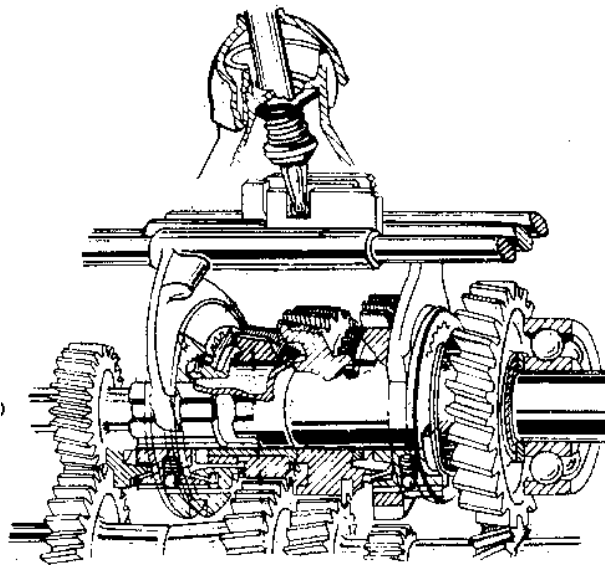


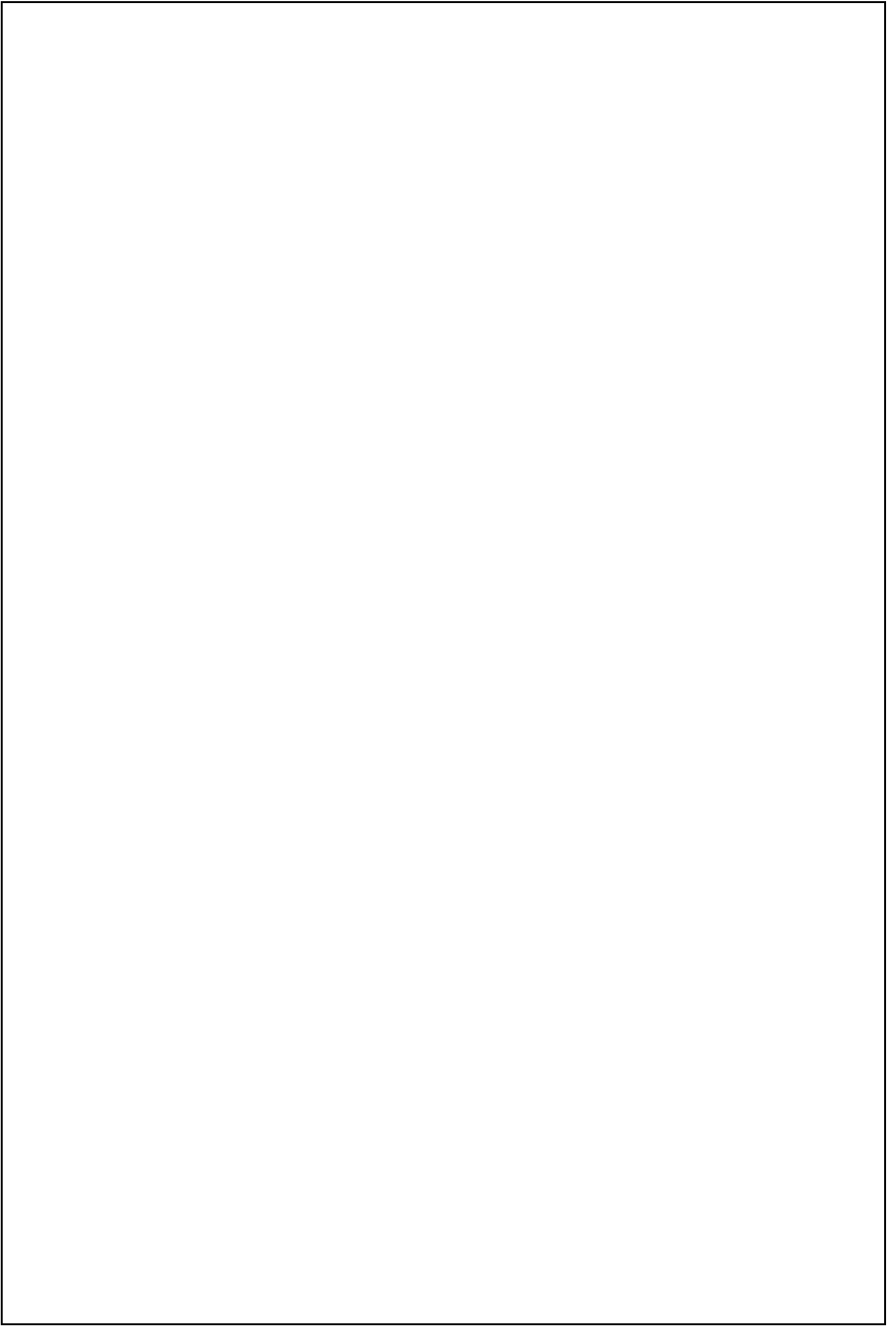
Zahnradgetriebe

- Übungsumdruck -



Prof. Dr.-Ing. Dieter H. Müller
BIK, Bremer Institut für Konstruktionstechnik
Universität Bremen

bearbeitet von Dipl.-Ing. Thorsten Tietjen



Inhalt

1.	Einleitung	1-1
2.	Formelzeichen und Benennungen	2-1
3.	Grundlagen	3-1
3.1	Stirnradgetriebe	3-2
3.2	Kegelradgetriebe	3-5
3.3	Schneckengetriebe	3-6
3.4	Schraubradgetriebe	3-7
4.	Verzahnungsgeometrie	4-1
4.1	Übersetzung	4-1
4.2	Modul, Eingriffswinkel	4-3
4.3	Durchmesser, Achsabstand, Zahnradbreite	4-6
4.4	Profilverschiebung, Betriebseingriffswinkel	4-8
4.5	Profilüberdeckung, Sprungüberdeckung	4-11
4.6	Verzahnungsqualität	4-13
5.	Kräfte an Stirnradpaaren	5-1
6.	Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern	6-1
6.1	Allgemeine Einflußfaktoren	6-2
6.1.1	Anlagenfaktor	6-2
6.1.2	Dynamikfaktor	6-3
6.1.3	Stirnfaktor	6-7
6.1.4	Breitenfaktor	6-9
6.2	Bestimmung der Zahnfußspannung und der zulässigen Zahnfußspannung	6-11
6.2.1	Schrägenfaktor	6-11
6.2.2	Formfaktor	6-12
6.2.3	Spannungskorrekturfaktor	6-14
6.2.4	Spannungskorrekturfaktor für die Abmessungen der Standard-Referenz-Prüfräder	6-15
6.2.5	Lebensdauerfaktor	6-15
6.2.6	Dynamische Stützziffer	6-16
6.2.7	Oberflächenfaktor	6-16

6.2.8	Größenfaktor	6-16
6.3	Zahnbruch und Sicherheitsfaktor S_F	6-17
6.4	Bestimmung der Flankenpressung und der zulässigen Flankenpressung	6-18
6.4.1	Einzeleingriffsfaktoren	6-19
6.4.2	Zonenfaktor	6-20
6.4.3	Elastizitätsfaktor	6-21
6.4.4	Überdeckungsfaktor	6-21
6.4.5	Schrägenfaktor	6-22
6.4.6	Lebensdauerfaktor	6-22
6.4.7	Werkstoffpaarungsfaktor	6-23
6.4.8	Einfluß der Schmierfilmbildung	6-24
6.4.9	Größenfaktor	6-26
6.5	Grübchenbildung und Sicherheitsfaktor S_H	6-27
7.	Getriebeschmierung	7-1
7.1	Auswahl des Schmierstoffs	7-1
7.2	Schmierungsarten	7-2
8.	Literatur	8-1

1. Einleitung

Dieser Umdruck ist eine Ergänzung zur Vorlesung und setzt den Vorlesungsstoff teilweise als bekannt voraus. Der Umdruck gibt zunächst eine kurze Einführung in Zahnradgetriebe-Bauformen und befaßt sich anschließend mit der geometrischen Auslegung der Stirnradverzahnungen. Darauf aufbauend werden die an den Zahnradern angreifenden Kräfte ermittelt.

Die Kräfte dienen dann als Grundlage für die Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern in bezug auf die wesentlichen Beanspruchungen und dadurch entstehende Schäden am Zahnrad:

Zahnfußbiegung (Zahnbruch)

Flankenbeanspruchung (Pittingbildung)

Die Auslegung der im Script enthaltenen Zahnradgetriebeberechnungen erfolgt nach DIN-Normen oder entsprechenden Literaturstellen wie Niemann Bd. II und III. Die DIN 3990 führt dabei eine große Anzahl an Faktoren in die Berechnung ein, die z. B. Konstruktions- und Betriebseinflüsse berücksichtigen. Weiterhin enthält die DIN für viele dieser einzelnen Faktoren Diagramme, denen diese Faktoren entnommen werden können. Das Script wurde jedoch auf die entsprechenden Gleichungen, die die Kurvenverläufe der Diagramme wiedergeben, beschränkt.

Für den Festigkeitsnachweis wurden teilweise vereinfachte Annahmen, bzw. Festlegungen von Daten getroffen, die als konstante Werte in die Berechnung eingehen, da einige Daten ansonsten nur über Prüfungen/Test oder Erfahrungswerte zu ermitteln sind. Die nachstehenden Berechnungsabläufe sind so aufgebaut, daß hiernach eine kontinuierliche Ermittlung der einzelnen Faktoren erfolgen kann.

2. Formelzeichen und Benennungen

Bezeichnung	Einheit	Erläuterung
a	mm	Achsabstand
a_d	mm	Null-Achsabstand
b	mm	Zahnbreite
c	mm	Kopfspiel
d	mm	Teilkreisdurchmesser
d_a	mm	Kopfkreisdurchmesser
d_b	mm	Grundkreisdurchmesser
d_f	mm	Fußkreisdurchmesser
d_w	mm	Wälzkreisdurchmesser
g	mm	Eingriffsstrecke
h	mm	Zahnhöhe
h_a	mm	Kopfhöhe
h_f	mm	Fußhöhe
i	-	Übersetzung
k	mm	Kopfhöhenänderungsfaktor
m	mm	Modul
n	min^{-1}	Drehzahl
p	mm	Teilung
q_k	-	Formfaktor
q_e	-	Überdeckungsgrad
u	-	Zähnezahlverhältnis
v	m/s	Geschwindigkeit
x	mm	Profilverschiebungsfaktor
z	-	Zähnezahl
z_v	-	Virtuelle Zähnezahl
F_t	N	Nenn-Umfangskraft
K_v	-	Dynamikfaktor
K_A	-	Anwendungsfaktor
$K_{F\alpha}$	-	Stirnfaktor (Zahnfuß)
$K_{F\beta}$	-	Breitenfaktor (Zahnfuß)
$K_{H\alpha}$	-	Stirnfaktor (Flanke)
$K_{H\beta}$	-	Breitenfaktor (Flanke)
M_t	Nm	Nenn-Drehmoment
P	kW	Leistung

S_F	-	Sicherheitsfaktor, Zahnfußtragfähigkeit
S_H	-	Sicherheitsfaktor, Flankentragfähigkeit
Y_F	-	Formfaktor
Y_{NT}	-	Lebensdauerfaktor (Zahnfuß)
Y_R	-	Oberflächenfaktor
Y_S	-	Spannungskorrekturfaktor
Y_X	-	Größenfaktor (Zahnfuß)
Y_β	-	Schrägenfaktor (Zahnfuß)
Y_δ	-	relative Stützziffer
Z_v	-	Geschwindigkeitsfaktor
Z_B, Z_D	-	Einzeleingriffsfaktoren
Z_E	$(N/mm^2)^{0.5}$	Elastizitätsfaktor
Z_H	-	Zonenfaktor
Z_L	-	Schmierstofffaktor
Z_{NT}	-	Lebensdauerfaktor (Flanke)
Z_R	-	Rauheitsfaktor
Z_W	-	Werkstoffpaarungsfaktor
Z_X	-	Größenfaktor (Flanke)
Z_β	-	Schrägenfaktor (Flanke)
Z_ϵ	-	Überdeckungsfaktor (Flanke)
α	-	Eingriffswinkel
α_{wt}	-	Betriebseingriffswinkel
α_t	-	Stirneingriffswinkel
β	-	Schrägungswinkel
β_b	-	Grundschrägungswinkel
ϵ	-	Überdeckung
ϵ_α	-	Profilüberdeckung
ϵ_β	-	Sprungüberdeckung
ϵ_γ	-	Gesamtüberdeckung
η	-	Wirkungsgrad
ω	1/s	Winkelgeschwindigkeit

3. Grundlagen

Zahnräder übertragen die Drehbewegung von einer Welle auf eine zweite durch Formschluß der im Eingriff befindlichen Zähne. Unter einem Getriebe versteht man eine Baugruppe aus einem oder mehreren Radpaaren, die von einem Gehäuse oder Gestell umschlossen werden. Man kennt Festgetriebe oder Standgetriebe mit unterschiedlicher Übersetzung, Schaltgetriebe, deren Übersetzungen sich durch Ineingriff bringen verschiedener Räder ändern lassen, Verteilergetriebe zum gleichzeitigen Antrieb mehrerer Wellen und Umlauf- oder Planetengetriebe, bei denen zwei Räder coaxial angeordnet sind und ein drittes als Planetenrad in einem um die coaxialen Radachsen drehbaren Steg gelagert ist und um dem Steg umläuft.

Man verbindet parallele Wellen durch Stirnräder und erhält Stirnradgetriebe; sich schneidende Wellen durch Kegelräder und erhält Kegelradgetriebe; sich kreuzende Wellen durch Schraubräder und erhält Schraubenradgetriebe, bzw. durch Schnecke und Schneckenrad und erhält Schneckenradgetriebe, bzw. durch Hyperboloidräder, die in der Praxis durch Kegelräder ersetzt werden, deren Achsen versetzt sind, und erhält Hypoidgetriebe.

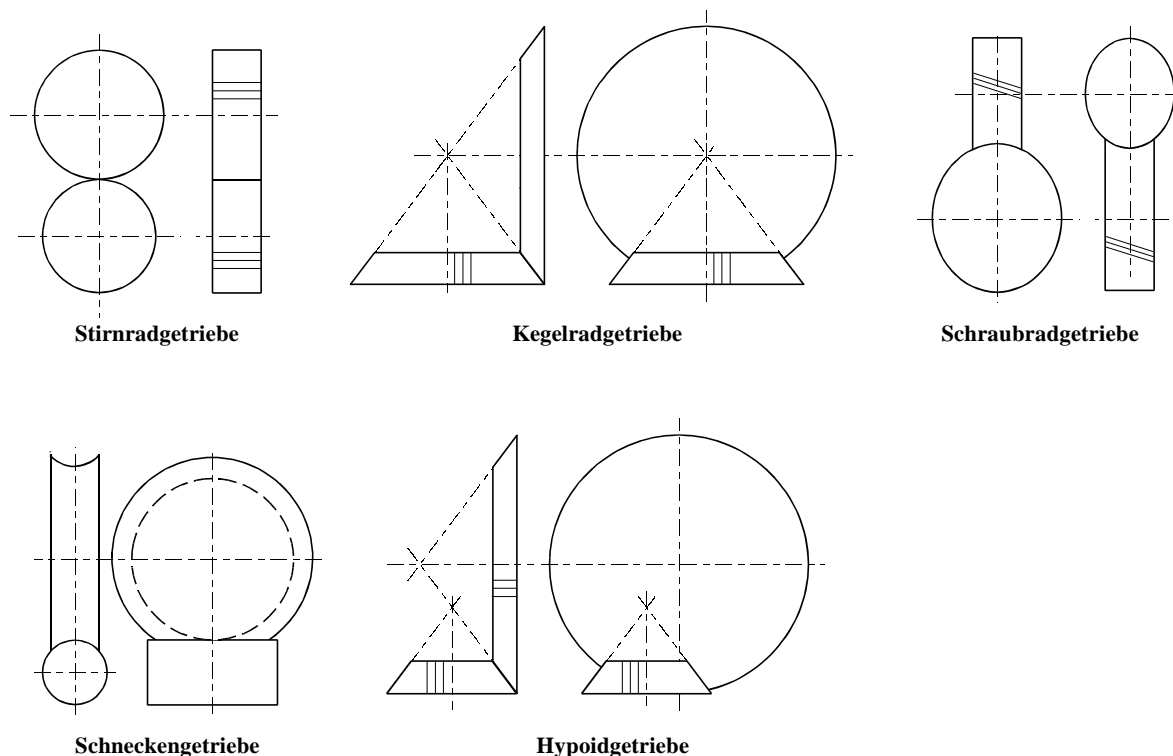


Bild 3.1: Zahnradgetriebe

3.1 Stirnradgetriebe

Stirnradgetriebe werden mit geradverzahnten und schrägverzahnten Stirnrädern und mit parallel liegenden Achsen sowie Außenverzahnung ausgelegt. Üblicherweise werden dabei bis zu drei Getriebestufen realisiert, wobei diese als Null- V-Null wie auch als V-Getriebe berechnet werden können.

Die Berechnung und Auslegung erfolgt nach den DIN-Normen 780 Teil 1, 868, 3960, 3990 Teil 1-5 sowie 3992. Mit DIN 868 sind die allgemeinen Begriffe und Bestimmungsgrößen für Zahnräder, Zahnradpaare und Zahnradgetriebe genormt, mit DIN 3960 für Stirnräder und Stirnradpaare mit Evolventenverzahnung und mit DIN 780 die Moduln für Stirnräder. Die DIN 3990 beinhaltet die Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern und die DIN 3992 die Profilverschiebung bei Stirnrädern mit Außenverzahnung.

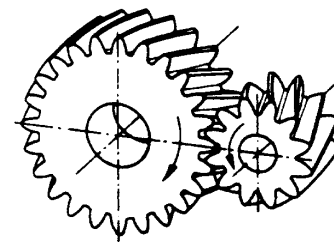
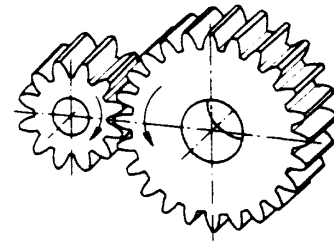


Bild 3.1.1: Gerad- und Schrägverzahnte Stirnräder

Das Verzahnungsgesetz kann durch eine Vielzahl von Zahnprofilen erfüllt werden. Für die

Flankenform werden jedoch fast ausschließlich die Evolvente, die Zykloide und der Kreisbogen verwendet. Die Evolventenverzahnung ist die meistbenutzte Verzahnung und wird am häufigsten verwendet und ist auch Grundlage der in den nachfolgenden Kapiteln aufgeführten Gleichungen.

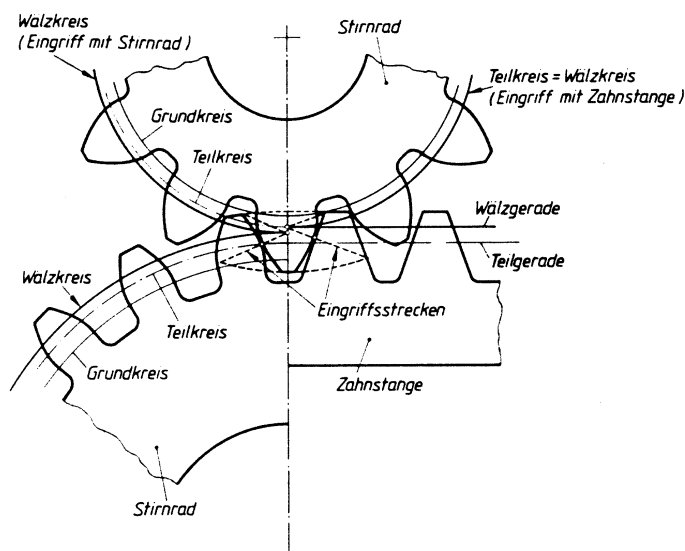
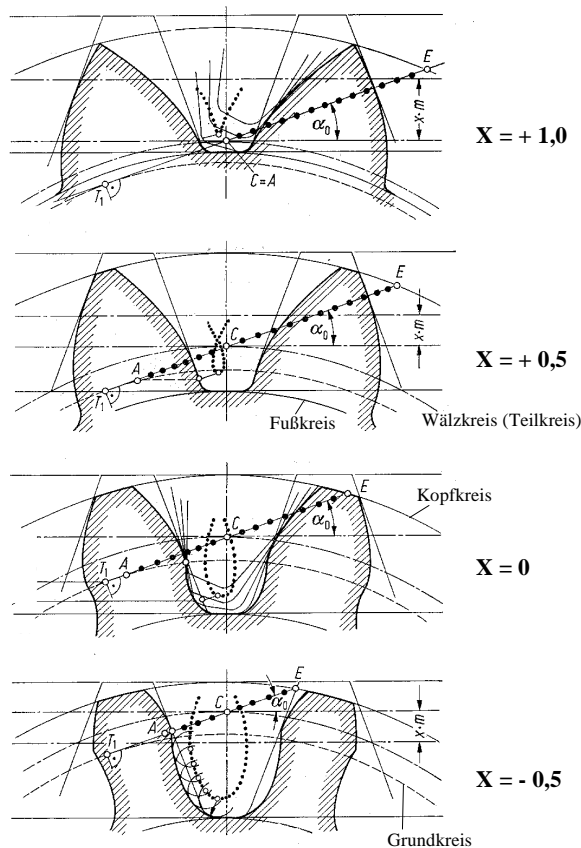


Bild 3.1.2: Evolventenverzahnung

Bei der Evolventenverzahnung sind die Stirnprofile Teile von Evolventen (Kreisevolventen), die durch Abrollen einer Geraden auf einem Kreis, dem Grundkreis, erzeugt gedacht werden können (Bild 3.1.2).



Die beiden Geraden, die die beiden Grundkreise eines Radpaares berühren, sind die Eingriffslinien für die Rechts- und Linksflanken; sie schneiden sich im Wälzpunkt C. Der Winkel, den die Eingriffslinie mit der Tangente am Wälzpunkt C bildet, heißt Eingriffswinkel α und ist mit $\alpha=20^\circ$ genormt. Weil zwei Grundkreise stets zwei berührende Geraden haben und die Form der Stirnprofile von Lagenänderungen der Grundkreise nicht beeinflusst wird, sind Evolventenverzahnungen unempfindlich gegen Achsabstandsänderungen eines Radpaares. Diese Eigenschaft kann zu einer Profilverschiebung ausgenutzt werden. Es sind dabei negative und positive Profilverschiebungen möglich (siehe Bild 3.1.3).

Bild 3.1.3: Auswirkung der Profilverschiebung X bei einem Rad mit 12 Zähnen [nach Niemann]

Zahnräder ohne Profilverschiebung werden als Null-Räder und Zahnräder mit einer Profilverschiebung als V-Minus oder V-Plus Räder bezeichnet. Null- und V-Räder können beliebig zu Getrieben zusammengesetzt werden, ohne daß die Eingriffs- und Abwälzverhältnisse dadurch gestört werden. Je nach Paarung der Räder unterscheidet man:

- **Null-Getriebe:** Paarung zweier Null-Räder mit Null-Achsabstand. Die Teilkreise berühren sich im Wälzpunkt C. Anwendung bei Getrieben aller Art mit mittleren Belastungen und Drehzahlen. Ein vorgegebener Achsabstand kann jedoch i. A. nicht mit genormten Modulen erreicht werden.
- **V-Null-Getriebe:** Paarung eines V-Plus-Rades mit einem V-Minus-Rad gleicher positiver und negativer Profilverschiebung. Die Profilverschiebungssumme ist Null. Die Teilkreise berühren sich im Wälzpunkt, sind daher zugleich Wälzkreise, so daß der Achsabstand gleich dem Null-Achsabstand ist. Der Anwendungsbereich liegt bei Getrieben mit größeren Übersetzungen und höheren Belastungen.

- **V-Getriebe:** Paarung eines V-Rades mit einem Null-Rad oder V-Räder mit unterschiedlicher Profilverschiebung untereinander, wobei das Ritzel möglichst eine positive Profilverschiebung erhält. Die Teilkreise berühren sich nicht, sie sind nicht mehr mit den Betriebswälzkreisen identisch. Sie finden ihre Anwendung, wenn bei vorgeschriebener Übersetzung ein konstruktiv bedingter Achsabstand durch Null- oder V-Null-Getriebe mit genormten Moduln nicht erreichbar wird. Weitere Anwendungsgebiete sind im Bereich hoher Tragfähigkeiten bei hochbelasteten Getrieben (beide Räder erhalten eine positive Profilverschiebung) und wenn durch negative Profilverschiebungen ein besonders gleichförmiger und ruhiger Lauf des Getriebes erzielt werden soll.

Eine Tragfähigkeitsberechnung wird in bezug auf die wesentlichen Beanspruchungen und dadurch entstehenden Schäden am Zahnrad durchgeführt. In Kapitel 6 wird die Zahnfuß- und Grübchentragfähigkeit (Flankenbeanspruchung) nach DIN 3990 beschrieben. Für die Tragfähigkeitsberechnung bzw. für die Berechnung der verschiedenen Faktoren sind dabei mehrere Methoden zugelassen. Das vorliegende Script beschreibt die Ermittlung der Faktoren nach der Methode B, die für die meisten Anwendungsfälle ausreichend genau ist.

Eine Berechnung /Auslegung von gerad- und schrägverzahnten Stirnrädern erfolgt meist in den Grenzen der nachstehend aufgeführten Daten:

- Leistungsgrenze $P \leq 5000 \text{ kW}$
- Antriebsdrehzahl $n \leq 130000 \text{ min}^{-1}$
- Übersetzung (1-stufig) $i \leq 5.5$
- Übersetzung (2-stufig) $i \leq 25$
- Übersetzung (3-stufig) $i \leq 100$

(Die Aufteilung der Übersetzungen bei mehrstufigen Getrieben erfolgt hinsichtlich eines minimalen Getriebevolumens.)

- Ritzelzähnezahl $z \geq 10$
- Wirkungsgrad je Stufe $\eta = 0,93 \dots 1,0$
- Schrägungswinkel $\beta = 8 \dots 25^\circ$

(Der vorgegebene Bereich deckt alle gängigen Ausführungsformen ab. Kleinere Schrägungswinkel lohnen nicht und größere erzeugen einen sehr hohen Axialschub auf die Räder, der von den Lagern aufgenommen werden muß.)

Auszulegende bzw. einzugebende Zahnradmodule werden der DIN-Norm 780 entnommen. Die in dieser Norm festgelegten Moduln der Reihen I und II für Stirnräder nach DIN 3960 stimmen im Bereich von $m=1 \dots 500 \text{ mm}$ mit den metrischen Moduln der internationalen Norm ISO 54

überein. Die Moduln sind in einer Vorzugsreihe I und in die Nebenreihe II aufgeteilt, um eine Beschränkung der Anzahl für die Herstellung von Stirnrädern erforderlichen Werkzeuge und Prüfmittel zu erreichen. Die Verwendung von Moduln der Reihe I sind den Moduln der Nebenreihe bei einer Auslegung zu bevorzugen.

3.2 Kegelradgetriebe

Kegelräder mit Gerad-, Schräg- und Bogenverzahnungen dienen zum Übertragen von Drehbewegungen und Drehmomenten in Wälzgetrieben mit sich schneidenden bzw. sich kreuzenden Achsen. Normalerweise schneiden sich die Achsen in einem Punkt unter dem beliebigen Achsenwinkel Σ , meist jedoch $\Sigma=90^\circ$. Bei Kegelrädern mit sich kreuzenden Achsen (Hypoidgetriebe) geht die Ritzelachse im Abstand a an der Radachse vorbei.

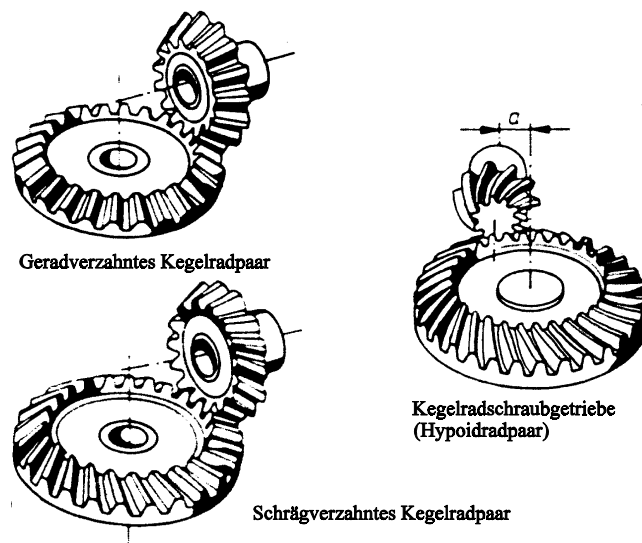


Bild 3.2.1: Kegelradgetriebe

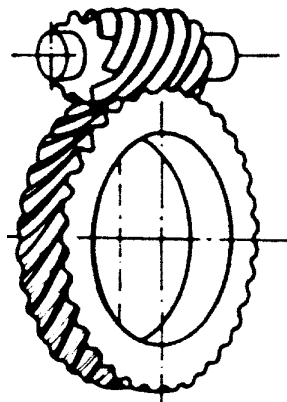
Bei Kegelrädern rollen zwei Kegel auf ihren Mantelflächen aufeinander ab, und ihre Profilkurven sind keine ebenen Kurven mehr. Beim Kegelrad entspricht die Kugelevolvente der Kreisevolvente des Stirnrades; d.h., wird für eine Verzahnung eine Kugelevolvente verwendet, dann zeigen die Räder die gleichen Eigenschaften der Kreisevolvente beim Stirnrad, und alle dort angestellten Überlegungen können sinngemäß übernommen werden.

Geradverzahnte Kegelräder werden nur bei kleinen Drehzahlen verwendet, z.B. für Getriebe von handbetätigten Hebezeugen, Schützenwinden, Hebeböcken oder für Universalgetriebe mit kleineren Leistungen. Schrägverzahnte Kegelräder laufen wegen des größeren Überdeckungsgrades ruhiger und geräuschärmer als geradverzahnte. Sie werden bei höheren Leistungen und Drehzahlen z.B. für Universalgetriebe, für schnelllaufende Eingangsstufen bei mehrstufigen Winkelgetrieben und für Getriebe von Werkzeugmaschinen verwendet. Bogenverzahnte Kegelräder werden bevorzugt eingesetzt bei besonders hohen Anforderungen an Laufruhe und Zahnbruchfestigkeit. Aufgrund der Flankengeometrie tragen bogenverzahnte Kegelräder nur auf

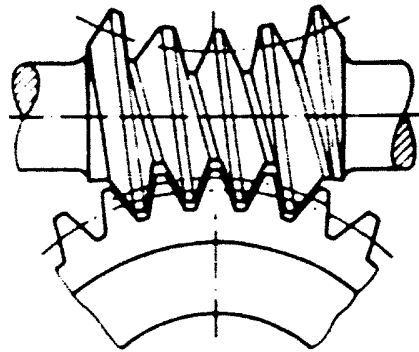
einem Teil der Zahnbreite und sind somit unempfindlich gegenüber Achsverlagerungen. Sie finden Verwendung z.B. in Hochleistungsgetrieben und Ausgleichsgetrieben von Kraftfahrzeugen.

3.3 Schneckengetriebe

Schneckengetriebe sind Zahnradgetriebe mit im allgemeinen rechtwinklig gekreuzten Achsen. Schneckengetriebe bestehen aus der meist treibenden Schnecke (Zylinder- bzw. Globoidschnecke) mit zylindrischer bzw. globoidischer Verzahnung und dem zugehörigen Schneckenrad.



Zylinderschneckengetriebe



Globoidschneckengetriebe

Bild 3.3.1: Schneckengetriebe

Das **Zylinderschneckengetriebe** mit zylindrischer Schnecke und Globoidschneckenrad ist das am häufigsten verwendete Getriebe dieser Art. Weiterhin gibt es **Globoidschnecken-Zylinderradgetriebe** aus Globoidschnecke und Zylinderschneckenrad, das aber wegen der teuren Schneckenherstellung nur sehr selten verwendet wird. **Globoidschneckengetriebe** aus Globoidschnecke und Globoidschneckenrad sind teuer in der Herstellung und werden bei Hochleistungsgetrieben verwendet.

Die Berechnung und Auslegung von Zylinderschnecken erfolgt nach den DIN-Normen 780 Teil 2, 3975 sowie 3976. Hier sind die Moduln für Zylinderschneckengetriebe, die Begriffe und Bestimmungsgrößen für Zylinderschneckengetriebe mit Achsenwinkel 90° sowie Zylinderschnecken; Abmessungen, Zuordnung von Achsabständen und Übersetzungen in Schneckengetrieben, genormt.

3.4 Schraubradgetriebe

Schrägstirnräder mit verschiedenen Schrägungswinkeln ($\beta_1 \neq \beta_2$) aber mit gleicher Teilung und gleichem Eingriffswinkel im Normalschnitt ergeben gepaart ein Schraubradgetriebe. Die Radachsen kreuzen sich unter dem Winkel Σ (meist $\Sigma = 90^\circ$). Neben dem Wälzgleiten findet beim Schraubradgetriebe noch ein Schraubgleiten der Zähne statt, d.h. die Zähne schieben sich wie bei einem Schraubengewinde aneinander vorbei.

Schraubradgetriebe werden selten und nur bei kleineren Leistungen und Übersetzungen (max. $i = 5$), z.B. für den Antrieb von Zündverteilerwellen bei Kraftfahrzeugmotoren, verwendet. Schraubradgetriebe haben eine geringere Tragfähigkeit, einen höheren Verschleiß und einen wesentlich kleineren Wirkungsgrad als Stirnrad-, Kegelrad- oder Schneckengetriebe, können aber im Gegensatz zu den anderen Zahnradgetrieben axial verschoben werden, ohne den Eingriff zu gefährden.

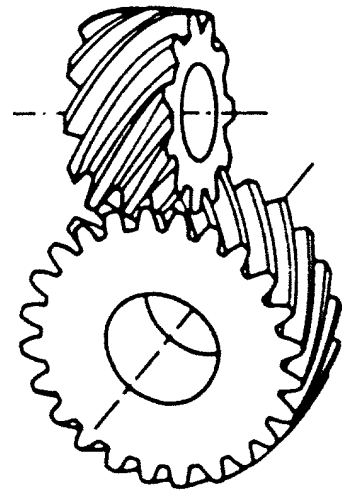


Bild 3.4.1: Schraubradgetriebe

4. Verzahnungsgeometrie

4.1 Übersetzung

Die Übersetzung i eines Radpaares ist das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeit ω_1 oder der Drehzahl n_1 des treibenden Rades zur Winkelgeschwindigkeit ω_2 oder der Drehzahl n_2 des getriebenen Rades.

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (4.1)$$

Bei $i > 1$ spricht man von einer Übersetzung ins Langsame, bei $i < 1$ von einer Übersetzung ins Schnelle. Das Verhältnis der Zähnezah z_2 des Großrades zur Zähnezah z_1 des Kleinrades (Ritzel) ist das Zähnezahverhältnis u .

$$u = \frac{z_2}{z_1} \quad (4.2)$$

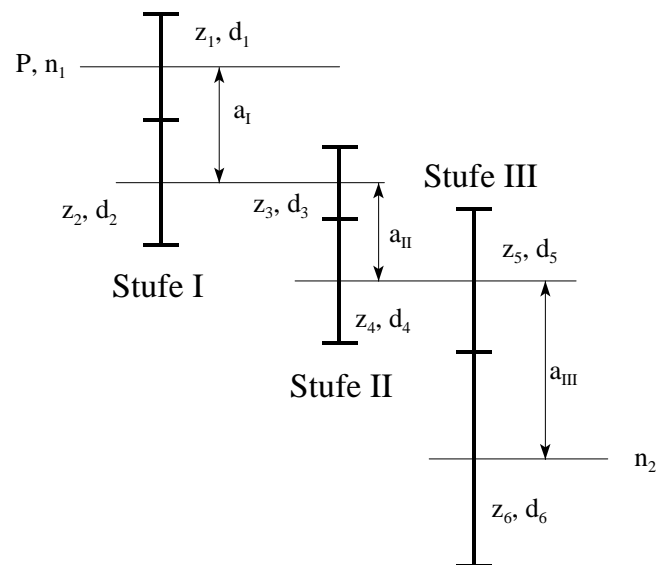


Bild 4.1.1: Prinzipskizze eines 3-stufigen Getriebes

Die Berechnung geradverzahnter und schrägverzahnter Stirnradgetriebe mit Außenverzahnung beginnt meist mit der Festlegung der Getriebestufen. Die nachstehende Tabelle enthält Anhaltswerte, über maximal zu erzielende Gesamtübersetzungen bei 1 bis 3-stufigen Getrieben.

Stufenzahl	max. Gesamtübersetzung
1	5.5
2	25
3	100

Tabelle 4.1.1: Übliche Ausführungen von Stufenzahl und Gesamtübersetzung

Für Übersetzungen ins Schnelle gilt sinngemäß der Reziprokwert von i .

Die Aufteilung der Einzelübersetzungen für zwei- und dreistufige Stirnradgetriebe kann entsprechend Bild 4.1.2 nach dem Kriterium, dass das Gesamtvolumen der Zahnräder ein Minimum darstellt, vorgenommen werden. Weiterhin gilt für die Kurvenverläufe, dass die zulässige Zahnflankentragfähigkeit (Grübchentragfähigkeit) für alle Zahnräder des zu berechnenden Getriebes gleich sein soll.

Es wird mit den vorgegebenen Daten für die Gesamtübersetzung i_{ges} und der Zähnezahzahl des Ritzel z_1 ein zulässiger Bereich für die Einzelübersetzungen bestimmt. Anschließend werden die Zähnezahlen der folgenden Zahnräder ermittelt und auf einen ganzzahligen Wert gerundet. Zum Abschluss erfolgt, wenn notwendig, eine geringfügige Korrektur der Gesamtübersetzung.

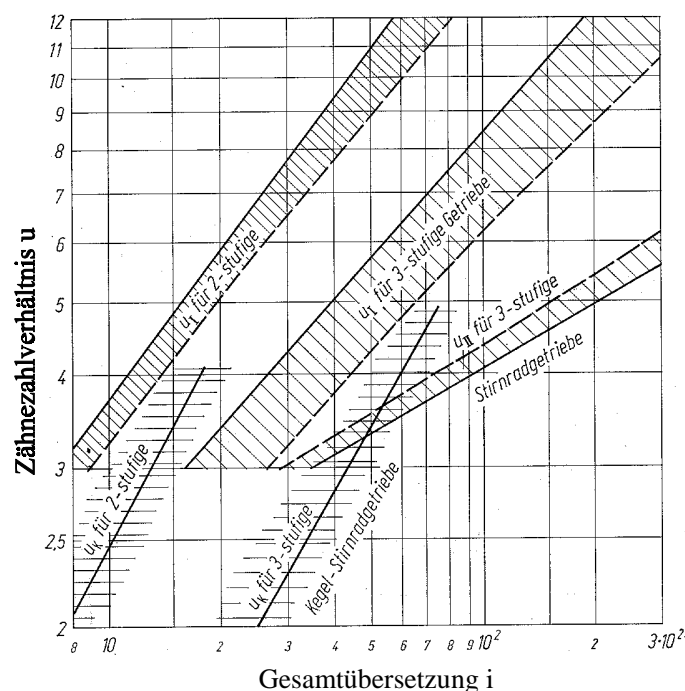


Bild 4.1.2: Aufteilung von u für zwei- und dreistufige Getriebe [nach Niemann]

4.2 Modul, Eingriffswinkel

Der Modul m ist ein Grundmaß, auf das alle übrigen Größen der Verzahnung bezogen werden. Der Modul m ist der Normalmodul (Modul im Normalschnitt) m_n der Radverzahnung, bei einer Schrägverzahnung wird dieser Modul auf den Stirnschnitt / den Stirnmodul umgerechnet.

$$m_t = \frac{m_n}{\cos\beta} \quad (4.3)$$

Der Stirnschnitt ist dabei für die Eingriffsverhältnisse maßgebend (Stirnschnitt S-S senkrecht zur Radachse) und der Normalschnitt (N-N senkrecht zu den Flankenlinien) ist für die Herstellung und das Werkzeug maßgebend. Diese beiden Linien schließen den Schrägungswinkel β ein. Die geometrischen Größen werden im Stirnschnitt mit dem Index t und im Normalschnitt mit dem Index n bezeichnet.

Tabelle 4.2.1 zeigt die Moduln nach DIN 780. Die Moduln sind in die Vorzugsreihe I und die Nebenreihe II aufgeteilt und für Stirnrad- und Schraubradgetriebe aller Art anzuwenden. Die in Reihe II eingeklammerten Moduln sind dabei nur für Sonderzwecke vorgesehen.

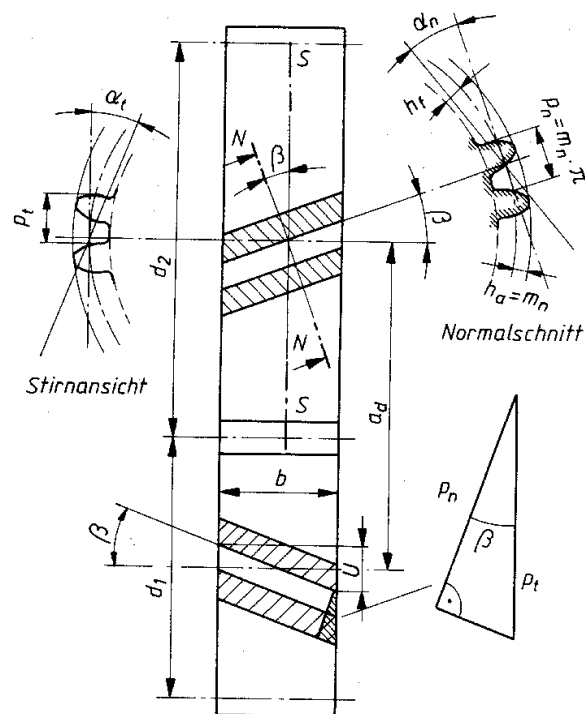


Bild 4.2.1: Zusammenhang von Normal- und Stirnschnitt für schrägverzahnte Stirnräder

Moduln m [mm]		Moduln m [mm]		Moduln m [mm]	
Reihe I	Reihe II	Reihe I	Reihe II	Reihe I	Reihe II
0.05			0.85		7
	0.055	0.9		8	
0.06			0.95		9
	0.07	1		10	
0.08			1.125		11
	0.09	1.25		12	
0.1			1.375		14
	0.11	1.5		16	
0.12			1.75		18
	0.14	2		20	
0.16			2.25		22
	0.18	2.5		25	
0.2			2.75		(27)
	0.22	3			28
0.25			(3.25)		(30)
	0.28		3.5	3	
0.3			(3.75)		36
	0.35	4			(39)
0.4			(4.25)	40	
	0.45		4.5		(42)
0.5			(4.75)		45
	0.55	5		50	
0.6			(5.25)		55
	0.65		5.5	60	
0.7			(5.75)		70
	0.75	6			
0.8			(6.5)		

Tabelle 4.2.1: Moduln nach DIN 780

Zur Auslegung eines Moduls kann die nachstehend beschriebene überschlägige Dimensionierung herangezogen werden.

$$m_n = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot M_t \cdot \cos^2 \beta \cdot q_{kl} \cdot q_\varepsilon}{z_1^2 \cdot \left(\frac{b}{d_1}\right) \cdot \frac{\sigma_{Flim}}{S_F}}} \quad (4.4)$$

Der Formfaktor q_k ist von der Zähnezahl des Ritzels und der Profilverschiebung abhängig und wird nach Bild 4.2.2 ermittelt.

Unter Verwendung der vorgegebenen Ritzelzähnezahl und der Ausführung der Zahnradstufen kann ein zugehöriger Formfaktor bestimmt werden.

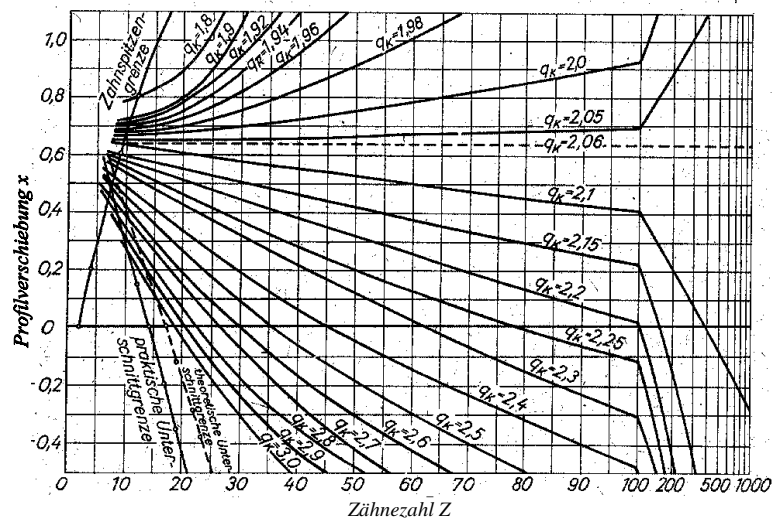


Bild 4.2.2: Diagramm zur Ermittlung des Formfaktors q_k für Außenverzahnung [6]

Der Überdeckungsgrad q_e ist der Reziprokwert des Überdeckungsfaktors, der mit $\varepsilon_a = 1.5$ in eine überschlägige Berechnung berücksichtigt wird. Weiterhin kann bei der Modulauslegung ein Sicherheitsfaktor von $S_F = 1.5$ (Mittelwert) angenommen werden.

Die Wahl des Breitenverhältnisses b/d_1 ist von den Genauigkeitsklassen bzw. Verzahnungsqualitäten, der Lagerung und dem Werkstoff / der Wärmebehandlung abhängig. Tabelle 4.2.2 enthält Anhaltswerte für verschiedene Zahnbreitenverhältnisse, wobei ungehärtete Zahnräder sowie eine symmetrische Lagerung vorausgesetzt werden.

Qualität	≤ 5	6	7	8	9	≥ 10
Zahnbreitenverhältnis b/d	1.35	1.25	1.15	1.05	0.95	0.85

Tabelle 4.2.2: Auswahl des Breitenverhältnisses für symmetrische Lagerungen nach [6]

Ebenso wie beim Modul wird zwischen einem Normalprofil mit dem Normaleingriffswinkel α_n und einem Stirnprofil mit dem Stirneingriffswinkel von $\alpha_t > \alpha_n$ unterschieden. Der Normaleingriffswinkel ist mit 20° genormt und der Stirneingriffswinkel wird für schrägverzahnte Zahnräder unter Berücksichtigung des Schrägungswinkels β berechnet.

$$\tan \alpha_t = \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta} \quad (4.5)$$

4.3 Durchmesser, Achsabstand, Zahnradbreite

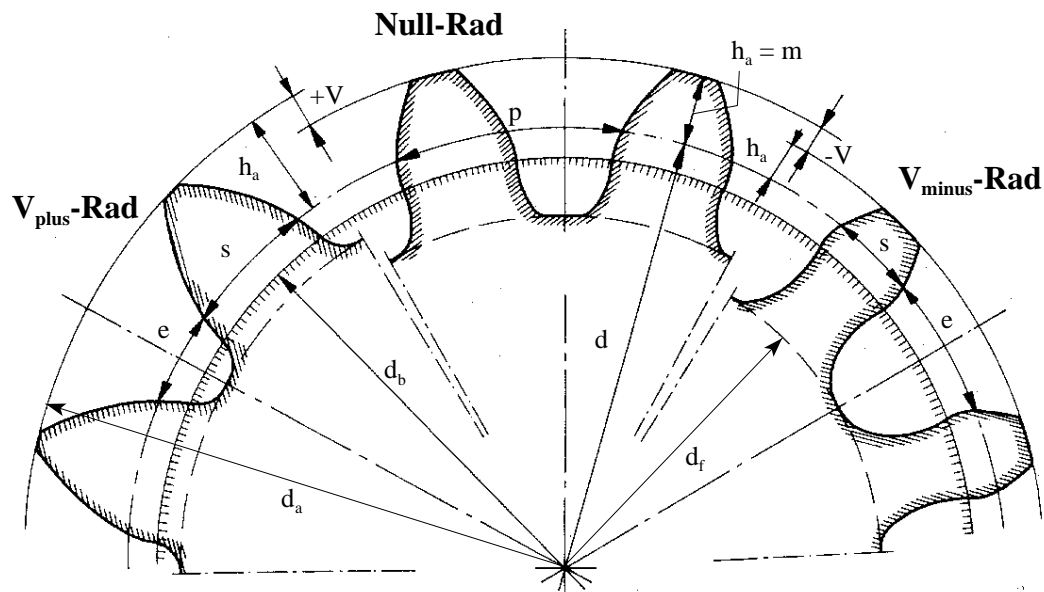


Bild 4.3.1: Zahnform in Abhängigkeit von der Profilverschiebung bei Null-Rad, positiver Verschiebung und negativer Verschiebung

Der Teilkreis ist der Schnitt des Teilzylinders mit einer Stirnschnittebene und wird für schrägverzahnte Stirnräder bestimmt durch:

$$d = z \cdot m_t = \frac{z \cdot m_n}{\cos\beta} \quad (4.6)$$

Die Berechnung der geradverzahnten Stirnräder erfolgt nach:

$$d = m \cdot z \quad (4.7)$$

Der Achsabstand eines profilverschobenen Radpaares mit Geradverzahnung wird berechnet mit

$$a = m \cdot \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w} \quad (4.8)$$

und für schrägverzahnte Stirnräder

$$a = \frac{m_n}{\cos\beta} \cdot \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \frac{\cos\alpha_t}{\cos\alpha_{wt}} \quad (4.9)$$

Bei einem geradverzahnten Außenradpaar ohne Profilverschiebung (Null-Radpaar) spricht man von einem Null-Achsabstand und die Gleichungen vereinfachen sich zu:

$$a_d = m \cdot \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{d_1 + d_2}{2} \quad (4.10)$$

bzw.

$$a_d = m_t \cdot \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{d_1 + d_2}{2} \quad (4.11)$$

Im nachfolgenden sind die weiteren Gleichungen für die geometrischen Zusammenhänge für geradverzahnte und für schrägverzahnte Stirnräder aufgeführt, bzw. gegenübergestellt. Berücksichtigt wurde dabei ein Mindestkopfspeil von $c=c_1=c_2=0.2 \cdot m$ entsprechend der Vorgabe in der DIN-Norm 3992.

	Geradverzahnung	Schrägverzahnung
Grundkreis- durchmesser	$d_{b1} = d_1 \cdot \cos\alpha$ $d_{b2} = d_2 \cdot \cos\alpha$	$d_{b1} = d_1 \cdot \cos\alpha_t$ $d_{b2} = d_2 \cdot \cos\alpha_t$
Wälzkreis- durchmesser	$d_{w1} = d_1 \cdot \frac{\cos\alpha_w}{\cos\alpha_w}$ $d_{w2} = d_2 \cdot \frac{\cos\alpha}{\alpha}$	$d_{w1} = d_1 \cdot \frac{\cos\alpha_t}{\cos\alpha_{wt}}$ $d_{w2} = d_2 \cdot \frac{\cos\alpha_t}{\alpha}$
Kopfkreis- durchmesser	$d_{a1} = 2 \cdot (a + m - x_2 \cdot m) - d_2$ $d_{a2} = 2 \cdot (a + m - x_1 \cdot m) - d_1$	
Fußkreis- durchmesser	$d_{f1} = 2 \cdot a - d_{a2} - 2 \cdot c$ $d_{f2} = 2 \cdot a - d_{a1} - 2 \cdot c$	

Kompakte Getriebe sind kostengünstig und deshalb werden bei einer Getriebeauslegung stets große b/d-Verhältnisse angestrebt. Bei breiten Ritzeln wirken sich jedoch Verzahnungsabweichungen und Verformungen stärker auf die Kraftverteilung über die Breite aus als bei schmalen. Eine Mindestbreite ist jedoch bei Leistungsgetrieben vorzusehen, damit die Räder in Axialrichtung ausreichend steif sind und bei einer Schrägverzahnung ist die erforderliche Sprungüberdeckung einzuhalten. Anhaltswerte für verschiedene Breiten/Durchmesser-Verhältnisse sind in Tabelle 4.3.1 aufgeführt.

Lagerungsart	Wärmebehandlungsart	b / d_1
Beidseitig, symmetrisch	normalisiert (HB \leq 180)	$\leq 1,6$
	vergütet (HB \geq 200)	$\leq 1,4$
	einsatz- o. oberflächengehärtet	$\leq 1,1$
	nitriert	$\leq 0,8$
Beidseitig, unsymmetrisch	normalisiert (HB \leq 180)	$\leq 1,3$
	vergütet (HB \geq 200)	$\leq 1,1$
	einsatz- o. oberflächengehärtet	$\leq 0,9$
	nitriert	$\leq 0,6$
fliegende Lagerung	normalisiert (HB \leq 180)	$\leq 0,8$
	vergütet (HB \geq 200)	$\leq 0,7$
	einsatz- o. oberflächengehärtet	$\leq 0,5$
	nitriert	$\leq 0,4$

Tabelle 4.3.1: Breiten/Durchmesser-Verhältnisse für ortsfeste Stirnradgetriebe [nach Niemann]

Die Zahnbreite kann aber auch in Abhängigkeit des Moduls bestimmt werden, wobei der nachstehende Ansatz mit dem 12-fachen des Moduls eine gute Annäherung darstellt.

$$b = 12 \cdot m \quad (4.16)$$

4.4 Profilverschiebung, Betriebseingriffswinkel

Bei einer profilverschobenen Verzahnung wird das Bezugsprofil um den Betrag $x \cdot m$ vom Teilkreis zum Zahnkopf (positive Profilverschiebung, V-Plus-Getriebe) oder zum Zahnfuß (negative Profilverschiebung, V-Minus-Getriebe) verschoben. Mit einer Profilverschiebung erhält man veränderte Zahnformen bei gleichem Werkzeugprofil, dabei bleiben Teilkreis und Grundkreis unverändert. Durch eine geeignete Wahl der Profilverschiebung kann man demnach die Abmessungen und Eigenschaften der Verzahnung beeinflussen. Ist z.B. ein bestimmter Achsabstand zweier Zahnräder aus konstruktiven Gründen gegeben, so kann dieser durch zweckmäßig an beiden Zahnrädern vorzunehmende Profilverschiebung erreicht werden. Besondere Anforderungen an Tragfähigkeit oder Überdeckungsgrad können ebenfalls durch Profilverschiebung erreicht werden.

Die Geometrie eines profilverschobenen Getriebes unterscheidet sich von dem eines Null-Getriebes in den folgenden Punkten:

V-Plus-Getriebe

- Teilkreis auseinander
- Achsabstand größer
- Betriebseingriffswinkel größer
- Eingriffsstrecke kürzer
- Überdeckungsgrad kleiner

V-Minus-Getriebe

- Teilkreise schneiden sich
- Achsabstand kleiner
- Betriebseingriffswinkel kleiner
- Eingriffsstrecke größer
- Überdeckungsgrad größer

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass eine Profilverschiebung aus folgenden Gründen angewendet wird:

- *Vermeidung von Unterschnitt bei kleinen Zähnezahlen* (bei positiver Profilverschiebung)
- *Verstärkung des Zahnfußes* (bei positiver Profilverschiebung)
- *Korrektur des Achsabstandes*
- *Verringerung der Flankenpressung* (bei positiver Profilverschiebung)
- *Vergleichmäßigung der Kopfgleitgeschwindigkeit*

Die Auswahl/Festlegung der Summe der Profilverschiebungen erfolgt entsprechend der DIN 3992 (Bild 4.4.1). Die Profilverschiebungssumme kann dann unter Verwendung der Bilder 4.4.2 (Übersetzung ins Langsame) und 4.4.3 (Übersetzung ins Schnelle) auf Ritzel und Rad eines Radpaares aufgeteilt werden. Die Diagramme gelten sowohl für Geradverzahnung als auch für Schrägverzahnung. Bei Schrägverzahnung ist an Stelle der Zähnezahl z die virtuelle Zähnezahl z_v zugrunde zu legen, die nach folgender Gleichung angenähert bestimmt wird:

$$z_v \approx \frac{z}{\cos^3 \beta} \quad (4.17)$$

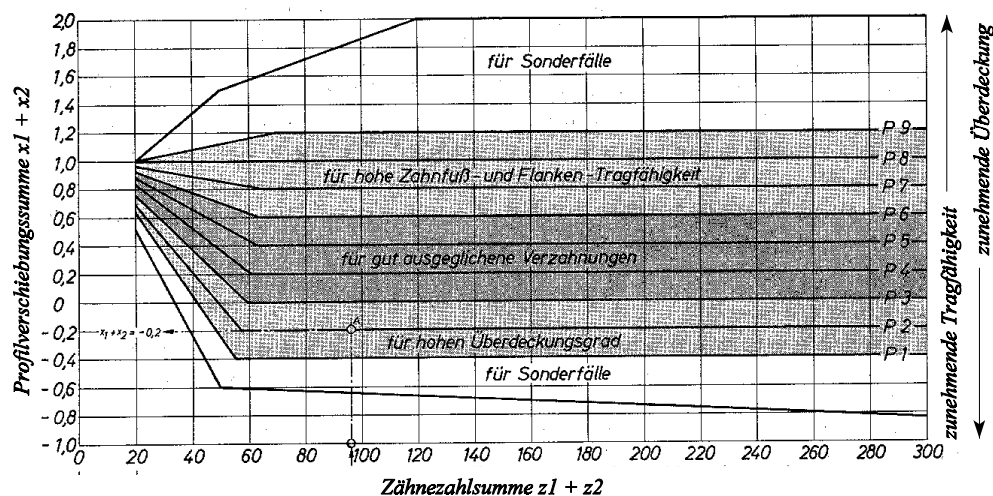


Bild 4.4.1: Wahl der Profilverschiebungssumme nach [DIN 3992]

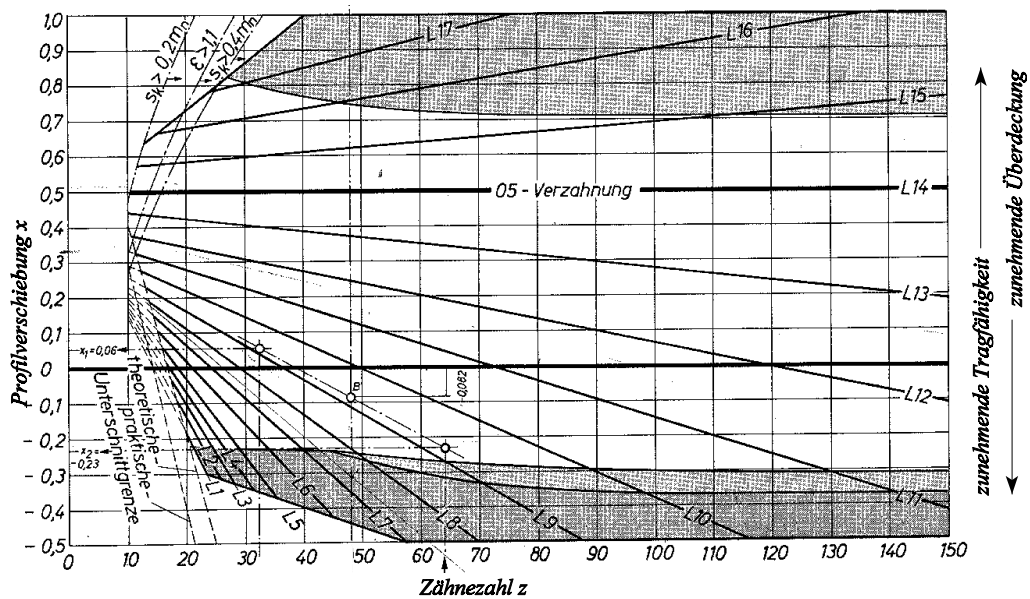


Bild 4.4.2: Aufteilung der Summe der Profilverschiebungsfaktoren x_1 und x_2 auf beide Räder nach [DIN 3992] für Übersetzung ins Langsame

Die Profilverschiebungssumme wird so ausgelegt, dass x_1 und x_2 auf der selben Paarungslinie liegen. Ist die Zähnezahl eines Rades größer 150, so wird für die Aufteilung der Profilverschiebungssumme die Radzähnezahl $z_2 = 150$ zugrunde gelegt.

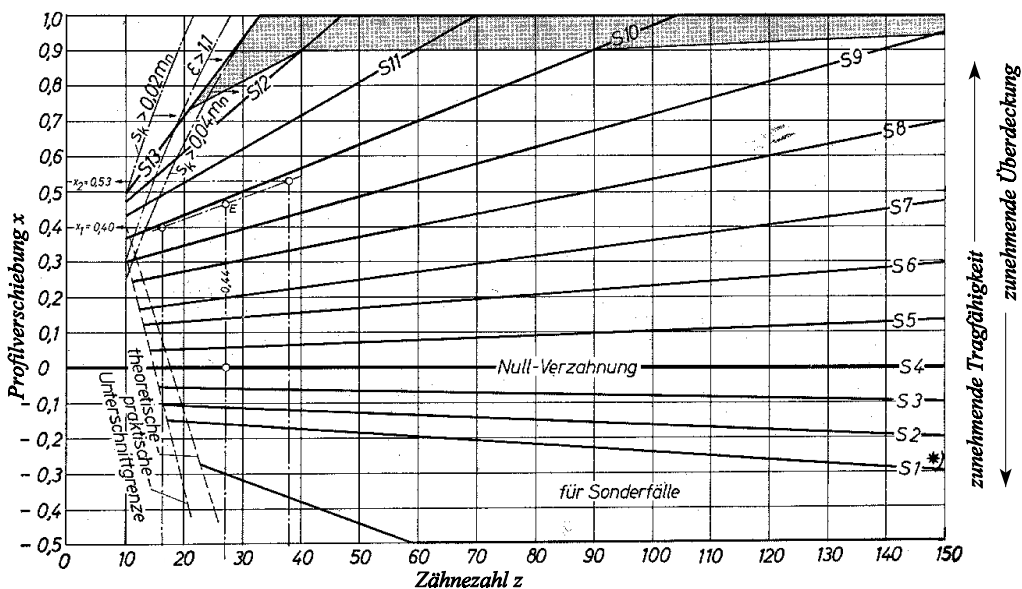


Bild 4.4.3: Aufteilung der Summe der Profilverschiebungsfaktoren x_1 und x_2 auf beide Räder nach [DIN 3992] für Übersetzung ins Schnelle

Die Bestimmung des Betriebseingriffswinkels erfolgt mit dem Achsabstand a und der Summe der Profilverschiebungsfaktoren $x_1 + x_2$.

Geradverzahntes Stirnradpaar:

$$\operatorname{inv}\alpha_w = \operatorname{inv}\alpha + 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \tan\alpha \quad (4.18)$$

Schrägverzahntes Stirnradpaar:

$$\operatorname{inv}\alpha_{wt} = \operatorname{inv}\alpha_t + 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \tan\alpha_n \quad (4.19)$$

Die Evolventenfunktion $\operatorname{inv} \alpha$ gestattet die genaue Berechnung von Abmessungen am Zahnrad und Getriebe. Die Berechnung erfolgt nach:

$$\operatorname{inv}\alpha = \tan\alpha - \hat{\alpha} \quad \text{mit} \quad \hat{\alpha} = \frac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ} \quad (4.20)$$

Ist ein bestimmter Achsabstand zweier Zahnräder gegeben bzw. gefordert, so kann dieser durch an beiden Rädern vorzunehmende Profilverschiebung erreicht werden. Die Summe der Profilverschiebung kann dann durch Umstellen der Gleichungen (4.18) bzw. (4.19) ermittelt werden.

4.5 Profilüberdeckung, Sprungüberdeckung

Um eine kontinuierliche, ununterbrochene Drehbewegung zu gewährleisten, muß ein Zahnpaar seinen Eingriff beginnen, bevor das gerade kämmende seinen Eingriff beendet, d.h. es muß eine Überdeckung vorhanden sein. Das Verhältnis der Eingriffsstrecke zur Eingriffsteilung ist die Profilüberdeckung, die sich mit den nachstehenden Gleichungen für gerad- und schrägverzahnte Stirnräder berechnen läßt.

Geradverzahnung:

$$\epsilon_\alpha = \frac{0.5 \cdot \left(\sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} + \sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} \right) - a \cdot \sin\alpha_w}{m \cdot \pi \cdot \cos\alpha} \quad (4.21)$$

Schrägverzahnung:

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{0.5 \cdot \left(\sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} + \sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} \right) - a \cdot \sin \alpha_{wt}}{m_t \cdot \pi \cdot \cos \alpha_t} \quad (4.22)$$

Bei schrägverzahnten Radpaaren wird der Eingriff zusätzlich um die Sprungüberdeckung verlängert.

$$\varepsilon_{\beta} = \frac{b \cdot \sin \beta}{m_n \cdot \pi} \quad (4.23)$$

4.6 Verzahnungsqualität

Die Bestimmungsgrößen der Verzahnung (Zahnprofil, Teilung, Achsabstand, usw.) können nicht mathematisch genau hergestellt werden. Man muß entsprechend Fertigungstoleranzen vorgeben, die aber so eng zu wählen sind, dass das Getriebe seine Funktionen zufriedenstellend erfüllen kann. Die Verzahnungsqualität wird bei der überschlägigen Modulbestimmung sowie bei der Festigkeitsauslegung der Zahnradstufen benötigt.

DIN-Qualität	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12					
nach der Wärme- behandlung fertig bearbeitet	geschliffen															
				geschabt												
				wälz-gefräst, -gehobelt, -gestoßen												
								formgefräst, gestoßen								
gestantzt, gepreßt, gesintert, gespritzt																
vor der Wärmebe- handlung fertig bearbeitet				nitriert: geschliffen, geschabt												
						einsatzgehärtet: geschabt										
						induktive o. Flamm-Einzelhärtung: wälzgefräst, usw.										
				einsatzgehärtet: wälzgefräst, usw.												
								einsatzgehärtet: formgefräst, usw.								
								Induktions- oder Flamm-Umlaufhärtung: wälzgefräst, usw.								
								Induktions- oder Flamm-Umlaufhärtung: formgefräst, usw.								

Tabelle 4.6.1: Verzahnungsqualität und Herstellverfahren (Ungefähre Zuordnung der DIN-Qualitäten) nach [Niemann]

5. Kräfte an Stirnradpaaren

Die Zahnkraft F_n wird beim Geradstirnrad als Einzelkraft im Wälzpunkt C senkrecht zur Berührungslinie in der Mitte der Zahnbreite angenommen. Während die Normalkraft bei Geradverzahnung senkrecht zur Radachse steht, schneidet sie bei Schrägverzahnung unter dem Winkel $90^\circ - \beta$ (Schrägungswinkel) die Radachse. F_n wird daher in 3 senkrecht zueinander stehende Komponenten zerlegt, in die Umfangskraft F_t , die Radialkraft F_r und die Axialkraft F_a .

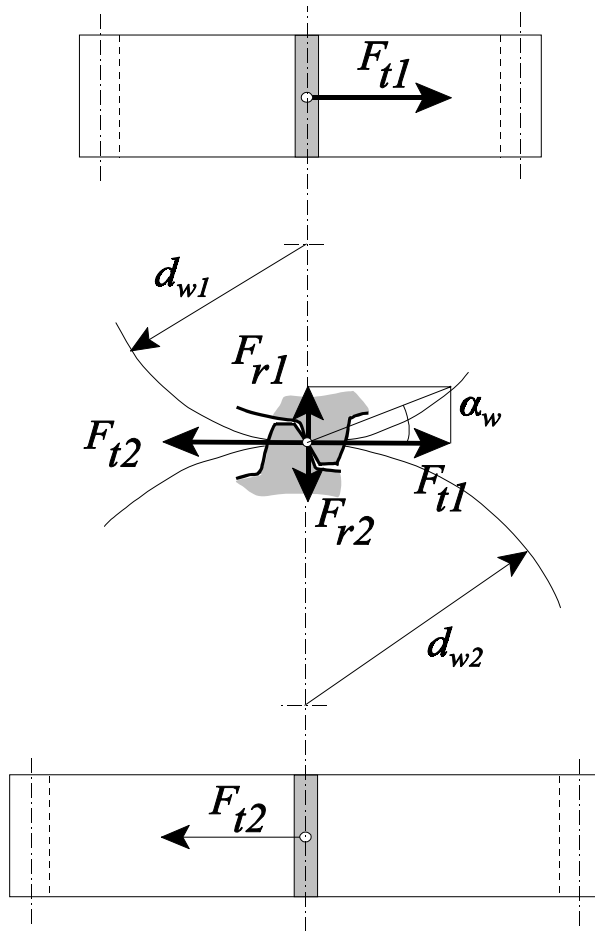


Bild 5.1: Kräfte am geradverzahnten Stirnrad

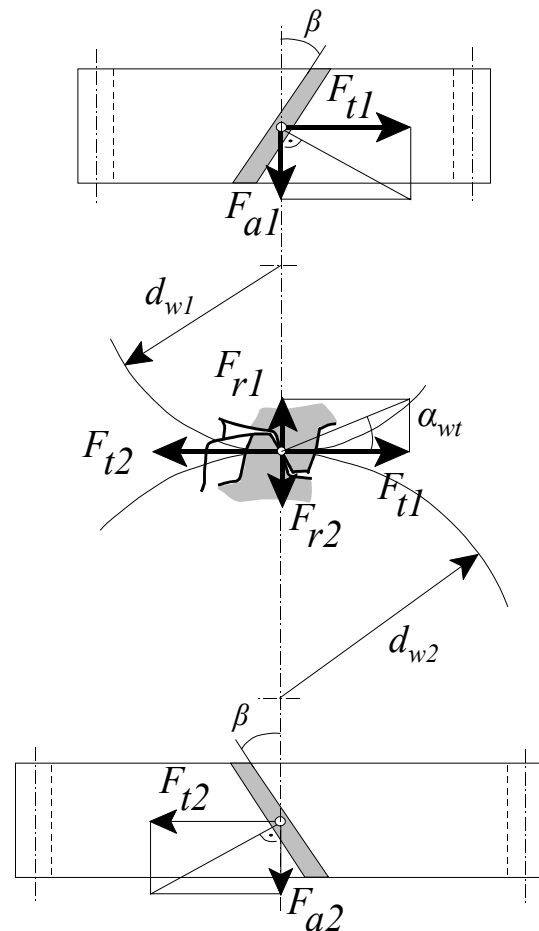


Bild 5.2: Kräfte am schrägverzahnten Stirnrad

Die Nenn-Umfangskraft F_t wird aus dem vom Zahnradpaar übertragenen Nenn-Drehmoment bzw. der Nenn-Leistung berechnet. Weiterhin wird hier dann oftmals ein Wirkungsgrad eingezeichnet, der die Verlustleistung pro Zahnradstufe berücksichtigt. Der Gesamt-Wirkungsgrad reicht bei Stirnradgetrieben von $\eta=93$ bis 99% (je Stufe und unter Vollast).

$$v = \frac{d_{wl} \cdot \omega_1}{2} ; \quad \omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot n_1 \quad (5.1)$$

$$F_t = \frac{P \cdot \eta}{v} ; \quad F_t = \frac{2 \cdot M_t}{d} \quad (5.2)$$

Die Zahnnormalkraft wird aus der Umfangs-(Tangential-)kraft sowie dem Normaleingriffswinkel und bei Schrägverzahnungen mit dem Schrägungswinkel, berechnet. Das gleiche gilt für die Radialkraft, während eine Axialkraft nur bei Schrägverzahnungen auftritt.

	Geradverzahnte Stirnräder	Schrägverzahnte Stirnräder
Zahnnormalkraft	$F_n = \frac{F_t}{\cos\alpha}$	$F_n = \frac{F_t}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} \quad (5.3)$
Radialkraft	$F_r = F_t \cdot \tan\alpha$	$F_r = F_t \cdot \frac{\tan\alpha}{\cos\beta} \quad (5.4)$
Axialkraft	$F_a = 0$	$F_a = F_t \cdot \tan\beta \quad (5.5)$

6. Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern

Die Festigkeitsberechnungen von Zahnstufen erfolgt im Hinblick auf drei wesentliche Beanspruchungen und die damit zusammenhängenden Schadenskriterien:

- **Zahnfußbiegung** → **Zahnbruch**
- **Flankenpressung** → **Pittingbildung**
- **Gleitbeanspruchung** → **Fressen**

Aufgrund der bekannten theoretischen Grundlagen der Beanspruchungsmechanik, des Kenntnisstands über das Festigkeitsverhalten der Werkstoffe, des Vorliegens von umfangreichen Versuchs- und Betriebserfahrungen sowie des Wissensstands über Zusatzeinflüsse und Fehlerquellen ist heute eine weitgehend gesicherte Auslegung von Zahnradstufen möglich. Diese Erkenntnisse fanden ihren Niederschlag in der umfangreichen DIN-Norm 3990, Teil 1 bis 4, nach der heute in vielen Bereichen gearbeitet wird.

Die hier für die Berechnung auf Zahnbruch und Flankenschäden angegebenen Gleichungen entsprechen der DIN-Norm 3990 (Dezember 1987). Zur Ermittlung der zahlreichen Einflußfaktoren stehen nach dieser Norm mehrere Verfahren (A bis D) unterschiedlicher Genauigkeit zur Verfügung, die es ermöglichen, einerseits Ergebnisse zusätzlicher Messungen und theoretischer Berechnungen einzubeziehen, andererseits eine vereinfachte Berechnung, wie sie zum Entwurf eines Getriebes erforderlich ist, durchzuführen.

Man unterscheidet bei der Tragfähigkeitsberechnung rechnerische Sicherheitsfaktoren gegen Grübchenschäden S_H , gegen Zahnbruch S_F und gegen Freßschäden S_S , wobei außerdem zwischen statischer Festigkeit und Dauerfestigkeit unterschieden wird. Bestimmte Mindestwerte für die genannten Sicherheitsfaktoren dürfen bei einer Auslegung nicht unterschritten werden. Unterschiedliche Anwendungsgebiete beeinflussen im höchsten Maße die angesetzten Werte. So läßt man z.B. bei Kraftfahrzeug-Achsgetrieben eine erheblich höhere Flankenpressung als bei Schnellaufgetrieben mit langer Lebensdauer zu. Industrie-Turbogetriebe erreichen bei üblicher Lebensdauer mehr als 10^{10} Lastwechsel, die Überlebenswahrscheinlichkeit soll dabei mehr als 99 % betragen. Da eine umfangreiche Erprobung von Prototypen aus Kostengründen weitgehend ausgeschlossen werden kann, wählt man für die Tragfähigkeit von Turbogetrieben einen relativ hohen Sicherheitsfaktor. Es kann zusammen gefaßt werden, daß je genauer alle Einflußgrößen erfaßt werden, desto zuverlässiger ist das Berechnungsergebnis und desto geringer dürfen die Sicherheitsfaktoren werden.

Das vorliegende Script beinhaltet den Tragfähigkeitsnachweis für die Grübchentragfähigkeit und für die Zahnfußtragfähigkeit jeweils gegen Dauerbruch, für die in der nachstehenden Tabelle Anhaltswerte (Mindestwerte) aufgeführt werden.

	Maximalmoment (rechnerisches Arbeitsmoment)	Normalfall (meist Industrie- getriebe)	Hohe Zuverlässigkeit (z.B. Groß-Turbogetriebe, Schiffsgetriebe, Flugzeug- getriebe)
Zahnbruch- sicherheit $S_{F \min}$	0,7 . . . 1,0	1,4 . . . 1,5	1,6 . . . 3,0
Grübchen- sicherheit $S_{H \min}$	0,5 . . . 0,7	1,0 . . . 1,2	1,3 . . . 1,6

Tabelle 6.1: Anhaltswerte für Sicherheitsfaktoren [nach Niemann]

Der Berechnungsablauf für die Bestimmung der einzelnen benötigten Faktoren wird entsprechend der Methode B (in Einzelfällen Methode C) beschrieben, die für die meisten Anwendungsfälle ausreichend genau ist. Diese Methode eignet sich für genauere Berechnungen und ist ebenfalls zweckmäßig für EDV-Programme. Die Annahmen, unter denen die Faktoren ermittelt werden, sind jeweils aufgeführt.

6.1 Allgemeine Einflußfaktoren

6.1.1 Anlagenfaktor K_A

Der Anwendungsfaktor K_A erfaßt die Zusatzkräfte, die über die Nenn-Umfangskraft hinaus von außen in das Radpaar eingeleitet werden. Diese Zusatzkräfte hängen ab von den Charakteristiken der treibenden und der getriebenen Maschine, den Massen und Federsteifigkeiten im An- und Abtriebsstrang z.B. Wellen und Kupplungen und den Betriebsbedingungen. Der Anwendungsfaktor K_A wird für die Berechnung der Grübchen- und Zahnfußtragfähigkeit verwendet. Die in der Tabelle 6.1.1 enthaltenen Daten sind Anhaltswerte für Industrie- und Schnellaufgetriebe [DIN 3990 T 1].

Arbeitsweise der Antriebs- maschine	Arbeitsweise der getriebenen Maschine			
	gleichmäßig	mäßige Stöße	mittlere Stöße	starke Stöße
gleichmäßig	1.00	1.25	1.50	1.75
leichte Stöße	1.10	1.35	1.60	1.85
mäßige Stöße	1.25	1.50	1.75	2.0
starke Stöße	1.50	1.75	2.0	2.25

Tabelle 6.1.1: Anwendungsfaktor K_A nach [DIN 3990 T1]

6.1.2 Dynamikfaktor K_v

Der Dynamikfaktor K_v berücksichtigt die Auswirkung der inneren dynamischen Kräfte, die durch Schwingungen von Ritzel und Rad gegeneinander hervorgerufen werden, auf die Zahnfußbeanspruchung und die Flankenpressung. K_v ist definiert als Verhältnis der im Zahneingriff eines Radpaares auftretenden maximalen Kraft zur entsprechenden Zahnkraft desselben Radpaares bei Drehzahl nahe null.

Bei der beschriebenen Methode B zur Bestimmung des Faktors wird die vereinfachte Annahme getroffen, dass jedes Zahnradpaar ein einziges, elementares Massen- und Federsystem bildet, welches die kombinierten Massen des Ritzels und des Rades umfaßt, wobei die Zahnfedersteifigkeit gleich der Eingriffsfedersteifigkeit der im Eingriff stehenden Zähne ist. Der Einfluß anderer Stufen eines mehrstufigen Getriebes wird außer acht gelassen, d.h. jedes Zahnradpaar wird wie ein einstufiges Getriebe behandelt. Ferner wird angenommen, dass die Dämpfung beim Eingriff der Räder einen Durchschnittswert aufweist.

Als erstes muß die Bezugsdrehzahl N bestimmt werden und anschließend kann der Drehzahlbereich in drei Teilbereiche aufgeteilt werden (unterkritisch, Hauptresonanz, und überkritisch).

$$N = \frac{n_1 \cdot \pi \cdot z_1}{30000} \cdot \sqrt{\frac{m_{red}}{c_\gamma}} \quad [s^{-1}] \quad (6.1)$$

Infolge des Einflusses der nicht mit einbezogenen Steifigkeiten (z.B. von der Welle, Lager, usw.) und infolge der Dämpfung kann die Resonanzdrehzahl unterhalb oder oberhalb der mit der Gleichung 6.1 berechneten Drehzahl liegen. Aus Sicherheitsgründen wird deshalb ein Resonanzbereich definiert.

Unterkritischer Bereich	$N \leq 0.85$
Hauptresonanz	$0.85 < N < 1,15$
Überkritischer Bereich	$N \geq 1.15$

Für Geradstirnräder mit $\varepsilon_\alpha \geq 1,2$ und Schrägstirnräder mit $\beta \leq 45^\circ$ wird die Eingriffsfedersteifigkeit wie nachfolgend beschrieben berechnet. Für Geradstirnräder mit $\varepsilon_\alpha < 1,2$ ist die Eingriffsfedersteifigkeit bis zu 10% kleiner [DIN 3990] und muß entsprechend verringert werden. Der Berechnungsansatz gilt weiterhin für Außenradpaare, beliebige Bezugsprofile, beliebige Radkörperform sowie Zahnradpaarungen Stahl / Stahl. Weitere, ausführlich beschriebene Voraussetzungen und Annahmen siehe [DIN 3990, Teil 1-5].

$$c_{\gamma} = c' \cdot (0,75 \varepsilon_{\alpha} + 0.25) \quad (6.2)$$

Für Werkstoffpaarungen **Stahl / Stahl** wird die Einzelfedersteifigkeit c' berechnet nach

$$c' = c'_{th} \cdot C_M \cdot C_R \cdot C_B \cdot \cos\beta \quad (6.3)$$

Der Korrekturfaktor C_M berücksichtigt den Unterschied zwischen Meßergebnissen und Berechnungsergebnissen für Vollscheibenräder und wird mit $C_M = 0.8$ festgelegt. Der Radkörperfaktor C_R berücksichtigt die Nachgiebigkeit des Zahnkranzes und des Steges. Bei einem Festigkeitsnachweis von Vollscheibenrädern ist $C_R = 1$ zu setzen. Mit dem Bezugsprofilfaktor C_B werden die Abweichungen des Bezugsprofils gegenüber dem Norm-Bezugsprofil festgelegt. Für Verzahnungen mit dem Norm-Bezugsprofil $\alpha_{pn} = 20^\circ$, $h_{aP} = m_n$, $h_{fP} = 1.25 \cdot m_n$ ist der Faktor $C_B = 1$ (h_{aP} : Kopfhöhe des Zahnrad-Bezugsprofils, h_{fP} : Fußhöhe des Zahnrad-Bezugsprofils).

Für andere Werkstoffpaarungen als Stahl / Stahl kann c' mit folgenden Gleichungen ermittelt werden.

$$c' = c'_{St/St} \cdot \frac{E}{E_{Stahl}} \quad (6.4)$$

Hierin ist:

$$E = \frac{2 \cdot E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2} \quad (6.5)$$

c'_{th} wird unter Annahme eines Bezugsprofils ($\alpha_{pn} = 20^\circ$, $h_{aP} = m_n$, $h_{fP} = 1.2 \cdot m_n$, $\rho_{fP} = 0.2 \cdot m_n$) mit den Gleichungen (6.6) und (6.7) berechnet.

$$c'_{th} = \frac{1}{q'}$$

(6.6) **Tabelle 6.1.2:**
Konstanten für
Gleichung (6.7)

C_1	0.04723
C_2	0.15551
C_3	0.25791
C_4	-0.00635
C_5	-0.11654
C_6	-0.00193
C_7	-0.24188
C_8	0.00529
C_9	0.00182

$$q' = C_1 + \frac{C_2}{z_{n1}} + \frac{C_3}{z_{n2}} + C_4 \cdot x_1 + C_5 \cdot \frac{x_1}{z_{n1}} + C_6 \cdot x_2 + C_7 \cdot \frac{x_1}{z_{n1}} + C_8 \cdot x_1^2 + C_9 \cdot x_2^2 \quad (6.7)$$

Die Berechnung der Ersatzzähnezahl z_n und der virtuellen Zähnezahl z_v siehe Kapitel 5.

Die Berechnung der reduzierten Masse eines außenverzahnten Zahnradpaares erfolgt mit den nachfolgenden Gleichungen, die ein Näherungsverfahren darstellen, aber ausreichend genau sind. Diese Gleichungen gelten für außenverzahnte Stirnräder mit Doppel-Schrägverzahnung, Einfach-Schrägverzahnung und Geradverzahnung. Dabei werden die Massen von Steg und Nabe aufgrund des geringen Einflusses auf das Massenträgheitsmoment vernachlässigt. Für volle Scheibenräder und Scheibenritzel gilt:

$$m_{red} = \frac{\pi}{8} \cdot \left(\frac{d_{m1}}{d_{b1}} \right)^2 \cdot \frac{d_{m1}^2}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2 \cdot u^2}} \quad (6.8)$$

$$d_{m1,2} = \frac{d_{a1,2} + d_{f1,2}}{2} \quad (6.9)$$

(Die Dichte für Stahl beträgt $\rho = 7.83 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$)

Nach der Berechnung der Bezugsdrehzahl N und der Zuordnung zum jeweils gültigen Bereich (unterkritisch, Hauptresonanz, überkritisch) erfolgt die Berechnung des Dynamikfaktors nach unterschiedlichen Gleichungen.

Dynamikfaktor im unterkritischen Bereich ($N \leq 0.85$)

$$K_v = N \cdot (C_{v1} \cdot B_p + C_{v2} \cdot B_f + C_{v3} \cdot B_k) + 1 \quad (6.10)$$

Im Bereich der Hauptresonanz ($0.85 \leq N \leq 1$) berechnet sich der Dynamikfaktor nach

$$K_v = C_{v1} \cdot B_p + C_{v2} \cdot B_f + C_{v4} \cdot B_k + 1 \quad (6.11)$$

und im überkritischen Bereich ($N \geq 1$)

$$K_v = C_{v5} \cdot B_p + C_{v6} \cdot B_f + C_{v7} \quad (6.12)$$

Im Zwischenbereich ($1.15 < N < 1.5$) wird der Dynamikfaktor durch lineare Interpolation aus K_v bei $N=1.15$ und K_v bei $N=1.5$ ermittelt.

$$K_v = K_{v(N=1.5)} + \frac{K_{v(N=1.15)} - K_{v(N=1.5)}}{0.35} \cdot (1.5 - N) \quad (6.13)$$

C_{v1} berücksichtigt die Auswirkung von Teilungsabweichungen und wird mit $C_{v1}=0.32$ als konstant angenommen. C_{v2} berücksichtigt die Auswirkung der Profil-Formabweichung und wird in Abhängigkeit der Gesamtüberdeckung bestimmt. Periodische Änderungen der Eingriffsfedersteifigkeit berücksichtigt der Faktor C_{v3} (Berechnung siehe Tabelle 6.1.4). C_{v4} berücksichtigt Resonanzschwingungen des Radpaares in Umfangsrichtung und die Einflüsse von C_{v5} und C_{v6} entsprechen denen von C_{v1} und C_{v2} . Der Kraftanteil aus der Zahndurchbiegung, die sich bei praktisch konstanter Umfangsgeschwindigkeit durch die Schwankungen der Zahnfedersteifigkeit ergibt, wird durch den Faktor C_{v7} berücksichtigt.

$$B_p = \frac{c' \cdot f_{peff}}{F_t/b \cdot K_A} \quad \text{mit} \quad f_{peff} = f_{pe} - y_p \quad (6.14)$$

$$B_f = \frac{c' \cdot f_{feff}}{F_t/b \cdot K_A} \quad \text{mit} \quad f_{feff} = f_{fa} - y_f \quad (6.15)$$

B_p , B_f und B_k sind dimensionslose Parameter zur Berücksichtigung der Auswirkung von Verzahnungsabweichungen und Profilkorrektur auf die dynamische Kraft. Für Verzahnungsqualitäten 7 und größer ist der Wert für $B_k = 1$. D.h., zur Vereinfachung wurde im Programm dieser Faktor allgemein mit dem Wert 1 belegt. Weiterhin wurden Vereinfachungen zur Bestimmung der beiden anderen Parameter vorgenommen. Die wirksame Eingriffsteilungsabweichung f_{peff} in Abhängigkeit der Verzahnungsqualität (Methode C) berechnet und die Profil-Formabweichung f_{feff} wurde gleich der Eingriffsteilungsabweichung f_{peff} gesetzt.

Verzahnungsqualität nach DIN 3962	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_{peff}	1.8	4.3	7.5	12.5	20	32	45	70	100	160

Tabelle 6.1.3: Angenommene Werte für die wirksame Eingriffsteilungsabweichung (Methode C) [DIN 3992, Teil 1]

	$1 \leq \varepsilon_\gamma \leq 2$	$\varepsilon_\gamma > 2$	
C_{v1}	0.32	0.32	
C_{v2}	0.34	$\frac{0.57}{\varepsilon_\gamma - 0.3}$	
C_{v3}	0.23	$\frac{0.096}{\varepsilon_\gamma - 1.56}$	
C_{v4}	0.90	$\frac{0.57 - 0.05 \varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma - 1.44}$	
C_{v5}	0.47	0.47	
C_{v6}	0.47	$\frac{0.12}{\varepsilon_\gamma - 1.74}$	
	$1 < \varepsilon_\gamma \leq 1.5$	$1.5 < \varepsilon_\gamma \leq 2.5$	$\varepsilon_\gamma > 2.5$
C_{v7}	0.75	$0.125 \sin [\pi \cdot (\varepsilon_\gamma - 2)] + 0.$	1.0

Tabelle 6.1.4: Rechenwerte der Faktoren C_{v1} bis C_{v7} (Methode B) [DIN 3992, Teil 1]

6.1.3 Stirnfaktoren $K_{H\alpha}$, $K_{F\alpha}$

Die Stirnfaktoren $K_{H\alpha}$ und $K_{F\alpha}$ berücksichtigen die Auswirkung einer ungleichmäßigen Kraftaufteilung auf mehrere gleichzeitig im Eingriff befindliche Zahnradpaare in Umfangsrichtung bezogen auf die Flankenpressung ($K_{H\alpha}$) und die Zahnfußbeanspruchung ($K_{F\alpha}$). Bei der verwendeten Methode B geht man davon aus, dass eine mittlere, wahrscheinliche Differenz der Eingriffsteilungen von Ritzel und Rad maßgebend ist für die Kraftaufteilung zwischen mehreren, gleichzeitig im Eingriff befindlichen Zahnpaaren.

Für Zahnradpaare mit einer Gesamtüberdeckung von $\varepsilon_\gamma \leq 2$ gilt:

$$K_{H\alpha} = K_{F\alpha} = \frac{\varepsilon_\gamma}{2} \cdot \left(0.9 + 0.4 \frac{c_\gamma \cdot (f_{pe} - y_\alpha)}{F_{tH}/b} \right) \quad (6.16)$$

und für Profilüberdeckungen $\varepsilon_\gamma > 2$:

$$K_{H\alpha} = K_{F\alpha} = 0.9 + 0.4 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (\varepsilon_\gamma - 1)}{\varepsilon_\gamma}} \cdot \frac{c_\gamma \cdot (f_{pe} - y_\alpha)}{F_{tH}/b} \quad (6.17)$$

Die Eingriffsfedersteifigkeit wurde nach (6.2) ermittelt, die Differenz von Eingriffsteilungsabweichung zum Einlaufbetrag ($f_{pe} - y_\alpha$) wurde nach [Niemann, bzw. DIN 3990 Methode C] vereinfacht entsprechend Tabelle (4.1.3) eingesetzt. Die maßgebende Umfangskraft im Stirnschnitt F_{tH} ergibt sich nach:

$$F_{tH} = F_t \cdot K_A \cdot K_v \cdot K_{H\beta} \quad (6.18)$$

($K_{H\beta}$ Breitenfaktor)

Nach der Lösung der Gleichungen (6.16) oder (6.17) müssen die Grenzbedingungen überprüft werden. Mit den Grenzwerten nach den Gleichungen (6.19 bis 6.22) wird die ungünstigste Kraftaufteilung angenommen, d. h. es wird davon ausgegangen, dass nur ein Zahnpaar die Gesamtumfangskraft überträgt.

$$K_{F\alpha} > \frac{\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\alpha \cdot Y_\varepsilon} \quad , \text{ soist } K_{F\alpha} = \frac{\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\alpha \cdot Y_\varepsilon} \quad (6.19)$$

$$K_{F\alpha} < 1 \quad , \text{ soist } K_{F\alpha} = 1 \quad (6.20)$$

Die Grenzbedingungen für die $K_{H\alpha}$ lauten:

$$K_{H\alpha} > \frac{\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\alpha \cdot Z_\varepsilon^2} \quad , \text{ soist } K_{H\alpha} = \frac{\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\alpha \cdot Z_\varepsilon^2} \quad (6.21)$$

$$K_{H\alpha} < 1 \quad , \text{ soist } K_{H\alpha} = 1 \quad (6.22)$$

6.1.4 Breitenfaktoren $K_{H\beta}$, $K_{F\beta}$

Ursache einer ungleichmäßigen Kraftverteilung über die Zahnbreite sind die Flankenlinienabweichungen in der Eingriffsebene, die sich im belasteten Zustand infolge von Fertigungsabweichungen, Verlagerungen und elastischen sowie thermischen Verformungen einstellen. Der **Breitenfaktor (Flanke) $K_{H\beta}$** berücksichtigt den Einfluß der Kraftverteilung über die Zahnbreite auf die Flankenpressung und der **Breitenfaktor $K_{F\beta}$ (Zahnfuß)** den Einfluß der Kraftverteilung über die Zahnbreite auf die Spannungen am Zahnfuß. Für die Berechnung der Breitenfaktors (Flanke) gilt:

$$F_{\beta y} \geq 1: \quad K_{H\beta} = \sqrt{\frac{2 \cdot F_{\beta y} \cdot c_{\gamma}}{F_m/b}} \quad (6.23)$$

$$F_{\beta y} < 1: \quad K_{H\beta} = 1 + \frac{F_{\beta y} \cdot c_{\gamma}}{2 \cdot F_m/b} \quad (6.24)$$

Die Eingriffsfedersteifigkeit c_{γ} wird wieder nach Gleichung (6.2) bestimmt und die maximale Linienlast (lineare Breitenkraftverteilung) berechnet sich mit

$$F_m = F_t \cdot K_A \cdot K_v \quad (6.25)$$

Für übliche Getriebekonstruktionen gilt für die wirksame Flankenlinienabweichung

$$F_{\beta y} = F_{\beta x} \cdot \chi_{\beta} \quad (6.26)$$

Der Einlauffaktor ist abhängig vom verwendeten Werkstoff und wird wie nachfolgend beschrieben berechnet, bzw. festgelegt.

Baustahl, Vergütungsstahl, perlitisches Gußeisen mit Kugelgraphit

$$\chi_{\beta} = 1 - \frac{320}{\sigma_{H\lim}} \quad (6.27)$$

Grauguß und ferritisches Gußeisen mit Kugelgraphit

$$\chi_{\beta} = 0.45 \quad (6.28)$$

Einsatzstahl, Nitrierstahl, randschichtgehärtetes Gußeisen mit Kugelgraphit

$$\chi_{\beta} = 0.85 \quad (6.29)$$

Da bei der Methode B die wirksame Flankenlinienabweichung $F_{\beta x}$ aus Messungen oder aus einer vorzunehmenden genauen Analyse der Verformungen und Verlagerungen bestimmt werden muß, wurde für dessen Bestimmung ein vereinfachter Ansatz (Methode C) angewendet. Bei Radpaaren mit einem optimalen Lasttragbild wird der größere Wert aus beiden nachstehenden Gleichungen für die wirksame Flankenlinienabweichung eingesetzt.

$$F_{\beta x} = 0.005 \cdot F_m / b \quad (6.30)$$

$$F_{\beta x} = 0.5 \cdot f_{H\beta} \quad (6.31)$$

Bei einem Zusammenbau der Radpaare ohne Flankenlinienkorrektur oder Anpassungsmaßnahmen kann die Flankenlinien-Herstellabweichung f_{ma} der Flankenlinien-Winkelabweichung $f_{H\beta}$ gleichgesetzt werden und anschließend wird der Faktor wie folgt berechnet (Faktor q_H siehe Tabelle 6.1.5).

$$f_{ma} \approx f_{H\beta} = 4.16 \cdot b^{0.14} \cdot q_H \quad (6.32)$$

DIN-Qualität	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q_H	0.57	0.76	1.00	1.32	1.85	2.59	4.01	6.22	9.63	14.9

Tabelle 6.1.5: Faktor q_H nach [18]

Auf die Zahnfußbeanspruchung wirkt sich eine ungleichmäßige Kraftverteilung längs der Breite im Vergleich zur Flankenpressung, abgeschwächt aus. In Anlehnung an die Theorie des eingespannten Plattenträgers wird der Breitenfaktor (Zahnfuß) $K_{F\beta}$ ermittelt, der die maximale Spannungserhöhung im Zahnfuß gegenüber der gleichmäßig verteilten Zahnfußspannung beschreibt.

$$K_{F\beta} = K_{H\beta}^{N_F} \quad (6.33)$$

mit

$$N_F = \frac{1}{1 + h/b + (h/b)^2} ; \quad h = \frac{d_a - d_f}{2} \quad (6.34)$$

6.2 Bestimmung der Zahnfußspannung und der zulässigen Zahnfußspannung

Die Berechnung der Zahnfußspannungen nach der Methode B geht von der Annahme aus, dass die größte Zahnfußbeanspruchung bei Kraftangriff im äußeren Einzeleingriffspunkt auftritt (bei Schrägstirnrädern für die Ersatzverzahnung im Normalschnitt mit Ansatz der Zahnnormalkraft im Stirnschnitt und bezogen auf die Zahnbreite des aktuellen Stirnrades). Eine weitere Einschränkung sind Verzahnungen mit Profilüberdeckungen im Bereich $2 \leq \epsilon_{\alpha} < 3$ im inneren Doppelengriffspunkt.

$$\sigma_F = K_A \cdot K_v \cdot K_{F\beta} \cdot K_{F\alpha} \cdot \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_F \cdot Y_S \cdot Y_\beta \quad (6.35)$$

Nach der Methode B wird die zulässige Zahnfußspannung aus Lauf- oder Pulserversuchen ermittelt. Es werden hier Schadenslinien erfaßt, die durch den Dauerfestigkeitswert σ_{Flim} und den Lebensdauerfaktor Y_{NT} gekennzeichnet sind. Diese Prüfradwerte werden dann mit den Einflußfaktoren für Kerbempfindlichkeit des Werkstoffes, der Oberflächenbeschaffenheit und der Baugröße auf die Maße des aktuellen Zahnrades umgerechnet.

Die DIN 3990 T5 stellt für Standard-Referenz-Prüfrädern, basierend auf eine Reihe von üblichen Werkstoffen und Wärmebehandlungsverfahren, entsprechende Festigkeitswerte zur Verfügung.

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{Flim} \cdot Y_{ST} \cdot Y_{NT}}{S_{Fmin}} \cdot Y_\delta \cdot Y_R \cdot Y_x \quad (6.36)$$

6.2.1 Schrägenfaktor Y_β

Der **Schrägenfaktor** Y_β berücksichtigt den Unterschied in der Zahnfußbeanspruchung zwischen der Schrägverzahnung und der zunächst für die Berechnung zugrundegelegten Ersatz-Geradverzahnung im Normalschnitt. Damit wird der Einfluß der schräg über die Flanke verlaufenden Berührlinien erfaßt.

$$Y_\beta = 1 - \epsilon_\beta \cdot \frac{\beta}{120^\circ} \quad (6.37)$$

(Wenn $\epsilon_\beta > 1$; $\epsilon_\beta = 1$)

6.2.2 Formfaktor Y_F

Der **Formfaktor** Y_F berücksichtigt den Einfluß der Zahnform auf die Biegeennspannung für einen Kraftangriff im äußeren Einzeleingriffspunkt.

$$Y_F = \frac{6 \cdot \frac{h_{Fe}}{m_n} \cdot \cos \alpha_{Fen}}{\left(\frac{s_{Fn}}{m_n} \right)^2 \cdot \cos \alpha_n} \quad (6.38)$$

Die für die Berechnung des Formfaktors benötigten Größen h_{Fe} , s_{Fn} und α_{Fen} können exakt nur durch iterative Verfahren ermittelt werden, die nachstehend für Zahnradpaare mit Außenverzahnung beschrieben sind. Es werden dafür zunächst die benötigten Hilfsgrößen bestimmt.

$$d_{en} = 2 \cdot \sqrt{\left[\sqrt{\left(\frac{d_{an}}{2} \right)^2 - \left(\frac{d_{bn}}{2} \right)^2} - \frac{\pi \cdot d \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha_n}{z} \cdot (\epsilon_{an} - 1) \right]^2 + \left(\frac{d_{bn}}{2} \right)^2} \quad (6.39)$$

$$d_n = m_n \cdot z_n \quad (6.40)$$

$$\beta_b = \arccos \sqrt{1 - (\sin \beta \cdot \cos \alpha_n)^2} \quad (6.41)$$

$$z_n = \frac{z}{\cos^2 \beta_b \cdot \cos \beta} \quad (6.42)$$

$$d_{bn} = d_n \cdot \cos \alpha_n \quad (6.43)$$

$$d_{an} = d_n + d_a - d \quad (6.44)$$

$$\epsilon_{an} = \frac{\epsilon_a}{\cos^2 \beta_b} \quad (6.45)$$

Mit den Gleichungen (6.40) bis (6.45) läßt sich der Durchmesser, der den Kraftangriff im äußeren Einzeleingriffspunkt beschreibt, berechnen.

Eolgen weitere Gleichungen, die zur Lösung von (6.39) benötigt werden.

$$\alpha_{en} = \arccos\left(\frac{d_{bn}}{d_{en}}\right) \quad (6.46)$$

$$\alpha_{Fen} = \tan\alpha_{en} - \operatorname{inv}\alpha_n - \frac{0.5 \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot \tan\alpha_n}{z_n} \quad (6.47)$$

$$ny_e = \frac{0.5 \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot \tan\alpha_n}{z_n} + \operatorname{inv}\alpha_n - \operatorname{inv}\alpha_{en} \quad (6.48)$$

Die nachfolgenden Gleichungen zur Bestimmung des Biegehebelarmes h_{Fe} und der Zahnfußsehne s_{Fn} wurden mit folgenden Annahmen / Festlegungen im Programm gelöst:

Fußrundungsradius am Bezugsprofil

$$Q_{FP} = 0.25 \cdot m$$

Fußhöhe des Bezugsprofils

$$h_{FP} = 1.25 \cdot m$$

$$\frac{h_{Fe}}{m_n} = \frac{1}{2} \cdot \left[(\cos ny_e - \sin ny_e \cdot \tan\alpha_{Fen}) \cdot \frac{d_{en}}{m_n} - z_n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \vartheta\right) - \frac{G}{\cos\vartheta} + \frac{Q_{FP}}{m_n} \right] \quad (6.49)$$

$$\frac{s_{Fn}}{m_n} = z_n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \vartheta\right) + \sqrt{3} \cdot \left(\frac{G}{\cos\vartheta} - \frac{Q_{FP}}{m_n} \right) \quad (6.50)$$

Für Bezugsprofile ohne Fußfreischnitt gilt:

$$E = \frac{\pi}{4} \cdot m_n - h_{FP} \cdot \tan\alpha_n - (1 - \sin\alpha_n) \cdot \frac{Q_{FP}}{\cos\alpha_n} \quad (6.51)$$

$$H = \frac{2}{z_n} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{E}{m_n} \right) - \frac{\pi}{3} \quad (6.52)$$

$$G = \frac{Q_{FP}}{m_n} - \frac{h_{FP}}{m_n} + x \quad (6.53)$$

Für die Lösung der transzendenten Gleichung (6.54) wird als Anfangswert $\vartheta = \pi/6$ eingesetzt. Die Gleichung konvergiert dann meist nach zwei Iterationsschritten.

$$\vartheta = \frac{2 G}{z_n} \cdot \tan \vartheta - H \quad (6.54)$$

6.2.3 Spannungskorrekturfaktor Y_s

Mit dem **Spannungskorrekturfaktor** Y_s wird die Biege-Nennspannung auf die örtliche Zahnfußspannung umgerechnet. Dieser Faktor berücksichtigt die Kerbwirkung im auszulegen- den Zahnrad. Die Spannungskorrekturfaktoren sind außer vom Kerbradius noch von der Lage des Kraftangriffs, das heißt von der Größe des Biegehebelarms, abhängig. Die Bestimmung erfolgt genauso wie der Formfaktor, nach Methode B der DIN 3990.

$$Y_s = (1.2 + 0.13 L) \cdot q_s \left(\frac{1}{1.21 + 2.3/L} \right) \quad (6.55)$$

Die Faktoren L und q_s werden berechnet nach

$$L = \frac{S_{Fn}}{h_{Fe}} \quad (6.56)$$

$$q_s = \frac{S_{Fn}}{2 \cdot \varrho_F} \quad (6.57)$$

und der Fußrundungsradius am Berührungspunkt (30°-Tangente) ϱ_F entsprechend Gleichung (6.58) für Zahnräder mit Außenverzahnung.

$$\frac{\varrho_F}{m_n} = \frac{\varrho_{fp}}{m_n} + \frac{2 G^2}{\cos \vartheta \cdot (z_n \cdot \cos^2 \vartheta - 2 G)} \quad (6.58)$$

6.2.4 Spannungskorrekturfaktor Y_{ST} für die Abmessungen der Standard-Referenz-Prüfräder

Die Standard-Referenz-Prüfräder, für die die Grenzwerte der Zahnfußspannung in DIN 3990 Teil 5 angegeben werden, haben einen Spannungskorrekturfaktor $Y_{ST} = 2,0$ oder werden darauf umgerechnet.

6.2.5 Lebensdauerfaktor Y_{NT}

Der Lebensdauerfaktor berücksichtigt die gegenüber der Dauerfestigkeit höhere Zahnfußtragfähigkeit bei begrenzter Lebensdauer (Anzahl der Lastwechsel), d.h. die höhere Zeitfestigkeit und statische Sicherheit. Y_{NT} gilt für Standard-Referenzbedingungen und die Haupteinflussgrößen sind Werkstoff und Wärmebehandlung sowie die Anzahl der Lastwechsel. Entsprechend der Methode B kann der Lebensdauerfaktor für die statische Festigkeit und die Dauerfestigkeit nach Tabelle 6.2.1 ermittelt werden.

Werkstoff	Anzahl der Lastwechsel	Lebensdauerfaktor Y_{NT}
Stahl , Vergütungsstahl, Gußeisen mit Kugelgraphit, schwarzer Temperguß	$N_L \leq 10^4$ statisch	2,5
	$3 \cdot 10^6 < N_L$ dauerfest	1
Einsatzstahl, induktiv und flammgehärteter Stahl und GGG	$N_L \leq 10^3$ statisch	2,5
	$3 \cdot 10^6 < N_L$ dauerfest	1
Nitrierstahl, Grauguß, GGG (ferr.)	$N_L \leq 10^3$ statisch	1,6
	$3 \cdot 10^6 < N_L$ dauerfest	1
nitrokarburiertes Vergütungs- und Einsatzstahl	$N_L \leq 10^3$ statisch	1,1
	$3 \cdot 10^6 < N_L$ dauerfest	1

Tabelle 6.2.1: Lebensdauerfaktor Y_{NT} für statische Festigkeit und Dauerfestigkeit

6.2.6 Dynamische Stützziffer Y_δ

Die dynamische Stützziffer Y_δ gibt an, um welchen Betrag die theoretische Spannungsspitze in der Fußrundung des aktuellen Zahnrades beim Auftreten des Dauerbruches über der Dauerfestigkeit liegt. Entsprechend der Vorgabe der DIN 3990 Teil 3 und Verwendung von Werkstoffkennwerten nach DIN 3990 Teil 5 kann der Wert auf $Y_\delta = 1$, bei einer Überprüfung gegen Dauerbruch, gesetzt werden.

6.2.7 Oberflächenfaktor Y_R

Der **Oberflächenfaktor** Y_R berücksichtigt die Abhängigkeit der Zahnfußfestigkeit von der Oberflächenbeschaffenheit im Zahngrund. Da die Festigkeitswerte nach Methode B für Standard-Referenz-Prüfräder mit $R_z = 10 \mu\text{m}$ angegeben werden und dieses ein üblicher Mittelwert ist, kann $Y_R = 1$ gesetzt werden.

6.2.8 Größenfaktor Y_x

Dieser Faktor berücksichtigt

- den **statistischen Größeneinfluß** infolge der Verteilung von Schwachstellen im Gefüge
- den **festigkeitstheoretischen Einfluß**, verursacht durch den kleineren Spannungsgradienten bei größeren Abmessungen
- den **technologischen Einfluß** durch den Grad der Verschmiedung, Ungleichmäßigkeiten des Gefüges, etc.

Der Größeneinfluß ist abhängig vom Modul, vom Werkstoff und der Wärmebehandlung und kann Tabelle 6.2.2 entnommen werden.

Werkstoff	Normalmodul m_n	Größenfaktor Y_x
Stahl, Vergütungsstahl, Gußeisen mit Kugelgraphit, Schwarzer Temperguß	$m_n \leq 5$	$Y_x = 1.0$
	$5 < m_n < 30$	$Y_x = 1.03 - 0.006 \cdot m_n$
	$30 \geq m_n$	$Y_x = 0.85$
Einsatzstahl, Nitrierstahl	$m_n \leq 5$	$Y_x = 1.0$
	$5 < m_n < 25$	$Y_x = 1.05 - 0.01 \cdot m_n$
	$25 \geq m_n$	$Y_x = 0.8$
Grauguß	$m_n \leq 5$	$Y_x = 1.0$
	$5 < m_n < 25$	$Y_x = 1.075 - 0.015 \cdot m_n$
	$25 \geq m_n$	$Y_x = 0.7$

Tabelle 6.2.2: Größenfaktor für die Dauerfestigkeit [DIN 3990]

6.3 Zahnbruch und Sicherheitsfaktor S_F

Der Bruch eines Zahnes bedeutet, im allgemeinen, das Ende der Lebensdauer eines Getriebes. Vielfach wird als Folge dabei gesamte Verzahnung des Getriebes zerstört. Unter Umständen wird dadurch die Verbindung zwischen An- und Abtriebswelle unterbrochen. Deshalb ist der Sicherheitsfaktor gegen Zahnbruch S_F größer zu wählen als der Sicherheitsfaktor gegen Schäden durch Grübchenbildung.



Bild 6.3.1: Zahneckgewaltbruch an einem einsatzgehärteten Schrägstirnrاد

In Bild 6.3.1 ist ein Bruch an einem geradverzahnten Zahnrad dargestellt, wie er durch überhöhte Dauerbeanspruchung eines Zahnes auftreten kann. Einem zunächst vom Zahnfuß ausgehenden Dauerbruch folgt zu einem späteren Zeitpunkt, wenn der Restquerschnitt die Zahnbelastung nicht mehr übertragen kann, der Restgewaltbruch. Im Betrieb des Zahnrades liegt dabei für jeden Zahn eine Schwellbeanspruchung vor, die sich aus dem zu übertragenden Moment und dynamischen Zusatzbelastungen ergibt.

Die Ursachen für einen Gewaltbruch sind die Folgen einer oder einiger nicht vorhergesehener sehr starker Überlastungen. Diese können z. B. durch Verklemmen mit anderen Maschinenteilen entstehen und sind meist nicht auf Fehler in Entwurf oder Herstellung zurückzuführen.

Der Sicherheitsfaktor gegen Zahnbruch berechnet sich mit den in den Kapiteln 6.1 und 6.2 beschriebenen Faktoren nach

$$S_F = \frac{\sigma_{Flim} \cdot Y_{ST} \cdot Y_{NT} \cdot Y_{\delta} \cdot Y_R \cdot Y_X}{K_A \cdot K_V \cdot K_{F\beta} \cdot K_{F\alpha} \cdot \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_F \cdot Y_S \cdot Y_{\beta}} \quad (6.59)$$

6.4 Bestimmung der Flankenpressung und der zulässigen Flankenpressung

Nach dem heutigen Stand der Kenntnisse ist für das Auftreten in erster Linie eine Überschreitung der für den betreffenden Werkstoff zulässigen Hertzschen Pressung maßgebend. Die Berechnung der Grübchentragsfähigkeit (Zahnflankentragsfähigkeit) basiert auf der Flankenpressung im Wälzpunkt C oder im inneren Einzeleingriffspunkt B (Ritzel) bzw. D (Rad), wobei der höhere Wert von beiden maßgebend ist. Die Flankenpressung σ_H sowie die zulässige Flankenpressung σ_{HP} werden ebenso wie die Zahnfußtragsfähigkeit getrennt für Ritzel und Rad berechnet.

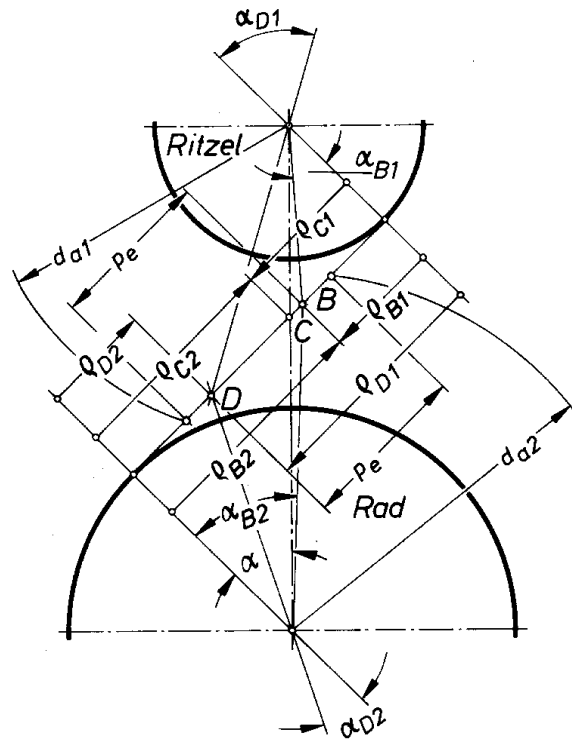


Bild 6.4.1: Krümmungsradien im Wälzpunkt C und im inneren Einzeleingriffspunkt B des Ritzels sowie D des Rades

Für das Ritzel gilt:

$$\sigma_H = \sqrt{K_A \cdot K_V \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha}} \cdot Z_B \cdot Z_H \cdot Z_E \cdot Z_{\varepsilon} \cdot Z_{\beta} \cdot \sqrt{\frac{F_t}{d_1 \cdot b} \cdot \frac{u+1}{u}} \quad (6.60)$$

und für das Rad:

$$\sigma_H = \sqrt{K_A \cdot K_v \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha}} \cdot Z_D \cdot Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\varepsilon \cdot Z_\beta \cdot \sqrt{\frac{F_t}{d_1 \cdot b} \cdot \frac{u+1}{u}} \quad (6.61)$$

Bei der Berechnung der Flankenpressung werden drei Bereiche unterschieden:

- **Geradverzahnung**

Für das Ritzel wird im allgemeinen σ_H im inneren Einzeleingriffspunkt B berechnet. In Sonderfällen ist σ_H im Wälzpunkt C größer und damit maßgebend. Für das Rad gilt, dass bei einer Außenverzahnung σ_H im Wälzpunkt C berechnet wird und nur in Sonderfällen (z.B. bei kleinen Übersetzungen) ist die Flankenpressung im Einzeleingriffspunkt D höher und damit für die Berechnung anzusetzen.

- **Schrägverzahnung mit $\varepsilon_\beta \geq 1$**

Für Ritzel und Rad wird die Flankenpressung stets im Wälzpunkt berechnet.

- **Schrägverzahnung mit $\varepsilon_\beta < 1$**

Die Flankenpressung wird zwischen den beiden Grenzwerten (σ_H für Geradverzahnung und σ_H für Schrägverzahnung mit $\varepsilon_\beta = 1$) linear interpoliert.

Nach der Methode B wird die zulässige Flankenpressung mit Kennwerten für Standard-Referenz-Prüfrädern ermittelt. Aus Laufversuchen wurden für eine Reihe von üblichen Werkstoffen und Wärmebehandlungsverfahren Schadenslinien ermittelt, die durch den Dauerfestigkeitswert σ_{Hlim} und den Lebensdauerfaktor Z_{NT} gekennzeichnet sind. Diese Prüfwerte werden nun mit den nachfolgend beschriebenen Faktoren auf die Abmessungen und Betriebsbedingungen des aktuellen Zahnradpaares umgerechnet.

$$\sigma_{HP} = \frac{\sigma_{Hlim} \cdot Z_{NT}}{S_{Hlim}} \cdot Z_L \cdot Z_v \cdot Z_R \cdot Z_W \cdot Z_X \quad (6.62)$$

6.4.1 Einzeleingriffsfaktoren Z_B, Z_D

Die **Einzeleingriffsfaktoren Z_B und Z_D** dienen bei Geradverzahnung zur Umrechnung der Flankenpressung im inneren Einzeleingriffspunkt B des Ritzels oder D des Rades. Zur Bestimmung der Einzeleingriffsfaktoren wurden Hilfsgrößen eingeführt, die mit den nachstehenden Gleichungen ermittelt werden.

$$M_1 = \frac{\tan \alpha_{wt}}{\sqrt{\left[\sqrt{\frac{d_{a1}^2}{d_{b1}^2} - 1} - \frac{2\pi}{z_1} \right] \left[\sqrt{\frac{d_{a2}^2}{d_{b2}^2} - 1} - (\epsilon_\alpha - 1) \cdot \frac{2\pi}{z_2} \right]}} \quad (6.63)$$

$$M_2 = \frac{\tan \alpha_{wt}}{\sqrt{\left[\sqrt{\frac{d_{a2}^2}{d_{b2}^2} - 1} - \frac{2\pi}{z_2} \right] \left[\sqrt{\frac{d_{a1}^2}{d_{b1}^2} - 1} - (\epsilon_\alpha - 1) \cdot \frac{2\pi}{z_1} \right]}} \quad (6.64)$$

Für Geradverzahnung gilt nun:

$$\begin{aligned} Z_B &= 1, \text{ wenn } M_1 \leq 1; & Z_D &= 1, \text{ wenn } M_2 \leq 1 \\ Z_B &= M_1, \text{ wenn } M_1 > 1; & Z_D &= M_2, \text{ wenn } M_2 > 1 \end{aligned}$$

Schrägverzahnung mit $\epsilon_\beta \geq 1$:

$$Z_B = Z_D = 1$$

Schrägverzahnung mit $\epsilon_\beta < 1$:

$$\begin{aligned} Z_B &= M_1 - \epsilon_\beta \cdot (M_1 - 1) \text{ und } Z_B \geq 1 \\ Z_D &= M_2 - \epsilon_\beta \cdot (M_2 - 1) \text{ und } Z_D \geq 1 \end{aligned}$$

(Werden Z_B oder $Z_D = 1$ gesetzt, sind die mit den Gleichungen (6.63) und (6.64) berechneten Pressungen die Werte für die Flankenpressung am Wälzzylinder.)

6.4.2 Zonenfaktor Z_H

Der **Zonenfaktor** Z_H berücksichtigt den Einfluß der Zahnflankenkrümmung im Wälzpunkt auf die Flankenpressung und die Umrechnung der Umfangskraft am Teilzylinder auf die Normalkraft am Wälzzylinder.

$$Z_H = \sqrt{\frac{2 \cdot \cos\beta_b \cdot \cos\alpha_{wt}}{\cos^2\alpha_t \cdot \sin\alpha_{wt}}} \quad (6.65)$$

6.4.3 Elastizitätsfaktor Z_E

Der **Elastizitätsfaktor** Z_E berücksichtigt den Einfluß der werkstoffspezifischen Daten wie Elastizitätsmodul und Poisson-Konstante auf die Flankenpressung. Bei einer Annahme von Stahl bzw. Leichtmetall ($\nu=0.3$) als Zahnradwerkstoff kann der Zonenfaktor nach (6.66) bestimmt werden.

$$Z_E = \sqrt{\frac{0.35 \cdot E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2}} \quad (6.66)$$

6.4.4 Überdeckungsfaktor Z_ϵ

Der Einfluß der Profil- und Sprungüberdeckung auf die Grübchentragfähigkeit von Stirnrädern wird durch den Überdeckungsfaktor Z_ϵ berücksichtigt. Für Geradverzahnung gilt:

$$Z_\epsilon = \sqrt{\frac{4 - \epsilon_\alpha}{3}} \quad (6.67)$$

und für Schrägverzahnung

$$Z_\epsilon = \sqrt{\frac{4 - \epsilon_\alpha}{3} \cdot (1 - \epsilon_\beta) + \frac{\epsilon_\beta}{\epsilon_\alpha}} \quad \text{für} \quad \epsilon_\beta < 1 \quad (6.68)$$

$$Z_\epsilon = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_\alpha}} \quad \text{für} \quad \epsilon_\beta \geq 1 \quad (6.69)$$

Die Berechnung der Sprungüberdeckung bzw. Profilüberdeckung erfolgt nach den Gleichungen aus Kapitel 5.

6.4.5 Schrägenfaktor Z_β

Unabhängig vom Einfluß des Schrägungswinkels auf die Berührlinienlänge berücksichtigt der **Schrägenfaktor Z_β** den Einfluß des Schrägungswinkels. Z_β hängt nur vom Schrägungswinkel ab und wird ausreichend genau mit der nachfolgenden Gleichung berechnet.

$$Z_\beta = \sqrt{\cos\beta} \quad (6.70)$$

6.4.6 Lebensdauerfaktor Z_{NT}

Die zulässige Spannung bei begrenzter Lebensdauer oder die Sicherheit im Zeitfestigkeitsgebiet wird mit Hilfe des Lebensdauerfaktor, der von der Anzahl der Lastwechsel abhängig ist, bestimmt. Z_{NT} für die statische und die Dauerfestigkeit kann Tabelle 6.4.1 entnommen werden, wobei für den entsprechenden Nachweises der Dauerfestigkeit $Z_{NT}=1$ gesetzt wird.

Werkstoff	Anzahl der Lastwechsel	Lebensdauerfaktor Z_{NT}
Stahl , Vergütungsstahl, GGG, GTS (perl.), Einsatz- stahl, induktiv und flamm-ge- härteter Stahl und GGG (wenn eine gewisse Grübchenbildung zulässig ist)	$N_L \leq 6 \cdot 10^5$ statisch	1,6
	$10^9 < N_L$ dauerfest	1
Vergütungsstahl, GGG, GTS (perl.), Einsatzstahl, induktiv und flammgehärteter Stahl und GGG	$N_L \leq 10^5$ statisch	1,6
	$5 \cdot 10^7 < N_L$ dauerfest	1
Nitrierstahl, Grauguß, GGG (ferr.)	$N_L \leq 10^5$ statisch	1,3
	$2 \cdot 10^6 < N_L$ dauerfest	1
nitrokarburiert Vergütungs- und Einsatzstahl	$N_L \leq 10^5$ statisch	1,1
	$2 \cdot 10^6 < N_L$ dauerfest	1

Tabelle 6.4.1: Lebensdauerfaktor Z_{NT} für statische Festigkeit und Dauerfestigkeit

6.4.7 Werkstoffpaarungsfaktor Z_w

Der Werkstoffpaarungsfaktor berücksichtigt die Zunahme der Grübchentragsfähigkeit eines Stahlzahnrades (Baustahl, Vergütungsstahl) aufgrund der Paarung mit einem gehärteten oder wesentlich härteren Ritzel mit glatten Zahnflanken. Die Zunahme der Grübchentragsfähigkeit hängt dabei nicht nur von einer eventuellen Kaltverfestigung dieses Rades ab, sondern auch von anderen Einflußfaktoren wie z.B. Glättung (Schmierung), Legierungselementen und Eigenspannungen des weichen Werkstoffes, Oberflächenrauheit des harten Ritzels, Flankenpressung, Härteverfahren, usw.

Der **Werkstoffpaarungsfaktor** Z_w kann nach DIN 3990 Teil 2, in Abhängigkeit von der Brinellhärte bestimmt werden und für Werkstoffe mit einer Brinellhärte < 130 ist $Z_w = 1.2$ und für $HB > 470$ ist $Z_w = 1$ zu setzen. Die Angaben in Bild 6.4.2 basieren wieder auf Versuchen mit Standard-Referenz-Prüfräder und das gerasterte Feld soll die tendentielle Abhängigkeit des Faktors von der Härte des weichen Rades aufzeigen. Die starke Streuung soll deutlich machen, dass die oben aufgezählten Einflüsse zum Tragen kommen, aber bei dieser Methode nicht erfaßt werden. Z_w kann auch mit Gleichung (6.71) ermittelt werden, die den Verlauf der Geraden in Bild 6.4.2 wiedergibt.

$$Z_w = 1,2 - \frac{HB - 130}{1700} \quad (6.71)$$

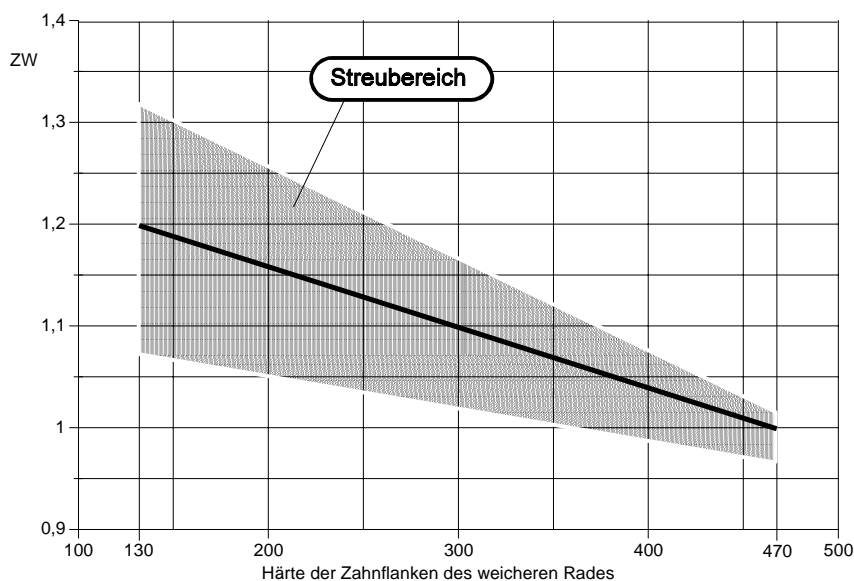


Bild 6.4.2: Werkstoffpaarungsfaktor Z_w

6.4.8 Einfluß der Schmierfilmbildung Z_L , Z_v und Z_R

Der Schmierfilm zwischen den Zahnflanken beeinflusst die Grübchentragfähigkeit und entsprechend wird die Schmierfilmbildung bei der Berechnung der zulässigen Zahnflankenbeanspruchung durch die Berücksichtigung der Faktoren Z_L , Z_v und Z_R erfaßt. Wichtige Einflußfaktoren für den Schmierfilm sind:

- Viskosität des Schmiermittels im Schmierspalt
- Summe der momentanen Geschwindigkeiten der beiden Zahnflächen
- Belastung
- Ersatzkrümmungsradius
- Rauhtiefe der Zahnflanke im Verhältnis zur Mindestschmierfilmdicke

Außerdem wirken sich die Art des Schmierstoffes (Mineralöl, syntetisches Öl), seine Herkunft, sein Alterungszustand usw. auf die Grübchentragfähigkeit aus.

Die einzelnen Faktoren haben dabei folgende Bedeutung:

Z_L für den Einfluß der Nennviskosität (als Kennwert für den Schmierstoffeinfluß) auf die Wirkung des Schmierfilms

Z_v für den Einfluß der Umfangsgeschwindigkeit auf die Wirkung des Schmierfilms

Z_R für den Einfluß der Flankenrauheit auf dem Einlauf auf die Wirkung des Schmierfilms

Für den Bereich der Dauerfestigkeit sind die nachstehenden Formeln/Tabellen maßgebend, während für den Bereich der statischen Festigkeit

$$Z_L = Z_v = Z_R = 1$$

gilt und für die Zeitfestigkeit die Werte durch lineare Interpolation zwischen den Werten für die Dauerfestigkeit und dem Wert für statische Festigkeit ermittelt werden.

Der Schmierstofffaktor Z_L ist von der Nennviskosität bei 40° (oder 50°) und dem Dauerfestigkeitswert für Flankenpressung σ_{Hlim} abhängig.

$$Z_L = C_{ZL} + \frac{4 \cdot (1 - C_{ZL})}{\left(1.2 + \frac{134}{ny_{40}}\right)^2} \quad (6.72)$$

$\sigma_{Hlim} < 850 \text{ N/mm}^2$	$C_{ZL} = 0.83$
$850 \leq \sigma_{Hlim} \leq 1200 \text{ N/mm}^2$	$C_{ZL} = \frac{\sigma_{Hlim}}{4375} + 0.63$
$\sigma_{Hlim} > 1200 \text{ N/mm}^2$	$C_{ZL} = 0.91$

Tabelle 6.4.2: Faktor C_{ZL} zur Bestimmung der Schmierstofffaktors

ISO Viskositätsklasse	VG 32	VG 46	VG 68	VG 100	VG 150	VG 220	VG 320
Nennviskosität ν_{40}	32	46	68	100	150	220	320

Tabelle 6.4.3: Nennviskositäten für verschiedene ISO Viskositätsklassen

Der **Geschwindigkeitsfaktor** Z_v ist abhängig von der Umfangsgeschwindigkeit und dem Dauerfestigkeitswert σ_{Hlim} des weichen Werkstoffes der Radpaarung.

$$Z_v = C_{Zv} + \frac{2 \cdot (1 - C_{Zv})}{\sqrt{0.8 + \frac{32}{\nu}}} \quad \text{mit} \quad C_{Zv} = C_{ZL} + 0.02 \quad (6.73)$$

Der **Rauheitsfaktor** Z_R erfaßt die Oberflächenbeschaffenheit der Zahnflanken und ist abhängig von einer mittleren, relativen d.h. auf einen Achsabstand $a = 100 \text{ mm}$ und einen Ersatzkrümmungsradius im Wälzpunkt von $\rho = 10 \text{ mm}$ bezogenen Rauhtiefe. Z_R kann abhängig von R_{z100} (Gleichung (6.74)) und dem Dauerfestigkeitswert σ_{Hlim} ermittelt werden.

$$R_{z100} = R_z \sqrt[3]{\frac{100}{a}} \quad (6.74)$$

mit

$$R_z = \frac{R_{z1} + R_{z2}}{2} \quad (6.75)$$

Wenn der Mittenrauhwert R_a gegeben ist, kann eine Umrechnung mit der Näherungsformel

$$R_z = 6 \cdot R_a \quad (6.76)$$

erfolgen. Die durch die Fertigung erzeugte Flankenrauheit kann im Betrieb verstärkt oder auch verringert werden und in Tabelle 6.4.4 sind Werte aufgeführt, die nach Literaturangaben in Prüfstandsversuchen bestätigt wurden.

Qualität	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Mittenrauhwert R_a	0.25	0.35	0.5	0.65	0.8	1.4	2.0	4.0	6.0	10.0	14.0

Tabelle 6.4.4: Mittenrauhwerte in Abhängigkeit der DIN-Qualität in Anlehnung an [Niemann]

$$Z_R = \left(\frac{3}{R_{z100}} \right)^{C_{ZR}} \quad (6.77)$$

$\sigma_{Hlim} < 850 \text{ N/mm}^2$	$C_{ZR} = 0.15$
$850 \leq \sigma_{Hlim} \leq 1200 \text{ N/mm}^2$	$C_{ZR} = 0.3 - 0.0002 \sigma_{Hlim}$
$\sigma_{Hlim} > 1200 \text{ N/mm}^2$	$C_{ZR} = 0.08$

Tabelle 6.4.5: Faktor C_{ZR} zur Berechnung von Z_R

6.4.9 Größenfaktor Z_x

Der **Größenfaktor** Z_x berücksichtigt den statistischen Größeneinfluß, den festigkeitstheoretischen Einfluß und den technologischen Einfluß auf die Grubchentragsfähigkeit. Wichtige Einflußfaktoren sind dabei Werkstoff, Verschmiedung, Reinheitsgrad des Werkstoffs, Wärmebehandlung, Härtetiefe, Flankenkrümmungsradius und Modul. Der Größeneinfluß bzw. der Größenfaktor muß dabei getrennt für Ritzel und Rad ermittelt werden. In Tabelle 6.4.6 sind Berechnungsgleichungen für den Größenfaktor in Abhängigkeit vom Werkstoff und dem Modul, der als Maß für die Baugröße zugrunde gelegt wurde, aufgeführt.

Werkstoff	Normalmodul m_n	Größenfaktor Z_x
Stahl, Vergütungsstahl, Gußeisen mit Kugelgraphit, Schwarzer Temperguß	alle Moduln	$Y_x = 1.0$
Einsatzstahl	$m_n \leq 10$	$Y_x = 1.0$
	$10 < m_n < 30$	$Y_x = 1.05 - 0.005 \cdot m_n$
	$30 \geq m_n$	$Y_x = 0.9$
Nitrierstahl	$m_n \leq 7.5$	$Y_x = 1.0$
	$7.5 < m_n < 30$	$Y_x = 1.08 - 0.011 \cdot m_n$
	$30 \geq m_n$	$Y_x = 0.75$

Tabelle 6.4.6: Größenfaktor für die Dauerfestigkeit [DIN 3990]

6.5 Grübchenbildung und Sicherheitsfaktor S_H

Nach Überschreiten der Grübchenfestigkeitsgrenzen der miteinander in Eingriff kommenden Zahnflanken brechen Teilchen aus den Zahnflanken heraus, so dass Grübchen (engl. Pitting) entstehen. Bei jedem Zahndurchlauf unter belastung entstehen im Werkstoff Schwellbeanspruchungen, die mit steigender Lastwechselzahl zu einer Ermüdung führen können. An den Zahnflanken entstehen in der Regel etwas unterhalb des Wälzkreises (Einzeleingriffspunkte) die sogenannte Pitting- oder Grübchenbildung (Bild 6.5.1). Vielfach wird unterschieden zwischen *Einlaufgrübchen* und *fortschreitender Grübchenbildung*. Einlaufgrübchen können auftreten bei Inbetriebnahme eines neuen Zahnrads aus ungehärtetem Werkstoff; sie vermehren sich im allgemeinen

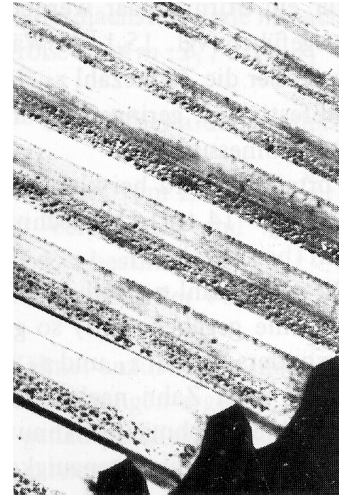


Bild 6.5.1: Grübchenbildung an Stirnradflanken

nur so lange, bis örtlich begrenzte Oberflächenerhöhungen abgetragen sind., so dass dann eine genügend große Berührungsfläche vorhanden ist. Fortschreitende Grübchenbildung entwickelt sich weiter, auch nachdem anfängliche Oberflächenerhöhungen abgetragen sind. Diese Art Grübchenbildung nimmt bei längerer Betriebszeit oft in solchem Maße zu, dass die übrig bleibende, nicht beschädigte Fläche die Belastung nicht mehr tragen kann und bei weiterem Betrieb die Zahnflanken schnell zerstört werden. Wenn als Folge von Grübchen ein Getriebebeschaden entstehen kann, der Menschenleben gefährden oder sonstige ernste Folgeschäden verursachen kann, ist Grübchenbildung nicht zulässig.

$$S_H = \frac{\sigma_{Hlim} \cdot Z_{NT} \cdot Z_L \cdot Z_v \cdot Z_R \cdot Z_W \cdot Z_X}{\sqrt{K_A \cdot K_V \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha}} \cdot \sqrt{\frac{F_t}{b \cdot d_1} \cdot \frac{u + 1}{u}} \cdot Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\beta \cdot Z_\epsilon \cdot Z_{B,D}} \quad (6.78)$$

7. Getriebeschmierung

Ein Schmierstoff soll in erster Linie Reibung und Verschleiß an den Zahnflanken mindern. D. h. durch Schmierung soll innerhalb der vorliegenden Druck-, Geschwindigkeits- und Temperaturverhältnisse die unvermeidliche Zahnflankenreibung auf ein Mindestmaß herabgesetzt werden. Die Schäden, die durch eine unzureichende Schmierung im Getriebe entstehen, äußern sich in Flankenabnutzung, Getriebeerwärmung und Getriebegeräusche. Bei Leistungsgetrieben hat der Schmierstoff auch die Aufgabe, Reibungswärme abzuführen und er soll ferner alle Getriebeteile vor Korrosion schützen. Meist werden auch die zum Getriebe gehörenden Lager, Wellen, usw. mit dem Zahnradschmierstoff versorgt.

7.1 Auswahl des Schmierstoffs

Flüssige Schmierstoffe (Öle) sind, wenn die Zähigkeit ausreicht, bei der Wahl eines geeigneten Schmierstoffes zu bevorzugen, damit ein möglichst tragfähiger Schmierfilm zwischen den im Eingriff befindlichen Zahnflanken sich ausbilden kann und die im Zahneingriff und in den Lagern entstehende Reibungswärme abgeführt wird. Durch die Begünstigung der Gleitbewegung an den Zahnflanken wird durch die Wahl des richtigen Schmierstoffes der Verschleiß herabgesetzt und die Freßgefahr verringert.

Allgemein gilt für die Wahl eines flüssigen Schmierstoffes:

- ***Je kleiner die Umfangsgeschwindigkeit und je größer die Wälzpressung sowie die Rauheit der Zahnflanken sind, um so höher muß die Viskosität sein.***
- ***Eine höhere Viskosität ergibt eine größere hydrodynamische Tragfähigkeit und Belastbarkeit, bis eine Riefenbildung oder Fressen der Zahnflanken einsetzt (Freßlastgrenze).***

Für zahlreiche Getriebe genügen reine Mineralöle. Dort, wo höhere Anforderungen und eine geringere Viskosität gefordert wird, werden diese durch mild oder stark wirkende EP-Zusätze (Extrem-Pressure) ausgeglichen, wobei stets zu berücksichtigen ist, daß sie sich auf die Anforderungen der anderen, vom gleichen Schmierstoff zu versorgenden Maschinenelementen, sowie auf die zulässige Erwärmung des Getriebes nicht nachteilig auswirken. Bei Industrie- und Schnellaufgetrieben sollte man die Schmierstoffsorte zunächst nach DIN 51509 (Richtwerte zur Auswahl von Schmierölen für Zahnradgetriebe, Wälz- und Schraubwälzgetriebe, ohne und mit verschleißverringenden Wirkstoffen) auswählen.

Umfangsgeschwindigkeit [m/s]	Schmierstoff	Schmierungsart
< 1	Haftschmiere	Sprüh- oder Auftragsschmierung
< 4	Getriebefette	Tauchschmierung
< 4	Haftschmiere	Sprühschmierung
< 15	Öle	Tauchschmierung
> 15	Öle	Spritzschmierung

Tabelle 7.1.1: Wahl von Schmierstoff und Schmierungsart

7.2 Schmierungsart

Die Art der Schmierung richtet sich unter anderem nach der Umfangsgeschwindigkeit der Zahnräder. Bei 2-stufigen Getrieben ist die Endstufe maßgebend, bei 3-stufigen Getrieben ist der Mittelwert der für die 2. und 3. Stufe benötigten kinematischen Nennviskosität zu bilden.

Bei der **Auftragsschmierung** wird der Schmierstoff von Hand mittels eines Pinsels oder Spachtels bei stillstehendem Getriebe aufgetragen. Die **Sprühschmierung** soll die Auftragschmierung ersetzen, um der Forderung einer weniger aufwendigen Wartung zu begegnen. Sie kann nur vorgesehen werden, wenn keine Kühlung durch den Schmierstoff notwendig ist. Von einer Pumpe, oft kombiniert mit einem Behälter, wird der Schmierstoff einer Düse zugeführt und diese verteilt dann den Schmierstoff in den gewünschten Mengen und zeitlichen Abständen auf die Zahnflanken und den anderen zu schmierenden Maschinenelementen. Die **Tauschschmierung** ist wegen ihrer Einfachheit und Zuverlässigkeit am weitesten verbreitet. Dabei tauchen die Zahnräder in den Schmierstoff ein (Sumpf), was ein geschlossenes Getriebe voraussetzt. Die Fliehkraftbeschleunigung soll dabei den Wert $v^2/r = 550 \text{ m/s}^2$ nicht überschreiten, da sonst die Planschverluste zu groß werden und eine unzulässig hohe Getriebeerwärmung entsteht. Weiterhin besteht die Gefahr, daß das Schmieröl von den Zahnflanken geschleudert wird und daß das Öl aufschäumt. Bei Stirnrädern soll die Eintauchtiefe der Zahnräder im Bereich des 3 ... 5-fachen des Moduls liegen ($v \leq 5 \text{ m/s}$) bzw. 1 .. 3-fach bei einer Umfangsgeschwindigkeit von 5 bis 15 m/s. Bei Kegelradgetrieben muß die gesamte Radbreite eintauchen. Die **Spritzschmierung** wird bei größeren Umfangsgeschwindigkeiten eingesetzt, wobei Öl mittels einer Pumpe über Düsen mit breitem Strahl kurz oder unmittelbar in den Zahneingriff eingespritzt wird. Bei sehr hohen Umfangsgeschwindigkeiten kann wegen der hohen Erwärmung und zur besseren Kühlung dieser Vorgang auch hinter dem Zahneingriff erfolgen.

8. Literatur

- [1] G. Niemann, H. Winter
Maschinenelemente Band II
Getriebe allgemein, Zahnradgetriebe-Grundlagen,
Stirnradgetriebe
2. Auflage, Springer Verlag 1983
- [2] G. Niemann, H. Winter
Maschinenelemente Band III
Schraubrad-, Kegelrad-, Schnecken-, Ketten-,
Riemen-, Reibradgetriebe
2. Auflage, Springer Verlag 1983
- [3] K. H. Decker
Maschinenelemente
Gestaltung und Berechnung
Carl Hanser Verlag München Wien 1982, 8. Auflage
- [4] J. Looman
Zahnradgetriebe
Springer Verlag Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo 1988
- [5] Roloff / Matek
Maschinenelemente
9. Auflage, Vieweg Verlag 1984
- [6] Fachwissen des Ingenieurs, Bd. I
Grundlagen des Konstruierens
7. Auflage
VEB Fachbuchverlag Leipzig 1986
- [7] DIN-Norm 780, Teil 1
Modulreihen für Zahnräder
Beuth-Verlag 1977

- [8] DIN-Norm 868
Allgemeine Begriffe und Bestimmungsgrößen für Zahnräder,
Zahnradpaare und Zahnradgetriebe
Beuth-Verlag 1976
- [9] DIN-Norm 3960
Begriffe und Bestimmungsgrößen für Stirnräder und Stirnradpaare
mit Evolventenverzahnung
Beuth-Verlag 1980
- [10] DIN-Norm 3990, Teil 1-5
Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern
Beuth-Verlag 1987
- [11] DIN-Norm 3992
Profilverschiebung von Stirnrädern mit Außenverzahnung
Beuth-Verlag 1964