动态规划应用举例——之二

1. 设备更新问题
2. 机器负荷问题
3. 生产存储问题

动态规划应用举例——之二

1. 动态规划的四大要素

① 状态变量及其可能集合 $x_k \in X_k$

② 决策变量及其允许集合 $u_k \in U_k$

③ 状态转移方程 $x_{k+1} = T_k(x_k, u_k)$

④ 阶段效应 $r_k(x_k, u_k)$

动态规划应用举例——之二

2. 动态规划基本方程

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \quad \text{(边界条件)}$$

$$f_k(x_k) = \operatorname{opt}_u \{r_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\}$$

$$k = n, \ldots, 1$$

设备更新问题

设备更新问题

设备更新问题的一般提法

随着使用年限的增加，设备性能就会变差，故障会增加，需要维修或更新。设备使用时间愈长，积累效益愈高，但随着设备陈旧，维修使用费用也会提高，而且，设备使用年限愈久，处理价格愈低，更新费用也要增加。

因此，处于某个阶段的各种设备，总是面临着保留还是更新的问题，这个问题应该从整个计划期间的总回收额，而不应从局部的某个阶段的回收额来考虑。

由于每个阶段都面临着保留还是更新的两种选择，因此，它是一个多阶段的决策过程，可以用动态规划方法求解。

设备更新问题

今有一设备更新问题如下：

已知 n 为计算设备回收额的总期数；

t 为某个阶段的设备役龄；

$\gamma(t)$ 为从役龄为t的设备得到的阶段收益；

$\mu(t)$ 为役龄为t的设备的阶段使用费用；

$s(t)$ 是役龄为t的设备的处理价格；

p 为新设备的购置价格；

求 n 期内使回收额最大的设备更新政策。

设备更新问题

状态变量选为设备的役龄 t，即 $x_k=t$，

决策只有两种可能，即保留或更新，记为 K（保留）或 P（更新）。

状态转移方程 $x_{k+1}=\begin{cases} x_k+1 & K \\ 1 & P \end{cases}$

相应的阶段效应即阶段的回收额也有两种可能

$$r_k(t,u_k)=\begin{cases} \gamma(t)-\mu(t) & u_k=K \\ s(t)-P+\gamma(0)-\mu(0) & u_k=P \end{cases}$$

$$f_k(t)=\max\begin{Bmatrix} K:\gamma(t)-\mu(t)+f_{k+1}(t+1) \\ P:s(t)-P+\gamma(0)-\mu(0)+f_{k+1}(1) \end{Bmatrix}$$

设备更新问题

例 假定n＝6年，新设备购买价格为10万元。

役龄为t时的设备使用效益γ(t)，使用费用μ(t)和处理价格s(t)如下表所示

T	0	1	2	3	4	5	6
γ(t)万元	27	26	26	24	22	20	18
μ(t)万元	15	15	16	16	17	17	18
s(t)万元	6	5	5	4	4	3	2

$$r_k(t,u_k)=\begin{cases} \gamma(t)-\mu(t) & u_k=K \\ s(t)-P+\gamma(0)-\mu(0)=s(t)+2 & u_k=P \end{cases}$$

设备更新问题

T	0	1	2	3	4	5	6
γ(t)万元	27	26	26	24	22	20	18
μ(t)万元	15	15	16	16	17	17	18
s(t)万元	6	5	5	4	4	3	2
γ(t)- μ(t)	12	11	10	8	5	3	0
s(t)+2	8	7	7	6	6	5	4

$$f_k(t)=\max\begin{Bmatrix} K:\gamma(t)-\mu(t)+f_{k+1}(t+1) \\ P:s(t)+2+f_{k+1}(1) \end{Bmatrix}$$

设备更新问题

t	0	1	2	3	4	5	6
γ(t)- μ(t)	12	11	10	8	5	3	0
s(t)+2	8	7	7	6	6	5	4

$f_7(t)=0$

$$f_6(t)=\max\begin{Bmatrix} K:\gamma(t)-\mu(t) \\ P:s(t)+2 \end{Bmatrix}$$

在第6阶段役龄为0的机器选择保留，其回收额为 12

在第6阶段役龄为4的机器选择更新，其回收额为 6

t	0	1	2	3	4	5	6
f_6(t)	12	11	10	8	6	5	4

设备更新问题

t	0	1	2	3	4	5	6
γ(t)- μ(t)	12	11	10	8	5	3	0
s(t)+2	8	7	7	6	[illegible]	[illegible]	[illegible]

$$f_5(t)=\max\begin{Bmatrix} K:\gamma(t)-\mu(t)+f_6(t+1) \\ P:s(t)+2 \end{Bmatrix}$$

在第5年役龄为1的机器选择保留，其回收额为 21

在第5年役龄为5的机器选择更新，其回收额为 16

t	0	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	5	6
f_6(t)	12	11	[illegible]	8	6	5	4
f_5(t)	23	21	18	17	17	16	15
γ(t)- μ(t)+ f_6(t+1)	23	21	18	14	10	7	
s (t)+2+11	19	18	18	17	17	16	15

设备更新问题

t	0	1	2	3	4	5	6
γ(t)- μ(t)	12	11	10	8	5	3	0
s(t)+2	8	7	7	6	6	5	4

$$f_4(t)=\max\begin{Bmatrix} K:\gamma(t)-\mu(t)+f_5(t+1) \\ P:s(t)+2+f_5(1)=s(t)+2+21 \end{Bmatrix}$$

t	0	1	2	3	4	5	6
f_6(t)	12	11	10	8	6	5	4
f_5(t)	23	21	18	17	17	16	15
γ(t)- μ(t)+ f_5(t+1)	33	29	27	25	21	18	
s (t)+2+11	29	28	28	27	27	26	25

设备更新问题

t	0	1	2	3	4	5	6
f_6(t)	12	11	10	8	6	5	4
f_5(t)	23	21	18	17	17	16	15
f_4(t)	33	29	28	27	27	26	25
f_3(t)	41	39	37	35	35	34	33
f_2(t)	51	48	46	45	45	44	43
f_1(t)	60	57	55	54	54	53	52

第一年役龄为一的产品的更新方案

设备更新问题

t	0	1	2	3	4	5	6
f_6(t)	12	11	10	8	6	5	4
f_5(t)	23	21	18	17	17	16	15
f_4(t)	33	29	28	27	27	26	25
f_3(t)	41	39	37	35	35	34	33
f_2(t)	51	48	46	45	45	44	43
f_1(t)	60	57	55	54	54	53	52

第一年役龄为4的产品的更新方案

机器负荷分配问题

机器负荷问题

例：某种机器可以在高、低两种负荷下生产。 高负荷生产件下机器完好率为0.7，系数0.7称为完好率。

如果年初有*u*台完好机器投入生产，则年末完好的机器数量为0.7*u*台。

年初投入高负荷运行的 *u*台机器的年产量为8*u*吨。系数8称为单台产量。

低负荷运行时，机器完好率为0.9，单台产量为5吨。

设开始时有1000台完好机器，要制订五年计划，每年年初将完好的机器一部分分配到高负荷生产，剩下的机器分配到低负荷生产。

使五年的总产量为最高。

机器负荷问题

构造动态规划模型

阶段 k

状态变量x_k

决策变量d_k

状态转移方程

决策允许集合

阶段指标

递推方程

机器负荷分配问题

构造动态规划模型如下：

阶段 k：运行年份（k=1, 2, 3, 4, 5, 6），其中k=1表示第一年初，…，依次类推；k=6表示第五年末（即第六年初）。

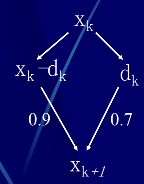
状态变量x_k：第k年初完好的机器数（k=1, 2, 3, 4, 5, 6），其中x_6表示第五年末（即第六年初）的完好机器数。

决策变量d_k：第k年投入高负荷运行的机器数；

机器负荷分配问题

状态转移方程：
$x_{k+1}=0.7d_k+0.9(x_k-d_k)$

决策允许集合：
$D_k(x_k)=\{d_k \mid 0\le d_k\le x_k\}$



阶段指标： $v_k(x_k, d_k)=8d_k+5(x_k-d_k)$
终端条件： $f_6(x_6)=0$

机器负荷分配问题

递推方程：

fk(xk)=max{vk(xk,dk)+fk+1(xk+1)}
dk Dk(xk)

$$=\max\{8d_k+5(x_k-d_k)+f_{k+1}[0.7d_k+0.9(x_k-d_k)]\}$$
$$0\le d_k\le x_k$$

根据题意，本题的决策允许集合应该是一个整数集合，但由于决策允许集合中可取的决策数量很大，一一列举计算量很大，不妨认为状态变量和决策变量都是连续的，得到最优解后，再作取整处理。

机器负荷分配问题

逆序求条件最优目标函数值 $f_k(x_k)$ 和条件最优决策

k=5时，$0\le d_5\le x_5$，注意到 $f_6(x_6)=0$，有

$$f_5(x_5)=\max\{8d_5+5(x_5-d_5)+f_6(x_6)\}$$
$$=\max\{3d_5+5x_5\}=8x_5$$
$$d_5^*=x_5$$

k=4时 $0\le d_4\le x_4$

$$f_4(x_4)=\max\{8d_4+5(x_4-d_4)+f_5(x_5)\}$$
$$=\max\{8d_4+5(x_4-d_4)+8x_5\}$$
$$=\max\{8d_4+5(x_4-d_4)+8[0.7d_4+0.9(x_4-d_4)]\}$$
$$=\max\{1.4d_4+12.3x_4\}=13.7x_4$$
$$d_4^*=x_4$$

机器负荷分配问题

逆序求条件最优目标函数值 $f_k(x_k)$ 和条件最优决策

k=3 $0\le d_3\le x_3$

$$f_3(x_3)=\max\{8d_3+5(x_3-d_3)+f_4(x_4)\}$$
$$=\max\{8d_3+5(x_3-d_3)+13.7x_4\}$$
$$=\max\{8d_3+5(x_3-d_3)+13.7[0.7d_3+0.9(x_3-d_3)]\}$$
$$=\max\{0.28d_3+17.24x_3\}=17.52x_3,$$
$$d_3^*=x_3$$

机器负荷分配问题

逆序求条件最优目标函数值 $f_k(x_k)$ 和条件最优决策

k=2 $0\le d_2\le x_2$

$$f_2(x_2)=\max\{8d_2+5(x_2-d_2)+f_3(x_3)\}$$
$$=\max\{8d_2+5(x_2-d_2)+17.52x_3\}$$
$$=\max\{8d_2+5(x_2-d_2)+17.52[0.7d_2+0.9(x_2-d_2)]\}$$
$$=\max\{-0.504d_2+20.77x_2\}$$
$$=20.77x_2,$$
$$d_2^*=0$$

机器负荷分配问题

逆序求条件最优目标函数值 $f_k(x_k)$ 和条件最优决策

k=1 $0\le d_1\le x_1$

$$f_1(x_1)=\max\{8d_1+5(x_1-d_1)+f_2(x_2)\}$$
$$=\max\{8d_1+5(x_1-d_1)+20.77x_2\}$$
$$=\max\{8d_1+5(x_1-d_1)+20.77[0.7d_1+0.9(x_1-d_1)]\}$$
$$=\max\{-0.05d_1+23.69x_1\}$$
$$=23.69x_1,\quad d_1^*=0$$

机器负荷分配问题

由此可以得到：

- $f_1(x_1)=23.69x_1$, $d_1^*=0$
- $f_2(x_2)=20.77x_2$, $d_2^*=0$
- $f_3(x_3)=17.52x_3$, $d_3^*=x_3$
- $f_4(x_4)=13.60x_4$, $d_4^*=x_4$
- $f_5(x_5)=8x_5$ $d_5^*=x_5$

用x_1=1000代入，得到五年最大产量为

- $f_1(x_1)=f_1(1000)=23690$

机器负荷分配问题

每年投入高负荷运行的机器数与每年初完好的机器数为：

- $x_1=1000$
- $d_1^*=0$, $x_2=0.7d_1+0.9(x_1-d_1)=900$
- $d_2^*=0$, $x_3=0.7d_2+0.9(x_2-d_2)=810$
- $d_3^*=x_3=810$, $x_4=0.7d_3+0.9(x_3-d_3)=567$
- $d_4^*=x_4=567$, $x_5=0.7d_4+0.9(x_4-d_4)=397$
- $d_5^*=x_5=397$, $x_6=0.7d_5+0.9(x_5-d_5)=278$

机器负荷分配问题

在这个例子中，状态变量的终端值 x_6 是未加约束的，如果要求在第五年末（即第六年初）完好的机器数不少于500台，这时决策变量d_5的决策允许集合将成为：

$D_5(x_5)=\{d_5 \mid 0.7d_5+0.9(x_5-d_5)\ge 500,\ d_5\ge 0\}$

即 $0.9x_5-0.2d_5\ge 500$

$d_5\ge 0$ 或 $0\le d_5\le 4.5x_5-2500$

容易想象，这时的最大产量将比 x_6是自由的情况下小。

机器负荷分配问题

- 这个例子可以推广到一般情况。设高负荷生产时机器的完好率为k_1，单台产量为p_1；低负荷完好率为k_2，单台产量为p_2。若有t满足：

$$\sum_{i=0}^{n-(t+1)} k_1^i \le \frac{p_1-p_2}{p_1(k_2-k_1)} \le \sum_{i=0}^{n-t} k_1^i$$

则从1—t-1年，年初将全部完好机器投入低负荷运行，从t—n年，年初将全部完好机器投入高负荷运行，这样的决策，将使总产量达到最大。

- 生产——库存问题

生产－库存问题

- **生产计划周期分为n个阶段，即k=1~n；**
- **已知最初库存量为x_1；**
- **阶段需求量为d_k；**
- **单位产品的消耗费用为L_k；**
- **单位产品的阶段库存费用为h_k；**
- **仓库容量为M_k；**
- **阶段生产能力为B_k；**
- **生产的准备费用为：** $\begin{cases}0 & 产量=0\\ c_k & 产量>0\end{cases}$

生产—库存问题

问：应如何安排各阶段产量，使计划期总费用最小。

状态变量x_k应选为阶段k的初始库存量，计划初期的库存量x_1是已知的，末期的库存量通常也是给定的，为简单起见这里假定$x_{n+1}=0$，于是问题是始端末端固定的问题。

关于状态x_k的约束条件是

$$0\le x_k\le \min\{M_k, d_k+d_{k+1}+\cdots+d_n\}\qquad k=1,2,\cdots,n$$

- 即阶段k的库存既不能超过库存容量，也不应超过阶段k至阶段n的需求总量（$d_k+d_{k+1}+\ldots+d_n$），否则将与$x_{n+1}=0$的假设相违背。

生产—库存问题

决策变量u_k选为阶段k的生产量。

阶段产量要在不超过生产能力B_k的条件下，充分满足该阶段的需求d_k，同时还要满足计划末期的库存量为0的要求。

因此关于决策变量的约束条件就是

本期需求缺口

以后需求缺口

$$\max\{0, d_k-x_k\}\le u_k\le$$

$$\min\{B_k, d_k+d_{k+1}+\cdots+d_n-x_k, M_k-x_k+d_k\}$$

$$x_{k+1}=x_k+u_k-d_k$$

库容量限制

期末库存=期初库存+生产量-本期需求

生产—库存问题

阶段k的生产费用是 $\begin{cases}0 & u_k=0\\ c_k+L_ku_k & u_k\ne 0\end{cases}$

库存费用按阶段k末期的库存量x_{k+1}计算

$$h_kx_{k+1}=h_k(x_k+u_k-d_k)$$

$$r_k(x_k,u_k)=\begin{cases}0+h_k(x_k-d_k) & u_k=0\\ c_k+L_ku_k+h_k(x_k+u_k-d_k) & u_k\ne 0\end{cases}$$

$$f_k(x_k)=\min_{u_k}\begin{cases}c_k+L_ku_k+h_k(x_k+u_k-d_k)+f_{k+1}(x_k+u_k-d_k) & u_k\ne 0\\ h_k(x_k-d_k)+f_{k+1}(x_k-d_k) & u_k=0\end{cases}$$

生产—库存问题举例

- 例 求解生产—库存问题。已知其 n=3，c_k=8，L_k=2，h_k=1.5，x_1=1，M_k=4，x_4=0（计划周期末期的库存量为0），B_k=6，d_1=3，d_2=4，d_3=3。

$$0\le x_k\le \min\{M_k, d_k+d_{k+1}+\cdots+d_n\}\qquad k=1,2,3$$

$$x_1=1$$

$$0\le x_2\le 4$$

$$0\le x_3\le 3$$

$$x_4=0$$

生产—库存问题举例

- 例 求解生产—库存问题。已知其 n=3，c_k=8，L_k=2，h_k=1.5，x_1=1，M_k=4，x_4=0（计划周期末期的库存量为0），B_k=6，d_1=3，d_2=4，d_3=3。

$$\max\{0, d_k-x_k\}\le u_k\le$$

$$\min\{B_k, d_k+d_{k+1}+\cdots+d_n-x_k, M_k-x_k+d_k\}$$

$$2\le u_1\le 6$$

$$4-x_2\le u_2\le \min(6,7-x_2)$$

$$u_3=3-x_3 \qquad x_4=x_3+u_3-d_3$$

$$r_k(x_k,u_k)=\begin{cases}0+h_k(x_k-d_k) & u_k=0\\ c_k+L_ku_k+h_k(x_k+u_k-d_k) & u_k\ne 0\end{cases}$$

- 例 求解生产—库存问题。已知其 n=3，c_k=8，L_k=2，h_k=1.5，x_1=1，M_k=4，x_4=0（计划周期末期的库存量为0），B_k=6，d_1=3，d_2=4，d_3=3。

$$x_{k+1}=x_k+u_k-d_k$$

$$r_k(x_k,u_k)=\begin{cases}0+1.5(x_k-d_k) & u_k=0\\ 8+2u_k+1.5(x_k+u_k-d_k) & u_k\ne 0\end{cases}$$

$$f_k(x_k)=\min_{u_k}\begin{cases}8+2u_k+1.5(x_k+u_k-d_k)+f_{k+1}(x_k+u_k-d_k) & u_k\ne 0\\ 1.5(x_k-d_k)+f_{k+1}(x_k-d_k) & u_k=0\end{cases}$$

生产－库存问题举例

k=3

$$f_k(x_k)=\min_{u_k}\begin{cases}8+2u_k+1.5(x_k+u_k-d_k)+f_{k+1}(x_k+u_k-d_k) & u_k\neq 0\\ 1.5(x_k-d_k)+f_{k+1}(x_k-d_k) & u_k=0\end{cases}$$

$u_3=3-x_3 \quad 0\le x_3\le 3 \qquad x_{k+1}=x_k+u_k-d_k$

x_3 \ u_3	0	1	2	3	$f_3()$	U_3'
0				14	14	3
1			12		12	2
2		10			10	1
3	0				0	0

生产－库存问题举例

$0\le x_2\le 4 \qquad d_2=4$

$$f_k(x_k)=\min_{u_k}\begin{cases}8+2u_k+1.5(x_k+u_k-d_k)+f_{k+1}(x_k+u_k-d_k) & u_k\neq 0\\ 1.5(x_k-d_k)+f_{k+1}(x_k-d_k) & u_k=0\end{cases}$$

$4-x_2\le u_2\le \min(6,7-x_2) \qquad x_{k+1}=x_k+u_k-d_k$

	0	1	2	3	4	5	6	$f_2()$	U_2'
0					16+14	19.5+12	23+10	30	4
1				14+14	17.5+12	21+10	24.5+0	24.5	6
2			12+14	15.5+12	19+10	22.5+0		22.5	5
3		10+14	13.5+12	17+10	20.5+0			20.5	4
4	0+14	11.5+12	15+10	18.5+0				14	0

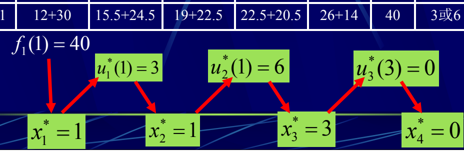
生产－库存问题举例

$x_1=1 \qquad d_1=3$

$$f_k(x_k)=\min_{u_k}\begin{cases}8+2u_k+1.5(x_k+u_k-d_k)+f_{k+1}(x_k+u_k-d_k) & u_k\neq 0\\ 1.5(x_k-d_k)+f_{k+1}(x_k-d_k) & u_k=0\end{cases}$$

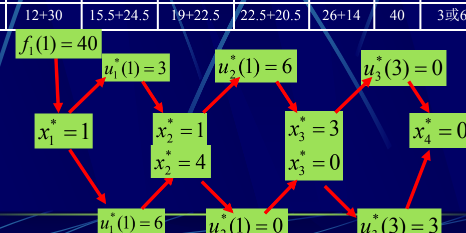
$2\le u_1\le 6 \qquad x_{k+1}=x_k+u_k-d_k$

	2	3	4	5	6	$f_1()$	u_1'
1	12+30	15.5+24.5	19+22.5	22.5+20.5	26+14	40	3或6



生产－库存问题举例

	2	3	4	5	6	$f_1()$	u_1'
1	12+30	15.5+24.5	19+22.5	22.5+20.5	26+14	40	3或6



思考题？？？

某公司去一所大学招聘一名管理专业应届毕业生。从众多应聘生中，初选了3名决定依次单独面试。面试规则是：当对第一个人或第2个人面试时，如果满意记3分，并决定聘用，面试不再继续；如果不满意记 1分，决定不聘用，找下一人继续面试；如果比较满意记 2分，这是有两种选择，或决定聘用，面试不再继续，或不聘用找下一个人继续面试。对决定不聘用者，不能在后面面试的人比较后再回过头来聘用。故在前两名面试者都不聘用时，第三名面试者不论属于何种情况均需聘用。根据以往经验，面试者中满意者占 20%，比较满意者占50%，不满意者占30%。要求用动态规划方法帮助公司确定一个最优策略，使得聘用到的毕业生期望分值为最高

写出下列问题的动态规划的基本方程

$$\max Z=\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\le b\\ 0\le x_i\le c_i & i=1,2,\ldots n\end{cases}$$