



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Trabalho 1- Mecânica dos Fluidos Computacional

Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional

Autor: Rodrigo Perobeli Silva Costa
Professor: Rafael Alves Bonfim de Queiroz

Juiz de Fora, 06 de Agosto de 2020

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Exercício 1	2
3	Exercício 2	4
3.1	$\nu = 0.001$ e $\theta = 0.1$:	4
3.2	$\nu = 0.001$ e $\theta = 0.5$:	6
3.3	$\nu = 0.001$ e $\theta = 0.9$:	6
4	Exercício 3	8
4.1	$\nu = 0.001$ e $\theta = 0.5$:	8
4.2	$\nu = 0.0005$ e $\theta = 0.5$:	9
4.3	$\nu = 0.00025$ e $\theta = 0.5$:	9
5	Conclusão	11

1 Introdução

O presente relatório é um método de avaliação para a disciplina Mecânica dos Fluidos Computacional, do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional (PPGMC) da UFJF. O trabalho consiste em 4 etapas:

- Simplificação das Equações de Navier-Stokes 3D, de modo a chegar na equação de 1D de Burgers viscosa;
- Fabricar um código que resolva a Equação de Burgers viscosa utilizando o esquema polinomial upwind escolhido pelo professor;
- Dados ν constante, θ (número de Courant) e t variáveis, resolver para todas as combinações usando o método upwind escolhido pelo professor e o ADBQUICKEST;
- Semelhante ao item anterior, mas variando a viscosidade ν e o t , mantendo θ constante.

com o objetivo final de discutir as interferências do número de Courant(CFL) e da viscosidade no comportamento da Equação de Burgers Viscosa.

2 Exercício 1

As equações de Navier-Stokes apresentam uma forma de solucionar os mais diversos problemas de fluidos existentes na natureza. No entanto, há problemas na natureza que podem ser modelados de forma mais simples apenas tornando as equações de Navier Stokes mais específicas para a aplicação. Isso será mostrado para chegar na Equação de Burgers viscosa, (1).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

Parte-se então das equações de Navier-Stokes na forma 3D, que são a equação da conservação de massa (2), Equações de conservação de momento linear (3,4,5) e conservação da energia (6).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (2)$$

$$F_x = \rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \quad (3)$$

$$F_y = \rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \quad (4)$$

$$F_z = \rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \rho f_z \quad (5)$$

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} + uF_x + vF_y + wF_z \quad (6)$$

O problema de Burgers é unidimensional e adiabático (não há troca de calor com o ambiente), dessa forma, as únicas equações que são de valia para esse problema são as equações (2) e (3). Além disso, pode-se utilizar a forma conservativa de (3), que é a incorporação da conservação de massa à equação de conservação de momento:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \quad (7)$$

A equação conservativa de momento (7) já considera o fato de ser um escoamento 1D.

As outras premissas de Burgers consideram:

- Escoamento incompressível ($\rho = \text{cte}$);
- Escoamento com fluido newtoniano com viscosidade secundária $\lambda = 0$ e (8);

- Viscosidade dinâmica μ constante, uma vez que não há variação na temperatura;
- Pressão p constante em todo o domínio observável;

$$\tau_{xx} = \mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8)$$

Dessa forma ao aplicar as premissas acima, e dividir toda a equação pela densidade ρ constante, têm-se a equação de Burgers viscosa (9), onde u é a velocidade do fluido e ν é a viscosidade cinemática do mesmo.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (9)$$

3 Exercício 2

3.1 $\nu = 0.001$ e $\theta = 0.1$:

As Figuras 1 e 2 mostram o resultado da simulação em 3 tempos diferentes, 0.1, 0.3 e 0.5 s.

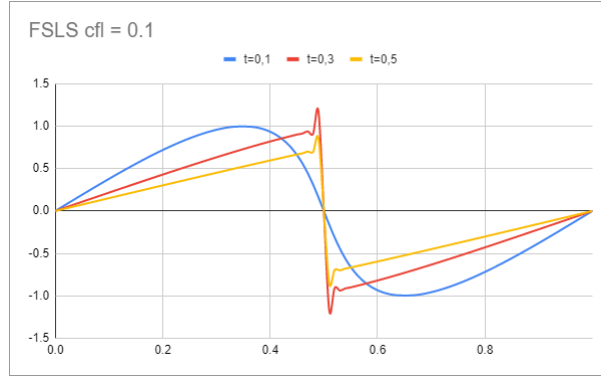


Figura 1: Esquema FLS com CFL=0.1

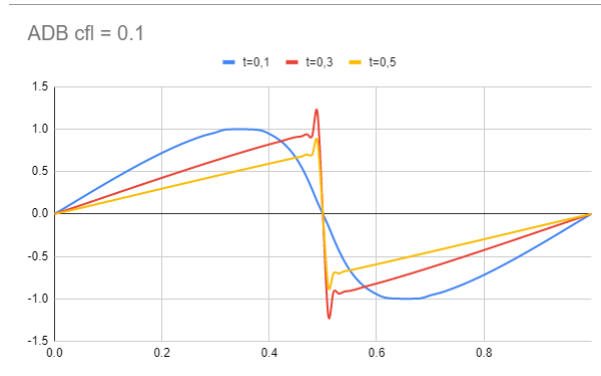


Figura 2: Esquema ABDQUICKEST com CFL=0.1

Analisando essas figuras é possível notar que essa equação, para essas condições iniciais tratam-se de 2 ondas de energia cinética de igual intensidade e sentido contrário que se chocam no centro do domínio espacial observável, denotado pela descontinuidade da função velocidade nos tempos posteriores a 0.3 s, que então perde a energia após o choque sem propagar a onda de volta.

O CFL, também conhecido por número de Courant ($\theta = \frac{\delta X}{\delta t}$) representa uma relação entre os incrementais de tempo e de espaço, quanto menor o CFL, maior é o número de iterações no tempo e mais precisa fica a solução

e isso pode ser visto nas figuras 3 e 4. Foi utilizado um valor de $\delta X = 0.01$ constante para todos os testes **FAVOR CONFERIR ESSE VALOR ANTES DE ENVIAR O TRABALHO** Nota-se também, que para esse valor de CFL, não há grandes diferenças do FSLs para o ADBQUICKEST, os 2 tratam bem o problema.

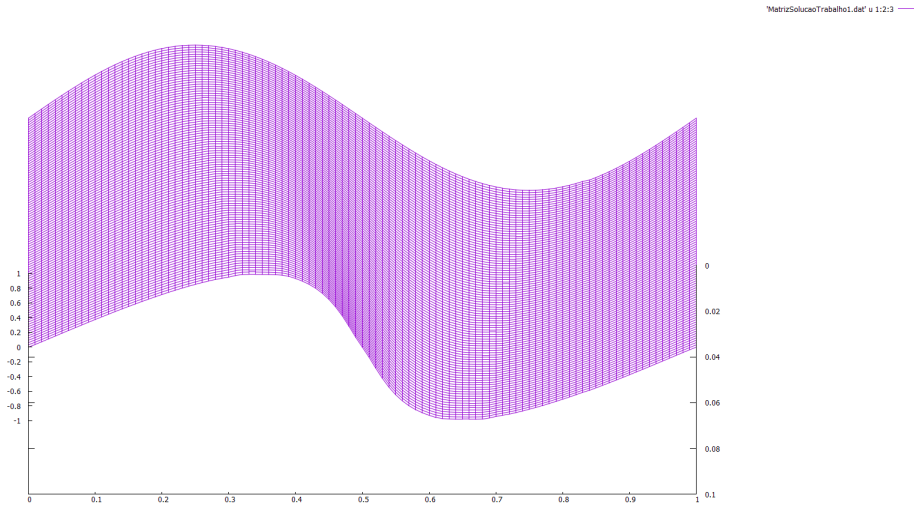


Figura 3: Exemplo de malha com CFL=0.1 (feito no Gnuplot)

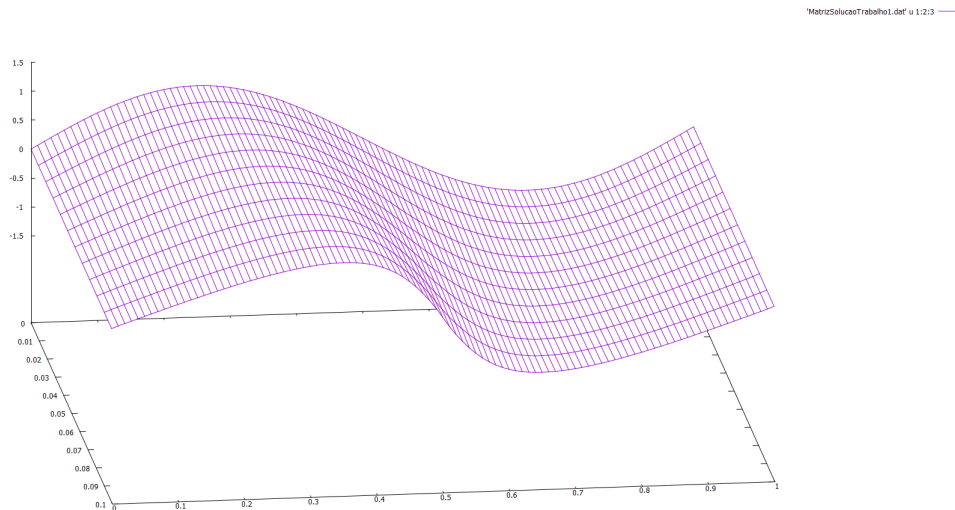


Figura 4: Exemplo de malha com CFL=0.1 (feito no Gnuplot)

3.2 $\nu = 0.001$ e $\theta = 0.5$:

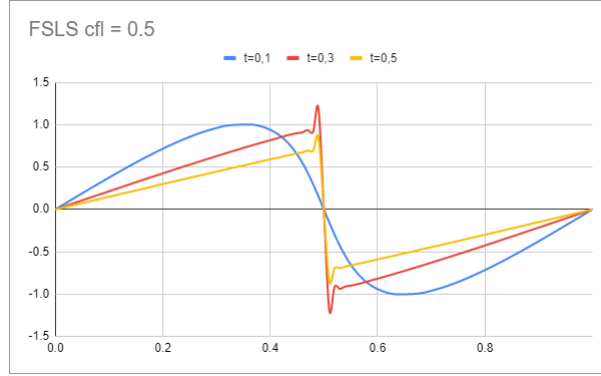


Figura 5: Esquema FSLs com CFL=0.5

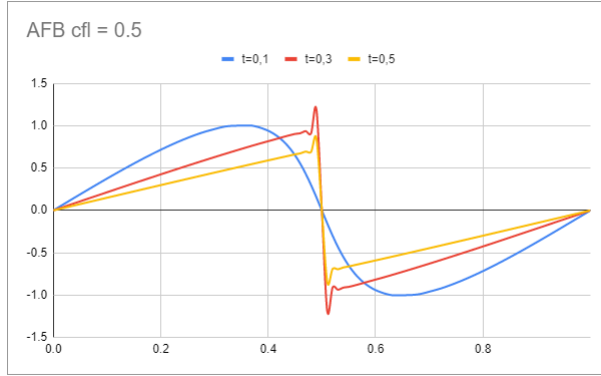


Figura 6: Esquema ABDQUICKEST com CFL=0.5

Para as figuras 5 e 6 temos um comportamento semelhante também, com um CFL maior, o incremento do tempo aumenta então a cada iteração informações podem ser perdidas devido ao intervalo de tempo maior, com o CFL da Seção 3.1 isso também poderia ocorrer, e, assim como para CFL=0.5, Ambos FSLs e ADBQUICKEST tratam bem o problema.

3.3 $\nu = 0.001$ e $\theta = 0.9$:

Há diferença no entanto, quando valor de δt se aproxima do valor de δx ou seja, com o aumento do CFL. Com isso, as informações perdidas a cada iteração tornam-se relevantes. É possível notar uma oscilação por parte do

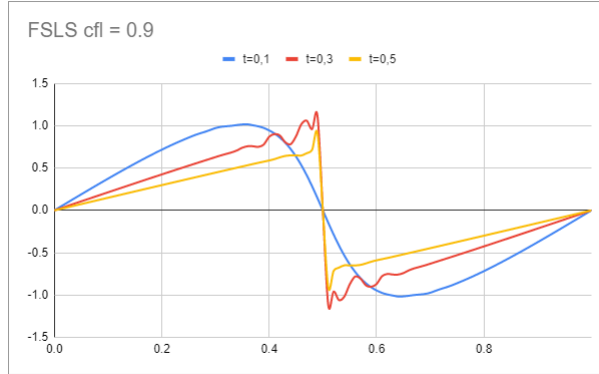


Figura 7: Esquema FSLs com CFL=0.9

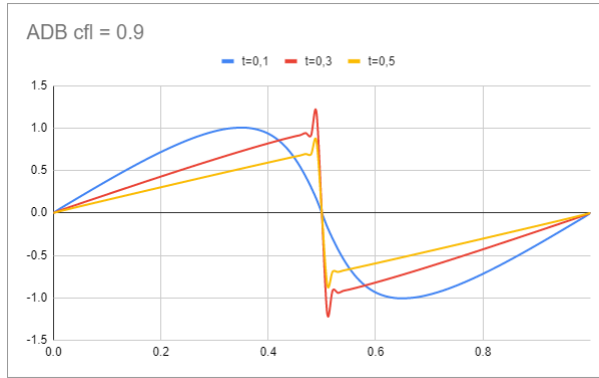


Figura 8: Esquema ABDQUICKEST com CFL=0.9

método FSLs (Figura 7), que para o método ABDQUICKEST não aparece, devido provavelmente à consideração do CFL em sua formulação.

Para demonstrar também a oscilação que aparece no FSLs, há também a Figura 9, que mostra uma oscilação na solução, em contraste com o ABDQUICKEST (Figura 10) que mostra uma solução contínua sem oscilações.

Variando o CFL, percebe-se então a influência do mesmo na performance da solução, que causa oscilações maiores ao aumentar o tempo final da simulação, principalmente na descontinuidade que acontece aos 0.3 s.

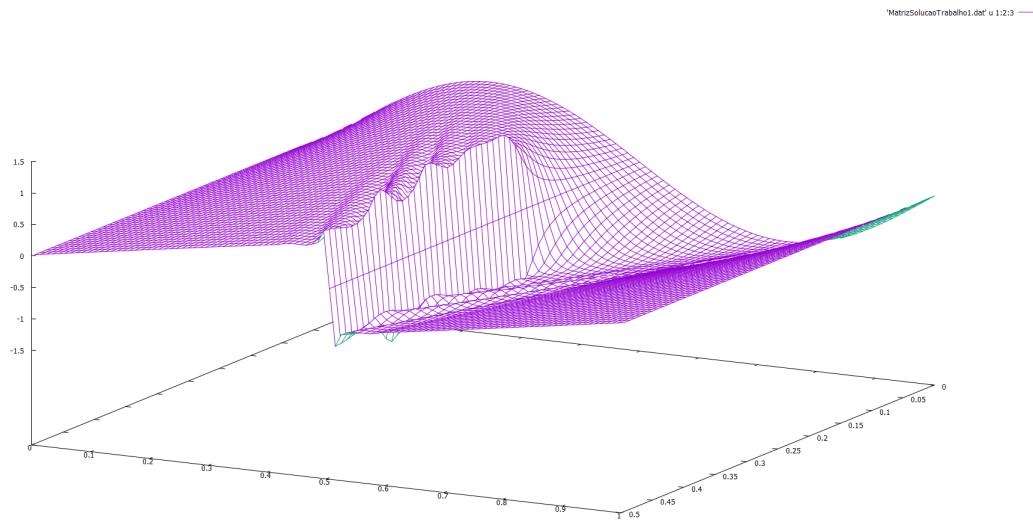


Figura 9: Esquema FSLs com CFL=0.9 considerando o tempo

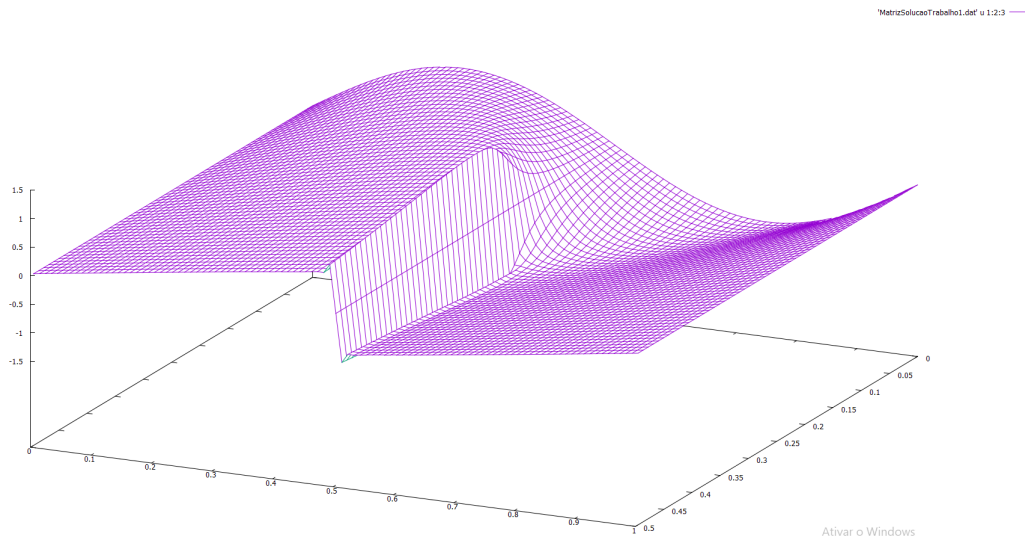


Figura 10: Esquema ADBQUICKEST com CFL=0.9 considerando o tempo

4 Exercício 3

4.1 $\nu = 0.001$ e $\theta = 0.5$:

Visa-se nesse exercício analisar a influência da viscosidade no estudo da equação de Burgers viscosa. O comportamento de ambos os esquemas upwind é extremamente semelhante, não havendo oscilações em nenhum dos casos.

Para a primeira viscosidade espera-se que não haja diferenças para as

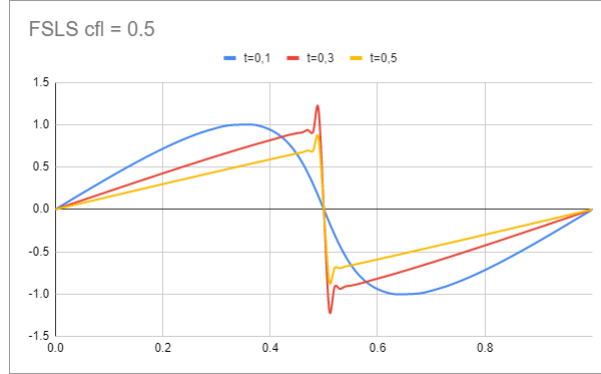


Figura 11: Esquema FSLS com $\nu = 0.001$

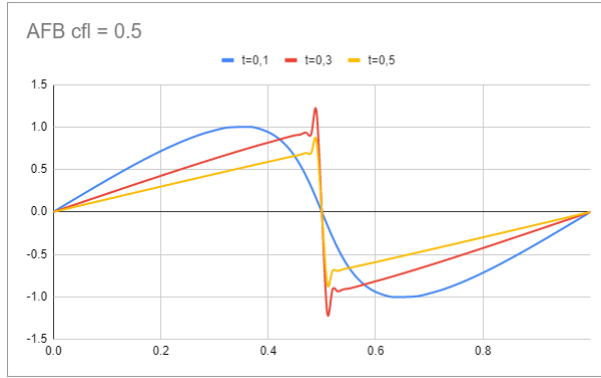


Figura 12: Esquema ABDQUICKEST com $\nu = 0.001$

Figuras 5 e 6 pois ambas apresentam os mesmos valores de viscosidade e CFL. E isso de fato acontece, não há diferenças observáveis entre aqueles gráficos e os apresentados pelas Figuras 11 e 12.

4.2 $\nu = 0.0005$ e $\theta = 0.5$:

Dividindo-se a viscosidade por 2, nota-se pouca diferença, no entanto é possível notar, ao comparar com a viscosidade anterior há um aumento do pico de velocidade na hora do choque em $t = 0.3$ e $t = 0.5$. Os testes para essa viscosidade são apresentados nas Figuras 13 e 14.

4.3 $\nu = 0.00025$ e $\theta = 0.5$:

Nesse último teste (Figuras 15 e 16), novamente observa-se que a diminuição da viscosidade causa um aumento no pico de velocidade, e torna-se

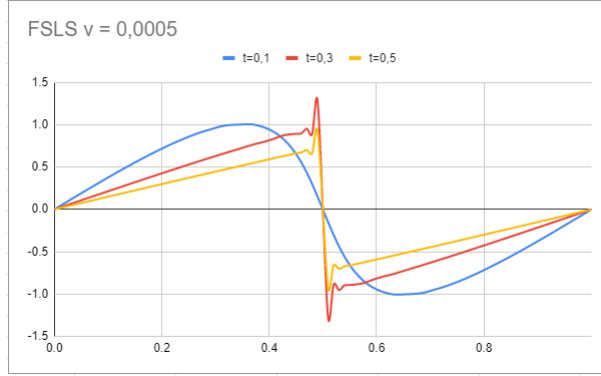


Figura 13: Esquema FLS com $\nu = 0.0005$

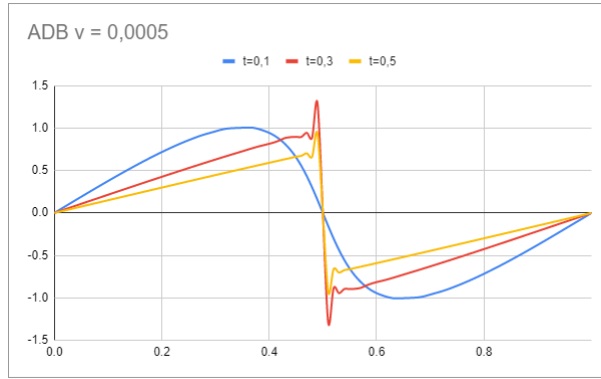


Figura 14: Esquema ABDQUICKEST com $\nu = 0.0005$

possível visualizar um aumento na oscilação da velocidade perto do ponto de choque entre as ondas. As figura ?? mostra essa relação com mais detalhes, onde o gráfico ficou falho, mas a linha azul representa $\nu = 0.001m^2/s$ a linha vermelha representa $\nu = 0.0005m^2/s$ e a linha amarela representa $\nu = 0.00025m^2/s$.

Pode-se então confirmar um comportamento esperado da viscosidade, as forças intermoleculares maiores, presentes em fluidos mais viscosos, impedem as mudanças bruscas e quase instantâneas da velocidade na hora do choque, impedindo que a velocidade de pico seja tão alta quanto a de fluidos menos viscosos. Além disso, fluidos de viscosidades menores propagam mais o efeito de oscilação perto do choque. No entanto, ainda assim é sábio notar que as mudanças na velocidade causadas pela viscosidade cinemática são bem pequenas e quase imperceptíveis, como mostra a figura 17.

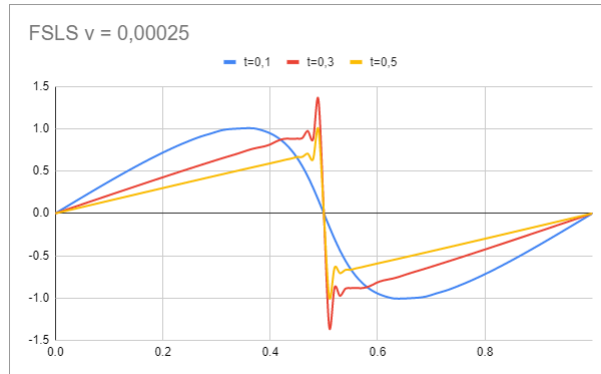


Figura 15: Esquema FLS com $\nu = 0.00025$

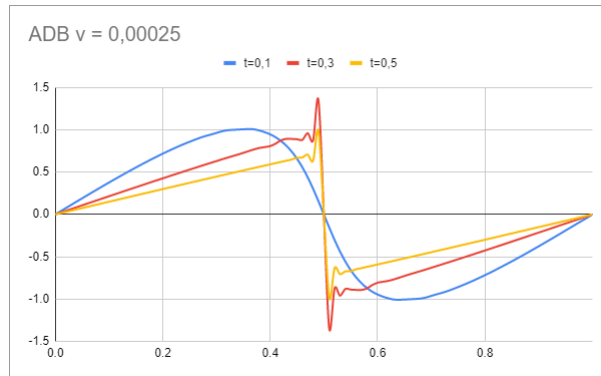


Figura 16: Esquema ABDQUICKEST com $\nu = 0.00025$

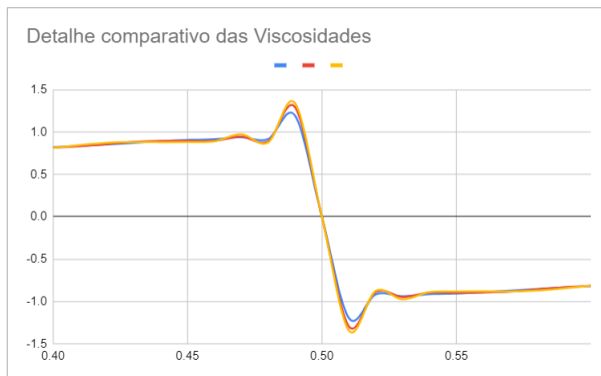


Figura 17: Detalhe comparativo das 3 viscosidades entre os pontos 0.4 a 0.6.

5 Conclusão

Dessa forma foram mostrados e discutidos através desse relatório breve, as influências do CFL e da viscosidade na equação de Burgers viscosa para uma

entrada inicial senoidal, cumprindo o objetivo esperado do presente relatório.