Conservação de Energia

Prof. Rafael Alves Bonfim de Queiroz
bonfimraf@gmail.com

Universidade Federal de Juiz de Fora
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

Conservação de Energia

- Aplicado a um elemento de fluido que se desloca com o escoamento:

$$\boxed{\text{Variação temporal da energia no elemento}} = \boxed{\text{Fluxo resultante de calor para dentro do elemento}} + \boxed{\text{Taxa de trabalho realizado sobre o elemento pelas forças}}$$

- A energia total E no elemento de fluido:

$$E = e + \frac{V^2}{2}$$

  - e: energia interna do fluido
  - $\frac{V^2}{2}$: energia cinética de translação do fluido devido ao seu movimento

- Aplicado a um elemento de fluido que se desloca com o escoamento:

$$\boxed{\text{Variação temporal da energia no elemento}} = \boxed{\text{Fluxo resultante de calor para dentro do elemento}} + \boxed{\text{Taxa de trabalho realizado sobre o elemento pelas forças}}$$

- A energia total E no elemento de fluido:

$$E = e + \frac{V^2}{2}$$

- e: energia interna do fluido
  - provém da vibração natural das moléculas que o compõem (aquecer ou trabalho sobre fluido-compressão)
- $\frac{V^2}{2}$: energia cinética de translação do fluido devido ao seu movimento
  - $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ (velocidade de translação)
  - energia por unidade de massa.

Conservação de Energia

- Aplicado a um elemento de fluido que se desloca com o escoamento:

$$\boxed{\text{Variação temporal da energia no elemento}} = \boxed{\text{Fluxo resultante de calor para dentro do elemento}} + \boxed{\text{Taxa de trabalho realizado sobre o elemento pelas forças}}$$

- A energia total E no elemento de fluido:

$$E = e + \frac{V^2}{2}$$

  - e: energia interna do fluido
    - provém da vibração natural das moléculas que o compõem (aquecer ou trabalho sobre fluido-compressão)
  - $\frac{V^2}{2}$: energia cinética de translação do fluido devido ao seu movimento
    - energia por unidade de massa

Conservação de Energia

- Aplicado a um elemento de fluido que se desloca com o escoamento:

Variação temporal da energia no elemento	=	Fluxo resultante de calor para dentro do elemento	+	Taxa de trabalho realizado sobre o elemento pelas forças

- A energia total E no elemento de fluido:

$$E = e + \frac{V^2}{2}$$

  - e: energia interna do fluido
    - provém da vibração natural das moléculas que o compõem (aquecer ou trabalho sobre fluido-compressão)
  - $\frac{V^2}{2}$: energia cinética de translação do fluido devido ao seu movimento
    - $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ (velocidade de translação)
    - energia por unidade de massa

Conservação de Energia

- Aplicado a um elemento de fluido que se desloca com o escoamento:

$$\boxed{\text{Variação temporal da energia no elemento}} = \boxed{\text{Fluxo resultante de calor para dentro do elemento}} + \boxed{\text{Taxa de trabalho realizado sobre o elemento pelas forças}}$$

- A energia total E no elemento de fluido:

$$E = e + \frac{V^2}{2}$$

  - e: energia interna do fluido
    - provém da vibração natural das moléculas que o compõem (aquecer ou trabalho sobre fluido-compressão)
  - $\frac{V^2}{2}$: energia cinética de translação do fluido devido ao seu movimento
    - $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ (velocidade de trnslação)
    - energia por unidade de massa.

Conservação de Energia

- Aplicado a um elemento de fluido que se desloca com o escoamento:

$$\boxed{\text{Variação temporal da energia no elemento}} = \boxed{\text{Fluxo resultante de calor para dentro do elemento}} + \boxed{\text{Taxa de trabalho realizado sobre o elemento pelas forças}}$$

- A energia total E no elemento de fluido:

$$E = e + \frac{V^2}{2}$$

  - e: energia interna do fluido
    - provém da vibração natural das moléculas que o compõem (aquecer ou trabalho sobre fluido-compressão)
  - $\frac{V^2}{2}$: energia cinética de translação do fluido devido ao seu movimento
    - $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ (velocidade de trnslação)
    - energia por unidade de massa.

Conservação de Energia

- Aplicado a um elemento de fluido que se desloca com o escoamento:

Variação temporal da energia no elemento	=	Fluxo resultante de calor para dentro do elemento	+	Taxa de trabalho realizado sobre o elemento pelas forças

- A energia total E no elemento de fluido:

$$E = e + \frac{V^2}{2}$$

  - e: energia interna do fluido
    - provém da vibração natural das moléculas que o compõem (aquecer ou trabalho sobre fluido-compressão)
  - $\frac{V^2}{2}$: energia cinética de translação do fluido devido ao seu movimento
    - $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ (velocidade de trnslação)
    - energia por unidade de massa.

Conservação de Energia

- Aplicado a um elemento de fluido que se desloca com o escoamento:

Variação temporal da energia no elemento = Fluxo resultante de calor para dentro do elemento + Taxa de trabalho realizado sobre o elemento pelas forças

- A energia total E no elemento de fluido:

$$E = e + \frac{V^2}{2}$$

- A variação temporal da energia total E no elemento de fluido:

$$\frac{DE}{Dt}$$

- A variação total de E no elemento de fluido:

$$\rho \frac{DE}{Dt} dxdy$$

Conservação de Energia

- Aplicado a um elemento de fluido que se desloca com o escoamento:

Variação temporal da energia no elemento	=	Fluxo resultante de calor para dentro do elemento	+	Taxa de trabalho realizado sobre o elemento pelas forças

- A energia total E no elemento de fluido:

$$E = e + \frac{V^2}{2}$$

- A variação temporal da energia total E no elemento de fluido:

$$\frac{DE}{Dt}$$

- A variação total de E no elemento de fluido:

$$\rho \frac{DE}{Dt} dxdy$$

Conservação de Energia

- Aplicado a um elemento de fluido que se desloca com o escoamento:

Variação temporal da energia no elemento = Fluxo resultante de calor para dentro do elemento + Taxa de trabalho realizado sobre o elemento pelas forças

- A energia total E no elemento de fluido:

$$E = e + \frac{V^2}{2}$$

- A variação temporal da energia total E no elemento de fluido:

$$\frac{DE}{Dt}$$

- A variação total de E no elemento de fluido:

$$\rho \frac{DE}{Dt} dxdy$$

Conservação de Energia

- Aplicado a um elemento de fluido que se desloca com o escoamento:

$$\boxed{\text{Variação temporal da energia no elemento}} = \boxed{\text{Fluxo resultante de calor para dentro do elemento}} + \boxed{\text{Taxa de trabalho realizado sobre o elemento pelas forças}}$$

- A energia total E no elemento de fluido:

$$E = e + \frac{V^2}{2}$$

- A variação temporal da energia total E no elemento de fluido:

$$\frac{DE}{Dt}$$

- A variação total de E no elemento de fluido:

$$\rho \frac{DE}{Dt} dxdy$$

Conservação de Energia

- Aplicado a um elemento de fluido que se desloca com o escoamento:

$$\boxed{\text{Variação temporal da energia no elemento}} = \boxed{\text{Fluxo resultante de calor para dentro do elemento}} + \boxed{\text{Taxa de trabalho realizado sobre o elemento pelas forças}}$$

- Equação da energia na forma não conservativa

$$\rho \frac{DE}{Dt} dxdy = S + W, \text{ em que } E = e + \frac{V^2}{2}$$

  - S: fluxo resultante de calor para dentro do elemento de fluido
  - W: taxa de trabalho por unidade de tempo realizado sobre o elemento de fluido pelas forças

Conservação de Energia

- Aplicado a um elemento de fluido que se desloca com o escoamento:

Variação temporal da energia no elemento	=	Fluxo resultante de calor para dentro do elemento	+	Taxa de trabalho realizado sobre o elemento pelas forças

- Equação da energia na forma não conservativa

$$\rho \frac{DE}{Dt} dxdy = S + W, \text{ em que } E = e + \frac{V^2}{2}$$

  - S: fluxo resultante de calor para dentro do elemento de fluido
  - W: taxa de trabalho por unidade de tempo realizado sobre o elemento de fluido pelas forças

Conservação de Energia

- Aplicado a um elemento de fluido que se desloca com o escoamento:

Variação temporal da energia no elemento	=	Fluxo resultante de calor para dentro do elemento	+	Taxa de trabalho realizado sobre o elemento pelas forças

- Equação da energia na forma não conservativa

$$\rho \frac{DE}{Dt} dxdy = S + W, \text{ em que } E = e + \frac{V^2}{2}$$

  - S: fluxo resultante de calor para dentro do elemento de fluido
  - W: taxa de trabalho por unidade de tempo realizado sobre o elemento de fluido pelas forças

Conservação de Energia

- Aplicado a um elemento de fluido que se desloca com o escoamento:

Variação temporal da energia no elemento	=	Fluxo resultante de calor para dentro do elemento	+	Taxa de trabalho realizado sobre o elemento pelas forças

- Equação da energia na forma não conservativa

$$\rho \frac{DE}{Dt} dxdy = S + W, \text{ em que } E = e + \frac{V^2}{2}$$

  - S: fluxo resultante de calor para dentro do elemento de fluido
  - W: taxa de trabalho por unidade de tempo realizado sobre o elemento de fluido pelas forças

Equação da energia na forma não conservativa

$$\rho \frac{DE}{Dt} dxdy = S + W, \text{ em que } E = e + \frac{V^2}{2}$$

O fluxo resultante de calor S para dentro do elemento de fluido provém:

- Aquecimento do fluido causado por agentes externos (absorção de radiação pelo fluido - aquecimento da água em forno microondas), ou internos (reações químicas):

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial t}$$

- Transferência de calor por condução através das paredes do elemento de fluido, devido à presença de gradientes de temperatura no escoamento
  - $\nabla \cdot q$, em que q é um fluxo de calor
  - Exemplo: fluido escoa ao longo de um cano cujas superfícies internas estão a uma temperatura diferente daquela do fluido

Equação da energia na forma não conservativa

$$\rho \frac{DE}{Dt} dxdy = S + W, \text{ em que } E = e + \frac{V^2}{2}$$

O fluxo resultante de calor S para dentro do elemento de fluido provém:

- Aquecimento do fluido causado por agentes externos (absorção de radiação pelo fluido - aquecimento da água em forno microondas), ou internos (reações químicas):

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial t}$$

- Transferência de calor por condução através das paredes do elemento de fluido, devido à presença de gradientes de temperatura no escoamento
  - $\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}$, em que $\dot{\mathbf{q}}$ é um fluxo de calor
  - Exemplo: fluido escoa ao longo de um cano cujas superfícies internas estão a uma temperatura diferente daquela do fluido

Equação da energia na forma não conservativa

$$\rho \frac{DE}{Dt} dxdy = S + W, \text{ em que } E = e + \frac{V^2}{2}$$

O fluxo resultante de calor S para dentro do elemento de fluido provém:

- Aquecimento do fluido causado por agentes externos (absorção de radiação pelo fluido - aquecimento da água em forno microondas), ou internos (reações químicas):
$$\rho \frac{\partial Q}{\partial t}$$
- Transferência de calor por condução através das paredes do elemento de fluido, devido à presença de gradientes de temperatura no escoamento
    - $\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}$, em que $\dot{\mathbf{q}}$ é um fluxo de calor
    - Exemplo: fluido escoa ao longo de um cano cujas superfícies internas estão a uma temperatura diferente daquela do fluido

Equação da energia na forma não conservativa

$$\rho \frac{DE}{Dt} dxdy = S + W, \text{ em que } E = e + \frac{V^2}{2}$$

O fluxo resultante de calor S para dentro do elemento de fluido provém:

- Aquecimento do fluido causado por agentes externos (absorção de radiação pelo fluido - aquecimento da água em forno microondas), ou internos (reações químicas):

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial t}$$

- Transferência de calor por condução através das paredes do elemento de fluido, devido à presença de gradientes de temperatura no escoamento
  - $\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}$, em que $\dot{\mathbf{q}}$ é um fluxo de calor
  - Exemplo: fluido escoa ao longo de um cano cujas superfícies internas estão a uma temperatura diferente daquela do fluido

- Equação da energia na forma não conservativa

$$\rho \frac{DE}{Dt} dxdy = S + W, \text{ em que } E = e + \frac{V^2}{2}$$

  - S: fluxo resultante de calor para dentro do elemento de fluido
  - W: taxa de trabalho por unidade de tempo realizado sobre o elemento de fluido pelas forças

- Iremos caracterizar S e W em um elemento de fluido

- Equação da energia na forma não conservativa

$$\rho \frac{DE}{Dt} dxdy = S + W, \text{ em que } E = e + \frac{V^2}{2}$$

  - S: fluxo resultante de calor para dentro do elemento de fluido
  - W: taxa de trabalho por unidade de tempo realizado sobre o elemento de fluido pelas forças
- Iremos caracterizar S e W em um elemento de fluido
  - Fluxo de calor $\dot{q}$ nas faces do elemento de fluido $+ \rho \frac{\partial Q}{\partial t} \Longrightarrow S$
  - $\dot{q}$ expresso pela lei de Fourier $\Longrightarrow S$
  - Resultante das forças $\Longrightarrow$ trabalho no elemento de fluido $\Longrightarrow W$

- Equação da energia na forma não conservativa

$$\rho \frac{DE}{Dt} dxdy = S + W, \text{ em que } E = e + \frac{V^2}{2}$$

  - S: fluxo resultante de calor para dentro do elemento de fluido
  - W: taxa de trabalho por unidade de tempo realizado sobre o elemento de fluido pelas forças

- Iremos caracterizar S e W em um elemento de fluido
  - Fluxo de calor q nas faces do elemento de fluido + $\rho \frac{\partial Q}{\partial t} \longrightarrow S$
  - q expresso pela lei de Fourier $\longrightarrow S$
  - Resultante das forças $\longrightarrow$ trabalho no elemento de fluido $\longrightarrow W$

- Equação da energia na forma não conservativa

$$\rho \frac{DE}{Dt} dxdy = S + W, \text{ em que } E = e + \frac{V^2}{2}$$

  - S: fluxo resultante de calor para dentro do elemento de fluido
  - W: taxa de trabalho por unidade de tempo realizado sobre o elemento de fluido pelas forças
- Iremos caracterizar S e W em um elemento de fluido
  - Fluxo de calor $\dot{\mathbf{q}}$ nas faces do elemento de fluido + $\rho \frac{\partial Q}{\partial t} \Longrightarrow S$
  - $\dot{\mathbf{q}}$ expresso pela lei de Fourier $\Longrightarrow S$
  - Resultante das forças $\Longrightarrow$ trabalho no elemento de fluido $\Longrightarrow W$

- Equação da energia na forma não conservativa

$$\rho \frac{DE}{Dt} dxdy = S + W, \text{ em que } E = e + \frac{V^2}{2}$$

  - S: fluxo resultante de calor para dentro do elemento de fluido
  - W: taxa de trabalho por unidade de tempo realizado sobre o elemento de fluido pelas forças

- Iremos caracterizar S e W em um elemento de fluido
  - Fluxo de calor $\dot{\mathbf{q}}$ nas faces do elemento de fluido $+ \rho \frac{\partial Q}{\partial t} \Longrightarrow S$
  - $\dot{\mathbf{q}}$ expresso pela lei de Fourier $\Longrightarrow S$
  - Resultante das forças $\Longrightarrow$ trabalho no elemento de fluido $\Longrightarrow W$

- Equação da energia na forma não conservativa

$$\rho \frac{DE}{Dt} dxdy = S + W, \text{ em que } E = e + \frac{V^2}{2}$$

  - S: fluxo resultante de calor para dentro do elemento de fluido
  - W: taxa de trabalho por unidade de tempo realizado sobre o elemento de fluido pelas forças

- Iremos caracterizar S e W em um elemento de fluido
  - Fluxo de calor $\dot{\mathbf{q}}$ nas faces do elemento de fluido $+ \rho \frac{\partial Q}{\partial t} \Longrightarrow S$
  - $\dot{\mathbf{q}}$ expresso pela lei de Fourier $\Longrightarrow S$
  - Resultante das forças $\Longrightarrow$ trabalho no elemento de fluido $\Longrightarrow W$

- Equação da energia na forma não conservativa

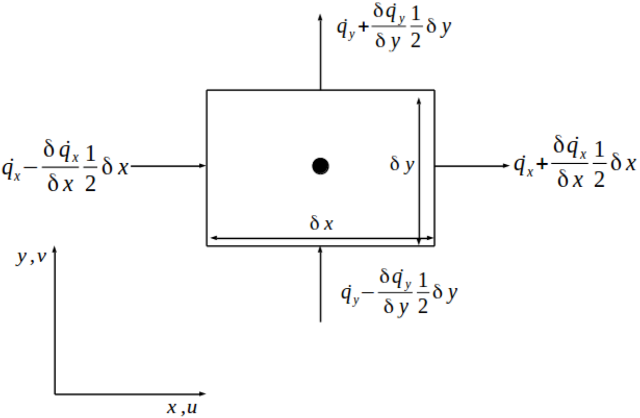
$$\rho \frac{DE}{Dt} dxdy = S + W, \text{ em que } E = e + \frac{V^2}{2}$$

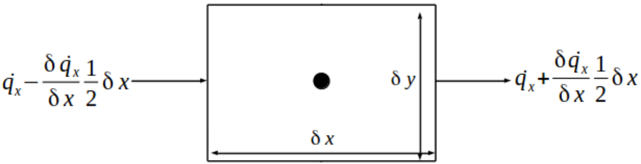
  - S: fluxo resultante de calor para dentro do elemento de fluido
  - W: taxa de trabalho por unidade de tempo realizado sobre o elemento de fluido pelas forças
- Iremos caracterizar S e W em um elemento de fluido
  - Fluxo de calor $\dot{\mathbf{q}}$ nas faces do elemento de fluido $+ \rho \frac{\partial Q}{\partial t} \Longrightarrow S$
  - $\dot{\mathbf{q}}$ expresso pela lei de Fourier $\Longrightarrow S$
  - Resultante das forças $\Longrightarrow$ trabalho no elemento de fluido $\Longrightarrow W$

Caracterização do fluxo resultante de calor (S) para dentro do elemento de fluido

Componentes do fluxo de calor associadas ao elemento de fluido

- $\dot{q}_x$ é a componente do fluxo de calor na direção x
- $\dot{q}_y$ é a componente do fluxo de calor na direção y



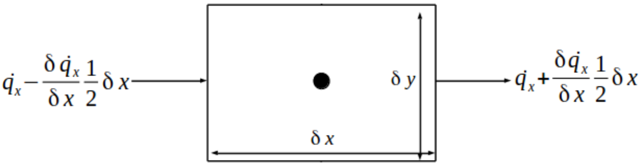


- A entrada líquida de calor na direção x é dada pela diferença entre os fluxos através das faces normais à direção x

$$\left[\left(\dot{q}_x - \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right) - \left(\dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)\right]\delta y = -\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}\delta x \delta y$$

- No limite δx, $\delta y \to 0$, tem-se a entrada líquida de calor na direção x:

$$-\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}\delta x \delta y$$

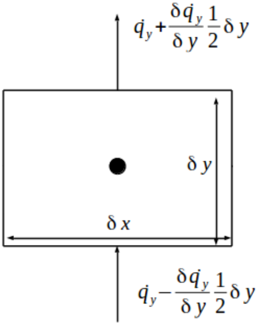


- A entrada líquida de calor na direção x é dada pela diferença entre os fluxos através das faces normais à direção x

$$\left[\left(\dot{q}_x - \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right) - \left(\dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)\right]\delta y = -\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}\delta x \delta y$$

- No limite $\delta x,\ \delta y \to 0$, tem-se a entrada líquida de calor na direção x:

$$-\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}\delta x \delta y$$

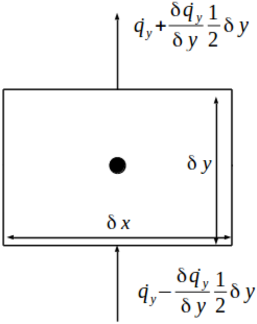


- A entrada líquida de calor na direção y é dada pela diferença entre os fluxos através das faces normais à direção y

$$\left[\left(\dot{q}_y - \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right) - \left(\dot{q}_y + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right)\right]\delta x = -\frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}\delta x \delta y$$

- No limite $\delta x, \delta y \to 0$, tem-se a entrada líquida de calor na direção y:

$$-\frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}\delta x \delta y$$

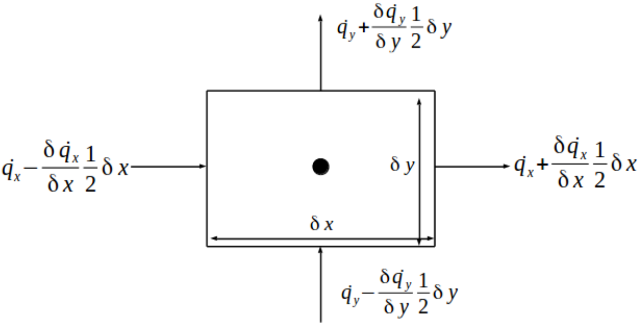


- A entrada líquida de calor na direção y é dada pela diferença entre os fluxos através das faces normais à direção y

$$\left[\left(\dot{q}_y - \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right) - \left(\dot{q}_y + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right)\right]\delta x = -\frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}\delta x \delta y$$

- No limite δx, $\delta y \to 0$, tem-se a entrada líquida de calor na direção y:

$$-\frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}\delta x \delta y$$



- A entrada líquida de calor na direção x:

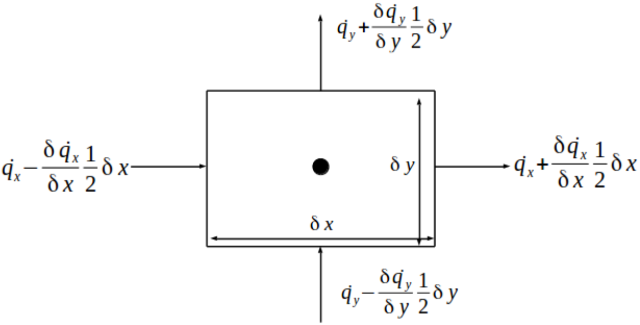
$$-\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}\delta x \delta y$$

- A entrada líquida de calor na direção y:

$$-\frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}\delta x \delta y$$

- A entrada líquida de calor no elemento de fluido:

$$-\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}\delta x \delta y - \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}\delta x \delta y = -\left(\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}\right)\delta x \delta y = -\left(\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}\right)\delta x \delta y$$



- A entrada líquida de calor na direção x:

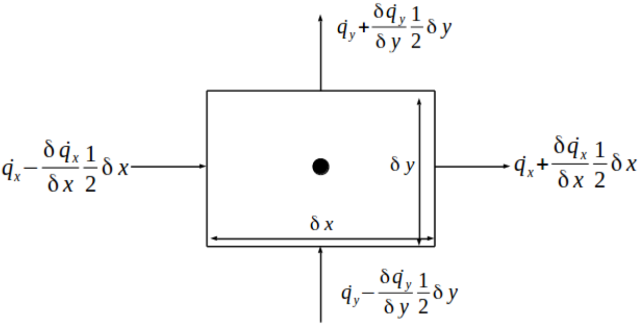
$$-\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}\delta x \delta y$$

- A entrada líquida de calor na direção y:

$$-\frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}\delta x \delta y$$

- A entrada líquida de calor no elemento de fluido:

$$-\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}\delta x \delta y - \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}\delta x \delta y = -\left(\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}\right)\delta x \delta y = -\left(\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}\right)\delta x \delta y$$



- A entrada líquida de calor na direção x:
$$-\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}\delta x \delta y$$
- A entrada líquida de calor na direção y:
$$-\frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}\delta x \delta y$$
- A entrada líquida de calor no elemento de fluido:
$$-\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}\delta x \delta y - \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}\delta x \delta y = -\left(\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}\right)\delta x \delta y = -\left(\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}\right)\delta x \delta y$$

Fluxo resultante de calor S para dentro do elemento de fluido

- No limite δx, $\delta y \to 0$, a entrada líquida de calor através das paredes do elemento de fluido:

$$-\left(\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}\right) dxdy$$

- O aquecimento do fluido causado por agentes externos (absorção de radiação pelo fluido - aquecimento da água em forno microondas), ou internos (reações químicas):

$$\left(\rho \frac{\partial Q}{\partial t}\right) dxdy$$

- O termo S que contém os efeitos das fontes de calor sobre a energia total do fluido:

$$S = \left(\rho \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}\right) dxdy$$

Fluxo resultante de calor S para dentro do elemento de fluido

- No limite δx, $\delta y \to 0$, a entrada líquida de calor através das paredes do elemento de fluido:

$$-\left(\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}\right) dxdy$$

- O aquecimento do fluido causado por agentes externos (absorção de radiação pelo fluido - aquecimento da água em forno microondas), ou internos (reações químicas):

$$\left(\rho \frac{\partial Q}{\partial t}\right) dxdy$$

- O termo S que contém os efeitos das fontes de calor sobre a energia total do fluido:

$$S = \left(\rho \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}\right) dxdy$$

Fluxo resultante de calor S para dentro do elemento de fluido

- No limite δx, $\delta y \rightarrow 0$, a entrada líquida de calor através das paredes do elemento de fluido:

$$-\left(\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}\right) dxdy$$

- O aquecimento do fluido causado por agentes externos (absorção de radiação pelo fluido - aquecimento da água em forno microondas), ou internos (reações químicas):

$$\left(\rho \frac{\partial Q}{\partial t}\right) dxdy$$

- O termo S que contém os efeitos das fontes de calor sobre a energia total do fluido:

$$S = \left(\rho \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}\right) dxdy$$

- Lei de condução de calor (lei de Fourier):

$$\dot{\mathbf{q}} = -k\nabla T = -\left(k\frac{\partial T}{\partial x}, k\frac{\partial T}{\partial y}\right),$$

em que T é a temperatura, k é o coeficiente de condutividade térmica do fluido

- O termo S também pode ser escrito por:

$$S = \left(\rho\frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla\cdot\dot{\mathbf{q}}\right) dxdy$$

$$\Longrightarrow S = \left[\rho\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right] dxdy$$

- Lei de condução de calor (lei de Fourier):

$$\dot{\mathbf{q}} = -k\nabla T = -\left(k\frac{\partial T}{\partial x}, k\frac{\partial T}{\partial y}\right),$$

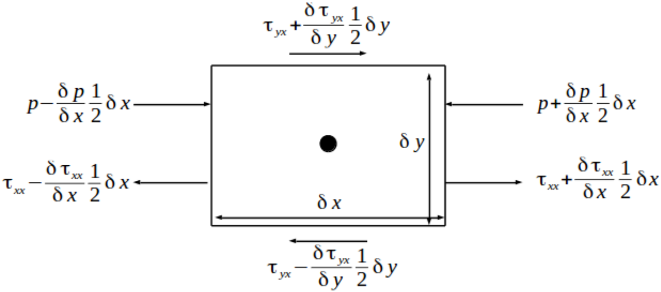
  em que T é a temperatura, k é o coeficiente de condutividade térmica do fluido
- O termo S também pode ser escrito por:

$$S = \left(\rho\frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}\right) dxdy$$

$$\Longrightarrow S = \left[\rho\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right] dxdy$$

Caracterização da taxa de trabalho W por unidade de tempo realizado sobre o elemento de fluido pelas forças de superfície e campo

Força de superfície na direção x



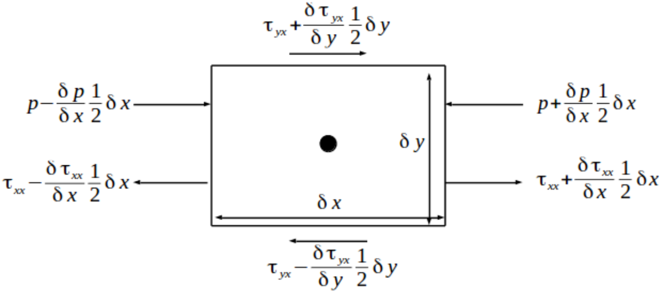
- A força de superfície resultante na direção x é:

$$\left(-\frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xx}}{\delta x}\right)\delta x \delta y + \frac{\delta \tau_{yx}}{\delta y}\delta x \delta y$$

- No limite $\delta x, \delta y \to 0$, essa força na direção x vale

$$F_x^s = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right)dxdy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dxdy$$

Força de superfície na direção x

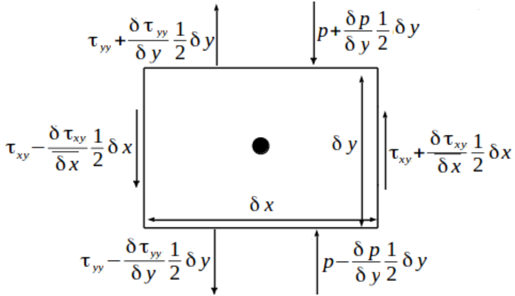


- A força de superfície resultante na direção x é:

$$\left(-\frac{\delta p}{\delta x}+\frac{\delta\tau_{xx}}{\delta x}\right)\delta x\delta y+\frac{\delta\tau_{yx}}{\delta y}\delta x\delta y$$

- No limite $\delta x,\delta y\to 0$, essa força na direção x vale

$$F_x^s=\left(-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}\right)dxdy+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dxdy$$



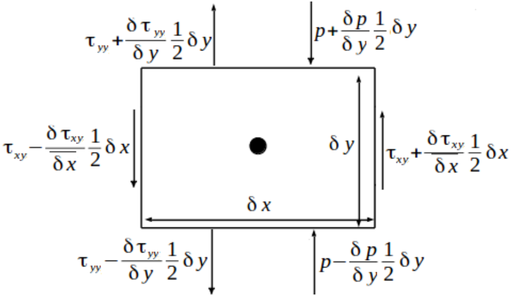
- A força de superfície resultante na direção y é:

$$\left(-\frac{\delta p}{\delta y}+\frac{\delta\tau_{yy}}{\delta y}\right)\delta x\delta y+\frac{\delta\tau_{xy}}{\delta x}\delta x\delta y$$

- No limite $\delta x, \delta y \to 0$, essa força na direção x vale

$$F_y^s=\left(-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}\right)dxdy+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dxdy$$

Força de superfície na direção y



- A força de superfície resultante na direção y é:

$$\left(-\frac{\delta p}{\delta y}+\frac{\delta \tau_{yy}}{\delta y}\right)\delta x\delta y+\frac{\delta \tau_{xy}}{\delta x}\delta x\delta y$$

- No limite $\delta x, \delta y \to 0$, essa força na direção x vale

$$F_y^s=\left(-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}\right)dxdy+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}dxdy$$

Força de campo

- Força de campo na direção x:

$$F_x^c = \rho f_x dxdy$$

- Força de campo na direção y:

$$F_y^c = \rho f_y dxdy$$

Força de campo

- Força de campo na direção x:

$$F_x^c = \rho f_x dxdy$$

- Força de campo na direção y:

$$F_y^c = \rho f_y dxdy$$

Força que atua no elemento de fluido

- F_x: Força resultante na direção x

$$F_x^s = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right) dxdy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dxdy$$

$$F_x^c = \rho f_x dxdy$$

$$F_x = F_x^s + F_x^c$$

$$\boxed{F_x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x\right] dxdy}$$

- F_y: Força resultante na direção y

$$F_y^s = \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}\right) dxdy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dxdy$$

$$F_y^c = \rho f_y dxdy$$

$$F_y = F_y^s + F_y^c$$

$$\boxed{F_y = \left[-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y\right] dxdy}$$

Força que atua no elemento de fluido

- F_x: Força resultante na direção x

$$F_x^s = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right) dxdy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dxdy$$

$$F_x^c = \rho f_x dxdy$$

$$F_x = F_x^s + F_x^c$$

$$\boxed{F_x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x\right] dxdy}$$

- F_y: Força resultante na direção y

$$F_y^s = \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}\right) dxdy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dxdy$$

$$F_y^c = \rho f_y dxdy$$

$$F_y = F_y^s + F_y^c$$

$$\boxed{F_y = \left[-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y\right] dxdy}$$

Taxa de trabalho por unidade de tempo W

- Trabalho da força resultante sobre o elemento de fluido
  Trabalho (τ) = valor da força resultante total $(F_x, F_y) \cdot$ deslocamento (r_x, r_y)

$$\boxed{\tau = F_x r_x + F_y r_y}$$

- Taxa de trabalho por unidade de tempo (W) realizado sobre o elemento de fluido pelas forças

$$W = \frac{\tau}{\Delta t} = \frac{F_x r_x + F_y r_y}{\Delta t} = \frac{r_x}{\Delta t} F_x + \frac{r_y}{\Delta t} F_y$$

$$\boxed{W = uF_x + vF_y}$$

Taxa de trabalho por unidade de tempo W

- Trabalho da força resultante sobre o elemento de fluido
  Trabalho (τ) = valor da força resultante total (F_x, F_y) $\cdot$ deslocamento (r_x, r_y)

$$\boxed{\tau = F_x r_x + F_y r_y}$$

- Taxa de trabalho por unidade de tempo (W) realizado sobre o elemento de fluido pelas forças

$$W = \frac{\tau}{\Delta t} = \frac{F_x r_x + F_y r_y}{\Delta t} = \frac{r_x}{\Delta t} F_x + \frac{r_y}{\Delta t} F_y$$

$$\boxed{W = uF_x + vF_y}$$

- F_x: Força resultante na direção x

$$\boxed{F_x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x\right] dxdy}$$

- F_y: Força resultante na direção y

$$\boxed{F_y = \left[-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y\right] dxdy}$$

- Taxa de trabalho por unidade de tempo (W) realizado sobre o elemento de fluido pelas forças externas

$$\boxed{W = uF_x + vF_y}$$

- F_x: Força resultante na direção x

$$\boxed{F_x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x\right] dxdy}$$

- F_y: Força resultante na direção y

$$\boxed{F_y = \left[-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y\right] dxdy}$$

- Taxa de trabalho por unidade de tempo (W) realizado sobre o elemento de fluido pelas forças externas

$$\boxed{W = uF_x + vF_y}$$

- F_x: Força resultante na direção x

$$\boxed{F_x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x\right] dxdy}$$

- F_y: Força resultante na direção y

$$\boxed{F_y = \left[-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y\right] dxdy}$$

- Taxa de trabalho por unidade de tempo (W) realizado sobre o elemento de fluido pelas forças externas

$$\boxed{W = uF_x + vF_y}$$

Taxa de trabalho por unidade de tempo (W) realizado sobre o elemento de fluido pelas forças externas

$$\boxed{W = uF_x + vF_y}$$

$$uF_x = \left[-\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \rho u f_x\right] dxdy$$
$$vF_y = \left[-\frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \rho v f_y\right] dxdy$$
$$W = \left[-\frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y}\right] dxdy + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} dxdy,$$

nos quais $\mathbf{f} = (f_x, f_y)$ e $\mathbf{V} = (u, v)$.

- Fluxo resultante de calor (S) para dentro do elemento de fluido

$$S = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

- Taxa de trabalho por unidade de tempo (W) realizado sobre o elemento de fluido pelas forças externas

$$W = \left[-\frac{\partial (up)}{\partial x} - \frac{\partial (vp)}{\partial y} + \frac{\partial (u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v\tau_{yy})}{\partial y} \right] dxdy + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} dxdy$$

- Equação da energia na forma não conservativa

$$\rho \frac{DE}{Dt} = S + W$$

- Fluxo resultante de calor (S) para dentro do elemento de fluido

$$S = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

- Taxa de trabalho por unidade de tempo (W) realizado sobre o elemento de fluido pelas forças externas

$$W = \left[-\frac{\partial (up)}{\partial x} - \frac{\partial (vp)}{\partial y} + \frac{\partial (u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v\tau_{yy})}{\partial y} \right] dxdy + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} dxdy$$

- Equação da energia na forma não conservativa

$$\rho \frac{DE}{Dt} = S + W$$

- Fluxo resultante de calor (S) para dentro do elemento de fluido

$$S = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

- Taxa de trabalho por unidade de tempo (W) realizado sobre o elemento de fluido pelas forças externas

$$W = \left[-\frac{\partial (up)}{\partial x} - \frac{\partial (vp)}{\partial y} + \frac{\partial (u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v\tau_{yy})}{\partial y} \right] dxdy + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} dxdy$$

- Equação da energia na forma não conservativa

$$\rho \frac{DE}{Dt} = S + W$$

Equação de conservação para a energia cinética

- Equações de momento linear nas direções x e y:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x$$
$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y$$

- Multiplicando as equações de momento nas direções x e y pelas velocidades u e v, respectivamente:

$$\rho \frac{D(u^2/2)}{Dt} = -u\frac{\partial p}{\partial x} + u\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + u\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho u f_x$$
$$\rho \frac{D(v^2/2)}{Dt} = -v\frac{\partial p}{\partial y} + v\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + v\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho v f_y$$

- Equação de conservação para a energia cinética do elemento de fluido:

$$\rho \frac{D[(u^2+v^2)/2]}{Dt} =$$
$$-\left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) + v\left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right) + \rho\left(u f_x + v f_y\right)$$

Equação de conservação para a energia cinética

- Equações de momento linear nas direções x e y:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x$$
$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y$$

- Multiplicando as equações de momento nas direções x e y pelas velocidades u e v, respectivamente:

$$\rho\frac{D(u^2/2)}{Dt} = -u\frac{\partial p}{\partial x} + u\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + u\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho u f_x$$
$$\rho\frac{D(v^2/2)}{Dt} = -v\frac{\partial p}{\partial y} + v\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + v\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho v f_y$$

- Equação de conservação para a energia cinética do elemento de fluido:

$$\rho\frac{D[(u^2+v^2)/2]}{Dt} =$$
$$-\left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) + v\left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right) + \rho\left(uf_x + vf_y\right)$$

Equação de conservação para a energia cinética

- Equações de momento linear nas direções x e y:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x$$
$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y$$

- Multiplicando as equações de momento nas direções x e y pelas velocidades u e v, respectivamente:

$$\rho\frac{D(u^2/2)}{Dt} = -u\frac{\partial p}{\partial x} + u\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + u\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho u f_x$$
$$\rho\frac{D(v^2/2)}{Dt} = -v\frac{\partial p}{\partial y} + v\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + v\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho v f_y$$

- Equação de conservação para a energia cinética do elemento de fluido:

$$\rho\frac{D[(u^2+v^2)/2]}{Dt} =$$
$$-\left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) + v\left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right) + \rho\left(uf_x + vf_y\right)$$

- Equação de conservação para a energia cinética do elemento de fluido

$$\rho \frac{D[(u^2+v^2)/2]}{Dt} = -\left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) + v\left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right) + \rho \mathbf{f}\cdot\mathbf{V}$$

$$\rho \frac{D[V^2]}{Dt} = -\left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) + v\left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right) + \rho \mathbf{f}\cdot\mathbf{V}$$

- Equação da energia na forma não conservativa

$$\rho\frac{DE}{Dt} = S + W$$

$$S = \rho\frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla\cdot\dot{\mathbf{q}}$$

$$W = \left[-\frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y}\right]dxdy + \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{V}dxdy$$

$$\boxed{E = e + \frac{V^2}{2} \Longrightarrow e = E - \frac{V^2}{2}}$$

- Equação de conservação para a energia cinética do elemento de fluido

$$\rho\frac{D[(u^2+v^2)/2]}{Dt} = -\left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) + v\left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right) + \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{V}$$

$$\rho\frac{D[V^2]}{Dt} = -\left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) + v\left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right) + \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{V}$$

- Equação da energia na forma não conservativa

$$\rho\frac{DE}{Dt} = S + W$$

$$S = \rho\frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla\cdot\dot{\mathbf{q}}$$

$$W = \left[-\frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y}\right] dxdy + \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{V}dxdy$$

$$\boxed{E = e + \frac{V^2}{2} \Longrightarrow e = E - \frac{V^2}{2}}$$

Equação da energia escrita para a energia interna e

Exercício: determinar a equação da energia para a energia interna e.

$$\boxed{\rho\frac{De}{Dt} = \rho\frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla\cdot\dot{\mathbf{q}} - p(\nabla\cdot\mathbf{V}) + \tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}}$$

- Equação da energia escrita para a energia interna e:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}} - p(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}$$

- Equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

- Equação da energia escrita para a energia interna e na forma conservativa:

$$\rho \frac{De}{Dt} + e\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right] = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho e v)}{\partial y} =$$
$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{V})$$

Portanto, tem-se a equação na forma conservativa:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{V}) = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}} - p(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}$$

- Equação da energia escrita para a energia interna e:

$$\rho\frac{De}{Dt} = \rho\frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla\cdot\dot{\mathbf{q}} - p(\nabla\cdot\mathbf{V}) + \tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}$$

- Equação da continuidade:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

- Equação da energia escrita para a energia interna e na forma conservativa:

$$\rho\frac{De}{Dt} + e\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right] = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho e v)}{\partial y} = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho e\mathbf{V})$$

Portanto, tem-se a equação na forma conservativa:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho e\mathbf{V}) = \rho\frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla\cdot\dot{\mathbf{q}} - p(\nabla\cdot\mathbf{V}) + \tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}$$

- Equação da energia escrita para a energia interna e:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}} - p(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y}$$

- Equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

- Equação da energia escrita para a energia interna e na forma conservativa:

$$\rho \frac{De}{Dt} + e \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right] = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho e v)}{\partial y} = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{V})$$

Portanto, tem-se a equação na forma conservativa:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{V}) = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}} - p(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y}$$