Fluxo, divergência e derivada material

Prof. Rafael Alves Bonfim de Queiroz
bonfimraf@gmail.com

Universidade Federal de Juiz de Fora
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

Conteúdo

Introdução

1. Hipótese sobre o fluido
2. Hipótese sobre o escoamento

Hipóteses sobre o fluido

- Considerado um contínuo de massas, no qual não há buracos
- Na escala macroscópica, a estrutura discreta da matéria e os movimentos das moléculas podem ser desprezados
- As propriedades podem então ser descritas em termos de grandezas macroscópicas: velocidade, pressão, densidade e temperatura
- Elemento de fluido: contém um número suficientemente grande de moléculas para que as propriedades macroscópicas não sejam influenciadas pelas propriedades de moléculas individuais
- A grandezas macroscópicas referem-se a um elemento de fluido como um todo e representam médias sobre todas as moléculas que o compõem

Hipóteses sobre o fluido

- Considerado um contínuo de massas, no qual não há buracos
- Na escala macroscópica, a estrutura discreta da matéria e os movimentos das moléculas podem ser desprezados
- As propriedades podem então ser descritas em termos de grandezas macroscópicas: velocidade, pressão, densidade e temperatura
- Elemento de fluido: contém um número suficientemente grande de moléculas para que as propriedades macroscópicas não sejam influenciadas pelas propriedades de moléculas individuais
- A grandezas macroscópicas referem-se a um elemento de fluido como um todo e representam médias sobre todas as moléculas que o compõem

Hipóteses sobre o fluido

- Considerado um contínuo de massas, no qual não há buracos
- Na escala macroscópica, a estrutura discreta da matéria e os movimentos das moléculas podem ser desprezados
- As propriedades podem então ser descritas em termos de grandezas macroscópicas: velocidade, pressão, densidade e temperatura
- Elemento de fluido: contém um número suficientemente grande de moléculas para que as propriedades macroscópicas não sejam influenciadas pelas propriedades de moléculas individuais
- A grandezas macroscópicas referem-se a um elemento de fluido como um todo e representam médias sobre todas as moléculas que o compõem

Hipóteses sobre o fluido

- Considerado um contínuo de massas, no qual não há buracos
- Na escala macroscópica, a estrutura discreta da matéria e os movimentos das moléculas podem ser desprezados
- As propriedades podem então ser descritas em termos de grandezas macroscópicas: velocidade, pressão, densidade e temperatura
- Elemento de fluido: contém um número suficientemente grande de moléculas para que as propriedades macroscópicas não sejam influenciadas pelas propriedades de moléculas individuais
- A grandezas macroscópicas referem-se a um elemento de fluido como um todo e representam médias sobre todas as moléculas que o compõem

Hipóteses sobre o fluido

- Considerado um contínuo de massas, no qual não há buracos
- Na escala macroscópica, a estrutura discreta da matéria e os movimentos das moléculas podem ser desprezados
- As propriedades podem então ser descritas em termos de grandezas macroscópicas: velocidade, pressão, densidade e temperatura
- Elemento de fluido: contém um número suficientemente grande de moléculas para que as propriedades macroscópicas não sejam influenciadas pelas propriedades de moléculas individuais
- A grandezas macroscópicas referem-se a um elemento de fluido como um todo e representam médias sobre todas as moléculas que o compõem

Hipóteses sobre o escoamento de fluidos

- São tridimensionais (3D), especialmente os turbulentos
- Considera-se aqui um escoamento bidimensional (2D)
- Hipótese normalmente utilizada quando o domínio apresenta alguma simetria em relação a um plano
- No caso geral, as propriedades macroscópicas do fluido e do escoamento, como a densidade ρ, a pressão p, a temperatura T e a velocidade $\mathbf{V}$, são consideradas funções da coordenada temporal t e das coordenadas espaciais x e y
- As componentes da velocidade $\mathbf{V}$ nas direções x e y serão denominadas u e v, respectivamente
- Para simplificar a notação, escreve-se a densidade ρ ao invés de $\rho(x, y, t)$

Hipóteses sobre o escoamento de fluidos

- São tridimensionais (3D), especialmente os turbulentos
- Considera-se aqui um escoamento bidimensional (2D)
- Hipótese normalmente utilizada quando o domínio apresenta alguma simetria em relação a um plano
- No caso geral, as propriedades macroscópicas do fluido e do escoamento, como a densidade ρ, a pressão p, a temperatura T e a velocidade $\mathbf{V}$, são consideradas funções da coordenada temporal t e das coordenadas espaciais x e y
- As componentes da velocidade $\mathbf{V}$ nas direções x e y serão denominadas u e v, respectivamente
- Para simplificar a notação, escreve-se a densidade ρ ao invés de $\rho(x, y, t)$

Hipóteses sobre o escoamento de fluidos

- São tridimensionais (3D), especialmente os turbulentos
- Considera-se aqui um escoamento bidimensional (2D)
- Hipótese normalmente utilizada quando o domínio apresenta alguma simetria em relação a um plano
- No caso geral, as propriedades macroscópicas do fluido e do escoamento, como a densidade ρ, a pressão p, a temperatura T e a velocidade $\mathbf{V}$, são consideradas funções da coordenada temporal t e das coordenadas espaciais x e y
- As componentes da velocidade $\mathbf{V}$ nas direções x e y serão denominadas u e v, respectivamente
- Para simplificar a notação, escreve-se a densidade ρ ao invés de $\rho(x, y, t)$

Hipóteses sobre o escoamento de fluidos

- São tridimensionais (3D), especialmente os turbulentos
- Considera-se aqui um escoamento bidimensional (2D)
- Hipótese normalmente utilizada quando o domínio apresenta alguma simetria em relação a um plano
- No caso geral, as propriedades macroscópicas do fluido e do escoamento, como a densidade ρ, a pressão p, a temperatura T e a velocidade $\mathbf{V}$, são consideradas funções da coordenada temporal t e das coordenadas espaciais x e y
- As componentes da velocidade $\mathbf{V}$ nas direções x e y serão denominadas u e v, respectivamente
- Para simplificar a notação, escreve-se a densidade ρ ao invés de $\rho(x, y, t)$

Hipóteses sobre o escoamento de fluidos

- São tridimensionais (3D), especialmente os turbulentos
- Considera-se aqui um escoamento bidimensional (2D)
- Hipótese normalmente utilizada quando o domínio apresenta alguma simetria em relação a um plano
- No caso geral, as propriedades macroscópicas do fluido e do escoamento, como a densidade ρ, a pressão p, a temperatura T e a velocidade $\mathbf{V}$, são consideradas funções da coordenada temporal t e das coordenadas espaciais x e y
- As componentes da velocidade $\mathbf{V}$ nas direções x e y serão denominadas u e v, respectivamente
- Para simplificar a notação, escreve-se a densidade ρ ao invés de $\rho(x, y, t)$

Hipóteses sobre o escoamento de fluidos

- São tridimensionais (3D), especialmente os turbulentos
- Considera-se aqui um escoamento bidimensional (2D)
- Hipótese normalmente utilizada quando o domínio apresenta alguma simetria em relação a um plano
- No caso geral, as propriedades macroscópicas do fluido e do escoamento, como a densidade ρ, a pressão p, a temperatura T e a velocidade $\mathbf{V}$, são consideradas funções da coordenada temporal t e das coordenadas espaciais x e y
- As componentes da velocidade $\mathbf{V}$ nas direções x e y serão denominadas u e v, respectivamente
- Para simplificar a notação, escreve-se a densidade ρ ao invés de $\rho(x, y, t)$

Fluxo de massa

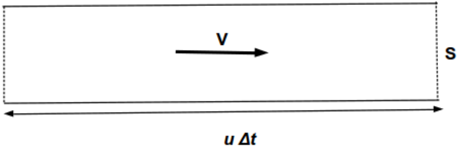
1. Descarga de massa

$$\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

2. Fluxo de massa

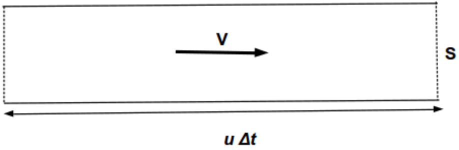
$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$$

- Considera-se um fluido de densidade ρ se movendo com velocidade $\mathbf{V} = (u\mathbf{x}, 0\mathbf{y})$ entre duas placas com área da seção reta igual a S



- Em um pequeno intervalo de tempo Δt, o fluido percorre uma distância dentro da região:
$$d = u\Delta t$$
- O volume de fluido, por unidade de profundidade, na região:
$$V = S \times d$$
- A massa total do fluido, por unidade de profundidade, entre as placas:
$$m = \rho V = \rho(S \times d) = \rho S \times u\Delta t$$
- A descarga de massa $\dot{m}$, isto é, a quantidade de massa que cruza a área S por unidade de tempo:
$$\dot{m} = \rho u S$$
- As unidades físicas de m e $\dot{m}$ são kg e kg/s, respectivamente

- Considera-se um fluido de densidade ρ se movendo com velocidade $\mathbf{V} = (u\mathbf{x}, 0\mathbf{y})$ entre duas placas com área da seção reta igual a S



- Em um pequeno intervalo de tempo Δt, o fluido percorre uma distância dentro da região:

$$d = u\Delta t$$

- O volume de fluido, por unidade de profundidade, na região:

$$V = S \times d$$

- A massa total do fluido, por unidade de profundidade, entre as placas:

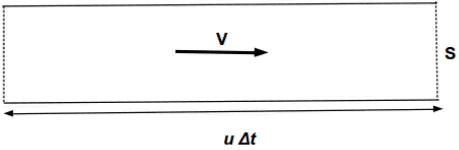
$$m = \rho V = \rho(S \times d) = \rho S \times u\Delta t$$

- A descarga de massa $\dot{m}$, isto é, a quantidade de massa que cruza a área S por unidade de tempo:

$$\dot{m} = \rho u S$$

- As unidades físicas de m e $\dot{m}$ são kg e kg/s, respectivamente

- Considera-se um fluido de densidade ρ se movendo com velocidade $\mathbf{V} = (u\mathbf{x}, 0\mathbf{y})$ entre duas placas com área da seção reta igual a S



- Em um pequeno intervalo de tempo Δt, o fluido percorre uma distância dentro da região:

$$d = u\Delta t$$

- O volume de fluido, por unidade de profundidade, na região:

$$V = S \times d$$

- A massa total do fluido, por unidade de profundidade, entre as placas:

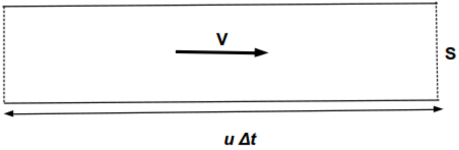
$$m = \rho V = \rho(S \times d) = \rho S \times u\Delta t$$

- A descarga de massa $\dot{m}$, isto é, a quantidade de massa que cruza a área S por unidade de tempo:

$$\dot{m} = \rho u S$$

- As unidades físicas de m e $\dot{m}$ são kg e kg/s, respectivamente

- Considera-se um fluido de densidade ρ se movendo com velocidade $\mathbf{V} = (u\mathbf{x}, 0\mathbf{y})$ entre duas placas com área da seção reta igual a S



- Em um pequeno intervalo de tempo Δt, o fluido percorre uma distância dentro da região:

$$d = u\Delta t$$

- O volume de fluido, por unidade de profundidade, na região:

$$V = S \times d$$

- A massa total do fluido, por unidade de profundidade, entre as placas:

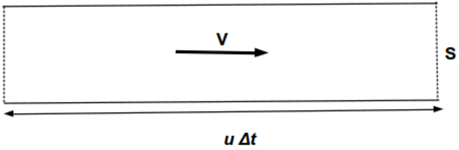
$$m = \rho V = \rho(S \times d) = \rho S \times u\Delta t$$

- A descarga de massa $\dot{m}$, isto é, a quantidade de massa que cruza a área S por unidade de tempo:

$$\dot{m} = \rho u S$$

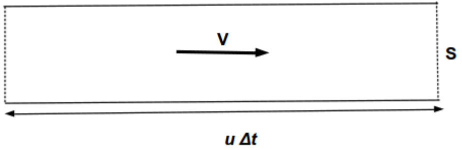
- As unidades físicas de m e $\dot{m}$ são kg e kg/s, respectivamente

- Considera-se um fluido de densidade ρ se movendo com velocidade $\mathbf{V} = (u\mathbf{x}, 0\mathbf{y})$ entre duas placas com área da seção reta igual a S



- Em um pequeno intervalo de tempo Δt, o fluido percorre uma distância dentro da região:
$$d = u\Delta t$$
- O volume de fluido, por unidade de profundidade, na região:
$$V = S \times d$$
- A massa total do fluido, por unidade de profundidade, entre as placas:
$$m = \rho V = \rho(S \times d) = \rho S \times u\Delta t$$
- A descarga de massa $\dot{m}$, isto é, a quantidade de massa que cruza a área S por unidade de tempo:
$$\dot{m} = \rho u S$$
- As unidades físicas de m e $\dot{m}$ são kg e kg/s, respectivamente

- Considera-se um fluido de densidade ρ se movendo com velocidade $\mathbf{V} = (u\mathbf{x}, 0\mathbf{y})$ entre duas placas com área da seção reta igual a S



- Em um pequeno intervalo de tempo Δt, o fluido percorre uma distância dentro da região:

$$d = u\Delta t$$

- O volume de fluido, por unidade de profundidade, na região:

$$V = S \times d$$

- A massa total do fluido, por unidade de profundidade, entre as placas:

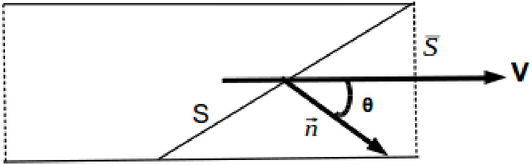
$$m = \rho V = \rho(S \times d) = \rho S \times u\Delta t$$

- A descarga de massa $\dot{m}$, isto é, a quantidade de massa que cruza a área S por unidade de tempo:

$$\dot{m} = \rho u S$$

- As unidades físicas de m e $\dot{m}$ são kg e kg/s, respectivamente

- Quando a área S não é perpendicular ao escoamento, a descarga de massa é calculada estimando-se a área efetiva $\bar{S}$ que o fluido atravessa



- Se θ for o ângulo entre a direção do escoamento e a normal $\mathbf{n}$ à área S, a área efetiva $\bar{S}$ é dada por:

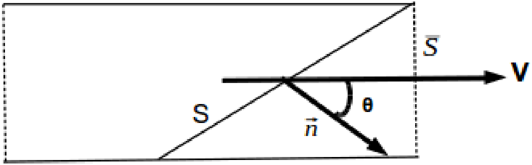
$$\bar{S} = S\cos(\theta)$$

- A descarga de massa através de S torna-se:

$$\dot{m} = \rho u \bar{S} = \rho u S\cos(\theta) = \rho S[u\cos(\theta)] = \rho S\mathbf{V}\cdot\mathbf{n},$$

em que $\bar{u} = u\cos(\theta)$ representa a componente da velocidade normal a S.

- Quando a área S não é perpendicular ao escoamento, a descarga de massa é calculada estimando-se a área efetiva $\bar{S}$ que o fluido atravessa



- Se θ for o ângulo entre a direção do escoamento e a normal **n** à área S, a área efetiva $\bar{S}$ é dada por:

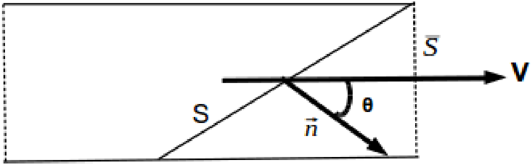
$$\bar{S} = S\cos(\theta)$$

- A descarga de massa através de S torna-se:

$$\dot{m} = \rho u \bar{S} = \rho u S\cos(\theta) = \rho S[u\cos(\theta)] = \rho S\mathbf{V}\cdot\mathbf{n},$$

em que $\bar{u} = u\cos(\theta)$ representa a componente da velocidade normal a S.

- Quando a área S não é perpendicular ao escoamento, a descarga de massa é calculada estimando-se a área efetiva $\bar{S}$ que o fluido atravessa



- Se θ for o ângulo entre a direção do escoamento e a normal $\mathbf{n}$ à área S, a área efetiva $\bar{S}$ é dada por:

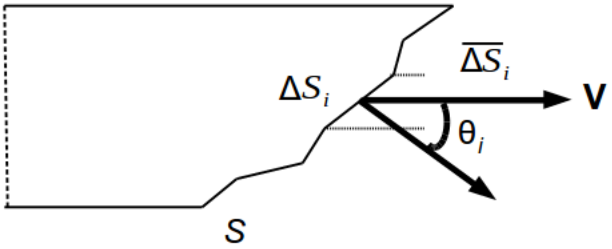
$$\bar{S} = S\cos(\theta)$$

- A descarga de massa através de S torna-se:

$$\dot{m} = \rho u \bar{S} = \rho u S\cos(\theta) = \rho S[u\cos(\theta)] = \rho S\mathbf{V}\cdot\mathbf{n},$$

em que $\bar{u} = u\cos(\theta)$ representa a componente da velocidade normal a S.

- No caso mais geral, quando o contorno S não tiver uma forma geométrica simples, $\bar{S}$ pode ser aproximado por retas (2D) ou poliedros (3D) com áreas ΔS_i



- No caso 2D, pode-se escrever a área efetiva $\overline{\Delta S_i}$:

$$\overline{\Delta S_i} = (\Delta S)_i \cos(\theta_i)$$

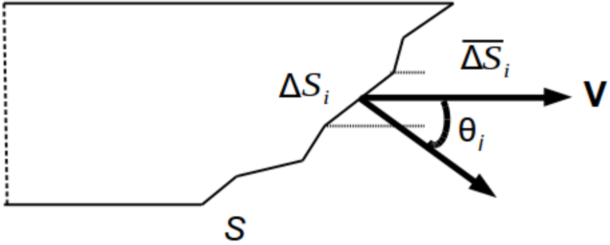
- A descarga através de S é aproximada por

$$\sum_S (\overline{\Delta S_i}) \rho u = \sum_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_i (\Delta S)_i$$

- No limite de $\Delta S_i \to 0$, a descarga de massa através da área S:

$$\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

- No caso mais geral, quando o contorno S não tiver uma forma geométrica simples, $\bar{S}$ pode ser aproximado por retas (2D) ou poliedros (3D) com áreas ΔS_i



- No caso 2D, pode-se escrever a área efetiva $\overline{\Delta S_i}$:

$$\overline{\Delta S_i} = (\Delta S)_i \cos(\theta_i)$$

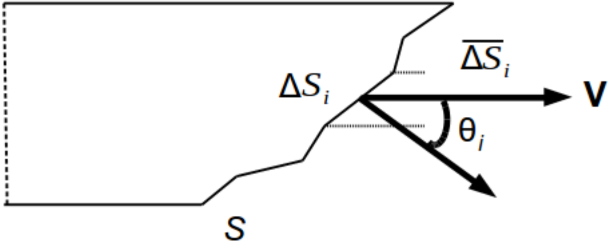
- A descarga através de S é aproximada por

$$\sum_S (\overline{\Delta S_i}) \rho u = \sum_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_i (\Delta S)_i$$

- No limite de $\Delta S_i \to 0$, a descarga de massa através da área S:

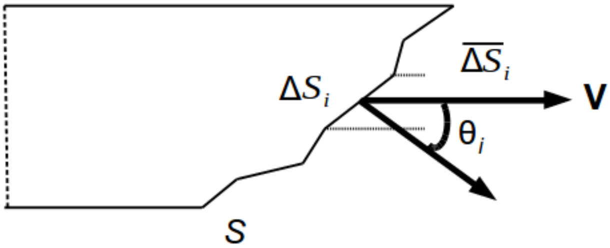
$$\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

- No caso mais geral, quando o contorno S não tiver uma forma geométrica simples, $\bar{S}$ pode ser aproximado por retas (2D) ou poliedros (3D) com áreas ΔS_i



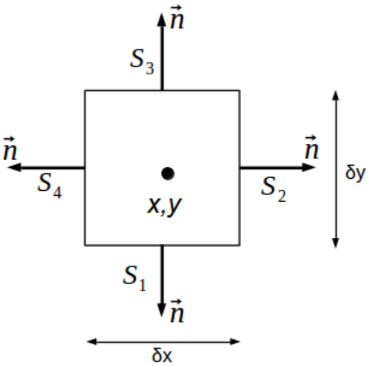
- No caso 2D, pode-se escrever a área efetiva $\overline{\Delta S_i}$:
$$\overline{\Delta S_i} = (\Delta S)_i \cos(\theta_i)$$
- A descarga através de S é aproximada por
$$\sum_S (\overline{\Delta S_i})\rho u = \sum_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_i (\Delta S)_i$$
- No limite de $\Delta S_i \rightarrow 0$, a descarga de massa através da área S:
$$\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

- No caso mais geral, quando o contorno S não tiver uma forma geométrica simples, $\bar{S}$ pode ser aproximado por retas (2D) ou poliedros (3D) com áreas ΔS_i



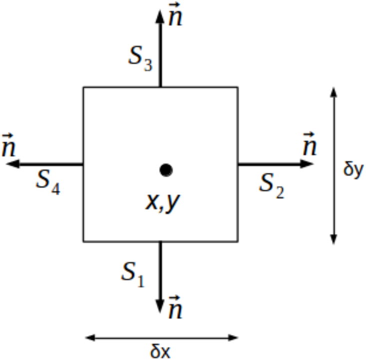
- No caso 2D, pode-se escrever a área efetiva $\overline{\Delta S_i}$:
$$\overline{\Delta S_i} = (\Delta S)_i \cos(\theta_i)$$
- A descarga através de S é aproximada por
$$\sum_S (\overline{\Delta S_i})\rho u = \sum_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_i (\Delta S)_i$$
- No limite de $\Delta S_i \to 0$, a descarga de massa através da área S:
$$\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

- Seja a região 2D delimitada pelas fronteiras S_1, S_2, S_3 e S_4:



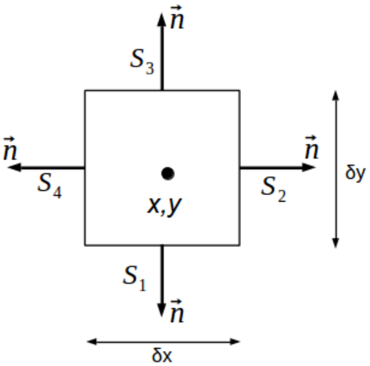
- A velocidade do fluido $\mathbf{V} = (u\mathbf{x}, v\mathbf{y})$ que cruza as fronteiras da região
- Com a aplicação $\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ na região acima, tem-se:
  - $\dot{m} = 0$: a quantidade de fluxo de massa que entra é a mesma que sai
  - $\dot{m} > 0$: há mais fluido saindo da região que entrando;
  - $\dot{m} < 0$: há mais fluido entrando na região do que saindo;

- Seja a região 2D delimitada pelas fronteiras S_1, S_2, S_3 e S_4:



- A velocidade do fluido $\mathbf{V} = (u\mathbf{x}, v\mathbf{y})$ que cruza as fronteiras da região
- Com a aplicação $\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ na região acima, tem-se:
  - $\dot{m} = 0$: a quantidade de fluxo de massa que entra é a mesma que sai
  - $\dot{m} > 0$: há mais fluido saindo da região que entrando;
  - $\dot{m} < 0$: há mais fluido entrando na região do que saindo;

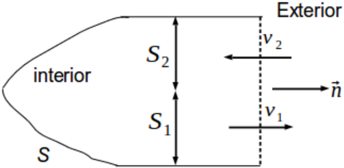
- Seja a região 2D delimitada pelas fronteiras S_1, S_2, S_3 e S_4:



- A velocidade do fluido $\mathbf{V} = (u\mathbf{x}, v\mathbf{y})$ que cruza as fronteiras da região
- Com a aplicação $\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ na região acima, tem-se:
  - $\dot{m} = 0$: a quantidade de fluxo de massa que entra é a mesma que sai
  - $\dot{m} > 0$: há mais fluido saindo da região que entrando;
  - $\dot{m} < 0$: há mais fluido entrando na região do que saindo;

Exemplo: análise da descarga de massa

- Considere uma região delimitada pela fronteira S, que inclui os segmentos S_1 e S_2

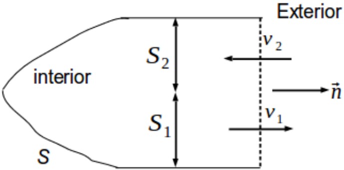


- O fluido entra com velocidade $\mathbf{v_2}$ através do segmento S_2 e deixa a região por S_1 com velocidade $\mathbf{v_1}$
- Sem perda de generalidade, $\rho = 1$ e essas velocidades como normais à fronteira S e uniformes ao longo dos respectivos segmentos
- A descarga de massa $\dot{m}$ através de S é a soma das descargas através dos segmentos S_1 e S_2:

$$\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

Exemplo: análise da descarga de massa

- Considere uma região delimitada pela fronteira S, que inclui os segmentos S_1 e S_2

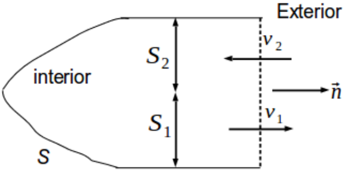


- O fluido entra com velocidade $\mathbf{v_2}$ através do segmento S_2 e deixa a região por S_1 com velocidade $\mathbf{v_1}$
- Sem perda de generalidade, $\rho = 1$ e essas velocidades como normais à fronteira S e uniformes ao longo dos respectivos segmentos
- A descarga de massa $\dot{m}$ através de S é a soma das descargas através dos segmentos S_1 e S_2:

$$\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

Exemplo: análise da descarga de massa

- Considere uma região delimitada pela fronteira S, que inclui os segmentos S_1 e S_2

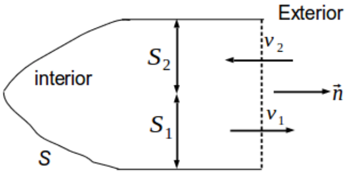


- O fluido entra com velocidade $\mathbf{v_2}$ através do segmento S_2 e deixa a região por S_1 com velocidade $\mathbf{v_1}$
- Sem perda de generalidade, $\rho = 1$ e essas velocidades como normais à fronteira S e uniformes ao longo dos respectivos segmentos
- A descarga de massa $\dot{m}$ através de S é a soma das descargas através dos segmentos S_1 e S_2:

$$\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

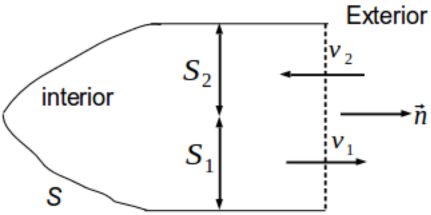
Exemplo: análise da descarga de massa

- Considere uma região delimitada pela fronteira S, que inclui os segmentos S_1 e S_2



- O fluido entra com velocidade $\mathbf{v_2}$ através do segmento S_2 e deixa a região por S_1 com velocidade $\mathbf{v_1}$
- Sem perda de generalidade, $\rho = 1$ e essas velocidades como normais à fronteira S e uniformes ao longo dos respectivos segmentos
- A descarga de massa $\dot{m}$ através de S é a soma das descargas através dos segmentos S_1 e S_2:

$$\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$



- A descarga de massa $\dot{m}$ através de S é a soma das descargas através dos segmentos S_1 e S_2:

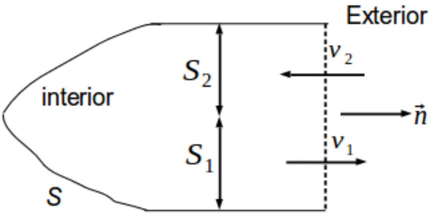
$$\dot{m} = \int_{S_1+S_2} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \mathbf{v_2} \cdot \mathbf{n} dS$$

- Ao longo de S_2, a velocidade $\mathbf{v_2}$ do fluido tem sentido oposto à normal $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{v_2} \cdot \mathbf{n} = -v_2$$

- A descarga total $\dot{m}$ é dada por:

$$\dot{m} = \int_{S_1} v_1 dS - \int_{S_2} v_2 dS$$



- A descarga de massa $\dot{m}$ através de S é a soma das descargas através dos segmentos S_1 e S_2:

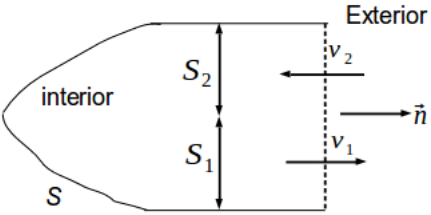
$$\dot{m} = \int_{S_1+S_2} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \mathbf{v_2} \cdot \mathbf{n} dS$$

- Ao longo de S_2, a velocidade $\mathbf{v_2}$ do fluido tem sentido oposto à normal **n**:

$$\mathbf{v_2} \cdot \mathbf{n} = -v_2$$

- A descarga total $\dot{m}$ é dada por:

$$\dot{m} = \int_{S_1} v_1 dS - \int_{S_2} v_2 dS$$



- A descarga de massa $\dot{m}$ através de S é a soma das descargas através dos segmentos S_1 e S_2:

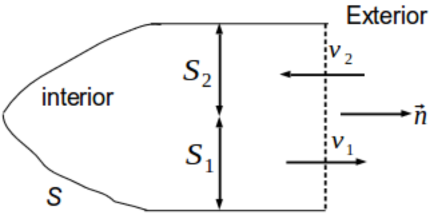
$$\dot{m} = \int_{S_1+S_2} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \mathbf{v_2} \cdot \mathbf{n} dS$$

- Ao longo de S_2, a velocidade $\mathbf{v_2}$ do fluido tem sentido oposto à normal $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{v_2} \cdot \mathbf{n} = -v_2$$

- A descarga total $\dot{m}$ é dada por:

$$\dot{m} = \int_{S_1} v_1 dS - \int_{S_2} v_2 dS$$



A descarga de massa $\dot{m}$ é dada por:

$$\dot{m} = \int_{S_1} v_1 dS - \int_{S_2} v_2 dS$$

- $\dot{m} = 0$: a quantidade de fluxo de massa que entra é a mesma que sai
- $\dot{m} > 0$: há mais fluido saindo do que entrando na região
- $\dot{m} < 0$: há mais fluido entrando do que saindo na região

Fluxo de massa

- A descarga de massa através da área S:

$$\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

- Caso particular do fluxo de $\mathbf{F}$ através da área S

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS,$$

  em que $\mathbf{F} = \rho \mathbf{V}$.

- $\mathbf{F} = \rho \mathbf{V}$ é denominado fluxo de massa, cujo valor, em um certa direção, é dado por:

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$$

Fluxo de massa

- A descarga de massa através da área S:

$$\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

- Caso particular do fluxo de $\mathbf{F}$ através da área S

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS,$$

em que $\mathbf{F} = \rho \mathbf{V}$.

- $\mathbf{F} = \rho \mathbf{V}$ é denominado fluxo de massa, cujo valor, em um certa direção, é dado por:

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$$

Fluxo de massa

- A descarga de massa através da área S:

$$\dot{m} = \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

- Caso particular do fluxo de $\mathbf{F}$ através da área S

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS,$$

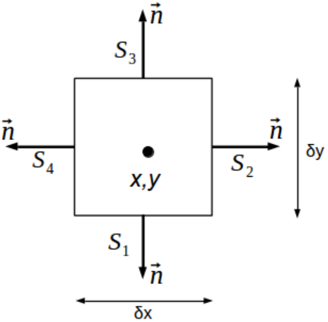
em que $\mathbf{F} = \rho \mathbf{V}$.

- $\mathbf{F} = \rho \mathbf{V}$ é denominado fluxo de massa, cujo valor, em um certa direção, é dado por:

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$$

Divergência

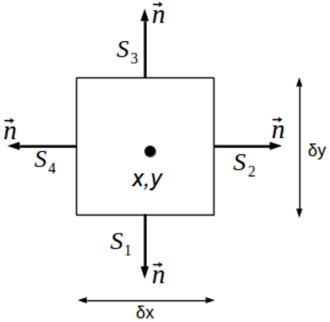
1. divergente: $\nabla \cdot \mathbf{F}$



O fluxo de **F** através de S é dado por:

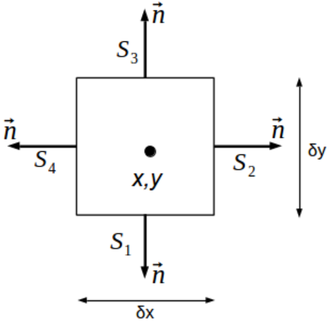
$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \int_{S_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS + \int_{S_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS + \int_{S_3}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS + \int_{S_4}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$

Direção x: cálculo de $\int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS_2$



- Considere a face S_2, em que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = (F_x, F_y) \cdot (1, 0) = F_x$. Tem-se:
$$\int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS_2 = \int_{S_2} F_x dS_2$$
- δx e δy pequenos, é possível aproximar F_x no centro da face S_2
$$\int_{S_2} F_x dS \approx (\delta y) F_x|_{x+\frac{\delta x}{2},y}$$

Direção x: Cálculo de $\int_{S_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS_4$



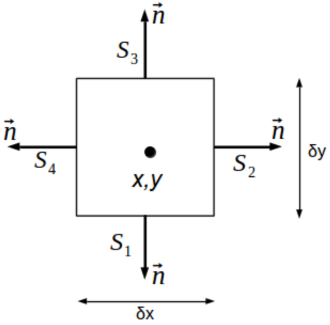
- Considere a face S_4, em que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = (F_x, F_y) \cdot (-1, 0) = -F_x$

$$\int_{S_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS_4 = -\int_{S_4} F_x dS_4$$

- É possível aproximar F_x no centro da face S_4.

$$\int_{S_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS_4 = -\int_{S_4} F_x dS_4 \approx -(\delta y) F_x|_{x-\frac{\delta x}{2}, y}$$

Direção y: cálculo de $\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS_1$



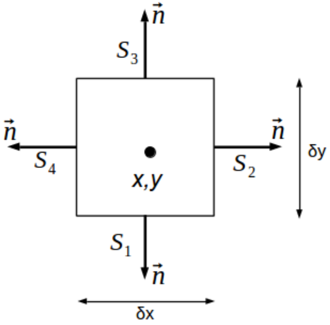
- Considere a face S_1, em que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = (F_x, F_y) \cdot (0, -1) = -F_y$

$$\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS_1 = -\int_{S_1} F_y dS_1$$

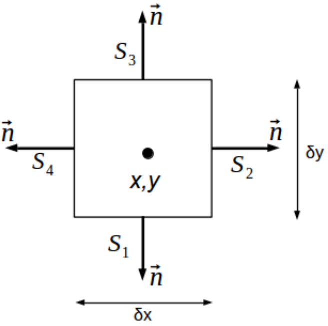
- É possível aproximar F_y no centro da face S_1.

$$\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS_1 = -\int_{S_1} F_y dS_1 \approx -(\delta x) F_y\big|_{x,y-\frac{\delta y}{2}}$$

Direção y: cálculo de $\int_{S_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS_3$



- Considere a face S_3, em que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = (F_x, F_y) \cdot (0, 1) = F_y$
$$\int_{S_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS_3 = -\int_{S_3} F_y dS_3$$
- É possível aproximar F_y no centro da face S_3.
$$\int_{S_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS_3 = \int_{S_3} F_y dS_3 \approx (\delta x) F_y|_{x, y + \frac{\delta y}{2}}$$



O fluxo de **F** através de S é dado por:

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \int_{S_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS_1 + \int_{S_4}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS_4 + \int_{S_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS_1 + \int_{S_3}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS_3$$

$$\int_{S_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS_2 = \int_{S_2}F_x dS \approx (\delta y)F_x\big|_{x+\frac{\delta x}{2},y}$$

$$\int_{S_4}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS_4 = -\int_{S_4}F_x dS_4 \approx -(\delta y)F_x\big|_{x-\frac{\delta x}{2},y}$$

$$\int_{S_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS_1 = -\int_{S_1}F_y dS_1 \approx -(\delta x)F_y\big|_{x,y-\frac{\delta y}{2}}$$

$$\int_{S_3}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS_3 = \int_{S_3}F_y dS_3 \approx (\delta x)F_y\big|_{x,y+\frac{\delta y}{2}}$$

$$\int_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS + \int_{S_4} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS \approx \left[F_x\big|_{x+\frac{\delta x}{2},y} - F_x\big|_{x-\frac{\delta x}{2},y} \right]\delta y$$

$$\int_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS + \int_{S_4} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS \approx \left[\frac{F_x\big|_{x+\frac{\delta x}{2},y} - F_x\big|_{x-\frac{\delta x}{2},y}}{\delta x} \right]\delta x \delta y$$

- O termo $\delta x\ \delta y$ fornece o volume $\delta\mathcal{V}$ do elemento fluido

$$\frac{1}{\delta\mathcal{V}}\left(\int_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS + \int_{S_4} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS\right) = \frac{1}{\delta\mathcal{V}}\int_{S_2+S_4} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS \approx \frac{F_x\big|_{x+\frac{\delta x}{2},y} - F_x\big|_{x-\frac{\delta x}{2},y}}{\delta x}$$

- No limite $\delta\mathcal{V} \to 0$, obtém-se

$$\lim_{\delta\mathcal{V}\to 0}\left\{\frac{1}{\delta\mathcal{V}}\int_{S_2+S_4} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS\right\} = \lim_{\delta x,\delta y\to 0}\left[\frac{F_x\big|_{x+\frac{\delta x}{2},y} - F_x\big|_{x-\frac{\delta x}{2},y}}{\delta x} \right]$$

$$\lim_{\delta\mathcal{V}\to 0}\left\{\frac{1}{\delta\mathcal{V}}\int_{S_2+S_4} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS\right\} = \frac{\partial F_x}{\partial x}$$

$$\int_{S_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS + \int_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS \approx \left[F_y\big|_{x,y+\frac{\delta y}{2}} - F_y\big|_{x,y-\frac{\delta y}{2}} \right]\delta x$$

$$\int_{S_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS + \int_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS \approx \left[\frac{F_y\big|_{x,y+\frac{\delta y}{2}} - F_y\big|_{x,y-\frac{\delta y}{2}}}{\delta y} \right]\delta x\delta y$$

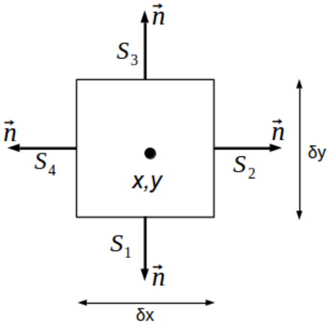
- Como $\delta\mathcal{V} = \delta x\delta y$, tem-se:

$$\frac{1}{\delta\mathcal{V}}\left(\int_{S_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS + \int_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS\right) = \frac{1}{\delta\mathcal{V}}\int_{S_3+S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS \approx \frac{F_y\big|_{x,y+\frac{\delta y}{2}} - F_y\big|_{x,y-\frac{\delta y}{2}}}{\delta y}$$

- No limite $\delta\mathcal{V} \rightarrow 0$, obtém-se

$$\lim_{\delta\mathcal{V}\rightarrow 0}\left\{\frac{1}{\delta\mathcal{V}}\int_{S_3+S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS\right\} = \lim_{\delta x,\delta y\rightarrow 0}\left[\frac{F_y\big|_{x,y+\frac{\delta y}{2}} - F_y\big|_{x,y-\frac{\delta y}{2}}}{\delta y} \right]$$

$$\lim_{\delta\mathcal{V}\rightarrow 0}\left\{\frac{1}{\delta\mathcal{V}}\int_{S_3+S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS\right\} = \frac{\partial F_y}{\partial y}$$

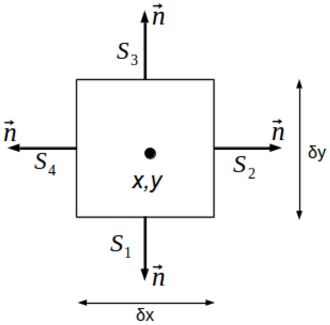


- O fluxo de **F** através de S é dado por:

  $$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \int_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS_1 + \int_{S_4} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS_4 + \int_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS_1 + \int_{S_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS_3$$

  $$\lim_{\delta\mathcal{V}\to 0}\left\{\frac{1}{\delta\mathcal{V}}\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS\right\} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}$$

- Notação: $\nabla\cdot\mathbf{F}$



- O fluxo de **F** através de S é dado por:

  $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS_1 + \int_{S_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS_4 + \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS_1 + \int_{S_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS_3$

  $\lim_{\delta \mathcal{V} \to 0} \left\{ \frac{1}{\delta \mathcal{V}} \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \right\} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}$

- Notação: $\nabla \cdot \mathbf{F}$

Operador divergente - interpretação física

- Operador 2D em coordenadas cartesianas:

$$\nabla = \mathbf{x}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}\frac{\partial}{\partial y}$$

- Quando $\mathbf{F} = \rho\mathbf{V}$, a integral $\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$ representa o balanço entre os fluxos de massa, ou seja, a descarga resultante $\dot{m}$, através das fronteira dos fluido.
- Variação de massa no elemento de fluido, por unidade de volume do elemento

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \lim_{\delta\mathcal{V}\to 0}\left\{\frac{\dot{m}}{\delta\mathcal{V}}\right\} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}$$

  - $\nabla\cdot\mathbf{F} > 0$: diminuição, por unidade de volume, da massa dentro da região;
  - $\nabla\cdot\mathbf{F} < 0$: aumento, por unidade de volume, da massa;
  - $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$: a massa não se altera

Operador divergente - interpretação física

- Operador 2D em coordenadas cartesianas:

$$\nabla = \mathbf{x}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}\frac{\partial}{\partial y}$$

- Quando $\mathbf{F} = \rho\mathbf{V}$, a integral $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ representa o balanço entre os fluxos de massa, ou seja, a descarga resultante $\dot{m}$, através das fronteira dos fluido.

- Variação de massa no elemento de fluido, por unidade de volume do elemento

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{\delta\mathcal{V}\to 0} \left\{ \frac{\dot{m}}{\delta\mathcal{V}} \right\} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}$$

  - $\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$: diminuição, por unidade de volume, da massa dentro da região;
  - $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$: aumento, por unidade de volume, da massa;
  - $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$: a massa não se altera

Operador divergente - interpretação física

- Operador 2D em coordenadas cartesianas:

$$\nabla = \mathbf{x}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}\frac{\partial}{\partial y}$$

- Quando $\mathbf{F} = \rho\mathbf{V}$, a integral $\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$ representa o balanço entre os fluxos de massa, ou seja, a descarga resultante $\dot{m}$, através das fronteira dos fluido.
- Variação de massa no elemento de fluido, por unidade de volume do elemento

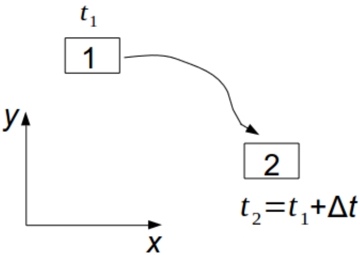
$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \lim_{\delta\mathcal{V}\to 0}\left\{\frac{\dot{m}}{\delta\mathcal{V}}\right\} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}$$

  - $\nabla\cdot\mathbf{F} > 0$: diminuição, por unidade de volume, da massa dentro da região;
  - $\nabla\cdot\mathbf{F} < 0$: aumento, por unidade de volume, da massa;
  - $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$: a massa não se altera

Derivada substantiva, material ou total

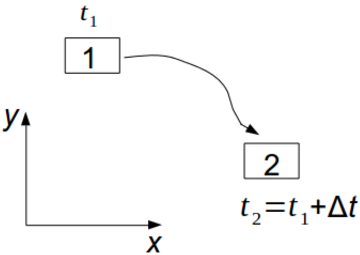
1. $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\rho$

- Elemento de fluido que se desloca com o escoamento entre os pontos 1 e 2 em um intervalo de tempo Δt com massa suposta constante



- Em escoamento transiente, as propriedades macroscópicas do fluido dependem das coordenadas espaciais e temporal do elemento de fluido: $\rho = \rho(x, y, t)$ e $u = u(x, y, t)$

- Elemento de fluido que se desloca com o escoamento entre os pontos 1 e 2 em um intervalo de tempo Δt com massa suposta constante



- Em escoamento transiente, as propriedades macroscópicas do fluido dependem das coordenadas espaciais e temporal do elemento de fluido: $\rho = \rho(x, y, t)$ e $u = u(x, y, t)$

- As densidades valem $\rho_1 = \rho(x_1, y_1, t_1)$ e $\rho_2(x_2, y_2, t_2)$
- Expandir ρ_2 em série de Taylor e, torno de ρ_1

$$\rho_2 \approx \rho_1 + (x_2 - x_1)\frac{\partial \rho}{\partial x}|_1 + (y_2 - y_1)\frac{\partial \rho}{\partial y}|_1 + (t_2 - t_1)\frac{\partial \rho}{\partial t}|_1$$

- Variação média entre os instantes t_1 e t_2:

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} \approx \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\frac{\partial \rho}{\partial x}|_1 + \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}\frac{\partial \rho}{\partial y}|_1 + \frac{\partial \rho}{\partial t}|_1$$

- Fazendo $t_2 \rightarrow t_1$, obtém-se a variação instantânea da densidade do elemento de fluido

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \frac{D\rho}{Dt}$$

- As densidades valem $\rho_1 = \rho(x_1, y_1, t_1)$ e $\rho_2(x_2, y_2, t_2)$
- Expandir ρ_2 em série de Taylor e, torno de ρ_1

$$\rho_2 \approx \rho_1 + (x_2 - x_1)\frac{\partial \rho}{\partial x}|_1 + (y_2 - y_1)\frac{\partial \rho}{\partial y}|_1 + (t_2 - t_1)\frac{\partial \rho}{\partial t}|_1$$

- Variação média entre os instantes t_1 e t_2:

$$\frac{\rho_2-\rho_1}{t_2-t_1} \approx \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\frac{\partial \rho}{\partial x}|_1 + \frac{y_2-y_1}{t_2-t_1}\frac{\partial \rho}{\partial y}|_1 + \frac{\partial \rho}{\partial t}|_1$$

- Fazendo $t_2 \rightarrow t_1$, obtém-se a variação instantânea da densidade do elemento de fluido

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\rho_2-\rho_1}{t_2-t_1} = \frac{D\rho}{Dt}$$

- As densidades valem $\rho_1 = \rho(x_1, y_1, t_1)$ e $\rho_2(x_2, y_2, t_2)$
- Expandir ρ_2 em série de Taylor e, torno de ρ_1

$$\rho_2 \approx \rho_1 + (x_2 - x_1)\frac{\partial \rho}{\partial x}|_1 + (y_2 - y_1)\frac{\partial \rho}{\partial y}|_1 + (t_2 - t_1)\frac{\partial \rho}{\partial t}|_1$$

- Variação média entre os instantes t_1 e t_2:

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} \approx \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\frac{\partial \rho}{\partial x}|_1 + \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}\frac{\partial \rho}{\partial y}|_1 + \frac{\partial \rho}{\partial t}|_1$$

- Fazendo $t_2 \rightarrow t_1$, obtém-se a variação instantânea da densidade do elemento de fluido

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \frac{D\rho}{Dt}$$

- As densidades valem $\rho_1 = \rho(x_1, y_1, t_1)$ e $\rho_2(x_2, y_2, t_2)$
- Expandir ρ_2 em série de Taylor e, torno de ρ_1

$$\rho_2 \approx \rho_1 + (x_2 - x_1)\frac{\partial \rho}{\partial x}|_1 + (y_2 - y_1)\frac{\partial \rho}{\partial y}|_1 + (t_2 - t_1)\frac{\partial \rho}{\partial t}|_1$$

- Variação média entre os instantes t_1 e t_2:

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} \approx \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\frac{\partial \rho}{\partial x}|_1 + \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}\frac{\partial \rho}{\partial y}|_1 + \frac{\partial \rho}{\partial t}|_1$$

- Fazendo $t_2 \to t_1$, obtém-se a variação instantânea da densidade do elemento de fluido

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \frac{D\rho}{Dt}$$

- Aplicação do limite:

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \frac{D\rho}{Dt}$$
$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = u$$
$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = v$$

- Tem-se no limite $t_2 \to t_1$:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y}$$

- O termo convectivo ou inercial

$$\mathbf{V} \cdot \nabla = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$$

- A equação torna-se:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\rho$$

  em que $\mathbf{V} = (u\mathbf{x}, v\mathbf{y})$ é a velocidade

- O termo $\frac{\partial \rho}{\partial t}|_1$ representa uma variação temporal da densidade devido, exclusivamente, às variações de densidade inerentes ao ponto 1 (um fenômeno local de aquecimento)

- Aplicação do limite:

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \frac{D\rho}{Dt}$$
$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = u$$
$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = v$$

- Tem-se no limite $t_2 \to t_1$:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y}$$

- O termo convectivo ou inercial

$$\mathbf{V} \cdot \nabla = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$$

- A equação torna-se:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\rho$$

em que $\mathbf{V} = (u\mathbf{x}, v\mathbf{y})$ é a velocidade

- O termo $\frac{\partial \rho}{\partial t}|_1$ representa uma variação temporal da densidade devido, exclusivamente, às variações de densidade inerentes ao ponto 1 (um fenômeno local de aquecimento)

- Aplicação do limite:

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \frac{D\rho}{Dt}$$

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = u$$

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = v$$

- Tem-se no limite $t_2 \to t_1$:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y}$$

- O termo convectivo ou inercial

$$\mathbf{V} \cdot \nabla = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$$

- A equação torna-se:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\rho$$

em que $\mathbf{V} = (u\mathbf{x}, v\mathbf{y})$ é a velocidade

- O termo $\frac{\partial \rho}{\partial t}|_1$ representa uma variação temporal da densidade devido, exclusivamente, às variações de densidade inerentes ao ponto 1 (um fenômeno local de aquecimento)

- Aplicação do limite:

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \frac{D\rho}{Dt}$$
$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = u$$
$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = v$$

- Tem-se no limite $t_2 \to t_1$:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y}$$

- O termo convectivo ou inercial

$$\mathbf{V} \cdot \nabla = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$$

- A equação torna-se:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\rho$$

  em que $\mathbf{V} = (u\mathbf{x}, v\mathbf{y})$ é a velocidade

- O termo $\frac{\partial \rho}{\partial t}\big|_1$ representa uma variação temporal da densidade devido, exclusivamente, às variações de densidade inerentes ao ponto 1 (um fenômeno local de aquecimento)

- Aplicação do limite:

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \frac{D\rho}{Dt}$$
$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = u$$
$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = v$$

- Tem-se no limite $t_2 \to t_1$:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y}$$

- O termo convectivo ou inercial

$$\mathbf{V} \cdot \nabla = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$$

- A equação torna-se:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\rho$$

  em que $\mathbf{V} = (u\mathbf{x}, v\mathbf{y})$ é a velocidade

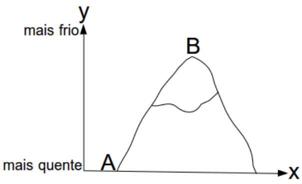
- O termo $\frac{\partial \rho}{\partial t}|_1$ representa uma variação temporal da densidade devido, exclusivamente, às variações de densidade inerentes ao ponto 1 (um fenômeno local de aquecimento)

Qualquer propriedade macroscópica ϕ do fluido, como energia ou temperatura, poderia ter sido utilizada na dedução da derivada total:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\rho,$$

em que $\mathbf{V} = (u\mathbf{x}, v\mathbf{y})$ é a velocidade.

Exemplo: derivada material



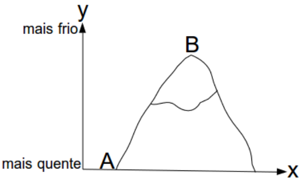
- Temperatura a uma dada altura $T = T(y)$, assim $T_A < T_B$
- Conforme alpinista escala a montanha, ele sente uma variação da temperatura, ao logo do tempo, dada por:

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{\text{alpinista}} = \frac{dT}{dy}\frac{dy}{dt} = v\frac{dT}{dy}$$

- Considerando o fato que a escala da se dá ao entardecer, assim $T = T(y, t)$, a variação efetiva da temperatura sentida ao longo do tempo pelo alpinista:

$$\frac{DT}{Dt} = \left.\frac{dT}{dt}\right|_{\text{alpinista}} = \frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial y}$$

Exemplo: derivada material



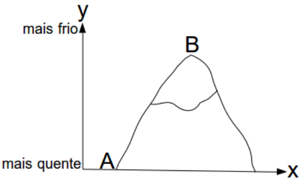
- Temperatura a uma dada altura $T = T(y)$, assim $T_A < T_B$
- Conforme alpinista escala a montanha, ele sente uma variação da temperatura, ao logo do tempo, dada por:

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{\text{alpinista}} = \frac{dT}{dy}\frac{dy}{dt} = v\frac{dT}{dy}$$

- Considerando o fato que a escala da se dá ao entardecer, assim $T = T(y, t)$, a variação efetiva da temperatura sentida ao longo do tempo pelo alpinista:

$$\frac{DT}{Dt} = \left.\frac{dT}{dt}\right|_{\text{alpinista}} = \frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial y}$$

Exemplo: derivada material



- Temperatura a uma dada altura $T = T(y)$, assim $T_A < T_B$
- Conforme alpinista escala a montanha, ele sente uma variação da temperatura, ao logo do tempo, dada por:

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{\text{alpinista}} = \frac{dT}{dy}\frac{dy}{dt} = v\frac{dT}{dy}$$

- Considerando o fato que a escala da se dá ao entardecer, assim $T = T(y, t)$, a variação efetiva da temperatura sentida ao longo do tempo pelo alpinista:

$$\frac{DT}{Dt} = \left.\frac{dT}{dt}\right|_{\text{alpinista}} = \frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial y}$$