Mecânica dos Fluidos Computacional
Escoamentos compressíveis

Iury Higor Aguiar da Igreja
Patricia Habib Hallak
Rafael Alves Bonfim de Queiroz

patricia.hallak@ufjf.edu.br
patriciahallak@yahoo.com

11 September 2020

- Resumo das equações adimensionalizadas:
  - Continuidade:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} = -\rho \frac{\partial V'}{\partial x'} - \rho' V' \frac{\partial (\ln A')}{\partial x'} - V' \frac{\partial \rho'}{\partial x'}$$

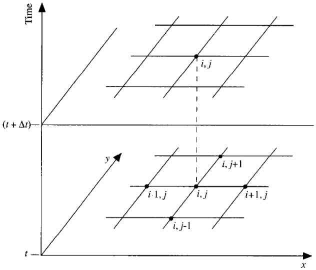
  - *Momentum:*

$$\frac{\partial V'}{\partial t'} = -V' \frac{\partial V'}{\partial x'} - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial T'}{\partial x'} + \frac{T'}{\rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial x'} \right)$$

  - Energia:

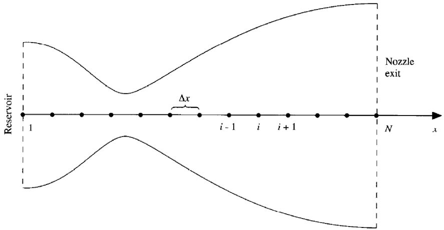
$$\frac{\partial T'}{\partial t'} = -V' \frac{\partial T'}{\partial x'} - (\gamma - 1) T' \left[\frac{\partial V'}{\partial x'} + V' \frac{\partial (\ln A')}{\partial x'} \right]$$

- técnica MacCormack para marcha no tempo. Técnica preditora-corretora de avanço no tempo, explícita com precisão de segunda ordem no espaço e tempo.
- Tem-se um esquema de marcha no tempo explicito, onde as variáveis no tempo t são conhecidas e as no tempo $t + \Delta t$ são calculadas com as do tempo t.



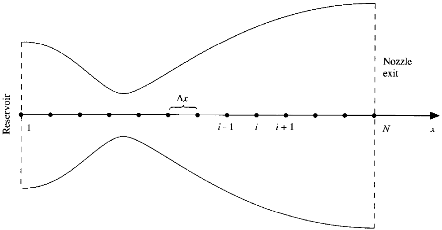
$$\phi_{i,j}^{t+\Delta t} = \phi_{i,j}^{t} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{avg} \Delta t$$

Discretização espacial:



- o nó 1 está sobre o reservatório.
- o nó N é o da saida do bocal.
- o índice *i* indica o índice dos nós.

Step -2 - Método das diferenças finitas

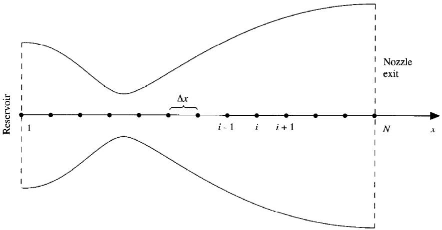


- Passo preditor (o símbolo ' será omitido nas equações): as derivadas espaciais são configuradas com diferenças para frente (*forward differences*):
  - Equação de continuidade:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} = -\rho' \frac{\partial V'}{\partial x'} - \rho' V' \frac{\partial (\ln A')}{\partial x'} - V' \frac{\partial \rho'}{\partial x'}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i^t = -\rho_i^t \frac{V_{i+1}^t - V_i^t}{\Delta x} - \rho_i^t V_i^t \frac{\ln A_{i+1} - \ln A_i}{\Delta x} - V_i^t \frac{\rho_{i+1}^t - \rho_i^t}{\Delta x}$$

Step -2 - Método das diferenças finitas

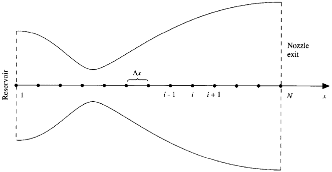


- Passo preditor (o símbolo ' será omitido nas equações)
  - *Momentum*:

$$\frac{\partial V'}{\partial t'} = -V' \frac{\partial V'}{\partial x'} - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial T'}{\partial x'} + \frac{T'}{\rho'}\frac{\partial \rho'}{\partial x'}\right)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_i^t = -V_i^t \frac{V_{i+1}^t - V_i^t}{\Delta x} - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{T_{i+1}^t - T_i^t}{\Delta x} + \frac{T_i^t}{\rho_i^t}\frac{\rho_{i+1}^t - \rho_i^t}{\Delta x}\right)$$

Step -2 - Método das diferenças finitas



- Passo preditor (o símbolo ' será omitido nas equações)
  - Equação de energia:

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} = -V' \frac{\partial T'}{\partial x'} - (\gamma - 1) T' \left[\frac{\partial V'}{\partial x'} + V' \frac{\partial (\ln A')}{\partial x'} \right]$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^t = -V_i^t \frac{T_{i+1}^t - T_i^t}{\Delta x} - (\gamma - 1) T_i^t \left(\frac{V_{i+1}^t - V_i^t}{\Delta x} + V_i^t \frac{\ln A_{i+1} - \ln A_i}{\Delta x} \right)$$

Step -2 - Método das diferenças finitas

Obtem-se os valores "previstos" para ρ, V e T (quantidades com barras) para o passo $t + \Delta t$:

$$\overline{\rho}_i^{t+\Delta t} = \rho_i^t + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i^t \Delta t$$

$$\overline{V}_i^{t+\Delta t} = V_i^t + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_i^t \Delta t$$

$$\overline{T}_i^{t+\Delta t} = T_i^t + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^t \Delta t$$

ρ_i^t, V_i^t e T_i^t são valores conhecidos no tempo t, as quantidade $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_i^t$ são fornecidas pelas equações anteriores.

- Passo "corretor"
  Retoma-se as equações diferenciais parciais e substitui-se as derivadas espaciais pelas diferenças anteriores (*rearward differences*). Obtem-se os valores "previstos" das derivadas temporais (valores com as barras).

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} = -\rho \frac{\partial V'}{\partial x'} - \rho' V' \frac{\partial (\ln A')}{\partial x'} - V' \frac{\partial \rho'}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial V'}{\partial t'} = -V' \frac{\partial V'}{\partial x'} - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial T'}{\partial x'} + \frac{T'}{\rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial x'} \right)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} = -V' \frac{\partial T'}{\partial x'} - (\gamma - 1) T' \left[\frac{\partial V'}{\partial x'} + V' \frac{\partial (\ln A')}{\partial x'} \right]$$

Step -2 - Método das diferenças finitas

- Passo corretor

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} = -\rho \frac{\partial V'}{\partial x'} - \rho' V' \frac{\partial (\ln A')}{\partial x'} - V' \frac{\partial \rho'}{\partial x'}$$

$$\left(\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t}}\right)_i^{t+\Delta t} = -\overline{\rho}_i^{t+\Delta t} \frac{\overline{V}_i^{t+\Delta t} - \overline{V}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} +$$
$$-\overline{\rho}_i^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{t+\Delta t} \frac{\ln A_i - \ln A_{i-1}}{\Delta x} - \overline{V}_i^{t+\Delta t} \frac{\overline{\rho}_i^{t+\Delta t} - \overline{\rho}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x}$$

- Passo "corretor"

$$\frac{\partial V'}{\partial t'} = -V'\frac{\partial V'}{\partial x'} - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial T'}{\partial x'} + \frac{T'}{\rho'}\frac{\partial \rho'}{\partial x'}\right)$$

$$\left(\frac{\overline{\partial V}}{\partial t}\right)_i^{t+\Delta t} = -\overline{V}_i^{t+\Delta t}\frac{\overline{V}_i^{t+\Delta t} - \overline{V}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\overline{T}_i^{t+\Delta t} - \overline{T}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \frac{\overline{T}_i^{t+\Delta t}}{\overline{\rho}_i^{t+\Delta t}}\frac{\overline{\rho}_i^{t+\Delta t} - \overline{\rho}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x}\right)$$

- Passo "corretor"

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} = -V'\frac{\partial T'}{\partial x'} - (\gamma - 1)\,T'\left[\frac{\partial V'}{\partial x'} + V'\frac{\partial(\ln A')}{\partial x'}\right]$$

$$\left(\frac{\overline{\partial T}}{\partial t}\right)_i^{t+\Delta t} = -\overline{V}_i^{t+\Delta t}\,\frac{\overline{T}_i^{t+\Delta t} - \overline{T}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} -$$

$$(\gamma - 1)\overline{T}_i^{t+\Delta t} \times \left(\frac{\overline{V}_i^{t+\Delta t} - \overline{V}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \overline{V}_i^{t+\Delta t}\frac{\ln A_i - \ln A_{i-1}}{\Delta x}\right)$$

- Passo corretor
  As médias das derivadas ficam (médias dos passos "preditor" e "corretor"):

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{av} = 0.5\left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i^t + \left(\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t}}\right)_i^{t+\Delta t}\right]$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{av} = 0.5\left[\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_i^t + \left(\overline{\frac{\partial V}{\partial t}}\right)_i^{t+\Delta t}\right]$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{av} = 0.5\left[\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^t + \left(\overline{\frac{\partial T}{\partial t}}\right)_i^{t+\Delta t}\right]$$

- Passo corretor
  Calculam-se as quantidades no tempo $t + \Delta t$:

$$\rho_i^{t+\Delta t} = \rho_i^t + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{av} \Delta t$$
$$V_i^{t+\Delta t} = V_i^t + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{av} \Delta t$$
$$T_i^{t+\Delta t} = T_i^t + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{av} \Delta t$$

Para um sistema de equações é hipérbólico linear existe uma restrição para a estabilidade da solução numérica explícita (número de Courant $C = c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$).
O problema em questão é governado por um sistema de equações parciais não linear. Neste caso, a restrição acima para um sistema linear, é uma orientação geral.
Critério de Courant-Friedrichs-Lowry (CFL):

$$\Delta t = C\frac{\Delta x}{a + V}$$

Para um esquema numérico explícito, a estabilidade é garantida para $C \leq 1$.
A restrição acima simplesmente afirma que Δt deve ser menor ou, no máximo, igual ao tempo que uma onda sonora leva para se mover de um ponto da grade para o próximo.

$$\Delta t = C\frac{\Delta x}{a+V}$$

A escolha do passo de tempo será com base na relação acima. Nota-se que Δx, para o problema em questão, é constante, mas V e a são variáveis. Assim, em pontos distintos, tem-se:

$$(\Delta t)_i^t = C\frac{\Delta x}{a_i^t + V_i^t}$$

$$(\Delta t)_{i+1}^t = C\frac{\Delta x}{a_{i+1}^t + V_{i+1}^t}$$

Os valores (Δ_i^t) e (Δ_{i+1}^t) são, geralmente, diferentes. Assim, tem-se duas possibilidades para a implementação do passo de tempo.

- Passo de tempo com os valores locais das variáveis.

Para se utilizar as equações

$$\overline{\rho}_i^{t+\Delta t} = \rho_i^t + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i^t \Delta t$$

$$\overline{V}_i^{t+\Delta t} = V_i^t + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_i^t \Delta t$$

$$\overline{T}_i^{t+\Delta t} = T_i^t + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^t \Delta t$$

$$\rho_i^{t+\Delta t} = \rho_i^t + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{av} \Delta t$$

$$V_i^{t+\Delta t} = V_i^t + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{av} \Delta t$$

$$T_i^{t+\Delta t} = T_i^t + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{av} \Delta t$$

pode-se empregar valores distintos de (Δ_i^t) distintos para cada nó. As variáveis avançam nos esquemas de solução com seus próprios valores locais de passos de tempo. Esta aproximação não acompanha os aspectos transientes do escoamento e não pode ser usada para uma solução precisa do fluxo instável. Todavia, se o objetivo é atingie soluções em regime estacionário, este esquema frequentemente gera convergência rápida.

- Passo de tempo único para o avanço da solução.

$$\Delta t = \mathrm{minimum}(\Delta_1^t, \Delta_2^t, ..., \Delta_i^t, ..., \Delta_N^t)$$

Embora esta aproximação necessite de mais passos de tempo para garantir a convergência e a solução em regime estacionário, ela fornece informações sobre a fase transiente no processo de solução.
Exercício: $C = 0,5$

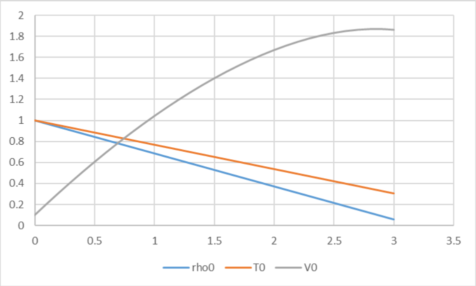
Condições iniciais

"In theory, these initial conditions can be purely arbitrary... in your choice, you are encouraged to use any knowledge you may have about a given problem in order to intelligently pick some initial conditions.". A escolha "inteligente" das condições iniciais promove uma convergência rápida e evita fortes gradientes no início do processo de solução.

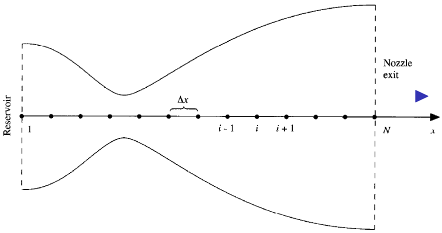
Condições iniciais

Neste problema, sabe-se que ρ e T diminuem ao passo que a velocidade V aumenta quando o escoamento expande no bocal. Consequentemente, escolhem-se condições iniciais que *qualitativamente* se comporta da mesma forma. Assumem-se variações lineares de ρ e T variáveis com x pata $t = 0$:

$$\rho = 1 - 0,3146x$$
$$T = 1 - 0,2314x$$
$$V = (0,1 + 1,09x)T^{1/2}$$

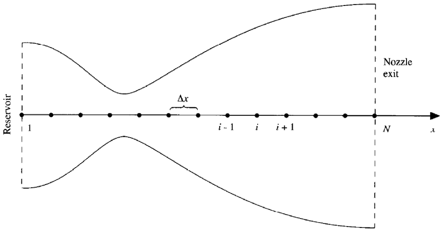


Sem a implementação física correta das condições de contorno e sua representação numérica própria, não se tem "esperança" de se obter uma solução numérica apropriada para o problema.
A escolha apropriada das condições de contorno é feita examinando-se as condições físicas para escoamento subssonico-superssonico isentropico do problema.



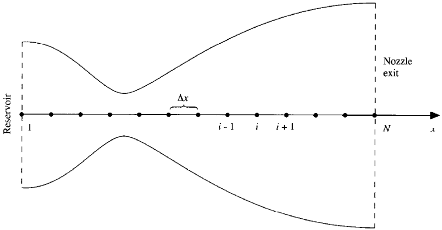
- Nó 1 está no reservatório (condição de contorno *inflow*): o escoamento sai do reservatório e entra no bocal.
- Nó N está no contorno *outflow*, saida do escoamento.

Condições de contorno



- A velocidade do escoamento no nó 1 é muito lenta (valor subssonico). Este ponto corresponde a razão de área finita $A_1/A*$ e sua velocidade não pode ser considerada nula. Se fosse considerada nula, não existiria fluxo de massa entrando no bocal.
- Com base na última observação, o nó 1 não é visto como um ponto **exatamente** no reservatório. Por definição, o reservatório possui uma área "infinita" e, portanto, velocidade nula.

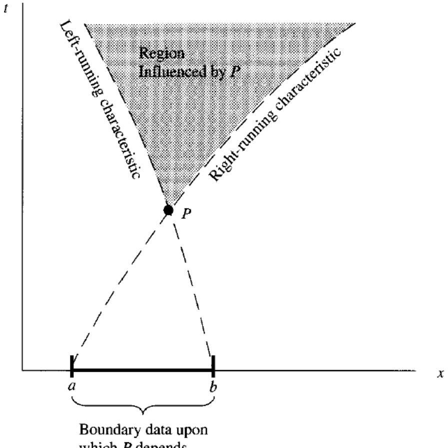
Condições de contorno



- Questão: quais quantidades do escoamento devem ser especificadas neste limite subsônico de *inflow* e quais devem ser calculadas como parte da solução?

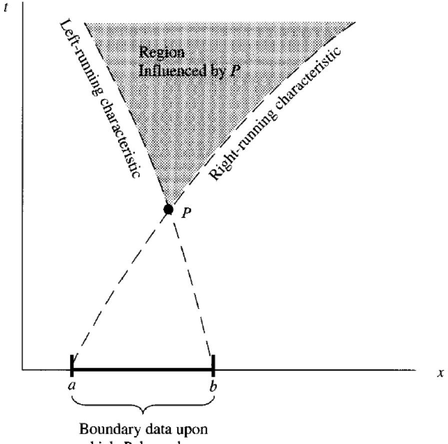
Resposta:

- Método das características para um escoamento transiente, invíscido e unidimensional, que é governado por equações hiperbólicas (há duas linhas caracterísiticas reais através de qualquer ponto no plano xt)



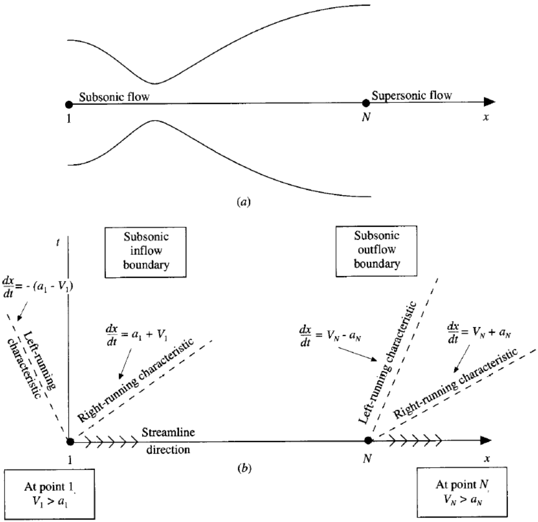
Condições de contorno

- Há duas linhas caracterísiticas reais através de qualquer ponto no plano xt. Fisicamente, essas duas características representam ondas Mach infinitamente fracas que se propagam a montante e a jusante, respectivamente. Ambas as ondas estão se propagando na velocidade do som a.

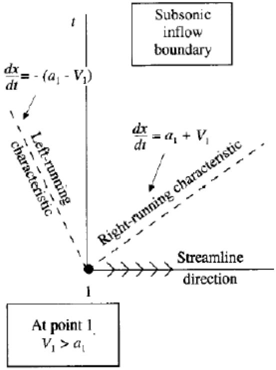


Condições de contorno

- Método das características - há duas linhas caracterísiticas reais no plano *xt* (*observar os nós 1 e N*).

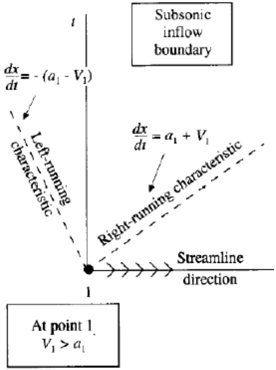


- Nó 1:



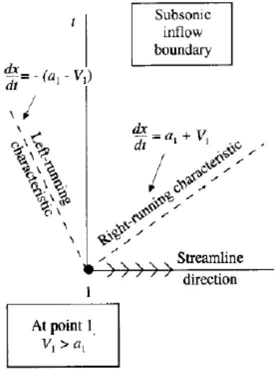
- Neste nó a velocidade local é subssônica ($V_1 < a_1$). Conseqüentemente, a característica a esquerda (*left-running*) viaja no sentido contrário ao escoamento (*upstream*).

- Nó 1:



- Em outras palavras, a onde de Mach a esquerda que está viajando para a esquerda (em relação a um elemento fluido em movimento) na velocidade do som, facilmente segue seu caminho rio acima contra o fluxo subsônico de baixa velocidade, que está se movendo lentamente da esquerda para a direita.

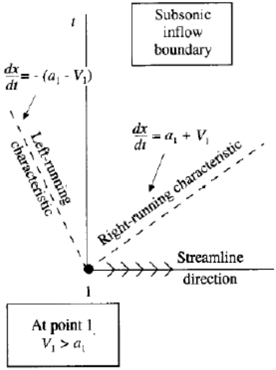
- Nó 1:



- Nota-se na Figura que a característica a esquerda viaja para a esquerda com uma velocidade combinada $a_1 - V_1$. Como o domínio do escoamento a ser calculado está contido entre os nós 1 e N, então no nó 1 esta onda se propaga para fora do domínio, se afastando deste.

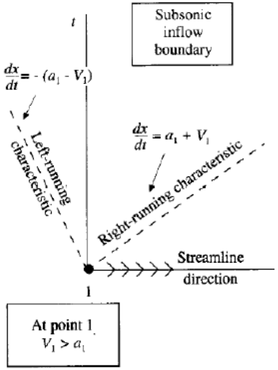
Condições de contorno

- Nó 1:



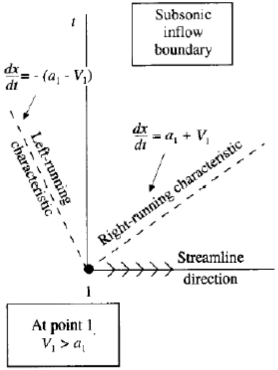
- A característica da direita, por outro lado, é uma onda de Mach que se propaga para a direita e, claramente, move-se para a direita por dois motivos:
  - o elemento fluido no nó 1 está se movendo para a direita;
  - a característica da direita está se movendo para a direita na velocidade do som relativa ao fluido elemento.

- Nó 1:



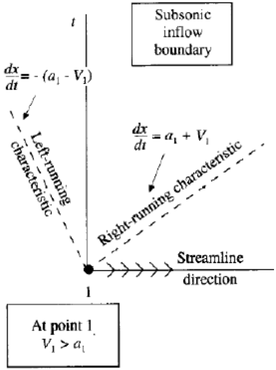
- Desta forma, a característica da direita propaga-se para a direita com a velocidade combinada $a_1 + V_1$, do nó 1 no sentindo do domínio do problema.

- Nó 1:



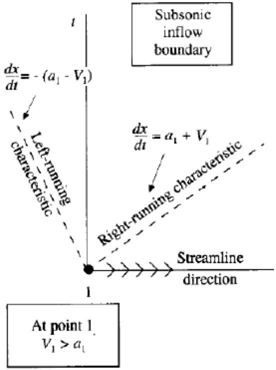
- Pelo método das características, percebe-se aquela de se propaga para dentro do domínio. Em um limite onde uma característica se propaga para o domínio, então o valor de uma variável dependente do escoamento deve ser especificado nesse limite.

- Nó 1:



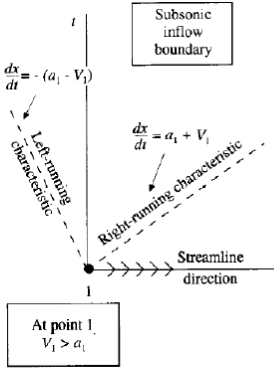
- Se uma característica se propaga para fora do domínio, então, o valor de outra variável dependente deve poder flutuar nesse limite, ou seja, essa variável deve ser calculada ao longo dos passos de tempo da simulação.

- Nó 1:



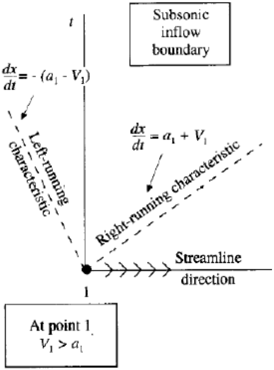
- Além da observação das características, nota-se a a line de corrente (*streamline*) está direcionada para dentro do domínio, através desta fronteira. Em termos de denotar o que deve e não deve ser especificado no contorno, a direção do linha de corrente desempenha o mesmo papel que a direção das características.

- Nó 1:



- A linha de corrente que se move para dentro do domínio no nó 1 estipula que o valor de uma segunda variável do escoamento deve ser estipulado neste contorno.

- Nó 1:

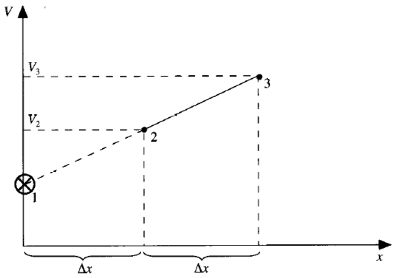


- **Conclusion: at the subsonic inflow boundary, we must stipulate the values of two dependent flow-fields variables, whereas the value of one other variable must be allowed to float.**

Condições de contorno

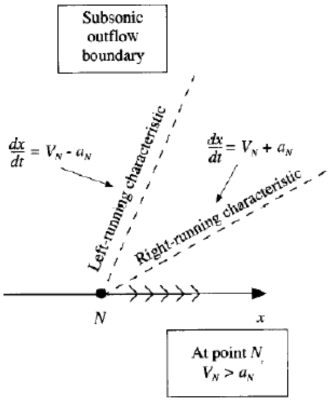
- Contorno subsônico (ponto 1: $V_1 < a_1$)
  - Velocidade no ponto 1: deve oscilar para garantir o fluxo de massa no interior do bocal $\rightarrow$ extrapolação linear. É calculado a partir de informações fornecidas pela solução do escoamento em pontos internos ao domínio.

$$\mathrm{Slope} = \frac{V_3 - V_1}{\Delta x} \rightarrow V_1 = 2V_2 - V3$$



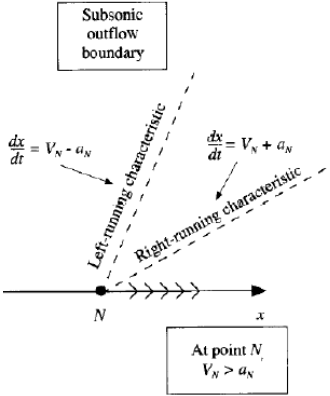
- Contorno subsônico (ponto 1: $V_1 < a_1$)
  - Densidade e temperatura $\rightarrow$ fixos. Como o ponto 1 está bem próximo do reservatório, os valores de ρ e T são os seus respectivos valores de estagnação (ρ_o e T_0). Serão valores fixos, independentes do tempo, adimensionais: $\rho_1 = 1$, $T_1 = 1$

- Nó N:



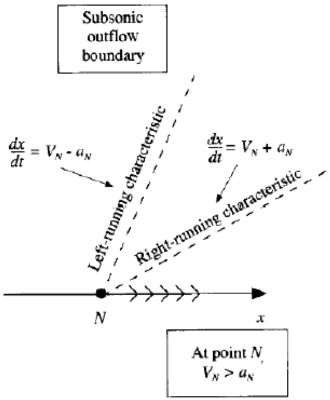
- A característica da esquerda se propaga para a esquerda na velocidade do som em relação a um elemento fluido. Todavia, como o próprio elemento fluido possui uma velocidade superssônica, a característica da esquerda é carregada "rio abaixo" (*downstream*) a velocidade $V_N - a_N$.

- Nó N:



- A característica da direita propaga-se para a direita na velocidade do som a em relação ao elemento fluido e, portanto, é varrida rio abaixo (*downstream*) na velocidade $V_N + a_N$. Portanto, na fronteira do fluxo supersônico, tem-se ambas as características propagando-se para fora do domínio; o mesmo acontece com a linha de corrente no ponto N.

- Nó N:



- Portanto, não há variáveis que necessitem que seus valores sejam prescritos nesta fronteira. Todas as variáveis devem oscilar neste ponto.

- Contorno supersônico (ponto N): todas as variáveis devem oscilar $\rightarrow$ extrapolação linear baseada nas variáveis do escoamento.
  - $V_N = 2V_{N-1} - V_{N-2}$
  - $\rho_N = 2\rho_{N-1} - \rho_{N-2}$
  - $T_N = 2T_{N-1} - T_{N-2}$

Geometria

- $A = A(x)$: parabólica, fixa, independe do tempo

$$A = 1 + 2,2(x - 1,5)^2 \quad 0 \leq x \leq 3$$

$x = 1,5$ estrangulamento da garganta; $x < 1,5$ seção convergentes; $x > 1,5$ seções divergentes.