Equações de Navier-Stokes

Prof. Rafael Alves Bonfim de Queiroz
bonfimraf@gmail.com

Universidade Federal de Juiz de Fora
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

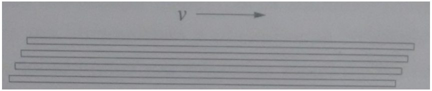
Conteúdo

Revisão: Vazão, descarga e fluxo

- Vazão: representa o volume da massa que atravessa uma seção reta, por unidade de tempo
- Descarga de massa (vazão de massa): quantidade da massa que atravessa uma seção reta, por unidade de tempo
- Fluxo: quantidade de uma grandeza física que cruza uma dada área por unidade de tempo
- Exemplo: considerando-se um fluido de densidade $\rho = 1{,}5$ kg/m^3 e velocidade $u = 3$ m/s se movendo em um tubo de com área A da seção reta igual a 2 m^2
  - Vazão $(uA) = 6$ m^3/s
  - Descarga $= 9$ kg/ s
  - Fluxo $\rho u = 4{,}5$ kg/m^2 s
  - Descarga $=$ fluxo $(\rho u) \times$ área (A)

Escoamentos laminares e turbulentos

- A partir de observações experimentais, pode-se dividir em escoamento de fluidos em dois tipos: laminares e turbulentos
- Escoamentos laminares são aqueles nos quais camadas muito finas (lâminas) de fluidos parecem deslizar uma sobre a outra



- Escoamentos turbulentos consistem "em um movimento caótico ou desordenado de partículas de fluidos individuais"[1]
- "Laminar" ou "turbulento" não são propriedades intrísecas do fluido, mas um estado em que ele se encontra devido às condições de escoamento
- Um escoamento está no regime laminar ou no regime turbulento caso apresente ou não turbulência

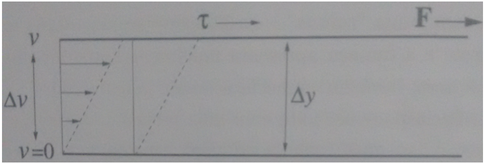
[1] Vennard & Street, Elementos de Mecânica dos Fluidos, 5ed., Editora Guanabara, Rio de Janeiro, 1978

Tensões e viscosidade

Tensões

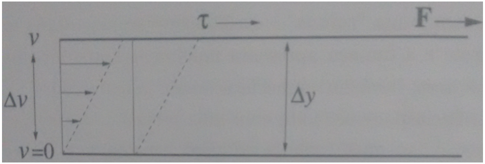
- Tensão representa o quociente entre o módulo de uma força e a área sobre a qual ela age
- Os sólidos podem suportar forças que causem tensões de cisalhamento, que não causem ruptura do material
- Fluidos são incapazes de resistir as tensões
- Em respostas a essas tensões, os fluidos se deformam e escoam

- Escoamento laminar entre as duas chapas planas



  - distância entre as duas chapas: Δy
  - chapa inferior em repouso $(v = 0)$
  - chapa superior é tracionada for uma força **F** e se desloca da esquerda para direita com velocidade v
  - A força **F** gera uma tensão de cisalhamento τ entre a chapa superior e o fluido adjacenta a ela
  - Um bloco de fluido (linha cheia), inicialmente em repouso, será acelerado e se deformará (linha tracejada)

Tensões



- Para muitos fluidos, observa-se, experimentalmente, uma relação linear entre a tensão de cisalhamento τ e a taxa de deformação $\frac{\Delta v}{\Delta y}$ das lâminas de fluido:

$$\tau \propto \frac{\Delta v}{\Delta y}$$

ou no limite Δv, $\Delta y \to 0$,

$$\tau \propto \frac{dv}{dy}$$

- Isaac Newton (1643-1727) supôs que a constante de proporcionalidade entre τ e a taxa de deformação fosse um propriedade do fluido, a qual ele denominou viscosidade

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

- A constante μ (coeficiente de viscosidade do fluido) é também conhecida como viscosidade dinâmica ou molecular, cuja unidade no SI é Pa · s (conhecida como Poiseuille) - $[\mu] = Kg/(m \cdot s)$
- Quanto mais viscoso o fluido, mais fortes são as tensões de cisalhamento entre suas lâminas e, consequentemente, maior é a dissipação de energia
- Por isso, é necessário mais esforço para mexer com uma colher um pote de mel do que um copo com água

Fluidos Newtonianos e Não-Newtonianos

- Fluidos que satisfazem a equação abaixo são ditos newtonianos:

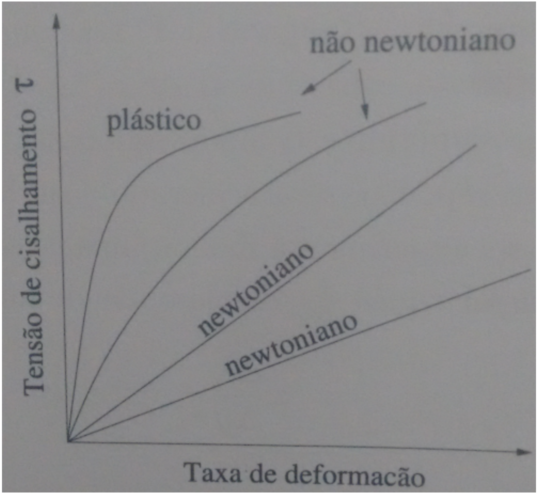
$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

- No regime de escoamento laminar, as tensões em muitos fluidos reais, como água e ar, são dadas pela equação acima
- Polímeros, tintas e o sangue são fluidos não newtonianos
- Em fluidos não newtonianos, a taxa de deformação $\frac{dv}{dy} = f(\tau)$, em que f é uma função que varia
- Fluidos newtonianos:

$$f(\tau) = \frac{\tau}{\mu}$$

Fluidos Newtonianos e Não-Newtonianos

- Comportamento da tensão τ em função da taxa de deformação $\frac{dv}{dy}$



Viscosidades dinâmica μ e cinemática ν

- Viscosidade cinemática ν:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho},$$

  no qual ρ é a densidade do fluido, $[\nu] = \text{m}^2/\text{s}$.
- A viscosidade μ dos líquidos diminui com o aumento da temperatura, mas é pouco afetada pela pressão
- A viscosidade ν também varia pouco com a pressão. Pois, para os líquidos, grandes variações de pressão são necessárias para que haja uma alteração de significativa em ρ
- Para os gases, a viscosidade μ aumenta com o aumento da temperatura, mas também não é afetada significativamente pela pressão
- A temperatura constante, a viscosidade ν dos gases varia inversa e significativamente com a pressão, devido à grande variação da densidade com a pressão, ou seja, devido à facilidade de compressão dos gases

Tensões em Fluidos Newtonianos

Tensões em Fluidos Newtonianos

- Tensões em fluidos newtonianos (equações constitutivas)

$$\tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{V}),$$
$$\tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{V}),$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

  no qual μ é a viscosidade molecular, ou dinâmica, do fluido
- O coeficiente λ é chamado de segundo coeficiente de viscosidade (hipótese de Stokes):

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

- Tensões em fluidos newtonianos:

$$\tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{V}),$$
$$\tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{V}),$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

- Equações de momento linear na forma conservativa:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x$$
$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho f_y$$

- Equações de momento linear para fluidos newtonianos:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} =$$
$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda(\nabla \cdot V)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \rho f_x$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} =$$
$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda(\nabla \cdot V)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \rho f_y$$

Equação de energia

- Tensões em fluidos newtonianos (equações constitutivas)

$$\tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{V})$$
$$\tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{V})$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

- Equação de energia na forma conservativa:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho e\mathbf{V}) = \rho\frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla\cdot\dot{\mathbf{q}} - p(\nabla\cdot\mathbf{V}) + \tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e\mathbf{V}) = \rho\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}} - p(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \Phi$$

$$\Phi = 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] + \lambda\left(\nabla \cdot \mathbf{V}\right)^2$$

- Φ representa a taxa de dissipação da energia mecânica devido à ação das tensões viscosas

Equações de Estado

Equações de Estado

- Equação da continuidade, da conservação de momento linear 2D , e da energia $\Longrightarrow$ 04 equações e 05 incógnitas: e, ρ, u, v, p
- Existem também os coeficientes de viscosidade μ e condutividade térmica k que, embora não sejam as incógnitas, devem ser determinados em função das condições termodinâmicas
- Sistemas de equações não está fechado, já que temos mais incógnitas do que equações
- Além disso, não há uma equação que permita o cálculo da pressão, já que as equações de energia, momento e continuidade, respectivamente, fornececem meios para calcular e, u, v e ρ entre sucessivos instantes de tempo
- Desse modo, não há, a princípio, como se calcular a pressão a partir das equações de energia, momento e continuidade

- A termodinâmica nos fornece, pela relação das variáveis termodinâmicas p, e e ρ entre si, uma equação de estado para o cálculo da pressão
- Se utilizamos ρ e temperatura T como variáveis de estado, obtemos as seguintes equações de estado para o escoamento:

$$p = p(\rho, T)$$
$$e = e(\rho, T)$$

- No caso do escoamento de um gás, muitas vezes, podemos assumir que o material se comporta como um gás perfeito:

$$p = \rho R T$$
$$e = c_v T$$

com R sendo a constante do gás, T sua temperatura e c_v seu coeficiente de calor específico a volume constante

- No caso do escoamento de um gás, muitas vezes, podemos assumir que o material se comporta como um gás perfeito:

$$p = \rho R T$$
$$e = c_v T$$

- Determinamos a pressão a partir de ρ e T, sendo que T está relacionada com a energia interna pela expressão $T = e/c_v$
- 06 incógnitas: e, ρ, u, v, p e T, agora 06 equações
- Coeficientes de viscosidade μ e condutividade térmica k são obtidos a partir de dados experimentais tabelados para diversas combinações de temperatura e pressão ou a partir da teoria cinética dos gases

Simplificação das Equações

Simplificação das Equações

- Escoamento compressível
  - Velocidade do fluido é maior do 0,1 da velocidade do som no fluido
  - Ou quando gradientes de pressão e temperatura causem variações aprecáveis na densidade do mesmo
- Escoamento incompressível - a densidade ρ é uniforme e constante

$$\nabla \cdot V = 0$$

- Quando viscosidade dinâmica $\mu = 0$, o escoamento é dito invíscido
- Escoamentos incompressíveis, inviscidos e irrotacionais, u e v podem ser considerados como componentes do gradiente da função linha de corrente ψ

$$\nabla^2 \psi = 0$$

- Escoamentos invíscidos gerais são descritas pela Equação de Euler
  - Equações de Navier-Stokes com viscosidade dinâmica $\mu = 0$

Equações de Euler 2D

Forma conservativa em coordenadas cartesianas supondo o fluido não condutor de calor ($k = 0$):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho F_x$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho F_y$$

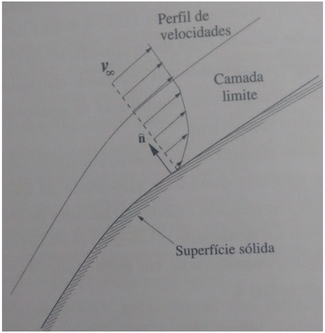
$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{V}) = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}$$

Camada limite

- Ludwing Prandtl (1905) foi o primeiro pesquisador a demonstrar que, ao redor da superfície de corpos em movimento imersos, em um fluido, há uma fina região na qual o gradiente de velocidade $\frac{\partial v}{\partial n}$ normal à superfície do corpo é significativo
- Nessas regiões, as tensões de cisalhamento não podem ser desprezadas, mesmo que o fluido tenha uma viscosidade pequena
- A essa região dá-se o nome de camada limite

Camada limite

- A velocidade varia de zero, na superfície sólida, até v_∞, na fronteira da camada
- A velocidade v_∞ é a velocidade do escoamente livre em relação ao corpo



Camada limite

- Em geral, a camada limite é muito fina na região em que o fluido incide sobre um corpo
- Para um corpo delgado como um aerofólio, a camada limite aumenta progressivamente em expessura devido aos efeitos das tensões de cisalhamento conforme o escoamento se afasta da região de incidência
- Além disso, quanto maior a velocidade relativa entre o fluido e o corpo, mais fina é a camada limite

- A essência do trabalho de Prandtl (1905) é a divisão em duas partes:
  - a camada limite – as tensões viscosas são importantes, e
  - o escoamento fora dessa camada – pode desprezar os efeitos da viscosidade
- Até hoje, na computação de alguns escoamentos, muitas vezes, despreza-se o efeito da viscosidade, especialmente em regiões afastadas de uma superfície sólida, fora da camada limite
- Os fluidos são, então, tratados como invíscidos (sem viscosidade), também denominados "ideais", para distingui-los dos fluidos viscosos ou "reais"
- As equações de Euler são frequentemente utilizadas para a simulação de escoamentos de fluidos invíscidos

- Escoamento incompressível, viscoso e laminar
- Variações de temperatura serão consideradas pequenas o suficiente para que alterações na densidade e na viscosidade do fluido, devidas às variações de temperatura, serão consideradas desprezíveis (escoamento não precise ser isotérmico)

Equações de Navier-Stokes sem forças externas

- Equação da continuidade (densidade do fluido é considerada constante)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

- Conservação de momento na direção x ($\nu = \frac{\mu}{\rho}$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{(\partial uv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

- Conservação de momento na direção y:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{(\partial uv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

- Desprezou-se aqui a força de campo devido à aceleração gravitacional
- Equação de energia:

$$\rho\frac{De}{Dt} = \rho\frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot (\dot{\mathbf{q}}) + \Phi$$

- Entalpia $h = e + \frac{p}{\rho}$, a equação da energia torna-se:

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \rho\frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot (\dot{\mathbf{q}}) + \Phi$$

- Número Mach (velocidade do fluido/velocidade do som no fluido) M é muito menor do que um, costuma-se desprezar a dissipação viscosa Φ e o termo $\frac{Dp}{Dt}$
- Equação de energia – quando estamos lidando com gases e, em particular, com ar
- Em aplicações de engenharia, as temperaturas e pressões frequentemente encontradas nos permite considerar o fluido como um gás perfeito (entalpia é dada por $h = c_p T$)
- Na ausência de fontes externas ou internas de calor: $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$
- A equação de energia torna-se:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

- Sendo o coeficiente de condutividade térmica k uniforme, assim tem-se

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T$$

$$\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{k}{c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial (\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u T)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v T)}{\partial y} = \frac{k}{c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

- Equação de energia na forma conservativa:
$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u T)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v T)}{\partial y} = \frac{k}{c_p}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$
- Se as diferenças de temperatura no escoamento não forem grandes, podemos muitas vezes desprezar a variação da densidade ρ com a temperatura
- Se, além disso, considerarmos ρ constante e uniforme em todo escoamento, teremos uma EDP parabólica de convecção-difusão:
$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(u T)}{\partial x} + \frac{\partial(v T)}{\partial y} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$
em que $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ é o coeficiente de difusividade térmica do fluido
- Escoamentos incompressíveis e isotérmicos - não precisa resolver a equação acima
- Escoamentos com troca de calor - necessita resolvê-la

Classificação das equações de Navier-Stokes

Tipo	Escoamento estacionário	Escoamento transiente
Viscoso	elíptico	parabólico
Invíscido	$M < 1$ elíptico $M > 1$ hiperbólico	hiperbólico
Camada limite	parabólico	parabólico

- Termos viscosos, ou dissipativos: $\mu \nabla^2 \mathbf{V}$
- Deve-se notar que um único escoamento pode se comportar como uma mistura dos diversos tipos

Número de Reynolds - *Re*

- V e L são magnitudes da velocidade e comprimento representativos de um escoamento
- Vamos supor que as derivadas espaciais da velocidade do fluido apresentam variação de V/L ao longo da distância L. Portanto, o termo convectivo será proporcional a $V\frac{V}{L}$
- A segunda derivada espacial da velocidade, presente no termo viscoso, será proporcional a $\frac{V}{L^2}$
- A razão entre as magnitudes dos termos convectivos e viscosos representa o número de Reynolds (Re):

$$Re = \frac{V^2/L}{\nu V/L^2} = \frac{LV}{\nu} = \frac{\rho LV}{\mu}$$

Número de Reynolds - *Re*

- A razão entre as magnitudes dos termos convectivos e viscosos representa o número de Reynolds (Re):

$$Re = \frac{V^2/L}{\nu V/L^2} = \frac{LV}{\nu} = \frac{\rho LV}{\mu}$$

- Re fornece uma indicação da magnitude de dois efeitos físicos importantes presentes no escoamento, convecção e difusão
- Essa caracterização do escoamento via Re pode indicar se o escoamento é laminar ou turbulento
- Escoamentos em que $Re >> 1$, a adequada discretização do termo convectivo é fundamental para que efeitos como difusão ou dispersão numéricas não interfiram na solução calculada

Forma Adimensional das Equações

- Os problemas de mecânica dos fluidos podem, em geral, ser caracterizados por grandezas específicas: velocidade do escoamento, diâmetro do tubo e outras
- As grandezas dimensionais podem ser agrupadas em parâmetros adimensionais, como o número de Reynolds
- Considere-se o escoamento ao redor de um modelo de avião em escala reduzida dentro de um túnel de vento. O escoamento depende da geometria do modelo e das propriedades do fluido
- Como garantir que o comportamento do escoamento ao redor do modelo é válido para o escoamento sobre o avião em tamanho natural?
- Consegue-se isso com o conceito de similiaridade de escoamentos, ou seja, devemos garantir que as geometrias do modelo e do avião sejam similares - devem diferir apenas na escala
- Os campos de velocidade e aceleração devem também ser similares, e os escoamentos possuírem os mesmos parâmetros adimensionais relevantes

- Diz-se que os escoamentos são similiares ou que apresentam similaridade
- Se as equações de movimento forem escritas na forma adimensional e se os escoamentos forem similares, então, as dimensões físicas do objeto, modelo ou avião, serão irrelevantes
- Os parâmetros adimensionais aparecem como coeficientes nas equações adimensionalizadas
- Medições da velocidade ou pressões adimensionais sobre o modelo irão corresponder aos mesmos valores adimensionais sobre o avião
- As respectivas grandezas dimensionais são obtidas ao multiplicarmos os valores adimensionais pelos parâmetros dimensionais relevantes

- A adimensionalização das equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis e isotérmicos pode ser feita a partir das grandezas adimensionais:

$$p^* = \frac{p}{\rho_0 V_0^2}; \quad u^* = \frac{u}{V_0}; \quad v^* = \frac{v}{V_0}; \quad x^* = \frac{x}{L_0}; \quad y^* = \frac{y}{L_0}; \quad t^* = \frac{tV_0}{L_0}$$

- As frações acima assumem a forma geral:

$$\text{Grandeza adimensional} = \frac{\text{Grandeza dimensional}}{\text{Valor de referência com a mesma dimensão}}$$

- As grandezas adimensionais:

$$p^* = \frac{p}{\rho_0 V_0^2}; \quad u^* = \frac{u}{V_0}; \quad v^* = \frac{v}{V_0}; \quad x^* = \frac{x}{L_0}; \quad y^* = \frac{y}{L_0}; \quad t^* = \frac{tV_0}{L_0}$$

- Equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

- Conservação de momento linear na direção x $(\nu = \frac{\mu}{\rho},\ \rho = \rho_0)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{(\partial uv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial (u^*)^2}{\partial x^*} + \frac{(\partial u^* v^*)}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial (y^*)^2}\right)$$

- Conservação de momento linear na direção y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{(\partial uv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\partial (v^*)^2}{\partial y^*} + \frac{\partial (u^* v^*)}{\partial x^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial (y^*)^2}\right)$$

- O número de Reynolds que caracteriza o escoamento:

$$Re = \frac{\rho_0 V_0 L_0}{\mu}$$

- As grandezas adimensionais:

$$p^* = \frac{p}{\rho_0 V_0^2}; \quad u^* = \frac{u}{V_0}; \quad v^* = \frac{v}{V_0}; \quad x^* = \frac{x}{L_0}; \quad y^* = \frac{y}{L_0}; \quad t^* = \frac{tV_0}{L_0};$$
$$T^* = \frac{T}{T_0}; \quad \Phi^* = \frac{\Phi L_0^2}{\mu V_0^2}$$

- Equação de energia ($h = c_p T$, $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$):

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \rho \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot (\dot{\mathbf{q}}) + \Phi$$

$$\implies \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} =$$
$$\frac{1}{RePr} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial (y^*)^2} \right) + (\gamma - 1) M^2 \left(\frac{Dp^*}{Dt^*} + \frac{\Phi^*}{Re} \right)$$

  - $Re = \frac{\rho_0 V_0 L_0}{\mu}$,
  - $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$, em que $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$
  - γ é a razão entre os calores específicos a pressão constante c_p e a volume constante c_v,
  - $M = \frac{V_0}{a_0}$, em que a_0 é velocidade do som característica do meio

- Equação de energia adimensionalizada

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} =$$
$$\frac{1}{RePr}\left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial (y^*)^2}\right) + (\gamma - 1)M^2\left(\frac{Dp^*}{Dt^*} + \frac{\Phi^*}{Re}\right)$$

- Para escoamentos incompressíveis, como aqueles envolvendo líquidos, $M << 1$ e, portanto, $M^2 \approx 0$, o que permite desprezar os termos de dissipação viscosa e de pressão.
- Para escoamentos que tenha como único parâmetro adimensional característico o número de Reynolds, a solução das equações fornece valores de u^*, v^* e p^*, independentes das dimensões geométricas ou propriedades do fluido

- Caso as equações de momento possuam termos-fonte, como forças de campo, esses devem ser dimensionalizados pela combinação de grandezas apropriadas
- Número de Froude: razão entre as forças inerciais e gravitacionais (escoamentos em que a gravidade tem papel importante, como aqueles com superfícies livres)

$$Fr = \frac{V_0^2}{gL_0}$$

- Número de Mach: razão entre a velocidade característica V_0 e a velocidade do som a_0 característica do meio

$$M = \frac{V_0}{a_0}$$

- Número de Prandtl: razão entre a viscosidade cinemática ν e a difusividade térmica α do fluido (escoamentos em que há troca de calor entre o fluido e o meio externo)

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \text{ em que } \alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

Referências

1. Joel H. Ferziger and Milovan Peric. Computational Methods for Fluid Dynamics, Springer, 3rd edition, 2001.
2. **Livro-texto**: Armando de Oliveira Fortuna, Ténicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos, Edusp, 2ed., 2012.