Conservação de momento linear

Rafael Alves Bonfim de Queiroz

Universidade Federal de Juiz de Fora
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

Conservação de momento linear

- Aplicação da segunda lei de Newton: Força $=$ massa $\times$ aceleração

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Taxa de variação}\\ \text{temporal do momento}\\ \text{de uma partícula}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{Resultantes das}\\ \text{forças que agem sobre}\\ \text{essa partícula}\end{array}}$$

- Elemento de fluido que se desloca com o escoamento
- A massa é constante $\delta m = \rho(\delta x)(\delta y)$, que no limite $\delta x, \delta y \to 0$, $dm = \rho dxdy$
- As forças e as acelerações dos elementos de fluido serão decompostas ao longo das respectivas direções x e y

Conservação de momento linear

- Aplicação da segunda lei de Newton: Força $=$ massa $\times$ aceleração

Taxa de variação temporal do momento de uma partícula	=	Resultantes das forças que agem sobre essa partícula

- Elemento de fluido que se desloca com o escoamento
- A massa é constante $\delta m = \rho(\delta x)(\delta y)$, que no limite $\delta x, \delta y \to 0$, $dm = \rho dxdy$
- As forças e as acelerações dos elementos de fluido serão decompostas ao longo das respectivas direções x e y

Conservação de momento linear

- Aplicação da segunda lei de Newton: Força $=$ massa $\times$ aceleração

Taxa de variação temporal do momento de uma partícula	$=$	Resultantes das forças que agem sobre essa partícula

- Elemento de fluido que se desloca com o escoamento
- A massa é constante $\delta m = \rho(\delta x)(\delta y)$, que no limite $\delta x, \delta y \to 0$, $dm = \rho dx dy$
- As forças e as acelerações dos elementos de fluido serão decompostas ao longo das respectivas direções x e y

Conservação de momento linear

- Aplicação da segunda lei de Newton: Força $=$ massa $\times$ aceleração

Taxa de variação temporal do momento de uma partícula	=	Resultantes das forças que agem sobre essa partícula

- Elemento de fluido que se desloca com o escoamento
- A massa é constante $\delta m = \rho(\delta x)(\delta y)$, que no limite $\delta x, \delta y \rightarrow 0$, $dm = \rho dxdy$
- As forças e as acelerações dos elementos de fluido serão decompostas ao longo das respectivas direções x e y

- Considera-se inicialmente a direção x do escoamento, componente da velocidade é $u = u(x, y, t)$
- A variação da velocidade entre dois pontos do escoamento:

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial t}\delta t$$

- Dividindo-se a expressão anterior por δt:

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

- No limite, obtém-se a aceleração do elemento de fluido na direção x:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$

- A aceleração do elemento de fluido é a derivada substantiva de u:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)u,$$

em que $\mathbf{V} = (u, v)$.

- Considera-se inicialmente a direção x do escoamento, componente da velocidade é $u = u(x, y, t)$
- A variação da velocidade entre dois pontos do escoamento:

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial t}\delta t$$

- Dividindo-se a expressão anterior por δt:

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

- No limite, obtém-se a aceleração do elemento de fluido na direção x:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$

- A aceleração do elemento de fluido é a derivada substantiva de u:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)u,$$

em que $\mathbf{V} = (u, v)$.

- Considera-se inicialmente a direção x do escoamento, componente da velocidade é $u = u(x, y, t)$
- A variação da velocidade entre dois pontos do escoamento:

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial t}\delta t$$

- Dividindo-se a expressão anterior por δt:

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

- No limite, obtém-se a aceleração do elemento de fluido na direção x:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$

- A aceleração do elemento de fluido é a derivada substantiva de u:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)u,$$

em que $\mathbf{V} = (u, v)$.

- Considera-se inicialmente a direção x do escoamento, componente da velocidade é $u = u(x, y, t)$
- A variação da velocidade entre dois pontos do escoamento:

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial t}\delta t$$

- Dividindo-se a expressão anterior por δt:

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

- No limite, obtém-se a aceleração do elemento de fluido na direção x:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$

- A aceleração do elemento de fluido é a derivada substantiva de u:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)u,$$

em que $\mathbf{V} = (u, v)$.

- Considera-se inicialmente a direção x do escoamento, componente da velocidade é $u = u(x, y, t)$
- A variação da velocidade entre dois pontos do escoamento:

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial t}\delta t$$

- Dividindo-se a expressão anterior por δt:

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

- No limite, obtém-se a aceleração do elemento de fluido na direção x:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$

- A aceleração do elemento de fluido é a derivada substantiva de u:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)u,$$

em que $\mathbf{V} = (u, v)$.

- A aceleração do elemento de fluido na direção x:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)u$$

  - $(\mathbf{V} \cdot \nabla)u$: aceleração convectiva, pois decorre da passagem do elemento de fluido por regiões em que o escoamento possui diferentes valores de u
  - $\frac{\partial u}{\partial t}$: fornece a variação temporal da velocidade de um elemento de fluido em um ponto fixo do espaço (aceleração local)
  - $\frac{Du}{Dt}$: indica a variação da velocidade entre dois pontos do escoamento, fornece a aceleração do elemento de fluido propriamente dita

- Nos escoamentos estacionários, temos que $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, uma vez que a velocidade é constante em cada ponto

- Mesmo nos escoamentos estacionários, em geral, a aceleração $\frac{Du}{Dt} \neq 0$

- A aceleração do elemento de fluido na direção x:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)u$$

  - $(\mathbf{V} \cdot \nabla)u$: aceleração convectiva, pois decorre da passagem do elemento de fluido por regiões em que o escoamento possui diferentes valores de u
  - $\frac{\partial u}{\partial t}$: fornece a variação temporal da velocidade de um elemento de fluido em um ponto fixo do espaço (aceleração local)
  - $\frac{Du}{Dt}$: indica a variação da velocidade entre dois pontos do escoamento, fornece a aceleração do elemento de fluido propriamente dita

- Nos escoamentos estacionários, temos que $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, uma vez que a velocidade é constante em cada ponto
- Mesmo nos escoamentos estacionários, em geral, a aceleração $\frac{Du}{Dt} \neq 0$

- A aceleração do elemento de fluido na direção x:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)u$$

  - $(\mathbf{V} \cdot \nabla)u$: aceleração convectiva, pois decorre da passagem do elemento de fluido por regiões em que o escoamento possui diferentes valores de u
  - $\frac{\partial u}{\partial t}$: fornece a variação temporal da velocidade de um elemento de fluido em um ponto fixo do espaço (aceleração local)
  - $\frac{Du}{Dt}$: indica a variação da velocidade entre dois pontos do escoamento, fornece a aceleração do elemento de fluido propriamente dita

- Nos escoamentos estacionários, temos que $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, uma vez que a velocidade é constante em cada ponto

- Mesmo nos escoamentos estacionários, em geral, a aceleração $\frac{Du}{Dt} \neq 0$

- A aceleração do elemento de fluido na direção x:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) u$$

  - $(\mathbf{V} \cdot \nabla) u$: aceleração convectiva, pois decorre da passagem do elemento de fluido por regiões em que o escoamento possui diferentes valores de u
  - $\frac{\partial u}{\partial t}$: fornece a variação temporal da velocidade de um elemento de fluido em um ponto fixo do espaço (aceleração local)
  - $\frac{Du}{Dt}$: indica a variação da velocidade entre dois pontos do escoamento, fornece a aceleração do elemento de fluido propriamente dita

- Nos escoamentos estacionários, temos que $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, uma vez que a velocidade é constante em cada ponto
- Mesmo nos escoamentos estacionários, em geral, a aceleração $\frac{Du}{Dt} \neq 0$

- A aceleração do elemento de fluido na direção x:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) u$$

  - $(\mathbf{V} \cdot \nabla) u$: aceleração convectiva, pois decorre da passagem do elemento de fluido por regiões em que o escoamento possui diferentes valores de u
  - $\frac{\partial u}{\partial t}$: fornece a variação temporal da velocidade de um elemento de fluido em um ponto fixo do espaço (aceleração local)
  - $\frac{Du}{Dt}$: indica a variação da velocidade entre dois pontos do escoamento, fornece a aceleração do elemento de fluido propriamente dita

- Nos escoamentos estacionários, temos que $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, uma vez que a velocidade é constante em cada ponto

- Mesmo nos escoamentos estacionários, em geral, a aceleração $\frac{Du}{Dt} \neq 0$

- A aceleração do elemento de fluido na direção x:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)u$$

  - $(\mathbf{V} \cdot \nabla)u$: aceleração convectiva, pois decorre da passagem do elemento de fluido por regiões em que o escoamento possui diferentes valores de u
  - $\frac{\partial u}{\partial t}$: fornece a variação temporal da velocidade de um elemento de fluido em um ponto fixo do espaço (aceleração local)
  - $\frac{Du}{Dt}$: indica a variação da velocidade entre dois pontos do escoamento, fornece a aceleração do elemento de fluido propriamente dita

- Nos escoamentos estacionários, temos que $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, uma vez que a velocidade é constante em cada ponto
- Mesmo nos escoamentos estacionários, em geral, a aceleração $\frac{Du}{Dt} \neq 0$

- Pela segunda lei de Newton, a componente da força resultante **F** na direção x que age sobre o elemento fluido:

$$(\rho dxdy)\frac{Du}{Dt} = F_x$$

$$\boxed{\text{Taxa de variação temporal do momento de uma partícula}} = \boxed{\text{Resultantes das forças que agem sobre essa partícula}}$$

Forças que agem sobre o fluido

- Forças de campo: agem sobre a massa de fluido como um todo, isto é, sobre cada ponto de um elemento de fluido
  - Exemplos dessas forças: gravidade, eletromagnética
  - Tem a forma geral $\rho \mathbf{f} dxdy$, em que $\mathbf{f}$ é um vetor que representa a força exercida no elemento de fluido por unidade de massa (aceleração)
  - Adicionadas como termos auxiliares (fontes) das equações de momento
- **Forças de superfície**: agem sobre a superfície do elemento de fluido
  - Decorrem da pressão exercida sobre o fluido por um elemento exterior
  - Decorrem também das tensões viscosas normais e de cisalhamento devido ao atrito com os elementos de fluido adjacentes em movimento
  - Intrínsecas ao fluido, elas aparecem como termos constitutivos das equações de momento

Forças que agem sobre o fluido

- Forças de campo: agem sobre a massa de fluido como um todo, isto é, sobre cada ponto de um elemento de fluido
  - Exemplos dessas forças: gravidade, eletromagnética
  - Tem a forma geral $\rho \mathbf{f} dxdy$, em que $\mathbf{f}$ é um vetor que representa a força exercida no elemento de fluido por unidade de massa (aceleração)
  - Adicionadas como termos auxiliares (fontes) das equações de momento
- Forças de superfície: agem sobre a superfície do elemento de fluido
  - Decorrem da pressão exercida sobre o fluido por um elemento exterior
  - Decorrem também das tensões viscosas normais e de cisalhamento devido ao atrito com os elementos de fluido adjacentes em movimento
  - Intrínsecas ao fluido, elas aparecem como termos constitutivos das equações de momento

Forças que agem sobre o fluido

- Forças de campo: agem sobre a massa de fluido como um todo, isto é, sobre cada ponto de um elemento de fluido
  - Exemplos dessas forças: gravidade, eletromagnética
  - Tem a forma geral $\rho\mathbf{f}\,dxdy$, em que $\mathbf{f}$ é um vetor que representa a força exercida no elemento de fluido por unidade de massa (aceleração)
  - Adicionadas como termos auxiliares (fontes) das equações de momento
- Forças de superfície: agem sobre a superfície do elemento de fluido
  - Decorrem da pressão exercida sobre o fluido por um elemento exterior
  - Decorrem também das tensões viscosas normais e de cisalhamento devido ao atrito com os elementos de fluido adjacentes em movimento
  - Intrínsecas ao fluido, elas aparecem como termos constitutivos das equações de momento

Forças que agem sobre o fluido

- Forças de campo: agem sobre a massa de fluido como um todo, isto é, sobre cada ponto de um elemento de fluido
  - Exemplos dessas forças: gravidade, eletromagnética
  - Tem a forma geral $\rho \mathbf{f} dxdy$, em que $\mathbf{f}$ é um vetor que representa a força exercida no elemento de fluido por unidade de massa (aceleração)
  - Adicionadas como termos auxiliares (fontes) das equações de momento
- Forças de superfície: agem sobre a superfície do elemento de fluido

Forças que agem sobre o fluido

- Forças de campo: agem sobre a massa de fluido como um todo, isto é, sobre cada ponto de um elemento de fluido
  - Exemplos dessas forças: gravidade, eletromagnética
  - Tem a forma geral $\rho \mathbf{f} dxdy$, em que $\mathbf{f}$ é um vetor que representa a força exercida no elemento de fluido por unidade de massa (aceleração)
  - Adicionadas como termos auxiliares (fontes) das equações de momento
- **Forças de superfície**: agem sobre a superfície do elemento de fluido
  - Decorrem da pressão exercida sobre o fluido por um elemento exterior
  - Decorrem também das tensões viscosas normais e de cisalhamento devido ao atrito com os elementos de fluido adjacentes em movimento
  - Intrínsecas ao fluido, elas aparecem como *termos constitutivos* das equações de momento

Forças que agem sobre o fluido

- Forças de campo: agem sobre a massa de fluido como um todo, isto é, sobre cada ponto de um elemento de fluido
  - Exemplos dessas forças: gravidade, eletromagnética
  - Tem a forma geral $\rho \mathbf{f} dxdy$, em que $\mathbf{f}$ é um vetor que representa a força exercida no elemento de fluido por unidade de massa (aceleração)
  - Adicionadas como termos auxiliares (fontes) das equações de momento
- **Forças de superfície**: agem sobre a superfície do elemento de fluido
  - Decorrem da pressão exercida sobre o fluido por um elemento exterior
  - Decorrem também das tensões viscosas normais e de cisalhamento devido ao atrito com os elementos de fluido adjacentes em movimento
  - Intrínsecas ao fluido, elas aparecem como *termos constitutivos* das equações de momento

Forças que agem sobre o fluido

- Forças de campo: agem sobre a massa de fluido como um todo, isto é, sobre cada ponto de um elemento de fluido
  - Exemplos dessas forças: gravidade, eletromagnética
  - Tem a forma geral $\rho \mathbf{f} dxdy$, em que $\mathbf{f}$ é um vetor que representa a força exercida no elemento de fluido por unidade de massa (aceleração)
  - Adicionadas como termos auxiliares (fontes) das equações de momento
- **Forças de superfície**: agem sobre a superfície do elemento de fluido
  - Decorrem da pressão exercida sobre o fluido por um elemento exterior
  - Decorrem também das tensões viscosas normais e de cisalhamento devido ao atrito com os elementos de fluido adjacentes em movimento
  - Intrínsecas ao fluido, elas aparecem como *termos constitutivos* das equações de momento

Forças que agem sobre o fluido

- Forças de campo: agem sobre a massa de fluido como um todo, isto é, sobre cada ponto de um elemento de fluido
  - Exemplos dessas forças: gravidade, eletromagnética
  - Tem a forma geral $\rho \mathbf{f} dxdy$, em que $\mathbf{f}$ é um vetor que representa a força exercida no elemento de fluido por unidade de massa (aceleração)
  - Adicionadas como termos auxiliares (fontes) das equações de momento
- **Forças de superfície**: agem sobre a superfície do elemento de fluido
  - Decorrem da pressão exercida sobre o fluido por um elemento exterior
  - Decorrem também das tensões viscosas normais e de cisalhamento devido ao atrito com os elementos de fluido adjacentes em movimento
  - Intrínsecas ao fluido, elas aparecem como *termos constitutivos* das equações de momento

Nomenclatura das tensões viscosas τ_{ij}

- Tensão τ_{ij}: os índices i e j indicam que a tensão age na direção j sobre a superfície normal à direção i
- Exemplo: tensão τ_{yx} age na direção x sobre a superfície normal à direção y
- As tensões na direção positiva dos eixos x e y terão sinal positivo; caso contrário, serão negativas

Nomenclatura das tensões viscosas τ_{ij}

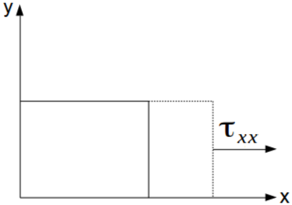
- Tensão τ_{ij}: os índices i e j indicam que a tensão age na direção j sobre a superfície normal à direção i
- Exemplo: tensão τ_{yx} age na direção x sobre a superfície normal à direção y
- As tensões na direção positiva dos eixos x e y terão sinal positivo; caso contrário, serão negativas

Nomenclatura das tensões viscosas τ_{ij}

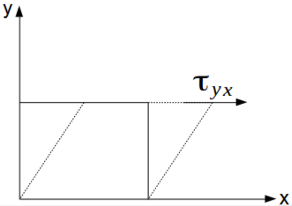
- Tensão τ_{ij}: os índices i e j indicam que a tensão age na direção j sobre a superfície normal à direção i
- Exemplo: tensão τ_{yx} age na direção x sobre a superfície normal à direção y
- As tensões na direção positiva dos eixos x e y terão sinal positivo; caso contrário, serão negativas

Tensões que influenciam um elemento de fluido

- Tensões normais tendem a esticar ou comprimir o elemento de fluido
  - Proporcionais à variação temporal do volume do elemento

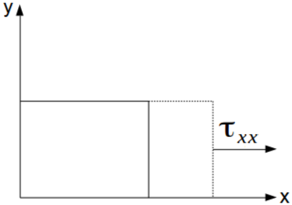


- Tensões de cisalhamento: tendem a deformar o elemento, sendo proporcionais sua taxa de deformação

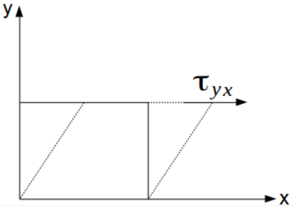


Tensões que influenciam um elemento de fluido

- Tensões normais tendem a esticar ou comprimir o elemento de fluido
  - Proporcionais à variação temporal do volume do elemento



- Tensões de cisalhamento: tendem a deformar o elemento, sendo proporcionais sua taxa de deformação



Tensões que influenciam um elemento de fluido

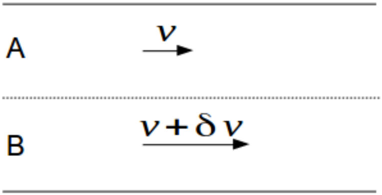
- Tensões normais: a pressão p
- Forças que agem sobre o elemento de fluido, multiplicam-se as tensões pelas respectivas áreas sobre as quais elas agem e soma-se os resultado algebricamente

Tensões que influenciam um elemento de fluido

- Tensões normais: a pressão p
- Forças que agem sobre o elemento de fluido, multiplicam-se as tensões pelas respectivas áreas sobre as quais elas agem e soma-se os resultado algebricamente

Efeitos das tensões sobre um elemento de fluido

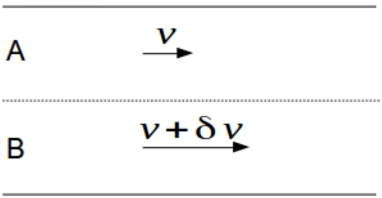
Dois escoamentos paralelos A e B de um mesmo fluido com velocidades médias distintas



- Moléculas da região A pentram na região B, redução de velocidade de uma molécula de B
  - Natureza das tensões normais
- B para A, aumento da velocidade de uma molécula de A
  - Efeito análogo ao causado pelas tensões de cisalhamento, só que ocorre na direção perpendicular ao escoamento

Efeitos das tensões sobre um elemento de fluido

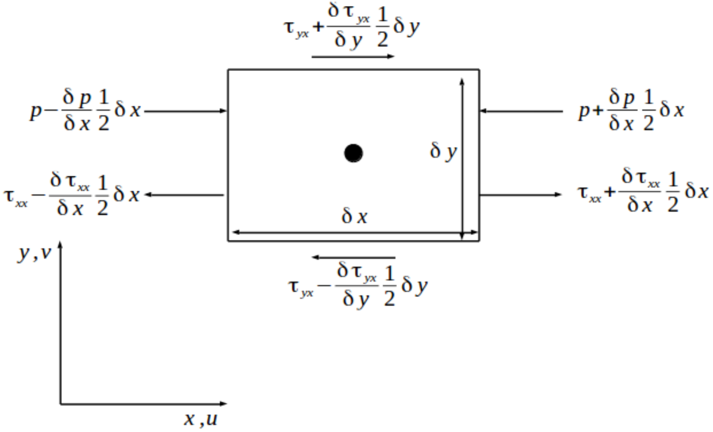
Dois escoamentos paralelos A e B de um mesmo fluido com velocidades médias distintas



- Moléculas da região A pentram na região B, redução de velocidade de uma molécula de B
  - Natureza das tensões normais
- B para A, aumento da velocidade de uma molécula de A
  - Efeito análogo ao causado pelas tensões de cisalhamento, só que ocorre na direção perpendicular ao escoamento

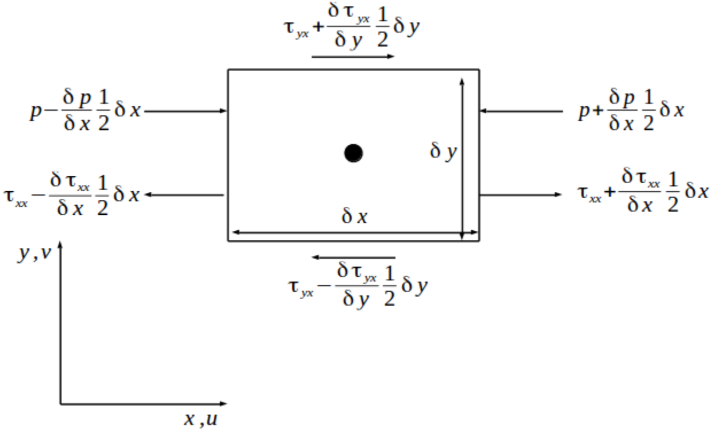
Tensões na direção x sobre um elemento de fluido

- Tensões normais e tangenciais na direção x
- Tensões na direção positiva dos eixos x e y terão sinal positivo; caso contrário, serão negativas

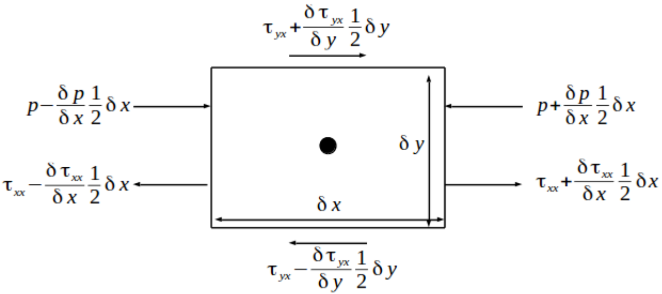


Tensões na direção x sobre um elemento de fluido

- Tensões normais e tangenciais na direção x
- Tensões na direção positiva dos eixos x e y terão sinal positivo; caso contrário, serão negativas

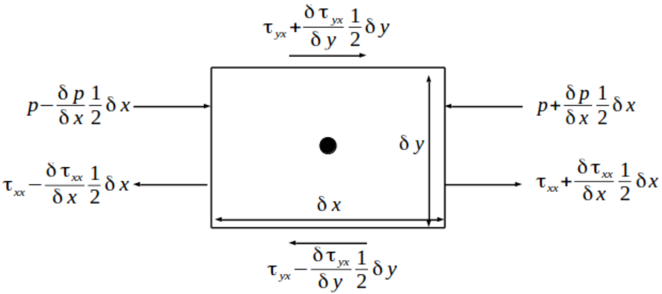


Força resultante na direção x



- Força resultante nas faces esquerda e direita:
$$\left(-\frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xx}}{\delta x}\right)\delta x \delta y$$
- Força resultante nas faces superior e inferior:
$$\frac{\delta \tau_{yx}}{\delta y}\delta x \delta y$$
- Força de superfície resultante na direção x é:
$$\left(-\frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xx}}{\delta x}\right)\delta x \delta y + \frac{\delta \tau_{yx}}{\delta y}\delta x \delta y$$

Força resultante na direção x



- Força resultante nas faces esquerda e direita:

$$\left(-\frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xx}}{\delta x}\right) \delta x \delta y$$

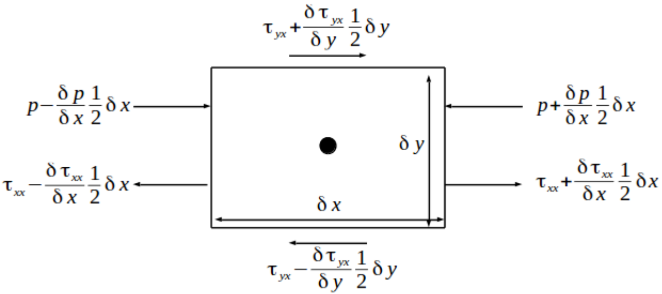
- Força resultante nas faces superior e inferior:

$$\frac{\delta \tau_{yx}}{\delta y} \delta x \delta y$$

- Força de superfície resultante na direção x é:

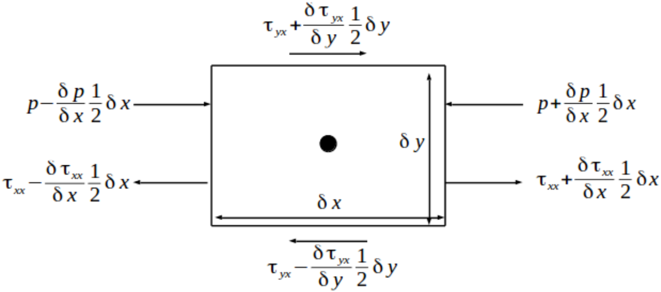
$$\left(-\frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xx}}{\delta x}\right) \delta x \delta y + \frac{\delta \tau_{yx}}{\delta y} \delta x \delta y$$

Força resultante na direção x



- Força resultante nas faces esquerda e direita:
$$\left(-\frac{\delta p}{\delta x}+\frac{\delta \tau_{xx}}{\delta x}\right)\delta x \delta y$$
- Força resultante nas faces superior e inferior:
$$\frac{\delta \tau_{yx}}{\delta y}\delta x \delta y$$
- Força de superfície resultante na direção x é:
$$\left(-\frac{\delta p}{\delta x}+\frac{\delta \tau_{xx}}{\delta x}\right)\delta x \delta y+\frac{\delta \tau_{yx}}{\delta y}\delta x \delta y$$

Força resultante na direção x



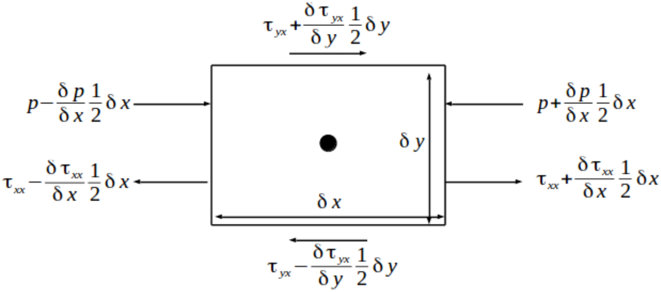
- A força de superfície resultante na direção x é:

$$\left(-\frac{\delta p}{\delta x}+\frac{\delta\tau_{xx}}{\delta x}\right)\delta x\delta y+\frac{\delta\tau_{yx}}{\delta y}\delta x\delta y$$

- No limite $\delta x, \delta y \to 0$, essa força na direção x vale

$$F_x=\left(-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}\right)dxdy+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dxdy$$

Força resultante na direção x



- A força de superfície resultante na direção x é:

$$\left(-\frac{\delta p}{\delta x}+\frac{\delta\tau_{xx}}{\delta x}\right)\delta x\delta y+\frac{\delta\tau_{yx}}{\delta y}\delta x\delta y$$

- No limite $\delta x, \delta y \to 0$, essa força na direção x vale

$$F_x=\left(-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}\right)dxdy+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dxdy$$

Conservação de momento linear na direção x

- A força de superfície resultante na direção x é:

$$F_x = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right) dxdy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dxdy$$

- Escrevendo a segunda lei de Newton na direção x:

$$(\rho dxdy)\frac{Du}{Dt} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right) dxdy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dxdy + \rho f_x dxdy$$

  - Força de superfície: $\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right) dxdy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dxdy$
  - Força de campo: $\rho f_x dxdy$

- Conservação de momento linear na direção x:

$$\boxed{\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x}$$

Conservação de momento linear na direção x

- A força de superfície resultante na direção x é:

$$F_x = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right) dxdy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dxdy$$

- Escrevendo a segunda lei de Newton na direção x:

$$(\rho dxdy)\frac{Du}{Dt} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right) dxdy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dxdy + \rho f_x dxdy$$

  - Força de superfície: $\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right) dxdy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dxdy$
  - Força de campo: $\rho f_x dxdy$

- Conservação de momento linear na direção x:

$$\boxed{\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x}$$

Conservação de momento linear na direção x

- A força de superfície resultante na direção x é:

$$F_x = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right) dxdy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dxdy$$

- Escrevendo a segunda lei de Newton na direção x:

$$(\rho dxdy)\frac{Du}{Dt} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right) dxdy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dxdy + \rho f_x dxdy$$

  - Força de superfície: $\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right) dxdy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dxdy$
  - Força de campo: $\rho f_x dxdy$

- Conservação de momento linear na direção x:

$$\boxed{\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x}$$

Conservação de momento linear na direção x

- A força de superfície resultante na direção x é:

$$F_x = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right) dxdy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dxdy$$

- Escrevendo a segunda lei de Newton na direção x:

$$(\rho dxdy)\frac{Du}{Dt} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right) dxdy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dxdy + \rho f_x dxdy$$

  - Força de superfície: $\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right) dxdy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dxdy$
  - Força de campo: $\rho f_x dxdy$

- Conservação de momento linear na direção x:

$$\boxed{\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x}$$

Conservação de momento linear na direção x

- A força de superfície resultante na direção x é:

$$F_x = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right) dxdy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dxdy$$

- Escrevendo a segunda lei de Newton na direção x:

$$(\rho dxdy)\frac{Du}{Dt} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right) dxdy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dxdy + \rho f_x dxdy$$

  - Força de superfície: $\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right) dxdy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dxdy$
  - Força de campo: $\rho f_x dxdy$

- Conservação de momento linear na direção x:

$$\boxed{\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x}$$

Conservação de momento linear na direção y

Exercício: obtenha a equação de conservação de momento linear na direção y.

$$\boxed{\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y}$$

Forma conservativa da equação do momento linear na direção x:

- Forma não conservativa da equação do momento linear na direção x:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x$$

- Forma conservativa da equação do momento linear na direção x:

$$\rho \frac{Du}{Dt} + u\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right] = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V})$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x$$

Forma conservativa da equação do momento linear na direção x:

- Forma não conservativa da equação do momento linear na direção x:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x$$

- Forma conservativa da equação do momento linear na direção x:

$$\rho \frac{Du}{Dt} + u \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} \right] = \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u v)}{\partial y} = \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V})$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u v)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x$$

Forma conservativa da equação do momento linear na direção y

- Forma *não conservativa* da equação do momento linear na direção y:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y$$

- **Exercício**: obtenha a forma *conservativa* da equação do momento linear na direção y:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y$$

Forma conservativa da equação do momento linear na direção y

- Forma *não conservativa* da equação do momento linear na direção y:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y$$

- **Exercício**: obtenha a forma *conservativa* da equação do momento linear na direção y:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y$$

Conservação de momento linear

- Forma *não conservativa* da equação do momento linear

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x$$
$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y$$

- Forma *conservativa* da equação do momento linear

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x$$
$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y$$

Conservação de momento linear

- Forma *não conservativa* da equação do momento linear

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x$$
$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y$$

- Forma *conservativa* da equação do momento linear

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x$$
$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y$$