Mecânica dos Fluidos Computacional

Apresentação do Curso
Modelos, Métodos Numéricos e Aplicações

Iury Igreja

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional
Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de Juiz de Fora
iuryigreja@ice.ufjf.br

Conteúdo

- Objetivos
- Problema Modelo e Aplicações
- Métodos e Desafios Numéricos
- Outros Modelos das Equações de Navier-Stokes
- Problema da Cavidade (lid-driven cavity flow)
- Informações Importantes

Objetivos da etapa II da disciplina

- Estudar modelos simplificados das equações de Navier-Stokes;
- Revisar métodos numéricos populares para aproximar o problema de Navier-Stokes;
- Compreender alguns desafios numéricos do problema de Navier-Stokes;
- Desenvolver conhecimentos relacionados ao método de diferenças finitas;
- Implementar o método de diferenças alternadas ADI;
- Desenvolver estudos de convergência;
- Simular o problema da Cavidade;

Projeto da etapa II da disciplina

- **Objetivo**:

Reproduzir os resultados propostos por Erturk et al.[1]

- **Conhecimentos necessários**:
  - equação de Navier-Stokes em termos da vorticidade e função corrente;
  - métodos de diferenças finitas;
  - método de diferenças alternadas ADI;
  - uma linguagem de programação (C/C++, Fortran, Python, Matlab, ...);
  - estudo de convergência;
  - problema da cavidade (*lid-driven cavity flow*).

[1]Erturk, E., Corke, T., Gökçöl, C.. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers. *IJNMF*, (2005). https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/fld.953

Problema de Navier-Stokes

Em um domínio espacial $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *com contorno* $\partial\Omega$ *e o domínio temporal* $\Theta = [0, T]$*, assumindo as hipóteses:*

- fluido incompressível (massa específica constante);
- fluido Newtoniano (viscosidade constante);
- forças de corpo negligenciadas (efeitos gravitacionais);

é possível definir o problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ + \text{ condições de contorno e inicial} \end{cases} , \text{ em } \Omega \times \Theta$$

onde

- $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \Theta \to \mathbb{R}^d$ campo de velocidade
- $p(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \Theta \to \mathbb{R}$ pressão hidrostática
- $\mu > 0$ viscosidade

Problema de Navier-Stokes (condições de contorno e inicial)

Sobre o contorno de Ω, definido como $\partial\Omega = \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D$ com $\partial\Omega_N \cap \partial\Omega_D = \emptyset$, é possível definir as seguintes condições de contorno e inicial:

- condição de Dirichlet
  dado $\mathbf{g}_D : \partial\Omega_D \times \Theta \to \mathbb{R}^d$,

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}_D \;\text{ sobre } \partial\Omega_D \times \Theta.$$

- condição de Neumann

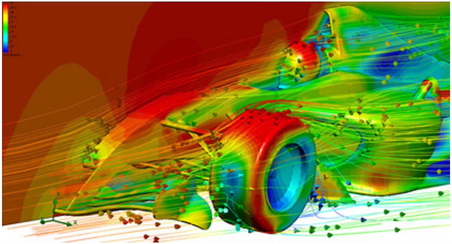
$$(\mu\nabla\mathbf{u} - p\mathbf{I} - \mathbf{u}\otimes\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{g}_N \;\text{ sobre } \partial\Omega_N \times \Theta,$$

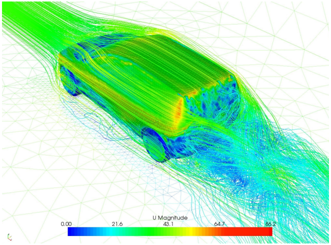
  onde $\mathbf{g}_N : \partial\Omega_N \times \Theta \to \mathbb{R}^d$ é dado, $\mathbf{I}$ denota a matriz identidade, $\otimes$ o produto externo e $\mathbf{n}$ vetor unitário normal externo à $\partial\Omega_N$.
- condição inicial

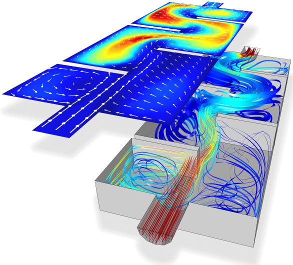
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

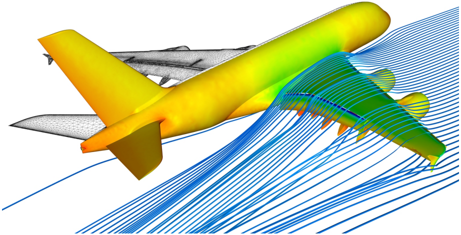
  onde $\varphi(\mathbf{x}) : \Omega \to \mathbb{R}$ é dado.

Aplicações









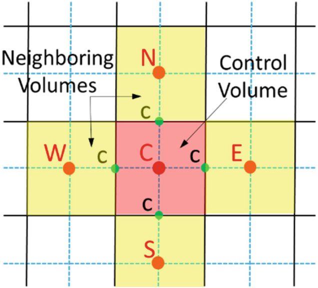
Desafios Numéricos

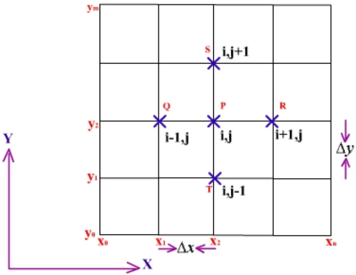
Algumas dificuldades numéricas para aproximação das equações de Navier-Stokes, são:

- Não linearidade;
  Linearizações pelos métodos de Newton, Picard...
- Efeitos convectivos;
  Técnicas de estabilização dos efeitos convectivos tipo upwind.
- Conservação de massa / incompressibilidade;
  Métodos e abordagens específicas que visam a conservação de massa, como as discretizações por volumes finitos.
- Custo computacional;
  Emprego de paralelização computacional e técnicas numéricas menos custosas.
- Entre outros ...

Métodos Numéricos Populares

- Volumes Finitos (FV)
  - conservação de massa
  - adequado para convecção dominate
  - dificuldade de geração de aproximações de alta ordem
  - dificuldade de tratamento de geometrias e malhas não regulares
- Diferenças Finitas (FD)
  - características similares aos métodos FV
  - geralmente não conserva massa

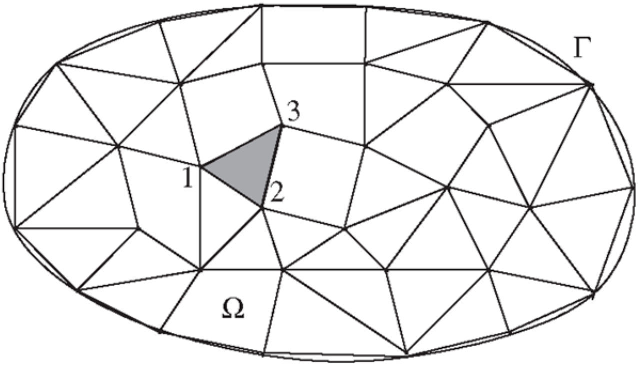




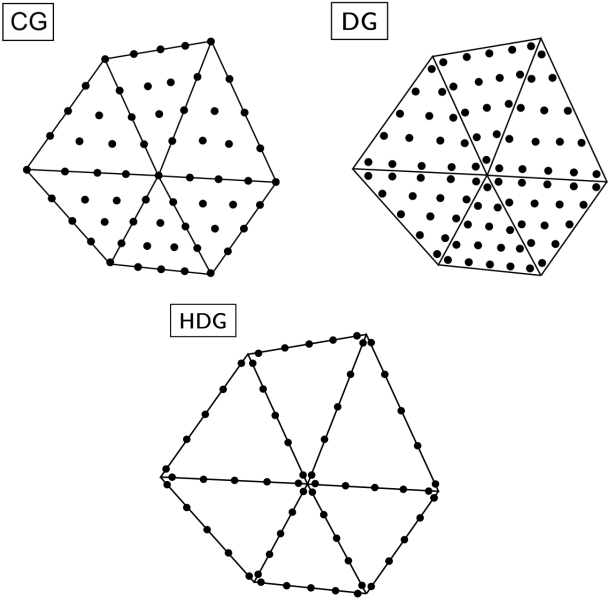
Métodos Numéricos Populares

- Elementos Finitos Clássico (CG)
  - estensão direta para aproximações de alta ordem
  - trata naturalmente geometrias e malhas não regulares
  - geralmente não conserva massa
  - instável para convecção dominante em malhas grosseiras
- Galerkin Descontínuo (DG)
  - combina as vantagens dos métodos FV e CG
  - naturalmente paralelizável
  - apropriado para adaptatividade de malha e ordem polinomial
  - alto número de graus de liberdade (alto custo computacional)
  - maior largura de banda e menor esparsidade da matriz
- Galerkin Descontínuo Hibridizado (HDG)
  - herda as vantagens dos métodos DG
  - menor custo computacional (comparado ao DG)
  - menor complexidade de implementação computacional (comparado ao DG)

Comparação graus de liberdade Elementos Finitos



Comparação graus de liberdade Elementos Finitos



Métodos de Elementos Finitos[2]

Algumas abordagens numéricas bem sucedidas:

- Métodos Estáveis
  - Espaços de Taylor-Hood
  - Espaços Mini
  - Crouzeix–Raviart
- Métodos Estabilizados
  - SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*)
  - PSPG (*Pressure-Stabilizing Petrov-Galerkin*)
  - Outros métodos GLS (*Galerkin Least-Square*)
- Métodos Avançados
  - Métodos de Galerkin descontínuo
  - Métodos de Galerkin descontínuo hibridizados

    Além das estratégias específicas destes métodos, podem ser aplicadas as mesmas técnicas dos métodos estáveis e estabilizados.

---

[2]mais detalhes podem ser encontrados no livro: Volker, John, Finite Element Methods for Incompressible Flow Problems, (2016). https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-45750-5

Modelo: equação da vorticidade

Supondo um caso bidimensional, onde $\mathbf{u} = (u, v)$, tomando o Rotacional do problema de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \nabla \times \left[\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p \right] = \mathbf{0} \\ \nabla \times [\nabla \cdot \mathbf{u}] = 0 \end{cases}$$

e usando a definições de vorticidade (*vorticity*)

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{em 2D},$$

obtemos

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \mu \Delta \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0.$$

Modelo: vorticidade e função corrente

Além disso, utilizando a definição da função corrente (*stream function*)

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

derivamos o seguinte modelo

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \mu \Delta \omega + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0.$$

O problema fica completo com a inclusão da seguinte relação entre ω e ψ

$$\omega = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = -\Delta \psi.$$

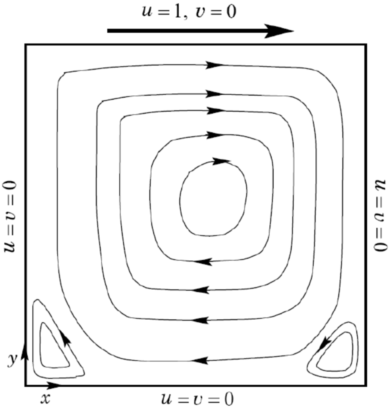
As equações acima formam o sistema de Navier-Stokes escrito nas variáveis vorticidade e função corrente.

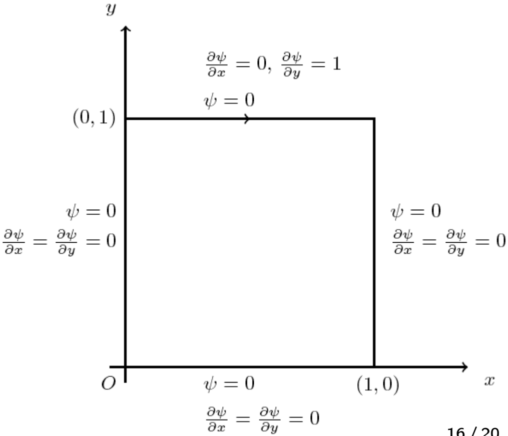
Problema da cavidade (lid-driven cavity flow)

Dado R_e, encontrar $\omega(x,y)$ e $\psi(x,y)$ em $\Omega = [0,L] \times [0,L]$, tal que

$$-\frac{1}{R_e}\Delta\omega + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega$$

$$\omega = -\Delta\psi \quad \text{em} \quad \Omega$$





Problema da cavidade – Aplicação (aneurismas)

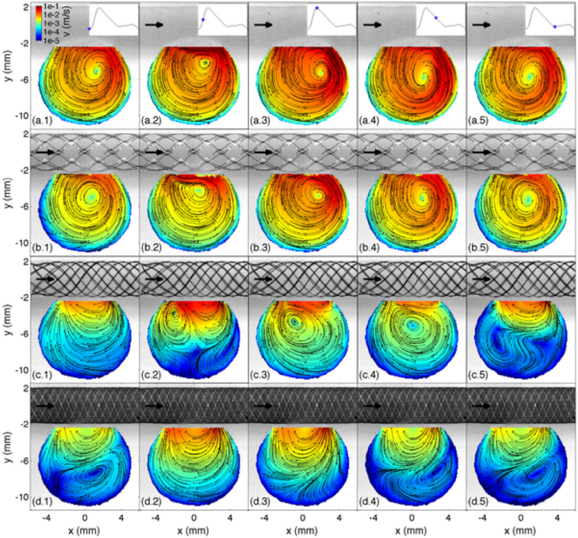
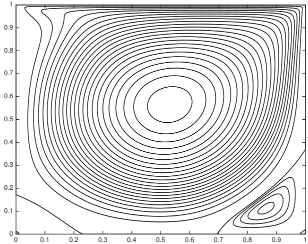
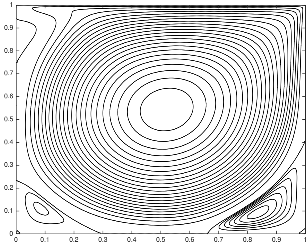


Figura: https://journals.plos.org/plosone/article/figures?id=10.1371/journal.pone.0113762

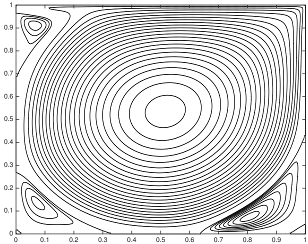
Problema da cavidade – Função corrente ψ



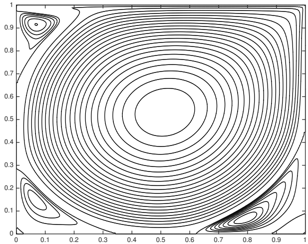
$R_e = 1000$



$R_e = 2500$

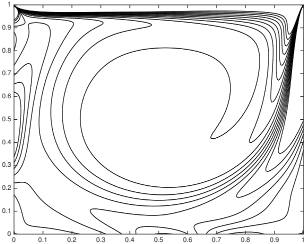


$R_e = 5000$

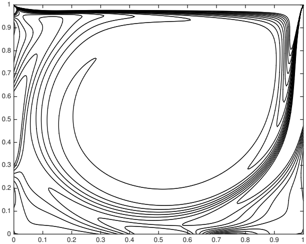


$R_e = 7500$

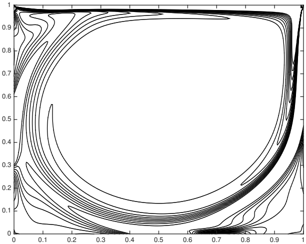
Problema da cavidade – Vorticidade ω



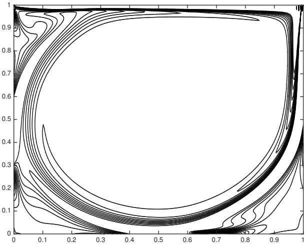
$R_e = 1000$



$R_e = 2500$



$R_e = 5000$



$R_e = 7500$

Informações da Etapa II do Curso

- Dias e horários da aula
  - Seg e Qui de 14 às 16 horas.
- Local
  - aula por videoconferência (link GoogleMeet no Classroom).
- Material
  - slides, bibliografias e trabalho disponíveis no Classroom (https://cutt.ly/rdAs3xB).
- Avaliação
  - Trabalho em 2 partes com datas a serem definidas.