《Fundamentals of Signal Enhancement and Array Signal Processing》7.1-7.5.1学习笔记

# 固定波束

一个固定波束系统就是一个空间滤波器，它可以目标信号的方向形成一个主波束。并且，一可以将一些没有有效信息的干扰信号方向置0。它不会使用从阵列采集的数据或者目标/噪声信号的统计信息。其结果就是滤波器的参数是固定的，阵列的表现不依赖于外部环境的变换。然而，固定波束会通过导向矢量的形式，使用传感器的位置信息，目标方向和干扰方向的信息。因此，需要知道阵列的几何形式。本章主要研究均匀线阵(ULAs)。

## 信号模型和问题形式

我们考虑一个远场平面波，它距离阵列足够远，在消声环境中传播，声速为c(c = 340 m/s)，在一个由M个全指向麦克风构成的均匀线阵上实验。两个相邻的麦克风距离都是 $\delta$ 目标方向是与水平夹角 $\theta$。给定导向矢量：

$$\mathbf{d}(f, \cos\theta) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-\jmath 2\pi f \tau_0 \cos\theta} & \cdots & e^{-\jmath (M-1) 2\pi f \tau_0 \cos\theta} \end{bmatrix}^T, \tag{7.1}$$

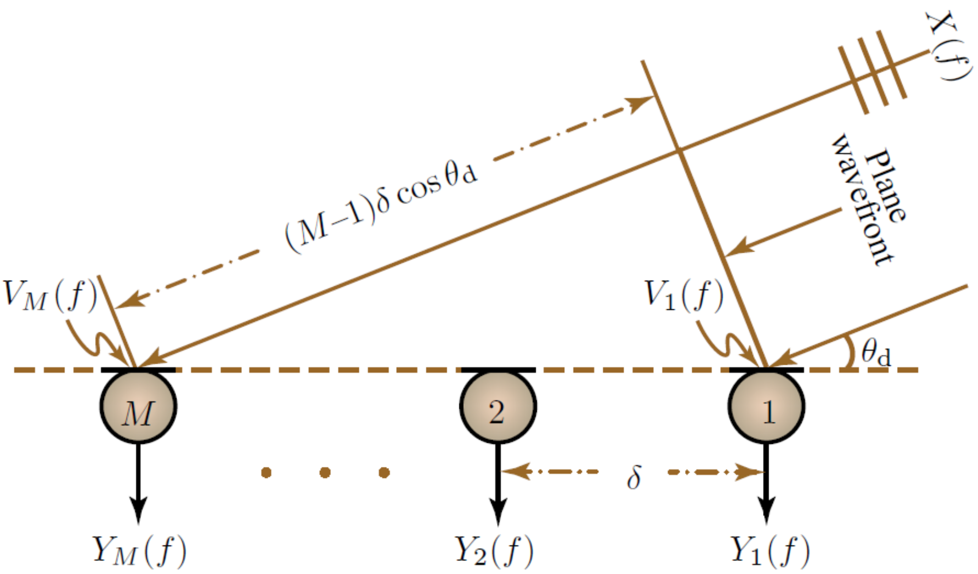


**Figure 7.1** A uniform linear array with $M$ sensors.

其中j是虚数单位，f是采样频率，$\tau$ 是两个相邻麦克风在方向角为0的时候的延迟。我们定义$\omega = 2\pi f$是角频率。因为$\cos\theta$是偶函数，所以$d(f, \cos\theta)$也是偶函数。因此，这就把角度限定在了$\theta \in [0, \pi]$。

假定目标信号来自方向角$\theta_d$，我们可以得到它的信号矢量，观测到的信号矢量（长度为$M$）：

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(f) &= \left[ \begin{array}{llll} Y_1(f) & Y_2(f) & \cdots & Y_M(f) \end{array} \right]^T \\ &= \mathbf{x}(f) + \mathbf{v}(f) \\ &= \mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right) X(f) + \mathbf{v}(f), \end{aligned} \tag{7.2}$$

其中$Y_m(f)$是第m个麦克风接收的信号，$x(f) = d(f, \cos\theta) X(f)$，$X(f)$是目标信号，$d(f, \cos\theta_d)$是指向为$\theta_d$的导向矢量（指向目标源），$v(f)$是加性噪声矢量。这样来定义$y(f)$。接下来$y(f)$的自相关矩阵：

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_{\mathbf{y}}(f) &= E\left[\mathbf{y}(f)\mathbf{y}^H(f)\right] \\ &= \phi_X(f)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\mathbf{d}^H\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right) + \mathbf{\Phi}_{\mathbf{v}}(f), \end{aligned} \tag{7.3}$$

$\phi_X(f)$是关于$X(f)$的变量，$\phi_v(f)$是$v(f)$的自相关矩阵。

我们这一章的目标就是设计一个不依赖于统计信号的波束，可以在目标方向角 $\theta_d$ 形成一个主波束，不失真的提取目标信号，并且抑制其他方向的信号。

## 线阵模型

通常，阵列处理或波束是通过在每个麦克风上加一个延迟滤波器，并将滤波后的信号相加。在频域，这等价于给每个麦克风的输出，加一个复值权重，最后求和：

$$\begin{aligned} Z(f) &= \sum_{m=1}^{M} H_m^*(f) Y_m(f) \\ &= \mathbf{h}^H(f)\mathbf{y}(f) \\ &= X_{\mathrm{fd}}(f) + V_{\mathrm{rn}}(f), \end{aligned} \tag{7.4}$$

其中$Z(f)$是波束的输出信号，

$$\mathbf{h}(f) = \left[ \begin{array}{llll} H_1(f) & H_2(f) & \cdots & H_M(f) \end{array} \right]^T \tag{7.5}$$

是波束的权重向量，即在频率f上的空域滤波器，

$$X_{\mathrm{fd}}(f) = X(f)\mathbf{h}^H(f)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right) \tag{7.6}$$

是滤波器的目标信号

$$V_{\mathrm{rn}}(f)=\mathbf{h}^H(f)\mathbf{v}(f) \tag{7.7}$$
是残余噪声。

由于（7.4）的右边两项是不相关的，因此有：

$$\begin{aligned}\phi_Z(f)&=\mathbf{h}^H(f)\mathbf{\Phi}_{\mathbf{y}}(f)\mathbf{h}(f)\\&=\phi_{X_{\mathrm{fd}}}(f)+\phi_{V_{\mathrm{rn}}}(f),\end{aligned} \tag{7.8}$$

其中

$$\phi_{X_{\mathrm{fd}}}(f)=\phi_X(f)\left|\mathbf{h}^H(f)\mathbf{d}\left(f,\cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\right|^2, \tag{7.9}$$

$$\phi_{V_{\mathrm{rn}}}(f)=\mathbf{h}^H(f)\mathbf{\Phi}_{\mathbf{v}}(f)\mathbf{h}(f). \tag{7.10}$$

在本文的固定波束中，我们希望获得一个不失真的约束：

$$\mathbf{h}^H(f)\mathbf{d}\left(f,\cos\theta_{\mathrm{d}}\right)=1, \tag{7.11}$$

这意味着，任何来自目标方向的信号是不失真的。因此，所有的波束都会将（7.11)作为约束。

## 表现评估

在固定波束中，我们通常只关注窄带信号的评估表现，我们将第一个麦克风的信号作为参考信号。

每个波束都有一个对于方向的灵敏度模式：它可以表示对来自不同方向的声音的灵敏度。波束模式或者方向模式描述了波束对于从角度$\theta$入射的平面波，作用在阵列上时的灵敏度。形式化的，它定义为：

$$\begin{aligned}\mathcal{B}\left[\mathbf{h}(f),\cos\theta\right]&=\mathbf{d}^H\left(f,\cos\theta\right)\mathbf{h}(f)\\&=\sum_{m=1}^{M}H_m(f)e^{\jmath(m-1)2\pi f\tau_0\cos\theta}.\end{aligned} \tag{7.12}$$

通常，$|\mathcal{B}[h(f),\cos\theta]|^2$是功率模式，使用极坐标系绘图。

窄带输入SNR是：

$$\mathrm{iSNR}(f)=\frac{\phi_X(f)}{\phi_{V_1}(f)}, \tag{7.13}$$

其中$\phi_{V_1}(f)=E[|V_1(f)|^2]$是关于$V_1(f)$的变量，他是$v(f)$的第一个元素。窄带输出SNR定义：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{oSNR}\left[\mathbf{h}(f)\right] &= \phi_X(f)\frac{\left|\mathbf{h}^H(f)\mathbf{d}\left(f,\cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\right|^2}{\mathbf{h}^H(f)\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{v}}(f)\mathbf{h}(f)} \\
&= \frac{\phi_X(f)}{\phi_{V_1}(f)} \times \frac{\left|\mathbf{h}^H(f)\mathbf{d}\left(f,\cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\right|^2}{\mathbf{h}^H(f)\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{v}}(f)\mathbf{h}(f)},
\end{aligned}
\tag{7.14}
$$

其中

$$
\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{v}}(f) = \frac{\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{v}}(f)}{\phi_{V_1}(f)}
\tag{7.15}
$$

是$v(f)$的互功率谱矩阵。根据之前SNR的定义，我们可以化简得到阵列的增益：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}\left[\mathbf{h}(f)\right] &= \frac{\mathrm{oSNR}\left[\mathbf{h}(f)\right]}{\mathrm{iSNR}(f)} \\
&= \frac{\left|\mathbf{h}^H(f)\mathbf{d}\left(f,\cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\right|^2}{\mathbf{h}^H(f)\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{v}}(f)\mathbf{h}(f)}.
\end{aligned}
\tag{7.16}
$$

窄带白噪声增益（WNG），是一种最方便的评估阵列缺陷的方案，根据定义（7.16）中的$\Gamma_v(f) = I_M$，其中$I_M$是单位阵：

$$
\mathcal{W}\left[\mathbf{h}(f)\right] = \frac{\left|\mathbf{h}^H(f)\mathbf{d}\left(f,\cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\right|^2}{\mathbf{h}^H(f)\mathbf{h}(f)}.
\tag{7.17}
$$

使用Cauchy-Schwartz不等式：

$$
\left|\mathbf{h}^H(f)\mathbf{d}\left(f,\cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\right|^2 \leq \mathbf{h}^H(f)\mathbf{h}(f) \times \mathbf{d}^H\left(f,\cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\mathbf{d}\left(f,\cos\theta_{\mathrm{d}}\right),
\tag{7.18}
$$

容易化简得：

$$
\mathcal{W}\left[\mathbf{h}(f)\right] \leq M,\ \forall \mathbf{h}(f).
\tag{7.19}
$$

所以，最大WNG是：

$$
\mathcal{W}_{\max} = M,
\tag{7.20}
$$

他是与频率无关的。令

$$
\cos\left[\mathbf{d}\left(f,\cos\theta_{\mathrm{d}}\right),\mathbf{h}(f)\right] = \frac{\mathbf{d}^H\left(f,\cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\mathbf{h}(f) + \mathbf{h}^H(f)\mathbf{d}\left(f,\cos\theta_{\mathrm{d}}\right)}{2\left\|\mathbf{d}\left(f,\cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\right\|_2\left\|\mathbf{h}(f)\right\|_2}
\tag{7.21}
$$

是2个向量$d(f,\cos\theta)$和$h(f)$之间夹角的余弦值，其中$\|\cdot\|^2$是$h(f)$范数。假设不失真约束，我们可以改写WNG为：

$$
\mathcal{W}\left[\mathbf{h}(f)\right] = \mathcal{W}_{\max}\cos^2\left[\mathbf{d}\left(f,\cos\theta_{\mathrm{d}}\right),\mathbf{h}(f)\right].
\tag{7.22}
$$

另一个重要的指标是麦克风阵列在混响环境下的表现，即窄带指向因子DF，定义为：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}[\mathbf{h}(f)] &= \frac{\left|\mathcal{B}\left[\mathbf{h}(f), \cos\theta_{\mathrm{d}}\right]\right|^2}{\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left|\mathcal{B}\left[\mathbf{h}(f), \cos\theta\right]\right|^2 \sin\theta d\theta} \\
&= \frac{\left|\mathbf{h}^H(f)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\right|^2}{\mathbf{h}^H(f)\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}(f)\mathbf{h}(f)},
\end{aligned} \tag{7.23}
$$

其中

$$
\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}(f) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \mathbf{d}\left(f, \cos\theta\right)\mathbf{d}^H\left(f, \cos\theta\right)\sin\theta d\theta. \tag{7.24}
$$

我们可以证明，矩阵$\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}(f)$是：

$$
\begin{aligned}
\left[\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}(f)\right]_{ij} &= \frac{\sin\left[2\pi f(j-i)\tau_0\right]}{2\pi f(j-i)\tau_0} \\
&= \operatorname{sinc}\left[2\pi f(j-i)\tau_0\right],
\end{aligned} \tag{7.25}
$$

其中$|\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}(f)|_{mm} = 1, m = 1, 2, \ldots, M$。通过Cauchy-Schwartz不等式

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbf{h}^H(f)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\right|^2 \leq \mathbf{h}^H(f)\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}(f)\mathbf{h}(f) \times \\
\mathbf{d}^H\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}^{-1}(f)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right),
\end{aligned} \tag{7.26}
$$

可以根据（7.23）发现：

$$
\mathcal{D}[\mathbf{h}(f)] \leq \mathbf{d}^H\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}^{-1}(f)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right), \ \forall\mathbf{h}(f). \tag{7.27}
$$

最终，最大指向银子DF就是：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\max}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right) &= \mathbf{d}^H\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}^{-1}(f)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left[\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}^{-1}(f)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\mathbf{d}^H\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\right] \\
&\leq M\operatorname{tr}\left[\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}^{-1}(f)\right],
\end{aligned} \tag{7.28}
$$

他是关于频率和目标信号夹角的。令

$$
\begin{aligned}
\cos\left[\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}^{-1/2}(f)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right), \boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}^{1/2}(f)\mathbf{h}(f)\right] = \\
\frac{\mathbf{d}^H\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\mathbf{h}(f) + \mathbf{h}^H(f)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)}{2\left\|\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}^{-1/2}(f)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\right\|_2\left\|\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}^{1/2}(f)\mathbf{h}(f)\right\|_2}
\end{aligned} \tag{7.29}
$$

是两个向量夹角的余弦值，假设满足不失真约束，我们可以将DF写作：

$$
\mathcal{D}[\mathbf{h}(f)] = \mathcal{D}_{\max}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\cos^2\left[\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}^{-1/2}(f)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right), \boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}^{1/2}(f)\mathbf{h}(f)\right]. \tag{7.30}
$$

## 空间混叠

这里讨论阵列信号处理中遇到的空间混叠问题。它类似于以小于2倍最高频率的采样频率，对时域信号进行采样时，发生的时域混叠现象。
令$\theta_1$和$\theta_2$是2分不同的夹角，$\theta_1 \neq \theta_2$。空间混叠出现在，当$d(f, \cos\theta_1) = d(f, \cos\theta_2)$时，即表示声源的方位不明确。令：

$$\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \frac{c}{f\delta} + \cos\theta_2 \\ &= \frac{\lambda}{\delta} + \cos\theta_2, \end{aligned} \tag{7.31}$$

或者，等价于

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{1}{\cos\theta_1 - \cos\theta_2}. \tag{7.32}$$

因为

$$e^{-\jmath(m-1)2\pi f\tau_0 \cos\theta_1} = e^{-\jmath(m-1)2\pi f\tau_0 \cos\theta_2},\ m = 1, 2, \ldots, M. \tag{7.33}$$

$$\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_1\right) = \mathbf{d}\left(f, \cos\theta_2\right), \tag{7.34}$$

意味着发生空间混叠。

因为$|\cos\theta| \leq 1$，所以

$$|\cos\theta_1 - \cos\theta_2| \leq 2, \tag{7.35}$$

等价于

$$\frac{1}{|\cos\theta_1 - \cos\theta_2|} \geq \frac{1}{2}. \tag{7.36}$$

根据（7.32），我们要保证

$$\frac{\delta}{\lambda} < \frac{1}{2}, \tag{7.37}$$

这就是经典的窄带混叠条件。

## 延迟相加

最著名的固定波束就是延迟相加（delay-and-sum, DS），它可以最大化 WNG：

$$\min_{\mathbf{h}(f)} \mathbf{h}^H(f)\mathbf{h}(f) \quad \text{subject to} \quad \mathbf{h}^H(f)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right) = 1. \tag{7.38}$$

我们容易得到最优波束滤波器：

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_{\mathrm{DS}}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right) &= \frac{\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)}{\mathbf{d}^H\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)} \\ &= \frac{\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)}{M}.\end{aligned} \tag{7.39}$$

使用这个波束时，WNG 和 DF 分别为：

$$\mathcal{W}\left[\mathbf{h}_{\mathrm{DS}}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\right] = M = \mathcal{W}_{\max} \tag{7.40}$$

和

$$\mathcal{D}\left[\mathbf{h}_{\mathrm{DS}}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\right] = \frac{M^2}{\mathbf{d}^H\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}(f)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)}. \tag{7.41}$$

因此有

$$\mathbf{d}^H\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}(f)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right) \leq M\operatorname{tr}\left[\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}(f)\right] = M^2, \tag{7.42}$$

于是有$DF \geq 1$。当DS波束最大化WNG时，它不会增大扩散场噪声。

我们有波束模式：

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{B}\left[\mathbf{h}_{\mathrm{DS}}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right), \cos\theta\right]\right|^2 &= \frac{1}{M^2}\left|\mathbf{d}^H\left(f, \cos\theta\right)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\right|^2 \\ &= \frac{1}{M^2}\left|\sum_{m=1}^{M} e^{\jmath(m-1)2\pi f\tau_0\left(\cos\theta - \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)}\right|^2 \\ &= \frac{1}{M^2}\left|\frac{1 - e^{\jmath M2\pi f\tau_0\left(\cos\theta - \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)}}{1 - e^{\jmath 2\pi f\tau_0\left(\cos\theta - \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)}}\right|^2,\end{aligned} \tag{7.43}$$

DS的波束模式与频率强相关。

另一个表示（7.41）的方式是

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left[\mathbf{h}_{\mathrm{DS}}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\right] = \mathcal{D}_{\max}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right) \times \\ \cos^2\left[\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}^{1/2}(f)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right), \boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}^{-1/2}(f)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\right],\end{aligned} \tag{7.44}$$

其中

$$\begin{aligned}&\cos\left[\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}^{1/2}(f)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right), \boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}^{-1/2}(f)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\right] = \\ &\frac{\mathbf{d}^H\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)}{\sqrt{\mathbf{d}^H\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}(f)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)}\sqrt{\mathbf{d}^H\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\boldsymbol{\Gamma}_{0,\pi}^{-1}(f)\mathbf{d}\left(f, \cos\theta_{\mathrm{d}}\right)}}\end{aligned} \tag{7.45}$$

它是向量$\Gamma_{0,\pi}^{1/2}(f)d(f,\cos\theta)$和$\Gamma_{0,\pi}^{-1/2}(f)d(f,\cos\theta)$，令$\sigma_1(f)$和$\sigma_M(f)$是$\Gamma_{0,\pi}(f)$最大和最小的特征值。使用 Kantorovich 不等式：

$$\cos^2\left[\mathbf{\Gamma}_{0,\pi}^{1/2}(f)\mathbf{d}\left(f,\cos\theta_{\mathrm{d}}\right),\mathbf{\Gamma}_{0,\pi}^{-1/2}(f)\mathbf{d}\left(f,\cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\right]\geq \frac{4\sigma_1(f)\sigma_M(f)}{\left[\sigma_1(f)+\sigma_M(f)\right]^2}, \quad (7.46)$$

我们化简得

$$\frac{4\sigma_1(f)\sigma_M(f)}{\left[\sigma_1(f)+\sigma_M(f)\right]^2}\leq\frac{\mathcal{D}\left[\mathbf{h}_{\mathrm{DS}}\left(f,\cos\theta_{\mathrm{d}}\right)\right]}{\mathcal{D}_{\max}\left(f,\cos\theta_{\mathrm{d}}\right)}\leq 1. \quad (7.47)$$

例子：考虑一个均匀线阵，M个麦克风，如图7.1。假定目标信号入射方向为$\theta$。图7.2 使用了不同的麦克风数量M，绘制了WNG关于频率的变化图。图7.3 展示了不同数量的麦克风，和几种指向角度以及间距。随着麦克风数量增加，WNG和DF都在增加，图7.4 - 7.6展示了M=8时，几种情况的波束模式。主波束指向目标方向。随着频率的增加，主波束的宽度在减小。当$\delta/\lambda$增加，我们可能观察到空间混叠的现象，如图 7.6d

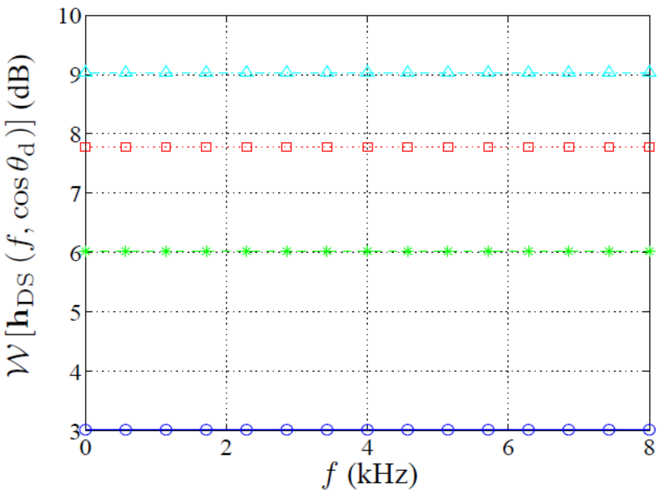


**Figure 7.2** WNG of the DS beamformer as a function of frequency, for different numbers of sensors, $M$: $M=2$ (solid line with circles), $M=4$ (dashed line with asterisks), $M=6$ (dotted line with squares), and $M=8$ (dash-dot line with triangles).

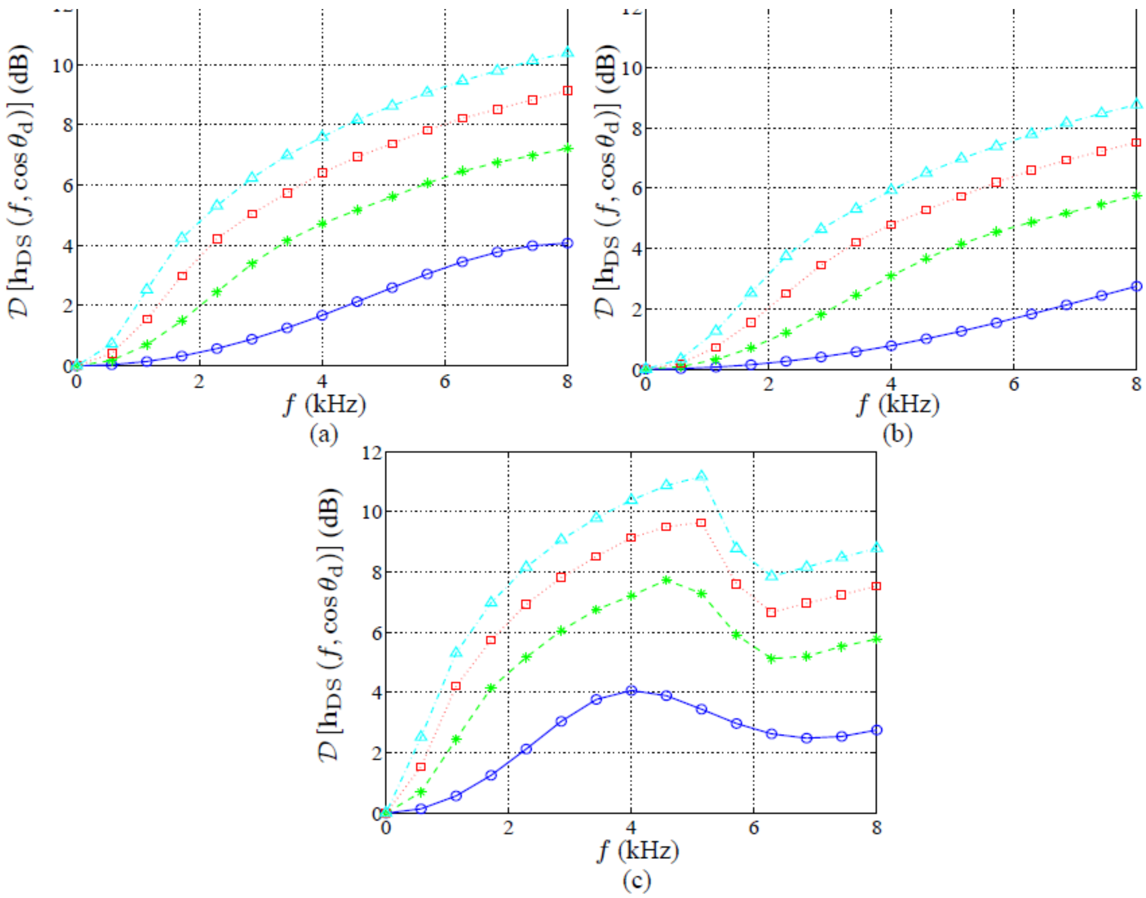


**Figure 7.3** DF of the DS beamformer as a function of frequency, for different numbers of sensors, $M$, and several values of $\theta_{\mathrm{d}}$ and $\delta$: $M = 2$ (solid line with circles), $M = 4$ (dashed line with asterisks), $M = 6$ (dotted line with squares), and $M = 8$ (dash-dot line with triangles). (a) $\theta_{\mathrm{d}} = 90°$, $\delta = 3$ cm, (b) $\theta_{\mathrm{d}} = 0°$, $\delta = 1$ cm, and (c) $\theta_{\mathrm{d}} = 0°$, $\delta = 3$ cm.

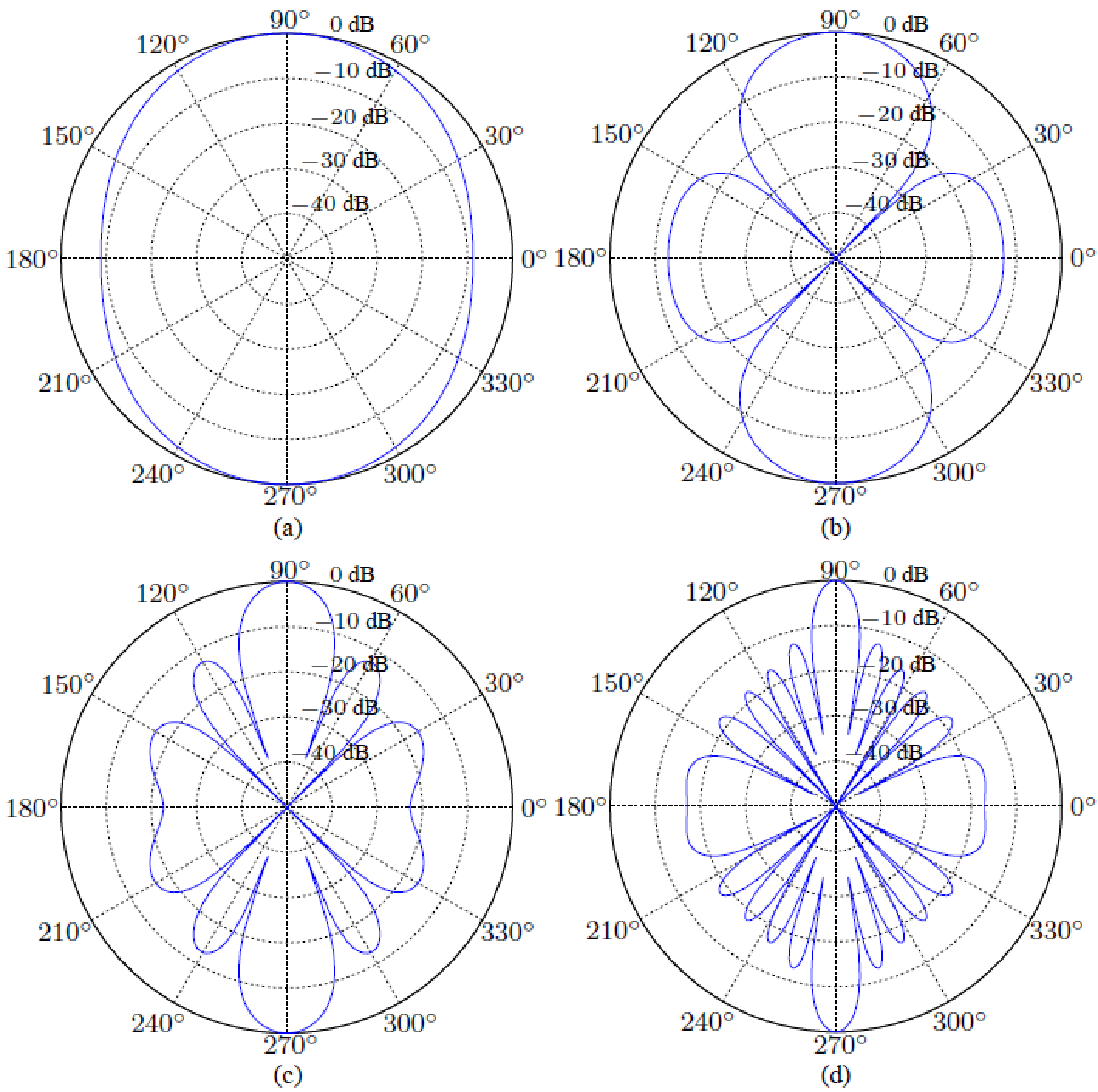


**Figure 7.4** Beampatterns of the DS beamformer for several frequencies with $M = 8$, $\theta_{\rm d} = 90°$, and $\delta = 3$ cm: (a) $f = 1$ kHz, (b) $f = 2$ kHz, (c) $f = 4$ kHz, and (d) $f = 8$ kHz.

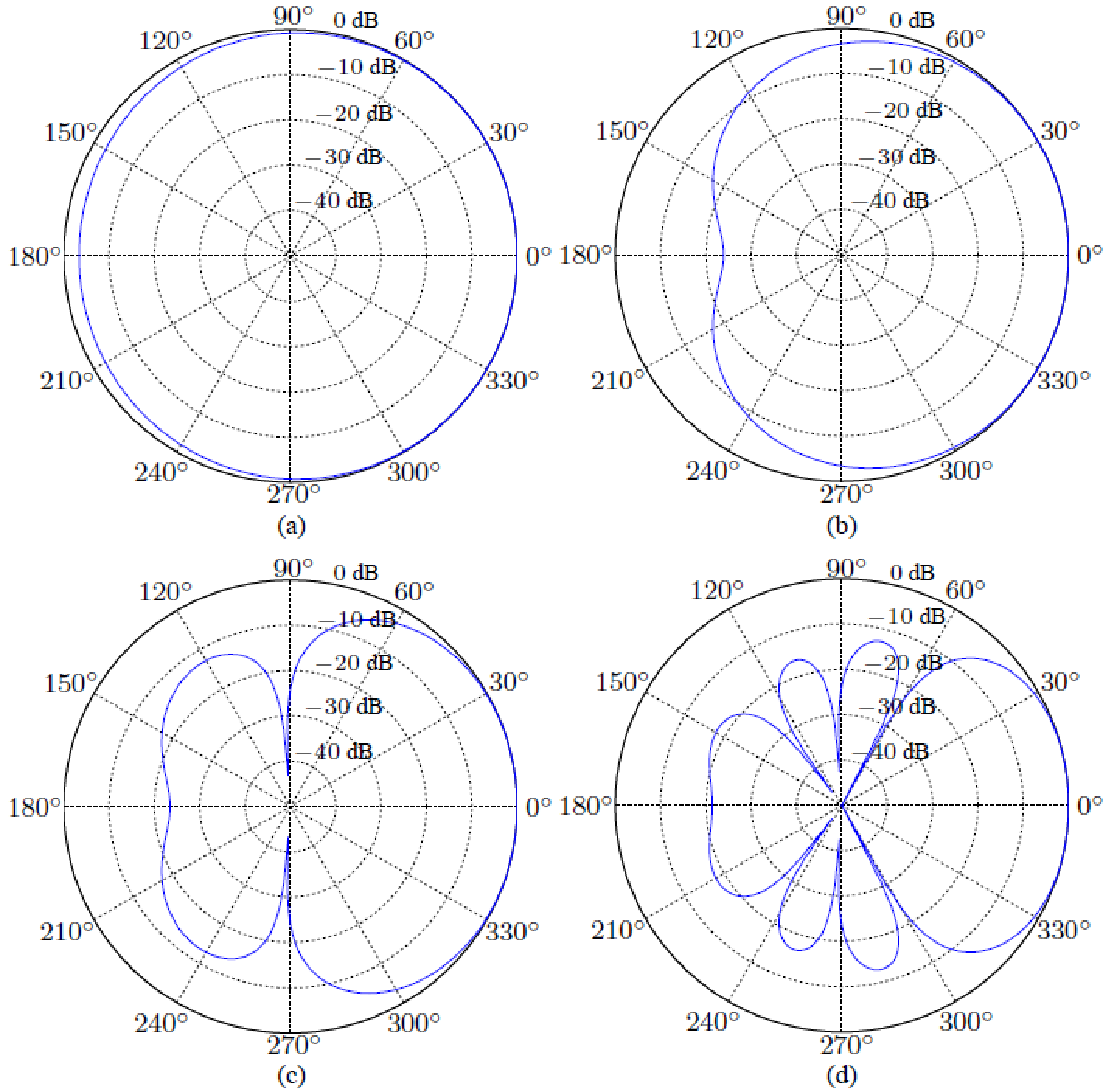


**Figure 7.5** Beampatterns of the DS beamformer for several frequencies with $M = 8$, $\theta_{\mathrm{d}} = 0°$, and $\delta = 1$ cm: (a) $f = 1$ kHz, (b) $f = 2$ kHz, (c) $f = 4$ kHz, and (d) $f = 8$ kHz.

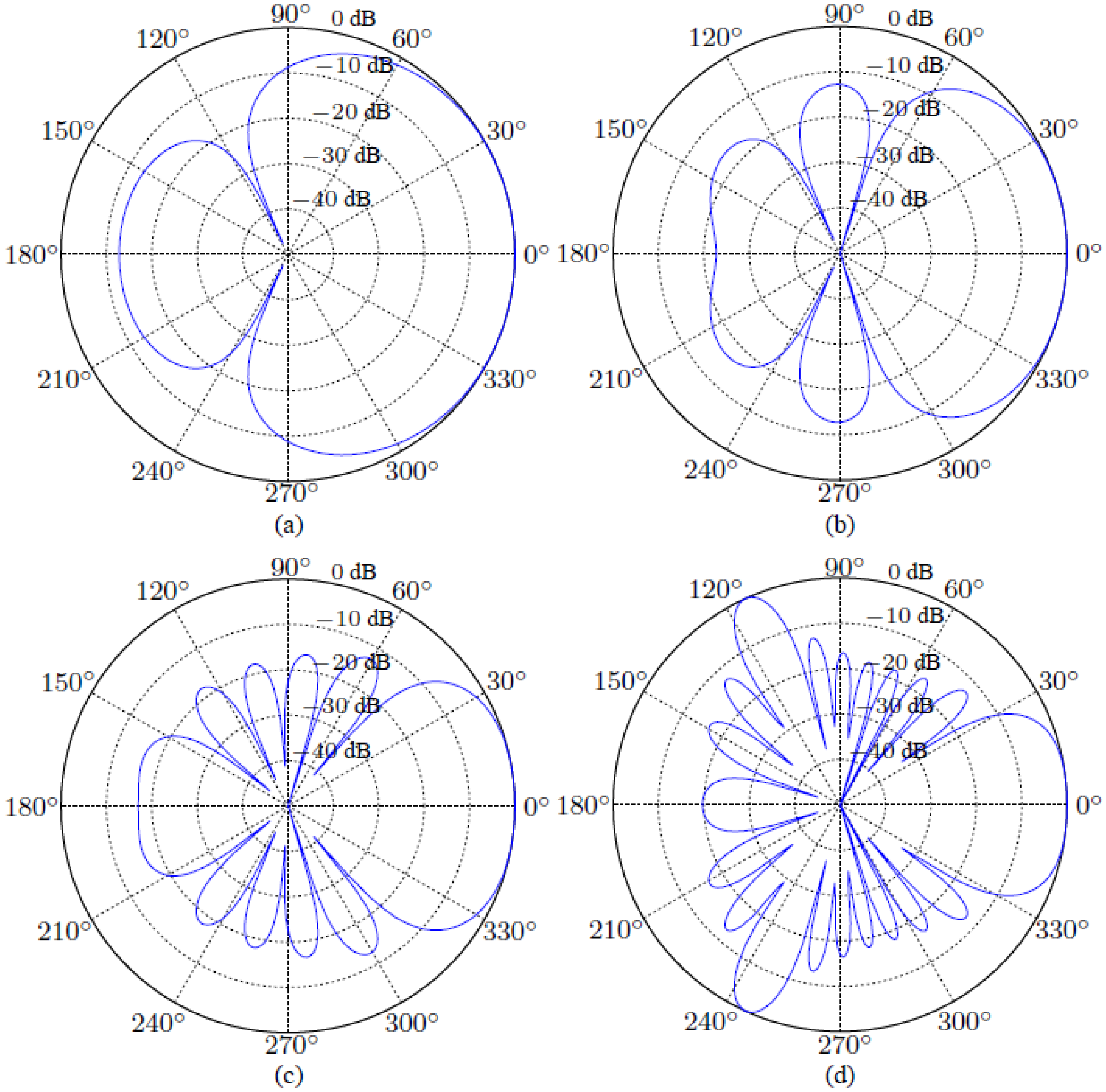


**Figure 7.6** Beampatterns of the DS beamformer for several frequencies with $M = 8$, $\theta_{\mathrm{d}} = 0°$, and $\delta = 3$ cm: (a) $f = 1$ kHz, (b) $f = 2$ kHz, (c) $f = 4$ kHz, and (d) $f = 8$ kHz.