \right),$$

  - ϕ é a variável convectada (por exemplo u, v, κ, ε, etc.)
  - u_j é a velocidade de convecção
  - O ponto P representa a posição em que o termo convectivo é avaliado

Discretização do termo convectivo

- Voltando na equação de Burgers viscosa

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

- Um representante típico para os termos convectivos das equações de transporte pode ser colocado na forma 2D:

$$\left.\frac{\partial (u_j \phi)}{\partial x_j}\right|_P = \left(\left.\frac{\partial (u\phi)}{\partial x}\right|_P + \left.\frac{\partial (v\phi)}{\partial y}\right|_P \right),$$

  - ϕ é a variável convectada (por exemplo u, v, κ, ε, etc.)
  - u_j é a velocidade de convecção
  - O ponto P representa a posição em que o termo convectivo é avaliado

Discretização do termo convectivo

- Voltando na equação de Burgers viscosa

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

- Um representante típico para os termos convectivos das equações de transporte pode ser colocado na forma 2D:

$$\left.\frac{\partial (u_j \phi)}{\partial x_j}\right|_P = \left(\left.\frac{\partial (u\phi)}{\partial x}\right|_P + \left.\frac{\partial (v\phi)}{\partial y}\right|_P \right),$$

  - ϕ é a variável convectada (por exemplo u, v, κ, ε, etc.)
  - u_j é a velocidade de convecção
  - O ponto P representa a posição em que o termo convectivo é avaliado

- Voltando na equação de Burgers viscosa

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

- Queremos aproximar o termo convectivo:

$$\left.\frac{\partial (uu)}{\partial x}\right|_{P=(i)}$$

- u é a variável convectada/transportada (por exemplo: T, v, ρ, c, etc.) com velocidade u

- Voltando na equação de Burgers viscosa

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

- Queremos aproximar o termo convectivo:

$$\left.\frac{\partial (uu)}{\partial x}\right|_{P=(i)}$$

- u é a variável convectada/transportada (por exemplo T, v, κ, ε, etc.) com velocidade u

- Voltando na equação de Burgers viscosa

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

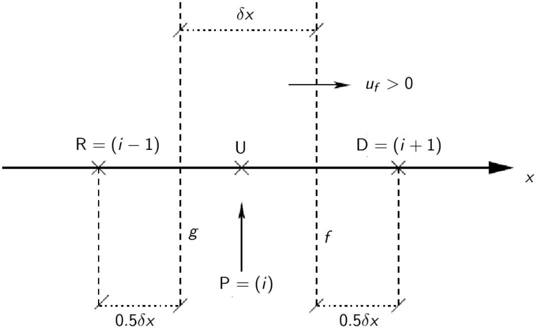
- Queremos aproximar o termo convectivo:

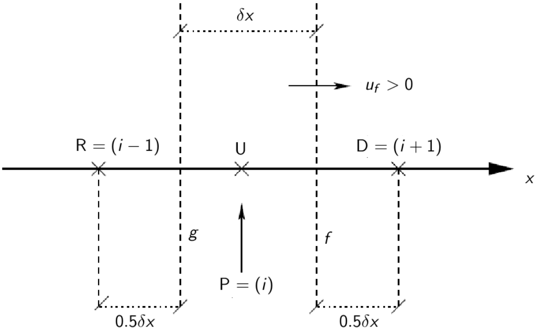
$$\left.\frac{\partial (uu)}{\partial x}\right|_{P=(i)}$$

  - u é a variável convectada/transportada (por exemplo T, v, κ, ε, etc.) com velocidade u

Célula computacional

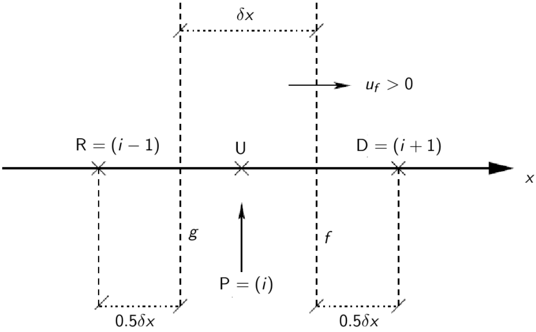
Célula computacional mostrando o ponto P$= (i)$, seus vizinhos (D, R), as faces envolvidas f e g na aproximação e a variável convectada u sendo transportada com velocidade u_f na direção x





- A aproximação do termo convectivo no ponto $P = (i)$:

$$\left.\frac{\partial(uu)}{\partial x}\right|_P \approx \frac{\left.(uu)\right|_f - \left.(uu)\right|_g}{2\left(\frac{\delta x}{2}\right)} = \frac{u_f u_f - u_g u_g}{\delta x}$$



- $\mathrm{P} = (i)$, $f = i + \frac{1}{2}$, $g = i - \frac{1}{2}$, o termo convectivo é estimado como:

$$\left.\frac{\partial(uu)}{\partial x}\right|_P \approx \frac{\left.(uu)\right|_f - \left.(uu)\right|_g}{2\left(\frac{\delta x}{2}\right)} = \frac{u_f u_f - u_g u_g}{\delta x}$$

- P $= (i)$, $f = i + \frac{1}{2}$, $g = i - \frac{1}{2}$, o termo convectivo é estimado como:

$$\left.\frac{\partial(uu)}{\partial x}\right|_{P=(i)} = \frac{u_f u_f - u_g u_g}{\delta x} = \frac{u_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}}}{\delta x}$$

em que $u_f = u_{i+\frac{1}{2}}$ e $u_g = u_{i-\frac{1}{2}}$ são aproximadas, respectivamente, utilizando-se as médias nas respectivas faces:

$$u_f = u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1} + u_i}{2}$$
$$u_g = u_{i-\frac{1}{2}} = \frac{u_i + u_{i-1}}{2}.$$

- As variáveis $u_f = u_{i+\frac{1}{2}}$ e $u_g = u_{i-\frac{1}{2}}$ são convectadas/transportadas com velocidade $u_f = u_{i+\frac{1}{2}}$ e $u_g = u_{i-\frac{1}{2}}$, respectivamente
- As variáveis $u_f = u_{i+\frac{1}{2}}$ e $u_g = u_{i-\frac{1}{2}}$ são aproximadas empregando esquemas upwind

- P $= (i)$, $f = i + \frac{1}{2}$, $g = i - \frac{1}{2}$, o termo convectivo é estimado como:

$$\left.\frac{\partial(uu)}{\partial x}\right|_{P=(i)} = \frac{u_f u_f - u_g u_g}{\delta x} = \frac{u_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}}}{\delta x}$$

  em que $u_f = u_{i+\frac{1}{2}}$ e $u_g = u_{i-\frac{1}{2}}$ são aproximadas, respectivamente, utilizando-se as médias nas respectivas faces:

$$u_f = u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1} + u_i}{2}$$
$$u_g = u_{i-\frac{1}{2}} = \frac{u_i + u_{i-1}}{2}.$$

- As variáveis $u_f = u_{i+\frac{1}{2}}$ e $u_g = u_{i-\frac{1}{2}}$ são convectadas/transportadas com velocidade $u_f = u_{i+\frac{1}{2}}$ e $u_g = u_{i-\frac{1}{2}}$, respectivamente
- As variáveis $u_f = u_{i+\frac{1}{2}}$ e $u_g = u_{i-\frac{1}{2}}$ são aproximadas empregando esquemas upwind

- P $= (i)$, $f = i + \frac{1}{2}$, $g = i - \frac{1}{2}$, o termo convectivo é estimado como:

$$\left.\frac{\partial(uu)}{\partial x}\right|_{P=(i)} = \frac{u_f u_f - u_g u_g}{\delta x} = \frac{u_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}}}{\delta x}$$

em que $u_f = u_{i+\frac{1}{2}}$ e $u_g = u_{i-\frac{1}{2}}$ são aproximadas, respectivamente, utilizando-se as médias nas respectivas faces:

$$u_f = u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1} + u_i}{2}$$
$$u_g = u_{i-\frac{1}{2}} = \frac{u_i + u_{i-1}}{2}.$$

- As variáveis $u_f = u_{i+\frac{1}{2}}$ e $u_g = u_{i-\frac{1}{2}}$ são convectadas/transportadas com velocidade $u_f = u_{i+\frac{1}{2}}$ e $u_g = u_{i-\frac{1}{2}}$, respectivamente
- As variáveis $u_f = u_{i+\frac{1}{2}}$ e $u_g = u_{i-\frac{1}{2}}$ são aproximadas empregando esquemas upwind

- P $= (i)$, $f = i + \frac{1}{2}$, $g = i - \frac{1}{2}$

$$\left.\frac{\partial(uu)}{\partial x}\right|_{P=(i)} = \frac{u_f u_f - u_g u_g}{\delta x} = \frac{u_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}}}{\delta x}$$

- As velocidades médias nas faces:

$$u_f = u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1} + u_i}{2}$$
$$u_g = u_{i-\frac{1}{2}} = \frac{u_i + u_{i-1}}{2}$$

- As variáveis $u_f = u_{i+\frac{1}{2}}$ e $u_g = u_{i-\frac{1}{2}}$ são aproximadas empregando esquemas upwind (por exemplo: esquema TOPUS)

- $\mathrm{P} = (i)$, $f = i + \frac{1}{2}$, $g = i - \frac{1}{2}$

$$\left.\frac{\partial(uu)}{\partial x}\right|_{P=(i)} = \frac{u_f u_f - u_g u_g}{\delta x} = \frac{u_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}}}{\delta x}$$

- As velocidades médias nas faces:

$$u_f = u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1} + u_i}{2}$$
$$u_g = u_{i-\frac{1}{2}} = \frac{u_i + u_{i-1}}{2}$$

- As variáveis $u_f = u_{i+\frac{1}{2}}$ e $u_g = u_{i-\frac{1}{2}}$ são aproximadas empregando esquemas upwind (por exemplo: esquema TOPUS)

- $\text{P} = (i)$, $f = i + \frac{1}{2}$, $g = i - \frac{1}{2}$

$$\left.\frac{\partial(uu)}{\partial x}\right|_{P=(i)} = \frac{u_f u_f - u_g u_g}{\delta x} = \frac{u_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}}}{\delta x}$$

- As velocidades médias nas faces:

$$u_f = u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1} + u_i}{2}$$
$$u_g = u_{i-\frac{1}{2}} = \frac{u_i + u_{i-1}}{2}$$

- As variáveis $u_f = u_{i+\frac{1}{2}}$ e $u_g = u_{i-\frac{1}{2}}$ são aproximadas empregando esquemas upwind (por exemplo: esquema TOPUS)

Esquema TOPUS em variável normalizada

- Esquema TOPUS com $\alpha \in [-2, 2]$:

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} \alpha(\hat{\phi}_U)^4 + (-2\alpha + 1)(\hat{\phi}_U)^3 + \left(\frac{5\alpha - 10}{4}\right)(\hat{\phi}_U)^2 + \left(\frac{-\alpha + 10}{4}\right)\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0, 1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0, 1]. \end{cases}$$

- Esquema TOPUS com $\alpha = 2$:

$$\boxed{\hat{\phi}_f = \begin{cases} 2(\hat{\phi}_U)^4 - 3(\hat{\phi}_U)^3 + 2\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0, 1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0, 1]. \end{cases}}$$

Esquema TOPUS em variável normalizada

- Esquema TOPUS com $\alpha \in [-2, 2]$:

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} \alpha(\hat{\phi}_U)^4 + (-2\alpha + 1)(\hat{\phi}_U)^3 + \left(\frac{5\alpha - 10}{4}\right)(\hat{\phi}_U)^2 + \left(\frac{-\alpha + 10}{4}\right)\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0, 1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0, 1]. \end{cases}$$

- Esquema TOPUS com $\alpha = 2$:

$$\boxed{\hat{\phi}_f = \begin{cases} 2(\hat{\phi}_U)^4 - 3(\hat{\phi}_U)^3 + 2\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0, 1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0, 1]. \end{cases}}$$

TOPUS com $\alpha = 2$ (em variável não normalizada)

- Relembrando o conceito de variável normalizada

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$$

- Aplicando no esquema TOPUS em variável normalizada:

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} 2(\hat{\phi}_U)^4 - 3(\hat{\phi}_U)^3 + 2\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

- Resulta no esquema TOPUS em variável não normalizada:

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_R + (\phi_D - \phi_R)\left[2\left(\hat{\phi}_U\right)^4 - 3\left(\hat{\phi}_U\right)^3 + 2\hat{\phi}_U\right], & \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \phi_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1], \end{cases}$$

no qual $\hat{\phi}_U$ é expresso por:

$$\hat{\phi}_U = \frac{\phi_U - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}.$$

TOPUS com $\alpha = 2$ (em variável não normalizada)

- Relembrando o conceito de variável normalizada

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$$

- Aplicando no esquema TOPUS em variável normalizada:

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} 2(\hat{\phi}_U)^4 - 3(\hat{\phi}_U)^3 + 2\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

- Resulta no esquema TOPUS em variável não normalizada:

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_R + (\phi_D - \phi_R)\left[2\left(\hat{\phi}_U\right)^4 - 3\left(\hat{\phi}_U\right)^3 + 2\hat{\phi}_U\right], & \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \phi_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1], \end{cases}$$

no qual $\hat{\phi}_U$ é expresso por:

$$\hat{\phi}_U = \frac{\phi_U - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}.$$

TOPUS com $\alpha = 2$ (em variável não normalizada)

- Relembrando o conceito de variável normalizada

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$$

- Aplicando no esquema TOPUS em variável normalizada:

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} 2(\hat{\phi}_U)^4 - 3(\hat{\phi}_U)^3 + 2\hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1]. \end{cases}$$

- Resulta no esquema TOPUS em variável não normalizada:

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_R + (\phi_D - \phi_R)\left[2\left(\hat{\phi}_U\right)^4 - 3\left(\hat{\phi}_U\right)^3 + 2\hat{\phi}_U\right], & \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \phi_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1], \end{cases}$$

no qual $\hat{\phi}_U$ é expresso por:

$$\hat{\phi}_U = \frac{\phi_U - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}.$$

Aproximação via esquema TOPUS

- Esquema TOPUS em variável não normalizada:

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_R + (\phi_D - \phi_R)\left[2\left(\hat{\phi}_U\right)^4 - 3\left(\hat{\phi}_U\right)^3 + 2\hat{\phi}_U\right], & \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \phi_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1], \end{cases}$$

no qual $\hat{\phi}_U$ é expresso por:

$$\hat{\phi}_U = \frac{\phi_U - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}.$$

- Será empregado para aproximar as variáveis $u_f = u_{i+\frac{1}{2}}$ e $u_g = u_{i-\frac{1}{2}}$

Aproximação via esquema TOPUS

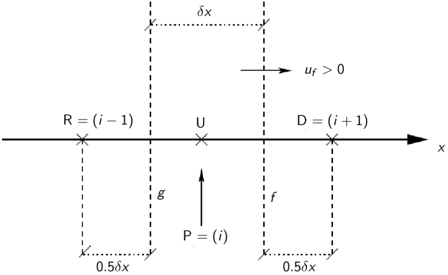
- Esquema TOPUS em variável não normalizada:

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_R + (\phi_D - \phi_R)\left[2\left(\hat{\phi}_U\right)^4 - 3\left(\hat{\phi}_U\right)^3 + 2\hat{\phi}_U\right], & \hat{\phi}_U \in [0,1], \\ \phi_U, & \hat{\phi}_U \notin [0,1], \end{cases}$$

no qual $\hat{\phi}_U$ é expresso por:

$$\hat{\phi}_U = \frac{\phi_U - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}.$$

- Será empregado para aproximar as variáveis $u_f = u_{i+\frac{1}{2}}$ e $u_g = u_{i-\frac{1}{2}}$



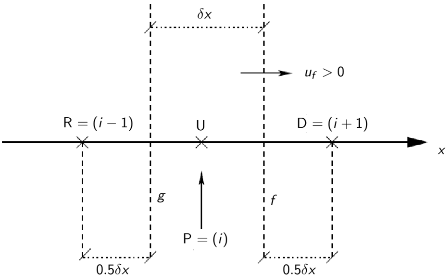
- $\mathrm{P} = (i)$, $f = i + \frac{1}{2}$, $g = i - \frac{1}{2}$

$$\left.\frac{\partial (uu)}{\partial x}\right|_{P=(i)} = \frac{u_f u_f - u_g u_g}{\delta x} = \frac{u_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}}}{\delta x}$$

- As velocidades médias nas faces:

$$u_f = u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1} + u_i}{2}$$

$$u_g = u_{i-\frac{1}{2}} = \frac{u_i + u_{i-1}}{2}$$



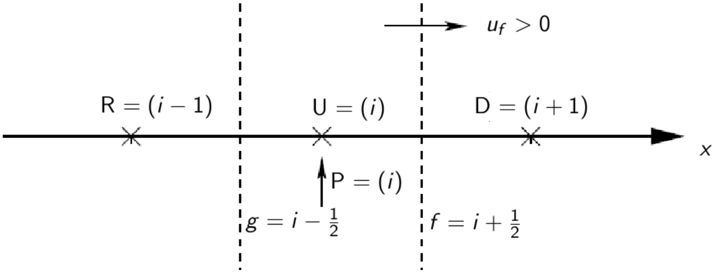
- $\mathrm{P} = (i)$, $f = i + \frac{1}{2}$, $g = i - \frac{1}{2}$

$$\left.\frac{\partial(uu)}{\partial x}\right|_{P=(i)} = \frac{u_f u_f - u_g u_g}{\delta x} = \frac{u_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}}}{\delta x}$$

- As velocidades médias nas faces:

$$u_f = u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1} + u_i}{2}$$

$$u_g = u_{i-\frac{1}{2}} = \frac{u_i + u_{i-1}}{2}$$

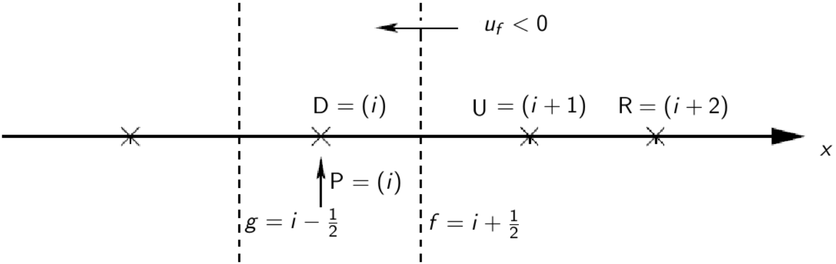


- Aproximação para $u_{i+\frac{1}{2}}$ quando $u_f > 0$; as posições D $= (i+1)$, R $= (i-1)$ e U $= (i)$.

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_{i-1} + (u_{i+1} - u_{i-1})\left[2(\hat{u}_U)^4 - 3(\hat{u}_U)^3 + 2\hat{u}_U\right];\hat{u}_U \in [0,1], \\ u_i, \quad \hat{u}_U \notin [0,1], \end{cases}$$

onde

$$\hat{u}_U = \hat{u}_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_{i-1}}.$$

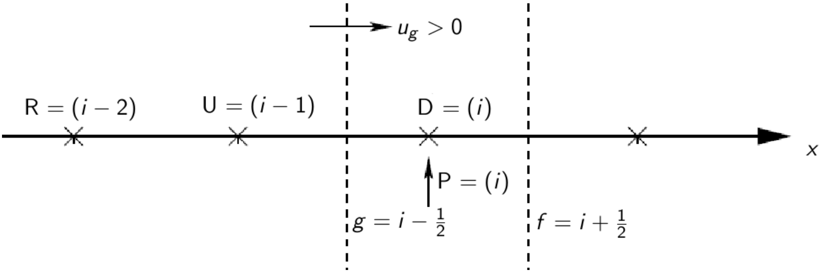


- Aproximação para $u_{i+\frac{1}{2}}$ quando $u_f < 0$: D = (i), R = (i + 2) e U = (i + 1)

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_{i+2} + (u_i - u_{i+2})\left[2(\hat{u}_U)^4 - 3(\hat{u}_U)^3 + 2\hat{u}_U\right]; \hat{u}_U \in [0,1], \\ u_{i+1}, \quad \hat{u}_U \notin [0,1], \end{cases}$$

onde

$$\hat{u}_U = \hat{u}_{i+1} = \frac{u_{i+1} - u_{i+2}}{u_i - u_{i+2}}.$$

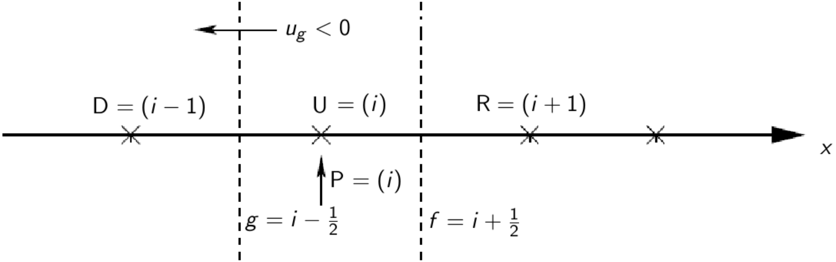


- Aproximação para $u_{i-\frac{1}{2}}$ quando $u_g > 0$: D $= (i)$, R $= (i-2)$ e U $= (i-1)$

$$u_{i-\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_{i-2} + (u_i - u_{i-2})\left[2(\hat{u}_U)^4 - 3(\hat{u}_U)^3 + 2\hat{u}_U\right]; \hat{u}_U \in [0,1], \\ u_{i-1}, \quad \hat{u}_U \notin [0,1], \end{cases}$$

onde

$$\hat{u}_U = \hat{u}_{i-1} = \frac{u_{i-1} - u_{i-2}}{u_i - u_{i-2}}.$$



- Aproximação para $u_{i-\frac{1}{2}}$ quando $u_g < 0$: D = $(i-1)$, R = $(i+1)$ e U = (i).

$$u_{i-\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_{i+1} + (u_{i-1} - u_{i+1})\left[2(\hat{u}_U)^4 - 3(\hat{u}_U)^3 + 2\hat{u}_U\right]; \hat{u}_U \in [0,1], \\ u_i, \quad \hat{u}_U \notin [0,1], \end{cases}$$

onde

$$\hat{u}_U = \hat{u}_i = \frac{u_i - u_{i+1}}{u_{i-1} - u_{i+1}}.$$