

Mecânica dos Fluidos Computacional

Escoamentos compressíveis

Iury Higor Aguiar da Igreja

Patricia Habib Hallak

Rafael Alves Bonfim de Queiroz

patricia.hallak@ufjf.edu.br

patriciahallak@yahoo.com

10 September 2020

Bibliografia - sugestões

- ▶ John D. Anderson, Jr, *Computational Fluid Dynamics - The Basics with Applications*
- ▶ John D. Anderson, Jr, *Fundamentals of Aerodynamics*
- ▶ Yunus A. Cengel, John M. Cimbala, *Fluid Mechanics - Fundamentals and Applications*

Introdução

With the realization of aeroplane and missile speeds equal to or even surpassing many times the speed of sound, thermodynamics has entered the scene and will never again leave our considerations.
Jakob Ackeret, 1962

Introdução

Aspectos importantes:

- ▶ velocidade do escoamento próxima a velocidade do som;
- ▶ formação de ondas de choque;
- ▶ variação da densidade ρ ;
- ▶ equação de energia \rightarrow em escoamentos compressíveis as transformações energéticas e mudanças na temperatura são significativos.

Breve revisão de conceitos da termodinâmica

Gás perfeito

Gás perfeito: o gás é uma coleção de partículas (moléculas, átomos, íons, elétrons, etc) que estão em movimento mais ou menos aleatório.

Devido à estrutura eletrônica dessas partículas, um campo de força intermolecular permeia o espaço ao seu redor. Um gás dito perfeito é aquele em que estas forças intermoleculares são negligenciadas.

Nas temperaturas e pressões características de muitas aplicações de fluxo compressível, as partículas de gás estão, em média, separadas por mais de 10 diâmetros moleculares; isso é longe o suficiente para justificar a suposição de um gás perfeito

Breve revisão de conceitos da termodinâmica

Gás perfeito

Para um gás perfeito, p , ρ e T (pressão, densidade e temperatura) estão relacionadas pela equação de estado:

$$p = \rho RT \quad pv = RT$$

R : constante específica do gás, v é o volume específico (volume por unidade de massa; $v = 1/\rho$).

Breve revisão de conceitos da termodinâmica

Relações termodinâmicas

- ▶ Equação de estado $p = \rho RT$
- ▶ Entalpia específica $h = e + pv$
 - ▶ e : energia interna específica devido ao movimentos dos gases, é a soma das energias cinética (translação, rotação, vibracional), potencial e eletrônica. Representa a soma de todas as energias das moléculas em um volume finito por unidade de massa.;
 - ▶ v : volume específico ($= 1/\rho$).

Breve revisão de conceitos da termodinâmica

Relações termodinâmicas

- ▶ e e $h \rightarrow$ são funções da temperatura, ou seja: $de = c_v dT$ e $dh = c_p dT$, onde c_v e c_p são calor específico a volume constante e calor específico a pressão constante, respectivamente. Estes parâmetros são funções da temperatura, mas para temperaturas moderadas ($T < 1000K$), são considerados constantes \rightarrow gás caloricamente perfeito. Logo:

$$e = c_v T \quad h = c_p T$$

Esta é uma hipótese válida para um grande número de problemas que envolvem escoamentos compressíveis.

Breve revisão de conceitos da termodinâmica

Relações termodinâmicas

- Para um gás específico, c_p e c_v estão relacionados pela expressão:

$$c_p - c_v = R$$

Após manipulações e denominando $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, vem:

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

Breve revisão de conceitos da termodinâmica

Relações termodinâmicas

► Primeira lei da termodinâmica:

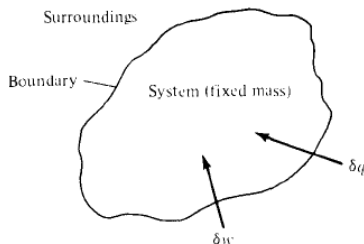


FIGURE 7.2
Thermodynamic system.

Figure: Sistema termodinamico estacionário.

$$\delta q + \delta w = de$$

δq : incremento de calor (radiação ou condução), δw : trabalho realizado sobre o sistema pela fronteira (deslocamentos, estreitamento do volume) , de : variação de energia interna devido a δq e δw .

Breve revisão de conceitos da termodinâmica

Relações termodinâmicas

$$\delta q + \delta w = de$$

- ▶ Na equação acima, e é uma variável de estado e de é um diferencial exato que depende somente dos estados inicial e final do sistema. Em contraste, δq e δw dependem do processo para ir dos estados inicial e final. Para um determinado de , destacam-se três processos nos quais calor pode ser adicionado e trabalho pode ser realizado sobre o sistema:
 - ▶ *adiabático*: nenhum calor é adicionado ou retirado do sistema),
 - ▶ *reversível*: sem dissipação (ausência de difusão de massa, efeito de viscosidade e condutividade térmica.)
 - ▶ *isentrópico*: é tanto adiabático quanto reversível.

Breve revisão de conceitos da termodinâmica

Relações termodinâmicas

$$\delta q + \delta w = de$$

Processo reversível: $\delta w = -p dv$, onde dv é a mudança incremental de volume devido ao deslocamento do contorno do sistema.

$$\delta q - p dv = de$$

Breve revisão de conceitos da termodinâmica

Relações termodinâmicas

► Entropia

$$ds = \frac{\delta q}{T} + ds_{irrev}$$

é uma variável de estado, condição imposta ao processo que diz em qual direção o processo ocorrerá;

- δq : quantidade real de calor adicionada ao sistema durante um processo irreversível real;
- ds_{irrev} : geração de entropia devido aos processos irreversíveis (dissipativos, ie, viscosidade, condutividade térmica e difusão de massa), que sempre aumentam a entropia.

$$ds_{irrev} \geq 0$$

Nesta equação, o igual é um processo reversível (sem dissipação).

Breve revisão de conceitos da termodinâmica

Relações termodinâmicas

- Segunda lei da termodinâmica:

$$ds \geq \frac{\delta q}{T}$$

processo adiabático: $ds \geq 0$.

Contribuição: indica em qual direção o processo ocorre. Um processo prosseguirá em uma direção tal que a entropia do sistema mais a de seu entorno sempre aumente ou, na melhor das hipóteses, permaneça a mesma.

Breve revisão de conceitos da termodinâmica

Relações termodinâmicas

Cálculo prático da entropia:

$$\delta q - pdv = de \quad ds = \frac{\delta q_{rev}}{T} \quad h = e + pv \quad pv = RT$$

- ▶ $dv \rightarrow$ mudança incremental de volume devido ao deslocamento da fronteira ($dw = -pdv$)
- ▶ Da combinação das relações acima, resultam nestas duas formas alternativas a primeira lei, em termos da entropia:

$$Tds = de + pdv \quad Tds = dh - vdp$$

- ▶ Gases perfeitos: $de = c_v dT$, $dh = c_p dT$, $pv=RT$

- ▶ $s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$
 - ▶ $s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{v_2}{v_1}$

Estas relações permitem o cálculo da mudança de entropia para um gás perfeito entre dois estados. Nota-se que $s = s(p, T)$ e $s = s(v, T)$

Breve revisão de conceitos da termodinâmica

Relações termodinâmicas

- Escamentos isentropicos (adiabático: $\delta q = 0$, reversível: $ds_{irrev} = 0$) $\Rightarrow ds = \delta q/T + ds_{irrev} \Rightarrow ds = 0$: entropia constante,

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

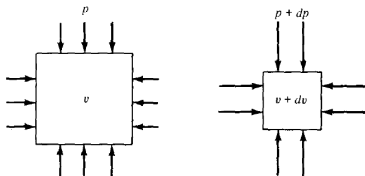
$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Estas expressões relacionam pressão, densidade e temperatura para os processos isentrópicos.

".. is very important... it stems from the first law and the definition of entropy. ... is basically an energy relation for an isentropic process... A large number of practical compressible flow problems can be assumed to be isentropic".

Definição geral de compressibilidade

All real substances are compressible to some greater or lesser extent; i.e., when you squeeze or press on them, their density will change. This is particularly true of gases, much less so for liquids, and virtually unnoticeable for solids.



- ▶ v : volume.
- ▶ dv : decréscimo no volume (é negativo).
- ▶ compressibilidade (por definição): $\tau = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dp}$: mudança fracionária de volume do elemento fluido por unidade de mudança de pressão.
Fisicamente, a compressibilidade é a mudança fracionária no volume do elemento fluido por unidade de mudança na pressão.

Definição geral de compressibilidade

Sabe-se por experiência que, quando um gás é comprimido, sua temperatura tende a aumentar, dependendo da quantidade de calor transferida para dentro ou para fora do domínio através dos limites do sistema. Se a temperatura do elemento fluido for mantida constante, tem-se um processo isotérmico.

- ▶ processo isotérmico (temperatura constante):

$$\tau_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$$

τ_T é a compressibilidade isotérmica.

Definição geral de compressibilidade

Se nenhum calor for adicionado ou retirado do elemento fluido, e se o atrito for ignorado, a compressão do elemento fluido ocorrerá isentropicamente:

- ▶ processo isentropico:

$$\tau_s = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s$$

τ_s é a compressibilidade isentrópica.

O subscrito s denota que a derivada parcial é obtida considerando a entropia constante.

Definição geral de compressibilidade

O papel da compressibilidade está na determinação das propriedades de um fluido em movimento.

$$\tau = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dp}$$

- v : volume específico, volume por unidade de massa
→ $v = 1/\rho$:

$$\tau = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \rightarrow d\rho = \tau \rho dp$$

A relação acima mostra que a variação da densidade está relacionada com a variação de pressão por meio da compressibilidade do fluido.

$$d\rho = \tau \rho dp$$

- ▶ A consideração desta variação depende do escoamento e do fluido. Um fluido como o ar tem a compressibilidade τ muito pequena. Se ocorrer uma mudança considerável de p , com τ é muito pequeno, tem-se pequena variação de ρ e o escoamento pode ser visto como incompressível.

Por outro lado, em um gás o valor de τ é significativo e mudanças em p promovem mudanças na variável ρ e o escoamento é compressível. Exceção para os escoamentos de baixa velocidade de gases, onde a variação de p é muito pequena.

- ▶ Um parâmetro que fornece esta sensibilidade é o número de Mach (M):

$$M = \frac{V}{a}$$

$M > 0,3 \rightarrow$ escoamento compressível.

Equações governantes - escoamento invíscido e compressível

▶ Equações de conservação

▶ Continuidade (conservação de massa): $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0$

▶ Conservação de quantidade de movimento (forma não conservativa):

▶ direção x : $\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x$

▶ direção y : $\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y$

▶ direção z : $\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z$

▶ Energia: $\rho \frac{D(e + V^2/2)}{Dt} = \rho \dot{q} - \nabla \cdot p \mathbf{V} + \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{V})$

▶ Cinco incógnitas (p , \mathbf{V} , e , T e ρ), três equações de conservação e duas leis constitutivas (*gas ideal*: $p = \rho RT$, $e = c_v T$)

▶ Escoamento adiabático e estacionário:

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} = \text{constante}$$

Condições de estagnação

- ▶ Definições:
 - ▶ pressão (p), temperatura (T) e densidade (ρ) estáticas: é uma medida do movimento puramente aleatório das moléculas em um gás; é a pressão/temperatura/densidade que você sente quando anda junto com o gás na velocidade do escoamento local.

► Definições:

- pressão (p), temperatura (T) e densidade (ρ) de estagnão (total) : é a pressão/temperatura/densidade em um ponto (ou pontos) no escoamento onde $\tilde{\mathbf{V}} = 0$. *"Agora imagine que você segura o elemento fluido e adiabaticamente diminua a velocidade para a velocidade zero.... Lembre-se de que não precisamos realmente parar o fluxo na vida real para falar sobre a temperatura total ou entalpia total; em vez disso, são quantidades definidas que existiriam em um ponto de um fluxo se (em nossa imaginação) o elemento fluido que passa por esse ponto fosse colocado em repouso adiabático."*

Condições de estagnação

► Estagnação

- A temperatura total T_0 e a entalpia total h_0 são definidas como as propriedades que existiriam se, em nossa imaginação, desacelerássemos o elemento fluido em um ponto no fluxo até a velocidade zero adiabaticamente.
- A pressão total p_0 e a densidade total ρ_0 são definidas como as propriedades que existiriam se, em nossa imaginação, desacelerarmos o elemento fluido em um ponto do escoamento até a velocidade zero, de forma isotérmica.

Condições de estagnação

► Equação de energia:

Hipóteses: escoamento adiabático, permanente, invíscido e $\mathbf{f}=0$.

Energia: $\rho \frac{D(e+V^2/2)}{Dt} = \rho \dot{q} - \nabla \cdot p \mathbf{V} + \rho(\mathbf{f} \cdot \mathbf{V})$

$$\begin{aligned} \rho \frac{D(e + V^2/2)}{Dt} &= -\nabla \cdot p \mathbf{V} = -p \nabla \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \nabla p \\ \rho \frac{D(p/\rho)}{Dt} &= \rho \frac{\rho Dp/Dt - p D\rho/Dt}{\rho^2} = \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \end{aligned} \quad (1)$$

Equação de continuidade:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2)$$

Condições de estagnação

$$\rho \frac{D(p/\rho)}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$
$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

Combinando as equações acima, tem-se:

$$\rho \frac{D(p/\rho)}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + p \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla p + p \nabla \cdot \mathbf{V}$$

Condições de estagnação

$$\rho \frac{D(p/\rho)}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + p \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla p + p \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (3)$$

$$\rho \frac{D(e + V^2/2)}{Dt} = -\nabla \cdot p \mathbf{V} = -p \nabla \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \nabla p \quad (4)$$

Somando a parcela 3 do lado esquerdo e direito da equação 4, tem-se:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) = -p \nabla \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \nabla p + \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla p + p \nabla \cdot \mathbf{V}$$

Condições de estagnação

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial p}{\partial t}$$

Observa-se que:

$$e + \frac{p}{\rho} = e + pv = h$$

Logo:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial p}{\partial t}$$

Condições de estagnação

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial p}{\partial t}$$

Pela hipótese de escoamento permanente: $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$

$$\text{Logo: } = 0 \rho \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{V^2}{2} \right) = 0$$

$$h + \frac{V^2}{2} = \textit{constante}$$

ao longo da linha de corrente (*streamline*).

Condições de estagnação

$$h + \frac{V^2}{2} = \textit{constante}$$

Da definição de entalpia total (estagnação - h_0), pode-se escrever a equação acima na forma:

$$h + \frac{V^2}{2} = h_0 = \textit{constante} \quad (5)$$

Interpretação da equação 5: em qualquer ponto do escoamento, a entalpia total é a soma da estática com a energia cinética, todos por unidade de massa.

Para um gás perfeito, tem-se $h_0 = c_p T_0$. Logo $T_0 = \textit{constante}$.

Alguns aspectos de escoamento supersonico - ondas de choque

M : número de Mach local.

Regimes de escoamento:

Subsonic if $M < 1$

Sonic if $M = 1$

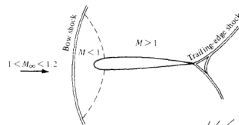
Supersonic if $M > 1$



(a) Subsonic flow



(b) Transonic flow
with $M_{\infty} < 1$



(c) Supersonic flow



(d) Hypersonic flow



- ▶ Escoamentos subsonicos (compressíveis): é qualitativamente (não quantitativamente) semelhante ao escoamento incompressível. O escoamento varia suavemente, em uma região muito à frente do corpo o escoamento tende a recuperar as suas características iniciais.



(a) Subsonic flow

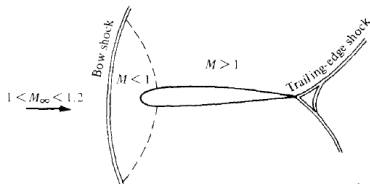
Uma questão importante a ser observadas é que o limite de 0.8 não impoe a condição de que todo o escoamento é subsonico. Há situações em que a velocidade no contorno do corpo excede a de incidência e, conseqüentemente, há valores de Mach superiores a este limite.

- ▶ Escoamentos transônicos ($0.8 < M < 1$): há situações que, para M próximo a 1, regiões do escoamento tornam-se localmente supersônicas ($M > 1$), como mostra a figura (b). Nestas, observam-se pontos de escoamentos supersônicos nas faces superior e inferior do aerofólio. Nestas, há a formação ondas de fracas de choque. Na esteira destas ondas, o escoamento torna-se novamente subsonico.



(b) Transonic flow
with $M_\infty < 1$

- ▶ Escoamentos transônicos ($1 < M < 1.2$): para M ligeiramente acima da unidade, uma onda de choque em arco é formada na frente do corpo; por trás dessa onda de choque, o fluxo é localmente subsônico. Esse escoamento subsônico subsequentemente se expande para um valor supersônico baixo sobre o aerofólio. Ondas de choque fracas são geralmente geradas no bordo de fuga, às vezes em um padrão "rabo de peixe".

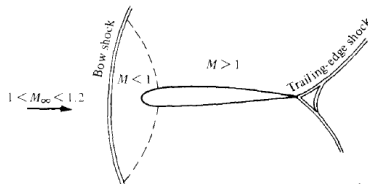


(c) Transonic flow with $M_\infty > 1$

- ▶ Escoamentos transônicos ($0.8 < M < 1.2$): os campos de escoamento mostrados nas figuras são caracterizados por fluxos subsônicos-supersônicos mistos e são dominados em física de ambos os tipos de fluxos ou escoamentos transônicos.

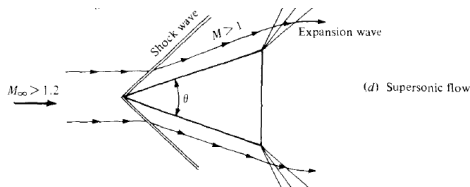


(b) Transonic flow with $M_\infty < 1$

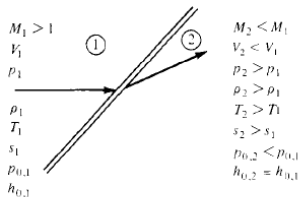


(c) Transonic flow with $M_\infty > 1$

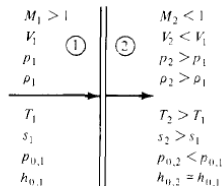
- ▶ Escoamentos supersônicos ($M > 1$ em todas as regiões): é definido com aquele em que $M > 1$ em todos os seus pontos. São frequentemente caracterizados pela presença de ondas de choque através das quais as propriedades de fluxo e as linhas de fluxo mudam descontinuamente. O escoamento permanece supersônico por trás da onda de choque oblíqua. Nota-se, também, uma região distinta de expansão das ondas.



- ▶ Escoamentos supersônicos são dominados por ondas de choque, que são regiões muito finas em um escoamento supersônico através do qual a pressão, densidade, temperatura e entropia aumentam; o número de Mach, velocidade do escoamento e pressão total diminuem e a entalpia total permanece a mesma.



(a) Oblique shock wave



(b) Normal shock wave

- ▶ Escoamentos hipersônicos ($M > 5$): a onda de choque se aproxima da superfície do corpo. Além disso, a força da onda de choque aumenta, levando a temperaturas mais altas na região entre o choque e o corpo (a camada de choque). Se M for suficientemente grande, a camada de choque se torna muito fina e ocorrem interações entre a onda de choque e a camada limite viscosa na superfície. Além disso, a temperatura da camada de choque torna-se alta o suficiente para que ocorram reações químicas no ar.

