动态规划方法应用举例

学习方法建议：

第一步　先看问题，充分理解问题的条件、情况及求解目标。

第二步　结合前面讲到的理论和解题过程，考虑如何着手进行求解该问题的工作。分析针对该动态规划问题的“四大要素、一个方程”——这一步在开始时会感到困难，但是一定要下决心去思考，在思考过程中深入理解前文讲到的概念和理论。

动态规划方法应用举例

第三步　动手把求解思路整理出来，或者说，把该问题作为习题独立的来做。

第四步　把自己的求解放到一边，看书中的求解方法，要充分理解教材中的论述。

第五步　对照自己的求解，分析成败。

动态规划应用举例——之一

§ *1.*最短路问题

§ *2.*资源分配问题

§ *3.*背包问题

动态规划应用举例

1. 动态规划的四大要素

① 状态变量及其可能集合　$x_k \in X_k$

② 决策变量及其允许集合　$u_k \in U_k$

③ 状态转移方程　$x_{k+1} = T_k(x_k, u_k)$

④ 阶段效应　$r_k(x_k, u_k)$

动态规划应用举例

2. 动态规划基本方程

$f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$　（边界条件）

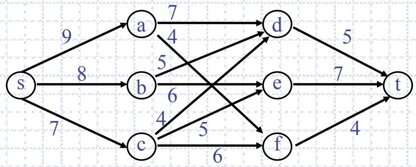
$f_k(x_k) = \text{opt}_u\{r_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\}$

$k = n, \ldots, 1$

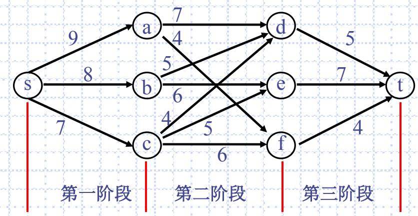
最短路问题

动态规划应用举例——最短路问题

例　某旅行者希望从s地起到t地，其间的道路系统如图所示，图上圆圈表示途径的地方，称为节点，连结两地的箭线表示道路，其上的数字表示这段道路长度，箭头表示通行的方向。试求s到t的最短路。

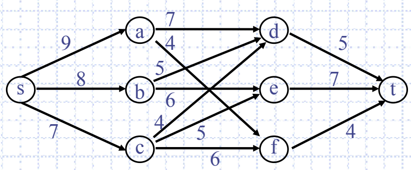


动态规划应用举例——最短路问题



划分阶段　**k=1,2,3** 代表三个阶段

动态规划应用举例——最短路问题

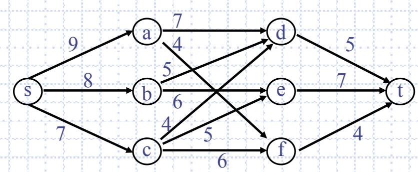


状态变量x_k取为k阶段所在地，则有：

$x_1 \in X_1 = \{s\}$　　$x_2 \in X_2 = \{a,b,c\}$

$x_3 \in X_3 = \{d,e,f\}$　　$x_4 \in X_4 = \{t\}$

动态规划应用举例----最短路问题



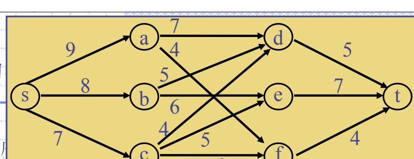
k阶段决策是决定下一步走到哪里，　$u_k(x_k)$取为下一步的所在点。

$u_1 \in U_1(s) = \{a,b,c\}$

$u_2(a) \in U_2(a) = \{d,f\}$　　$u_2(b) \in U_2(b) = \{d,e\}$

$u_2(c) \in U_2(c) = \{d,e,f\}$　　$u_3 \in U_3 = \{t\}$

动　　题



逆

由于第3阶段末已到达t，往后的距离自然是零，因此$f_4(t)=0$

对3阶段所有可能的状态X_3={d, e, f}计算$f_3(\ )$如下

$$f_3(d) = \min_{u_3 \in U_3}\{r_3(d,u_3) + f_4(x_4)\}$$
$$= \min\{r_3(d,t) + f_4(t)\} = 5 \qquad u_3'(d) = t$$

$$f_3(e) = \min_{u_3 \in U_3}\{r_3(e,u_3) + f_4(x_4)\}$$
$$= \min\{r_3(e,t) + 0\} = 7 \qquad u_3'(e) = t$$

$$f_3(f) = \min_{u_3 \in U_3}\{r_3(f,u_3) + f_4(x_4)\}$$
$$= \min\{r_3(f,t) + 0\} = 4 \qquad u_3'(f) = t$$

动态规划应用举例----最短路问题

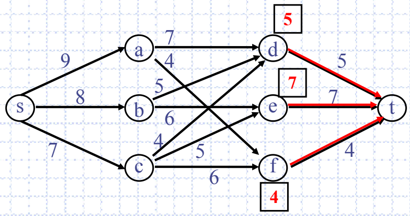
逆序求条件最优目标函数集和条件最优决策集
也可以用表格方法计算如下

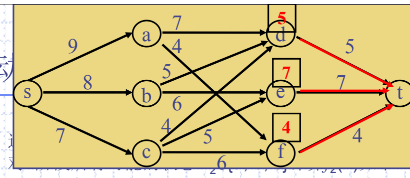
	t/t	*F₃()*	*U₃()*
d	5+0	5	*t*
e	7+0	7	*t*
f	4+0	4	*t*

$r_3(x_3,u_3)+f_4(x_4)$　　$f_3(x_3)$　　$u_3(x_3)$

动态规划应用举例----最短路问题

逆序求条件最优目标函数集和条件最优策集



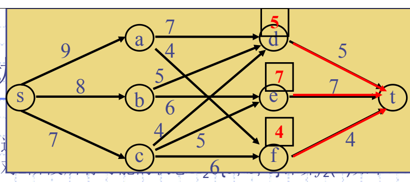


$$f_2(a)=\min_{u_2\in U_2(a)}\{r_2(a,u_2)+f_3(x_3)\}=\min_{u_2\in\{d,f\}}\{r_2(a,u_2)+f_3(x_3)\}$$

$$=\min\begin{Bmatrix} r_2(a,d)+f_3(d)\\ r_2(a,f)+f_3(f)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}7+5\\4+4\end{Bmatrix}=8 \quad u_2'(a)=f$$

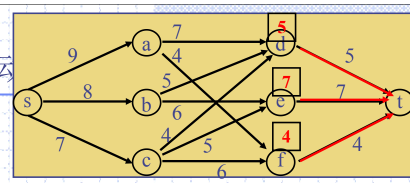
$$f_2(b)=\min_{u_2\in U_2(b)}\{r_2(b,u_2)+f_3(x_3)\}$$

$$=\min\begin{Bmatrix} r_2(b,d)+f_3(d)\\ r_2(b,e)+f_3(e)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}5+5\\6+7\end{Bmatrix}=10 \qquad u_2'(b)=d$$



$$f_2(c)=\min_{u_2\in U_2(c)}\{r_2(c,u_2)+f_3(x_3)\}$$

$$=\min\begin{Bmatrix} r_2(c,d)+f_3(d)\\ r_2(c,e)+f_3(e)\\ r_2(c,f)+f_3(f)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}4+5\\5+7\\6+4\end{Bmatrix}=9 \qquad u_2'(c)=d$$

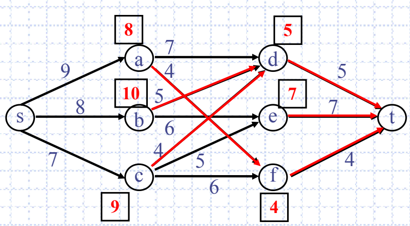


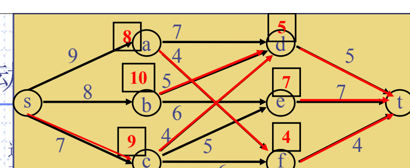
	d/d	e/e	f/f	$F_2()$	$U_2()$
a	7+5		4+4	8	f
b	5+5	6+7		10	d
c	4+5	5+7	6+4	9	d

$r_2(x_2,u_2)+f_3(x_3)$ $f_2(x_2)$ $u_2(x_2)$

动态规划应用举例----最短路问题

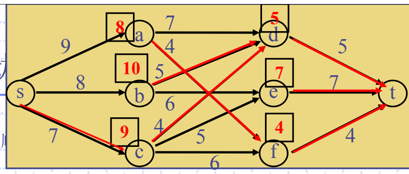
逆序求条件最优目标函数集和条件最优策集





$$f_1(s)=\min_{u_1\in U_1(s)}\{r_1(s,u_1)+f_2(x_2)\}$$

$$=\min\begin{Bmatrix} r_1(s,a)+f_2(a)\\ r_1(s,b)+f_2(b)\\ r_1(s,c)+f_2(c)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}9+8\\8+10\\7+9\end{Bmatrix}=16 \qquad u_1'(s)=c$$



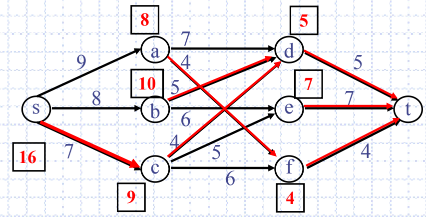
$R^* = \underset{x_1 \in X_1}{opt}\{f_1(x_1)\} = 16$

$u_1^*(s) = c$ $u_2^*(c) = d$ $u_3^*(d) = t$

$x_1^* = s$ $x_2^* = c$ $x_3^* = d$ $x_4^* = t$

动态规划应用举例 ----最短路问题

逆序求条件最优目标函数集和条件最优决策集



资源分配问题

资源分配问题

设有某种资源，总量为M，可以投入n种生产活动。已知用于活动k的资源为u_k时的收益是$g_k(u_k)$，问应如何分配资源，使n种生产活动的总收益最大。这种问题就是资源的多元分配问题。

$$\max Z = g_1(u_1) + g_2(u_2) + \cdots + g_n(u_n)$$
$$s.t. \quad u_1 + u_2 + \cdots + u_n \le M$$
$$u_1, u_2, \cdots, u_n \ge 0$$

资源分配问题

如果将n种活动作为一个互相衔接的整体，对一种活动的资源分配作为一个阶段，每个阶段确定对一种活动的资源投放量。则该问题成为一个多阶段决策问题。

状态变量x_k的选取原则是要能够据此确定决策 u_k，以及满足状态转移方程所要求的无后效性。

在资源分配问题中，决策变量选为对活动 k的资源投放量，因此状态变量可以选择为阶段 k初所拥有的资源量，即将要在第k种到第n种活动间分配的资源量。

资源分配问题

关于状态变量x_k的约束条件是 $0 \le x_k \le M$

关于决策变量u_k的约束条件是 $0 \le u_k \le x_k$

状态转移方程为 $x_{k+1} = x_k - u_k$ 显然它满足无后效性要求。

阶段效应为对活动k投放资源u_k时的收益，

$r_k(x_k, u_k) = g_k(u_k)$

目标函数是为n种活动投放资源后的总收益 $R = \sum_{k=1}^{n} g_k(u_k)$

动态规划基本方程

$$f_k(x_k) = \max_{u_k}\{g_k(u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\}$$

资源分配问题

例4－3 某公司拟将50万元资金投放下属A、B、C三个部门，各部门在获得资金后的收益如表所示，用动态规划方法求总收益最大的投资分配方案（投资数以10万元为单位）。

投放资金（万元）		0	10	20	30	40	50
收益（万元）	A	0	15	20	25	28	30
	B	0	0	10	25	45	70
	C	0	10	20	30	40	50

资源分配问题

投放资金（万元）		0	10	20	30	40	50
收益（万元）	A	0	15	20	25	28	30
	B	0	0	10	25	45	70
	C	0	10	20	30	40	50

解 该问题可以作为三段决策过程：k=1,2,3

对A、B、C三个部门分配资金分别形成1，2，3三个阶段。

资源分配问题

x_k 表示给部门k分配资金时拥有的资金数。

u_k 表示给部门k分配的资金数（以10万元为单位）。

状态转移方程是$x_{k+1}=x_k-u_k$。

$g_k(u_k)$ 阶段效应如表所示。 $f_k(x_k)$目标函数是阶段效应求和。

资源分配问题

资金		0	10	20	30	40	50
收益	A	0	15	20	25	28	30
	B	0	0	10	25	45	70
	C	0	10	20	30	40	50

首先逆序递推

$$f_3(x_3)=\max_{u_3}\{g_3(u_3)+f_4(x_4)\}$$

$$f_4(x_4)=0$$

$$f_3(x_3)=\max_{0\le u_3\le x_3}\{g_3(u_3)\}$$

从表可知$g_3(\ )$是单调递增的函数，因此，当$u_3=x_3$时达到最大。即：

$$f_3(x_3)=g_3(u_3) \qquad u_3'=x_3$$

资源分配问题

资金		0	10	20	30	40	50
收益	A	0	15	20	25	28	30
	B	0	0	10	25	45	70
	C	0	10	20	30	40	50

逆序求条件最优目标函数值集合和条件最优决策集合。

$$f_3(x_3)=g_3(u_3) \qquad u_3'=x_3$$

$$f_3(0)=g_3(0)=0, \qquad u_3(0)=0$$

$$f_3(1)=g_3(1)=10, \qquad u_3(1)=1$$

$$f_3(2)=g_3(2)=20, \qquad u_3(2)=2$$

$$f_3(3)=g_3(3)=30, \qquad u_3(3)=3$$

$$f_3(4)=g_3(4)=40, \qquad u_3(4)=4$$

$$f_3(5)=g_3(5)=50, \qquad u_3(5)=5$$

资源分配问题

资金		0	10	20	30	40	50
收益	A	0	15	20	25	28	30
	B	0	0	10	25	45	70
	C	0	10	20	30	40	50

逆序求条件最优目标函数值集合和条件最优决策集合。

k=2时，$0\le x_2\le 5$ $0\le u_2\le x_2$

$$f_2(x_2)=\max_{0\le u_2\le x_2}\{g_2(u_2)+f_3(x_3)\}$$

$$f_2(0)=\max_{0\le u_2\le 0}\{g_2(u_2)+f_3(x_3)\}=g_2(0)+f_3(0)=0 \qquad u_2'(0)=0$$

$$f_2(1)=\max_{0\le u_2\le 1}\{g_2(u_2)+f_3(x_3)\}=\max\begin{Bmatrix}g_2(0)+f_3(1)\\g_2(1)+f_3(0)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+10\\0+0\end{Bmatrix}=10 \qquad u_2'(1)=0$$

$$f_2(2)=\max_{0\le u_2\le 2}\{g_2(u_2)+f_3(x_3)\}=\max\begin{Bmatrix}g_2(0)+f_3(2)\\g_2(1)+f_3(1)\\g_2(2)+f_3(0)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+20\\0+10\\10+0\end{Bmatrix}=20 \qquad u_2'(2)=0$$

资源分配问题

资金		0	10	20	30	40	50
收益	A	0	15	20	25	28	30
	B	0	0	10	25	45	70
	C	0	10	20	30	40	50

$$f_2(3) = \max_{0\le u_2\le 3}\{g_2(u_2)+f_3(x_3)\}$$

$$= \max\begin{Bmatrix} g_2(0)+f_3(3) \\ g_2(1)+f_3(2) \\ g_2(2)+f_3(1) \\ g_2(3)+f_3(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0+30 \\ 0+20 \\ 10+10 \\ 25+0 \end{Bmatrix} = 30 \quad u_2(3)=0$$

$$f_2(4) = \max_{0\le u_2\le 4}\{g_2(u_2)+f_3(x_3)\}$$

$$= \max\begin{Bmatrix} g_2(0)+f_3(4) \\ g_2(1)+f_3(3) \\ g_2(2)+f_3(2) \\ g_2(3)+f_3(1) \\ g_2(4)+f_3(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0+40 \\ 0+30 \\ 10+20 \\ 25+10 \\ 45+0 \end{Bmatrix} = 45 \quad u_2(4)=4$$

资源分配问题

资金		0	10	20	30	40	50
收益	A	0	15	20	25	28	30
	B	0	0	10	25	45	70
	C	0	10	20	30	40	50

$$f_2(5) = \max_{0\le u_2\le 5}\{g_2(u_2)+f_3(x_3)\}$$

$$= \max\begin{Bmatrix} g_2(0)+f_3(5) \\ g_2(1)+f_3(4) \\ g_2(2)+f_3(3) \\ g_2(3)+f_3(2) \\ g_2(4)+f_3(1) \\ g_2(5)+f_3(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0+50 \\ 0+40 \\ 10+30 \\ 25+20 \\ 45+10 \\ 70+0 \end{Bmatrix} = 70 \quad u_2(5)=5$$

资源分配问题

资金		0	10	20	30	40	50
收益	A	0	15	20	25	28	30
	B	0	0	10	25	45	70
	C	0	10	20	30	40	50

逆序求条件最优目标函数值集合和条件最优决策集合。

当k=1时，有$x_1=5$，$0\le u_1\le x_1=5$

$$f_1(5) = \max_{0\le u_1\le 5}\{g_1(u_1)+f_2(x_2)\}$$

$$= \max\begin{Bmatrix} g_1(0)+f_2(5) \\ g_1(1)+f_2(4) \\ g_1(2)+f_2(3) \\ g_1(3)+f_2(2) \\ g_1(4)+f_2(1) \\ g_1(5)+f_2(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} \underline{0+70} \\ 15+45 \\ 20+30 \\ 25+20 \\ 28+10 \\ 30+0 \end{Bmatrix} = 70 \quad u_1'(5)=0$$

资源分配问题

顺序求最优目标函数值和最优策略、最优路线

$$R^* = \underset{x_1\in X_1}{opt}\{f_1(x_1)\} = 70$$

$u_1^*(5)=0 \qquad u_2^*(5)=5 \qquad u_3^*(0)=0$

$x_1^*=5 \qquad x_2^*=5 \qquad x_3^*=0 \qquad x_4^*=0$

资 源 分 配 问 题

资 源 分 配 问 题

例：有资金4万元，投资A、B、C三个项目，每个项目的投资效益与投入该项目的资金有关。三个项目A、B、C的投资效益（万吨）和投入资金（万元）关系见下表：

项目 / 投入资金	A	B	C
1 万元	15 万吨	13 万吨	11 万吨
2 万元	28 万吨	29 万吨	30 万吨
3 万元	40 万吨	43 万吨	45 万吨
4 万元	51 万吨	55 万吨	58 万吨

求对三个项目的最优投资分配，使总投资效益最大。

资 源 分 配 问 题

1. 阶段k：每投资一个项目作为一个阶段；
2. 状态变量x_k：投资第k个项目前的资金数；
3. 决策变量d_k：第k个项目的投资；
4. 决策允许集合：$0 \leqslant d_k \leqslant x_k$
5. 状态转移方程：$x_{k+1}=x_k-d_k$
6. 阶段指标：$v_k(x_k, d_k)$ 见表中所示；
7. 递推方程：
$f_k(x_k)=\max\{v_k(x_k, d_k)+f_{k+1}(x_{k+1})\}$
8. 终端条件：$f_4(x_4)=0$

$k=4$，$f_4(x_4)=0$
$k=3$，$0 \le d_3 \le x_3$，
$x_4=x_3-d_3$

投入资金	A	B	C
1万元	15万吨	13万吨	11万吨
2万元	28万吨	29万吨	30万吨
3万元	40万吨	43万吨	45万吨
	51万吨	55万吨	58万吨

x_3	$D_3(x_3)$	x_4	$v_3(x_3,d_3)$	$v_3(x_3,d_3)+f_4(x_4)$	$f_3(x_3)$	d_3^*
0	0	0	0	0+0=0	0	0
1	0	1	0	0+0=0	11	1
	1	0	11	11+0=11*		
2	0	2	0	0+0=0	30	2
	1	1	11	11+0=11		
	2	0	30	30+0=30*		
3	0	3	0	0+0=0	45	3
	1	2	11	11+0=11		
	2	1	30	30+0=30		
	3	0	45	45+0=45*		
4	0	4	0	0+0=0	58	4
	1	3	11	11+0=11		
	2	2	30	30+0=30		
	3	1	45	45+0=45		
	4	0	58	58+0=58*		

资 源 分 配 问 题

$k=2$，$0 \le d_2 \le x_2$，$x_3=x_2-d_2$

x_2	$D_2(x_2)$	x_3	$v_2(x_2,d_2)$	$v_2(x_2,d_2)+f_3(x_3)$	$f_2(x_2)$	d_2^*
0	0	0	0	0+0=0	0	0
1	0	1	0	0+11=11	13	1
	1	0	13	13+0=13*		
2	0	2	0	0+30=30*	30	0
	1	1	13	13+11=24		
	2	0	29	29+0=29		
3	0	3	0	0+45=45*	45	0
	1	2	13	13+30=43		
	2	1	29	29+11=40		
	3	0	43	43+0=43		
4	0	4	0	0+58=58	59	2
	1	3	13	13+45=58		
	2	2	29	29+30=59*		
	3	1	43	43+11=54		
	4	0	55	55+0=55		

资 源 分 配 问 题

$k=1$，$0 \le d_1 \le x_1$，$x_2=x_1-d_1$

x_1	$D_1(x_1)$	x_2	$v_1(x_1,d_1)$	$v_1(x_1,d_1)+f_2(x_2)$	$f_1(x_1)$	d_1^*
4	0	4	0	0+59=59	60	1
	1	3	15	15+45=60*		
	2	2	28	28+30=58		
	3	1	40	40+13=53		
	4	0	51	51+0=51		

最优解为
$x_1=4$，$d_1^*=1$，$x_2=x_1-d_1=3$，$d_2^*=0$，$x_3=x_2-d_2^*=3$，$d_3=3$，$x_4=x_3-d_3=0$，
即项目 A 投资 1 万元，项目 B 投资 0 万元，项目 C 投资 3 万元，最大效益为 60 万吨。

一维背包问题

背包问题的特征类似于往旅行背包里面装用品的问题，要求在旅行袋容积和 / 或载重量的限制下，所装物品的总价值最大。这一类问题在海运、航运以及航天等领域都有应用。

例：对于一个具体问题 W=5
用动态规划求解k=3

货物	1	2	3
单位重量	2	3	1
单位价值	65	80	30

解：该问题中有三种物品需要装载，因此可以作为三段决策问题，每阶段为一个物品决定装船的数量．

k阶段系统的状态为在给第 k物品决定装载数量时，船上还剩余的载重能力x_k

$$f_3(x_3) = \max_{0 \le d_3 \le x_3/w_3} \{c_3 d_3 + f_4(x_4)\}$$

$$= \max_{0 \le d_3 \le x_3/w_3} \{30 d_3\}$$

货物	1	2	3
单位重量	2	3	1
单位价值	65	80	30

$$f_3(0) = \max_{0 \le d_3 \le 0}\{c_3 d_3 + f_4(x_4)\} = 0 \quad d_3^{'}(0) = 0$$

$$f_3(1) = \max_{0 \le d_3 \le 1/1}\{c_3 d_3 + f_4(x_4)\}$$

$$= \max\begin{Bmatrix} c_3 \times 0 + f_4(1) \\ c_3 \times 1 + f_4(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0+0 \\ 30+0 \end{Bmatrix} = 30 \qquad d_3(1) = 1$$

$$f_3(2) = \max_{0 \le d_3 \le 2/1}\{c_3 d_3 + f_4(x_4)\}$$

$$= \max\begin{Bmatrix} c_3 \times 0 + f_4(1) \\ c_3 \times 1 + f_4(0) \\ c_3 \times 2 + f_4(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0+0 \\ 30+0 \\ 60+0 \end{Bmatrix} = 60 \qquad d_3(2) = 2$$

x_3	$D_3(x_3)$	x_4	$30d_3+f_4(x_4)$	$f_3(x_3)$	d_3*
0	0	0	0+0=0	0	0
1	0	1	0+0=0	30	1
	1	0	30+0=30*		
2	0	2	0+0=0	60	2
	1	1	30+0=30		
	2	0	60+0=60*		
3	0	3	0+0=0	90	3
	1	2	30+0=30		
	2	1	60+0=60		
	3	0	90+0=90*		
4	0	4	0+0=0	120	4
	1	3	30+0=30		
	2	2	60+0=60		
	3	1	90+0=90		
	4	0	120+0=120*		
5	0	5	0+0=0	150	5
	1	4	30+0=30		
	2	3	60+0=60		
	3	2	90+0=90		
	4	1	120+0=120		
	5	0	150+0=150*		

k=2 **$0 \le x_2 \le 5$**

货物	1	2	3
单位重量	2	3	1
单位价值	65	80	30

$$f_2(x_2) = \max_{0 \le d_2 \le x_2/w_2} \{c_2 d_2 + f_3(x_3)\}$$

$$= \max_{0 \le d_2 \le x_2/3} \{80 d_2 + f_3(x_2 - 3d_2)\}$$

$$f_2(0) = \max_{0 \le d_2 \le 0}\{80 d_2 + f_3(x_3)\} = 0 \quad d_2^{'}(0) = 0$$

$$f_2(1) = \max_{0 \le d_2 \le 1/3}\{80 d_2 + f_3(x_3)\}$$

$$= \max\{80 \times 0 + f_3(1)\} = \max\{0+30\} = 30 \qquad d_2(1) = 0$$

$$f_2(2) = \max_{0 \le d_3 \le 2/3}\{80 d_2 + f_3(x_3)\}$$

$$= \max\{80 \times 0 + f_3(2)\} = \max\{0+60\} = 60 \qquad d_2(2) = 0$$

$$f_2(3) = \max_{0 \le d_3 \le 3/3}\{80 d_2 + f_3(x_3)\}$$

$$= \max\begin{Bmatrix} 80 \times 0 + f_3(3) \\ 80 \times 1 + f_3(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0+90 \\ 80+0 \end{Bmatrix} = 90 \qquad d_2(3) = 0$$

对于 $k=2$

$$f_2(x_2) = \max_{0 \le d_2 \le x_2/w_2} \{c_2 d_2 + f_3(x_3)\}$$

$$= \max_{0 \le d_2 \le x_2/3} \{80 d_2 + f_3(x_2 - 3d_2)\}$$

列出 $f_2(x_2)$ 的数值表

x_2	$D_2(x_2)$	x_3	$80d_2+f_3(x_3)$	$f_2(x_2)$	d_2*
0	0	0	0+f₃(0)=0+0=0*	0	0
1	0	1	0+f₃(1)=0+30=30*	30	0
2	0	2	0+f₂(2)=0+60=60*	60	0
3	0	3	0+f₃(3)=0+90=90*	90	0
	1	0	80+f₃(0)=80+0=80		
4	0	4	0+f₃(4)=0+120=120*	120	0
	1	1	80+f₃(1)=80+30=110		
5	0	5	0+f₃(5)=0+150=150*	150	0
	1	2	80+f₃(2)=80+60=140		

对于k=1,x1=5

货物	1	2	3
单位重量	2	3	1
单位价值	65	80	30

$$f_1(x_1) = \max_{0 \le d_1 \le x_1/w_1} \{c_1 d_1 + f_2(x_2)\}$$

$$= \max_{0 \le d_1 \le x_1/2} \{65 d_1 + f_2(x_1 - 2d_1)\}$$

$$f_1(5) = \max_{0 \le d_1 \le 5/2}\{65 d_1 + f_2(x_2)\}$$

$$= \max\begin{Bmatrix} 65 \times 0 + f_2(5) \\ 65 \times 1 + f_2(3) \\ 65 \times 2 + f_2(1) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0+1500 \\ 65+90 \\ 130+30 \end{Bmatrix} = 160 \qquad d_1(5) = 2$$

由题意知，$x_1=5$，由表 $f_1(x_1)$、$f_2(x_2)$、$f_3(x_3)$，经回朔可得：

$d_1^*=2$，$x_2=x_1-2d_1=1$，$d_2^*=0$，$x_3=x_2-3d_2=1$，$d_3^*=1$，$x_4=x_3-d_3=0$

即应取第一种物品 2 件，第三种物品 1 件，最高价值为 160 元，背包没有余量。由 $f_1(x_1)$ 得列表可以看出，如果背包得容量为 $W=4$，$W=3$，$W=2$ 和 $W=1$ 时，相应的最优解立即可以得到。

二维背包问题

二维背包问题

- 若只考虑重量或体积限制，则称为一维背包问题，若同时考虑重量和体积限制，则称为二维背包问题．
- 考虑有N种物品需要装船。第 i 种物品单位的重量为ω_i，单件体积为υ_i，而价值为p_i。最大的装载重量为W，最大体积为V。现在要确定在不超过船的最大载重量和最大体积（不考虑货物形状）的条件下，使所载物品价值最大的装载方案。

二维背包问题

- 例 已知货物的单位重量ω_i，单位体积υ_i及价值p_i如表所示，船的最大载重能力为 W＝5，最大装载体积为V＝8，求最优装载方案。

i	ω_i	υ_i	p_i
A	1	2	30
B	3	4	80
C	2	3	65

二维背包问题

- 例 **W＝5，V＝8**

解：该问题中有三种物品需要装载，因此可以作为三段决策问题，每阶段为一个物品决定装船的数量．k阶段系统的状态为在给第 k物品决定装载数量时，船上还剩余的载重能力x_k和剩余体积y_k.

因此状态变量是二维的，记为（x_k, y_k）。

有$0\le x_k\le 5$，　$0\le y_k\le 8$

决策变量u_k表示装载第k种物品的数量。

$$0\le u_k\le \min\left\{\frac{x_k}{\omega_k},\frac{y_k}{\upsilon_k}\right\}$$

二维背包问题

i	ω_i	υ_i
A	1	2
B	3	4
C	2	3

- 例 **W＝5，V＝8**

解 状态转移方程为：$x_{k+1}=x_k-u_k\cdot\omega_k$

$y_{k+1}=y_k-u_k\cdot\upsilon_k$

各阶段的状态可能集与决策允许集为：$0\le u_k\le \min\left\{\frac{x_k}{\omega_k},\frac{y_k}{\upsilon_k}\right\}$

$(x_1,y_1)=(5,8)$　　$0\le u_1\le \min\left\{\frac{5}{1},\frac{8}{2}\right\}=4$

$u_2\in U_2=\{0,1\}$　　　$u_3\in U_3=\{0,1,2\}$

二维背包问题

(x_1,y_1)	u_1	(x_2,y_2)	u_2	(x_3,y_3)
(5,8)	0	(5,8)	0	(5,8)
			1	(2,4)
	1	(4,6)	0	(4,6)
			1	(1,2)
	2	(3,4)	0	(3,4)
			1	(0,0)
	3	(2,2)	0	(2,2)
	4	(1,0)	0	(1,0)

i	ω_i	υ_i
A	1	2
B	3	4
C	2	3

二维背包问题

阶段效应为 **$r_k(x_k, y_k, u_k)=p_k\cdot u_k$**

$$f_k(x_k,y_k)=\max_{u_k}\{r_k(x_k,y_k,u_k)+f_{k+1}(x_{k+1},y_{k+1})\}$$
$$=\max_{u_k}\{p_k u_k+f_{k+1}(x_{k+1},y_{k+1})\}$$

i	ω_i	υ_i	p_i
A	1	2	30
B	3	4	80
C	2	3	65

$$f_3(x_3,y_3)=\max_{u_3}\{r_3(x_3,y_3,u_3)+f_4(x_4,y_4)\}$$
$$=\max_{0\le u_3\le \min\{x_3/2,y_3/3\}}\{p_3u_3+f_4(x_4,y_4)\}$$

$$f_3(5,8)=\max_{0\le u_3\le \min\{5/2,8/3\}}\{p_3u_3+f_4(x_4,y_4)\}$$
$$=\max\begin{Bmatrix}65\times 0+f_4(5,8)\\65\times 1+f_4(3,5)\\65\times 2+f_4(1,2)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+0\\65+0\\130+0\end{Bmatrix}=130 \qquad u_3(5,8)=2$$

$$f_3(4,6)=\max_{0\le u_3\le \min\{4/2,6/3\}}\{p_3u_3+f_4(x_4,y_4)\}$$
$$=\max\begin{Bmatrix}65\times 0+f_4(4,6)\\65\times 1+f_4(3,3)\\65\times 2+f_4(0,0)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+0\\65+0\\130+0\end{Bmatrix}=130 \quad u_3(4,6)=2$$

二维背包问题

i	ω_i	υ_i	p_i
A	1	2	30
B	3	4	80
C	2	3	65

u_3

解 当k＝3时，由$f_4(x_4, y_4)=0$

(x_3,y_3)	$0/(x_3,y_3)$	$1/(x_3-2,y_3-3)$	$2/(x_3-4,y_3-6)$	$f_3(\ )$	U'_3
(5,8)	0＋0	65＋0	2×65＋0	130	2
(4,6)	0＋0	65＋0	2×65＋0	130	2
(3,4)	0＋0	65＋0	×	65	1
(2,2)	0＋0	×	×	0	0
(1,0)	0＋0	×	×	0	0
(2,4)	0＋0	65＋0	×	65	1
(1,2)	0＋0	×	×	0	0
(0,0)	0＋0	×	×	0	0

当k＝2时

i	ω_i	υ_i	p_i
A	1	2	30
B	3	4	80
C	2	3	65

$$f_2(5,8)=\max_{0\le u_2\le \min\{5/3,8/4\}}\{p_2u_2+f_3(x_3,y_3)\}$$
$$=\max\begin{Bmatrix}80\times 0+f_3(5,8)\\80\times 1+f_3(2,4)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+130\\80+65\end{Bmatrix}=145 \qquad u_2(5,8)=1$$

二维背包问题

i	ω_i	υ_i	p_i
A	1	2	30
B	3	4	80
C	2	3	65

u_2

解 当k＝2时，由$f_3(x_3, y_3)$已知

(x_2,y_2)	$0/(x_2,y_2)$	$1/(x_2-3,y_2-4)$	$f_2(\ )$	U'_2
（5，8）	0＋130	80＋65	145	1
（4，6）	0＋130	80＋0	130	0
（3，4）	0＋65	80＋0	80	1
（2，2）	0＋0	×	0	0
（1，0）	0＋0	×	0	0

当k＝1时

i	ω_i	u_i	p_i
A	1	2	30
B	3	4	80
C	2	3	65

$$f_1(5,8)=\max_{0\le u_1\le \min\{5/1,8/2\}}\{p_1u_1+f_2(x_2,y_2)\}$$

$$=\max\begin{Bmatrix}80\times 0+f_2(5,8)\\30\times 1+f_2(4,6)\\30\times 2+f_2(3,4)\\30\times 3+f_2(2,2)\\30\times 4+f_2(1,0)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+145\\30+130\\60+80\\90+0\\120+0\end{Bmatrix}=160 \qquad u_1(5,8)=1$$

二维背包问题

解　当k＝1时，W=5,V=8

	0/(5,8)	1/(4,6)	2/(3,4)	3/(2,2)	4/(1,0)	$f_1(\ )$	u_1
(5,8)	0＋145	30＋130	60＋80	90＋0	120＋0	160	1

(x_2,y_2)	$0/(x_2,y_2)$	$1/(x_2\text{-}2,y_2\text{-}4)$	$f_2(\ )$	U'_2
（5，8）	0＋130	80＋65	145	1
（4，6）	0＋130	80＋0	130	0
（3，4）	0＋65	80＋0	80	1
（2，2）	0＋0	×	0	0
（1，0）	0＋0	×	0	0

二维背包问题

(x_3,y_3)	$0/(x_3,y_3)$	$1/(x_3\text{-}2,y_3\text{-}3)$	$2/(x_3\text{-}4,y_3\text{-}6)$	$f_3(\ )$	U'_3
(5,8)	0＋0	65＋0	2×65＋0	130	2
(4,6)	0＋0	65＋0	2×65＋0	130	2
(3,4)	0＋0	65＋0	×	65	1
(2,2)	0＋0	×	×	0	0
(1,0)	0＋0	×	×	0	0
(2,4)	0＋0	65＋0	×	65	1
(1,2)	0＋0	×	×	0	0
(0,0)	0＋0	×	×	0	0

二维背包问题

$$\boldsymbol{f_1(5,8)=160}$$

$$u_1^*(5,8)=1 \qquad u_2^*(4,6)=0 \qquad u_3^*(4,6)=2$$

$$(x_1^*,y_1^*)=(5,8)\quad (x_2^*,y_2^*)=(4,6)\quad (x_3^*,y_3^*)=(4,6)\quad (x_4^*,y_4^*)=(0,0)$$