运筹学

Operational Research

"夫运筹于帷幄之中，决胜于千里之外"

2018年9月

运筹学简史

战国时代：齐王与田忌赛马的故事

北宋：丁渭修宫

1736年欧拉——哥尼斯堡七桥问题

1915年哈里斯——经济订货批量公式

1917年爱尔朗（A.K.Erlang）自动拨号设备对电话需求影响的实验（排队论）

1928年冯诺依曼 二人零和博弈

1939年康托罗维奇提出线性规划，研究工业生产资源的合理利用， 1975年获得了诺贝尔经济学奖

运筹学简史

Operational Research

起源于军事活动

运筹学简史

Operational Research

- 问题： 合理利用稀缺战争资源 保护自己、消灭敌人
- 学科产生： 第二次世界大战 20世纪40年代 布莱克特（P. M. S. Blackett） "OR"小组

运筹学简史

- 扩展： 战后用于民用事业
- 成型： 各个分支成熟

50 年代后理论的发展

- 规划论
  - 线性规划
  - 非线性规划
  - 动态规划
  - 整数规划
- 排队论
- 存贮论
- 图与网络分析

运筹学简史

- 成熟：计算机、信息技术结合
- 发展： 60，70年代,学科结合渗透、 应用广度和深度、方法和算法的完善

企业管理	公共服务
工程设计	医疗保健
生产计划	交通运输
财政金融	教育科研
资源配置	国防军事
物资存贮	航天技术

运筹学在工商管理中的应用

Management Science

生产计划：生产作业的计划、日程表的编排、合理下料、配料问题、物料管理等。

库存管理：多种物资库存量的管理，库存方式、库存量等。

运输问题：确定最小成本的运输线路、物资的调拨、运输工具的调度以及建厂地址的选择等。

运筹学在工商管理中的应用

人事管理：对人员的需求和使用的预测，确定人员编制、人员合理分配，建立人才评价体系等。

市场营销：广告预算、媒介选择、定价、产品开发与销售计划制定等。

运筹学在工商管理中的应用

财务和会计：包括预测、贷款、成本分析、定价、证券管理、现金管理等。

其他：设备维修、更新，项目选择、评价，工程优化设计与管理等。

运筹学定义（一）

一般来说，运筹学的研究对象是各种有组织的系统（主要是经济组织系统）的经营管理问题，运筹学所研究的系统是在一定时空条件下存在的，为人所控制和操纵，有两个以上的行动方案可供选择而需要人们做出决策的系统。

运筹学定义（二）

- 运筹学所研究的问题时能用数量表示与系统各项活动有关而带有运用，筹划，安排，控制和规划等方面的问题。
- 运筹学的任务就是在现有条件下，根据问题的要求，对有关活动中错综复杂的数量进行分析研究，并归纳为一定的模型，然后运用有关原理和方法求得解决问题的最优途径和方案，以求实现预期目的。

运筹学解决问题的过程

1) 提出问题：认清问题。

2) 寻求可行方案：建模、求解。

3) 确定评估目标及方案的标准或方法、途径。

4) 评估各个方案：解的检验、灵敏性分析等。

运筹学解决问题的过程

5）选择最优方案：决策。

6）方案实施：回到实践中。

7）后评估：考察问题是否得到完满解决。

1）2）3）形成问题；4）5）分析问题：定性分析与定量分析相结合，构成决策。

如何学习运筹学课程

学习运筹学要把重点放在分析、理解有关的概念、思路上。在自学过程中，应该多向自己提问，例如一个方法的实质是什么，为什么这样进行，怎么进行等。

自学时要掌握三个重要环节：

如何学习运筹学课程

1. 认真阅读教材和参考资料，以指定教材为主，同时参考其他有关书藉。一般每一本运筹学教材都有自己的特点，但是基本原理、概念都是一致的。注意主从，参考资料会帮助你开阔思路，使学习深入。但是，把时间过多放在参考资料上，会导致思路分散，不利于学好。

如何学习运筹学课程

2. 要在理解了基本概念和理论的基础上研究例题，注意例题是为了帮助理解概念、理论的。作业练习的主要作用也是这样，它同时还有让你自已检查自己学习的作用。因此，做题要有信心，要独立完成，不要怕出错。因为，整个课程是一个整体，各节内容有内在联系，只要学到一定程度，知识融会贯通起来，你自己就能够对所做题目的正确性作出判断。

如何学习运筹学课程

3、要学会做学习小结。每一节或一章学完后，必须学会用精炼的语言来概述该书所讲内容。这样，你才能够从较高的角度来看问题，更深刻地理解有关知识和内容。这就称作“把书读薄”，若能够结合相关参考文献并深入理解，把相关知识从更深入、广泛的角度进行论述，则称为“把书读厚”。

如何学习运筹学课程

在建数学模型时，要结合实际应用。

课程要求

- 掌握运筹学思想
- 熟悉建模条件、步骤与技巧
- 能从实际背景抽出适当的运筹学模型
- 掌握求解的方法，能对结果作简单的分析
- 具有初步运用“运筹学”思想和方法分析解决实际问题的能力

课程内容

线性规划 ——单纯形法、对偶理论、灵敏度分析、 运输问题
目标规划
动态规划
图与网络理论
存贮论（选讲）
决策论（选讲）

线性规划

（Linear Programming）LP

- 线性规划引论
- 单纯形法
- 线性规划的对偶理论
- 灵敏度分析
- 运输问题
- 目标规划

线性规划

（Linear Programming）

1947年 美国数学家 Dantzig
单纯形法
1979年 前苏联数学家 哈奇安
椭球法
1984年 美国数学家 Karmarkar
Karmarkar算法

第一章 线性规划与单纯形法原理

§ 1. 问题与模型

1.1线性规划数学模型

1.1线性规划数学模型

例1.某工厂生产A、B、C三种产品，每吨利润分别为2000元，3000元，3000元；生产单位产品所需的工时及原材料如表所示。若供应的原材料每天不超过9t，所能利用的劳动力日总工时为3个单位，问如何制定日生产计划，使三种产品总利润最大？

生产每吨产品所需资源 / 产品 / 资源	A	B	C
工　时	1	1	1
材　料	1	4	7

1.1线性规划数学模型

问题：工时和材料的日可供量已知

求使利润最大的生产方案

解：产品A，B，C的日生产量： x_1，x_2，x_3

每日工时 = $x_1 + x_2 + x_3$

每日消耗材料量 = $x_1 + 4x_2 + 7x_3$

每天可得利润（以千元为单位）

Z = $2x_1 + 3x_2 + 3x_3$

1.1.线性规划数学模型

$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3$ 利润最大

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3 & \text{工时约束} \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 \le 9 & \text{材料约束} \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 & \text{非负约束} \end{cases}$$

Max：maximize，　“最大化”

s.t.：subject to，　“满足于…”

1.1.线性规划数学模型

例2. 设有A_1，A_2两个砖厂，产量分别为23万块和27万块砖，供应三个工地B_1，B_2，B_3，其需求量分别为17万块、18万块和15万块，而自产地到各工地的运价见表，问应如何调运，才能使总运费最小？

砖厂 \ 运价（元/万块）\ 工地	B_1	B_2	B_3
A_1	50	60	70
A_2	60	110	160

[解] 设x_{ij}　A_i运往B_j的运量（万块）

$\min S = 50x_{11} + 60x_{12} + 70x_{13} + 60x_{21} + 110x_{22} + 160x_{23}$

S.t. $x_{11}+x_{12}+x_{13}=23$ 　A_1产量

$x_{21}+x_{22}+x_{23}=27$ 　A_2产量

$x_{11}+x_{21}=17$ 　B_1 需求量

$x_{12}+x_{22}=18$ 　B_2 需求量

$x_{13}+x_{23}=15$ 　B_3 需求量

$x_{ij}\ge 0$, i、j

1.1.线性规划数学模型

定义：

对于求取一组变量x_j(j=1,2,……,n)，使之既满足线性约束条件，又使具有线性的目标函数取得极值的一类最优化问题称为线性规划问题。

max（或min）$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (=,\ge) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le (=,\ge) b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (=,\ge) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0 \,(\le 0,\text{自由}) \end{cases}$$

1.1.线性规划数学模型

一般形式：

max（或min）$\overset{\text{目标函数}}{Z} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n$

约束条件

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (=,\ge) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le (=,\ge) b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (=,\ge) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0 \,(\le 0,\text{自由}) \end{cases}$$

非负约束

$x_j\,(j = 1,2,\cdots,n)$ 称为决策变量

$c_j\,(j = 1,2,\cdots,n)$ 称为价值系数或目标函数系数

$b_i\,(i = 1,2,\cdots,m)$ 称为资源常数或约束右端常数

$a_{ij}\,(i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n)$ 称为技术系数或约束系数

1.1.线性规划数学模型

紧缩形式：

max（或min）$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le (=,\ge) b_i & i=1,2,\ldots\ldots,n \\ x_j \ge 0 & j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

1.1.线性规划数学模型

矩阵形式：

$$\max\ (\text{或}\min)\ Z = CX$$

$$s.t.\begin{cases} AX \le (=,\ge) b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ 称为决策变量向量

$C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 称为价值系数向量或目标函数系数向量

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为技术系数或约束系数矩阵

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为资源常数向量或约束右端常数向量

1.1.线性规划数学模型

线性规划模型特点：

① 用一组未知变量（决策变量）表示要求的方案。通常，根据决策变量所代表的事物的特点可以对变量的取值加以约束，例如非负约束。

② 存在一定的限制条件，通常称为约束条件，这些约束条件可以用一组线性等式或者线性不等式来表示

③ 有一个目标要求，并且可以表示为决策变量的线性函数，称为目标函数，按所研究问题的不同，要求目标函数实现最大化或者最小化。

1.1.线性规划数学模型

例 3 靠近某河流有两个化工厂，流经第一化工厂的河流流量为每天500万m³，两工厂之间有一条流量为每天200万m³的支流（见图）。

第一化工厂每天排放污水2万m³，第二化工厂每天排放污水 1.4万m³。污水从工厂1流到工厂2前会有20%自然净化。根据环保要求，河水中污水的含量应不大于0.2%。而工厂1和工厂2处理污水的成本分别为1000元/万m³和800元/万m³。问两工厂各应处理多少污水才能使处理污水的总费用最低？

$$\text{Min } z = 1000x_1 + 800x_2$$

$$\begin{cases} (2-x_1)/500 \le 0.002 \\ [0.8(2-x_1)+1.4-x_2]/700 \le 0.002 \\ x_1 \le 2,\quad x_2 \le 1.4 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.1线性规划数学模型

例4.（合理下料问题）

现要做100套钢架，每套用长为2.9m, 2.1m和1.5m的圆钢各一根。已知原料长7.4m。问应如何下料，使用的原材料最省？

［解］每一根原料上截取2.9m, 2.1m, 1.5m的圆钢各一根，组成一套则原材料省下料头0.9m。若做100套，就有90m料头。若采用套裁，就可以节约原材料。下面有几种方案可供采用

1.1线性规划数学模型

下料根数 \ 方案 长度	1	2	3	4	5
2.9m	2	1	1	0	0
2.1m	0	0	2	2	1
1.5m	1	3	0	2	3
料头	0.1	0	0.3	0.2	0.8

设按第i种方案下料为x_i根（i=1，2，…，5），则模型为

$$\min\ Z = 0.1x_1 + 0x_2 + 0.3x_3 + 0.2x_4 + 0.8x_5$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 100 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 100 \\ x_1 + 3x_2 \quad + 2x_4 + 3x_5 &= 100 \\ x_1, x_2, \cdots, x_5 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

1.1线性规划数学模型

例5.某厂在今后四个月内需租用仓库堆存物资。已知每个月所需的仓库面积数字列于表：

月份	1	2	3	4
所需仓库面积（百米²）	15	10	20	12

仓库租借费用，当租借合同期限越长时，享受的折扣优待越大，具体数字见下表：

合同租借期限	1个月	2个月	3个月	4个月
合同期内每百米²仓库面积的租借费用（元）	2800	4500	6000	7300

1.1线性规划数学模型

租借仓库的合同每月都可办理，每份合同具体规定租用面积数和期限。因此该厂可根据需求在任何一个月初办理租借合同，且每次办理时，可签一份，也可同时签若干份租用面积和租借期限不同的合同，总的目标是使所付的租借费用最小。

1.1线性规划数学模型

[解]设x_{ij} 为第i个月初签订的租借期限为j个月的合同租借面积（i=1,2,3,4;j=1,2,⋯4-i+1）

$$\min S=2800x_{11}+4500x_{12}+6000x_{13}+7300x_{14}+2800x_{21}+4500x_{22}+6000x_{23}+2800x_{31}+4500x_{32}+2800x_{41}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} & x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\ge 15 \\ & x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{21}+x_{22}+x_{23}\ge 10 \\ & x_{13}+x_{14}+x_{22}+x_{23}+x_{31}+x_{32}\ge 20 \\ & x_{14}+x_{23}+x_{32}+x_{41}\ge 12 \\ & x_{ij}\ge 0\ (i=1,2,3,4;\ j=1,2,\cdots 4-i+1) \end{aligned}$$

第一章 线性规划与单纯形法原理

§ 1. 问题与模型

1.2 图解法

1.2 图解法

用作图的方法确定可行域，判断目标函数的大小，达到求解的目的

适用对象： 仅有两个变量的LP问题

步骤：

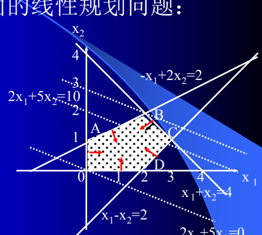
- 建立平面坐标系
- 图解约束条件和非负条件
- 做目标函数等值线
- 平移目标函数等值线
- 联立求解相应约束条件

1.2 图解法

例1 用图解法求解下面的线性规划问题：

$$\max Z=2x_1+5x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1+x_2\le 4 \\ -x_1+2x_2\le 2 \\ x_1-x_2\le 2 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$



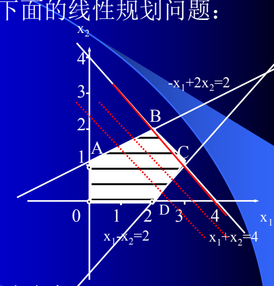
最优解为B(2,2)

1.2 图解法

例2 用图解法求解下面的线性规划问题：

$$\max Z=2x_1+2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1+x_2\le 4 \\ -x_1+2x_2\le 2 \\ x_1-x_2\le 2 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$



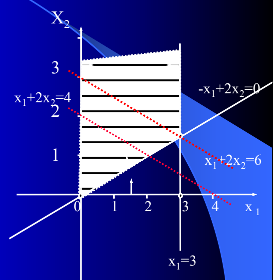
最优解为BC线上，无穷多个

1.2 图解法

例3 用图解法求解下面的线性规划问题：

$$\min Z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 0 \\ x_1 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



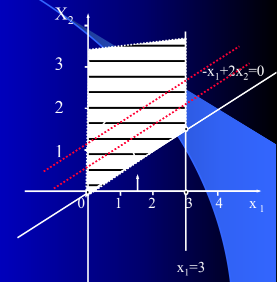
最优解为O(0,0)

1.2 图解法

例4 用图解法求解下面的线性规划问题：

$$\min Z = -x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 0 \\ x_1 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



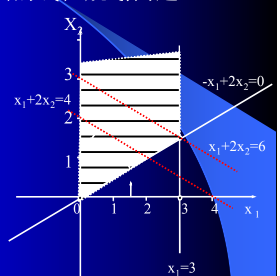
最优解为无穷

1.2 图解法

例5 用图解法求解下面的线性规划问题：

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 0 \\ x_1 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



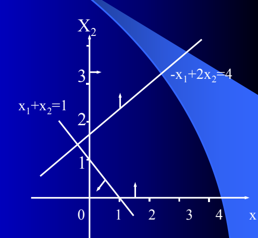
最优解为正无穷，即没有有限最优解

1.2 图解法

例6 用图解法求解下面的线性规划问题：

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



无可行解

1.2 图解法

可行域	最优解
空　集 →	无最优解
有界集 →	唯一最优解
无界集 →	无穷多个最优解
	没有有限最优解

1.2 图解法

猜想1

线性规划的可行域是凸集；

猜想2

最优解若存在，则可以在可行域的顶点上得到；

猜想3

可行域的顶点的个数是有限的；

猜想4

若有两个最优解，则其连线上的点也是最优解，即最优解有无穷多个

第一章 线性规划与单纯形法原理

§ 1. 问题与模型

1.3线性规划标准形式

化一般问题为标准形式：

（一）若 $a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots a_{kn}x_n \leqslant b_k$

加一变量 $x_{n+k} \geqslant 0$（松驰变量），改写为

$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots a_{kn}x_n+x_{n+k}=b_k$

若 $a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots a_{kn}x_n \geqslant b_k$

减一变量 $x_{n+k} \geqslant 0$（剩余变量），改写为

$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots a_{kn}x_n-x_{n+k}=b_k$

（二）若目标函数为 $\min Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

$\max Z' = -Z = -(c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n)$

（三）若 $x_j<0$，令 $x_j' = -x_j$

（四）若 x_j 无约束，令 $x_j=x_j'-x_j''$, $x_j' \geqslant 0$, $x_j'' \geqslant 0$

（五）若 $b_i<0$，则在约束式的两边乘以 -1，使得 $b_i>0$

1.3线性规划标准形式

例1：将以下线性规划问题转化为标准形式

$$\begin{aligned}
\text{Min}\quad & f= -3x_1+5x_2+8x_3-7x_4 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1-3x_2+5x_3+6x_4 \leqslant 28 \\
& 4x_1+2x_2+3x_3-9x_4 \geqslant 39 \\
& 6x_2+2x_3+3x_4 \leqslant -58 \\
& x_1,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Min}\quad & f= -3x_1+5x_2+8x_3-7x_4 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1-3x_2+5x_3+6x_4 \leqslant 28 \\
& 4x_1+2x_2+3x_3-9x_4 \geqslant 39 \\
& 6x_2+2x_3+3x_4 \leqslant -58 \\
& x_1,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0
\end{aligned}$$

形式

解：首先，将目标函数转换成极大化：令 $z=-f=3x_1-5x_2-8x_3+7x_4$；

其次考虑约束，有3个不等式约束，引进松弛变量 $x_5, x_6, x_7 \geqslant 0$；

由于 x_2 无非负限制，可令 $x_2=x_2'-x_2''$，其中 $x_2' \geqslant 0$，$x_2'' \geqslant 0$；

由于第3个约束右端项系数为-58，于是把该式两端乘以-1 。

于是，我们可以得到以下标准形式的线性规划问题：

$$\begin{aligned}
\text{Min}\quad & f= -3x_1+5x_2+8x_3-7x_4 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1-3x_2+5x_3+6x_4 \leqslant 28 \\
& 4x_1+2x_2+3x_3-9x_4 \geqslant 39 \\
& 6x_2+2x_3+3x_4 \leqslant -58 \\
& x_1,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0
\end{aligned}$$

形式

$$\begin{aligned}
\text{Max}\quad & z = 3x_1-5x_2'+5x_2''-8x_3+7x_4 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1-3x_2'+3x_2''+5x_3+6x_4+x_5 = 28 \\
& 4x_1+2x_2'-2x_2''+3x_3-9x_4-x_6 = 39 \\
& -6x_2'+6x_2''-2x_3-3x_4-x_7 = 58 \\
& x_1,\ x_2',\ x_2'',\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 \geqslant 0
\end{aligned}$$

1.3线性规划标准形式

标准型的主要特征：

① 目标最大；

② 约束等式；

③ 变量非负；

④ 右端非负。

$$\max Z = c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\ x_1,x_2,\cdots,x_n \geq 0 \end{cases}$$

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

划标准形式

标准型的紧缩形式：

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \geq 0 & j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

标准型的矩阵形式：

$$\max Z = CX$$

$$s.t.\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

1.3线性规划标准形式

标准型的向量形式：

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} p_j x_j = b \\ x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

其中：$p_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

1.3线性规划标准形式

标准化举例：

$$\min Z = -2x_1 + 3x_2 - x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \leq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 8 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3\text{自由变量} \end{cases}$$

$$\max Z' = 2x_1 - 3x_2 + (x_3' - x_4) + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - x_2 + (x_3' - x_4) + x_5 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 - (x_3' - x_4) - x_6 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - (x_3' - x_4) = 1 \\ x_1, x_2, x_3', x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

第一章 线性规划与单纯形法原理

§ 1. 问题与模型

1.4线性规划问题解的概念

1.4线性规划问题解的概念

熟悉下列一些解的概念

- 可行解、可行解集（可行域）
- 最优解、最优值
- 基、基变量、非基变量
- 基本解、基本可行解
- 可行基、最优基

1.4线性规划问题解的概念

$$\max Z = CX$$

$$s.t.\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

可行解：满足约束条件的解

最优解：使目标函数达到最大的可行解

基:若B是A中m*m阶非奇异子矩阵，(|B|≠0)，则称B是一个基，相应于B的变量称为基变量。

B被称为一个基，是由于B由m个线性无关列组成，这m个线性无关的列向量可以作为一个基。

基本解：令非基变量取零，则得唯一解，称为基本解。

基本可行解：所有变量非负的基本解。

可行基：对应于基可行解的基。

例. Min $Z=2x_1+x_2$

s.t. $x_1+x_2+x_3 \quad =5$

$-x_1+x_2 \quad +x_4 \quad =0$

$6x_1+2x_2 \quad +x_5=21$

$x_j \geq 0, j=1,2, \cdots 5$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad p_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad P_5=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

因此$\{P_3, P_4, P_5\}$是一个基，对应的x_3, x_4, x_5为基变量。

例. Min $Z=2x_1+x_2$

s.t. $x_1+x_2+x_3 \quad =5$

$-x_1+x_2 \quad +x_4 \quad =0$

$6x_1+2x_2 \quad +x_5=21$

$x_j \geq 0, j=1,2, \cdots 5$

令$x_1=x_2=0$，则得$x_3=5, x_4=0, x_5=21$，$x^0=(0,0,5,0,21)^T$是

对应于基B= $\{P_3, P_4, P_5\}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的一个基本解。因$x_i \geq 0$,

∴x^0为基本可行解。

例. Min $Z=2x_1+x_2$

s.t. $x_1+x_2+x_3 \quad =5$

$-x_1+x_2 \quad +x_4 \quad =0$

$6x_1+2x_2 \quad +x_5=21$

$x_j \geq 0, j=1,2, \cdots 5$

另外，向量 $P_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\6\end{pmatrix}$ $P_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ $P_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 线性无关，因此

$\{P_1, P_2, P_3\}$为一个基，对应的x_1, x_2, x_3为基变量。

令$x_4=x_5=0$，得 $x_1=21/8, x_2=21/8, x_3=-2/8$

则$x'=(21/8, 21/8, -2/8, 0, 0)^T$也是基本解，但其不是可行解。

例. Min $Z=2x_1+x_2$

s.t. $x_1+x_2+x_3 \quad =5$

$-x_1+x_2 \quad +x_4 \quad =0$

$6x_1+2x_2 \quad +x_5=21$

$x_j \geq 0, j=1,2, \cdots 5$

又向量P_5，P_2，P_3线性无关，其为一基，x_2，x_3，x_5为对应的基变量，令$x_1=x_4=0$，则$x_2=0$，$x_3=5$，$x_5=21$，所以$X^2=(0, 0, 5, 0, 21)^T$也是一基本可行解。

1.4线性规划问题解的概念

进一步讨论线性规划标准矩阵形式的基、基本解、基本可行解的概念。

考虑线性规划标准矩阵形式的约束条件：

$$Ax=b, \quad x \geqslant 0$$

其中A为m×n的矩阵，$n>m$，秩(A) = m，$b \in R^m$。

解向量为：

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

1.4线性规划问题解的概念

在约束等式中，令n维空间的解向量：

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

中$n-m$个变量为零，如果剩下的m个变量在线性方程组中有唯一解，则这n个变量的值组成的向量x就对应于n维空间中若干个超平面的一个交点。当这n个变量的值都是非负时，这个交点就是线性规划可行域的一个极点。

1.4线性规划问题解的概念

根据以上分析，我们建立以下概念：

（1）**线性规划的基**：对于线性规划的约束条件

$$Ax=b,\quad x\geq 0$$

设B是A矩阵中的一个非奇异（可逆）的 $m\times m$子矩阵，则称B为线性规划的一个**基**。

用前文的记号，$A=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$，其中 $p_j=(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^T\in R^m$，任取$A$中的$m$个线性无关列向量 $p_j\in R^m$ 构成矩阵 $B=(p_{j1}, p_{j2}, \cdots, p_{jm})$。

那么B为线性规划的一个**基**。

我们称对应于基B的变量 $x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jm}$ 为**基变量**；而其他变量称为**非基变量**。

1.4线性规划问题解的概念

另外还可以用矩阵来描述这些概念。

设B是线性规划的一个基，则A可以表示为

$$A=[\,B\,,\ N\,]$$

x也可相应地分成 $x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$

其中x_B为m维列向量，它的各分量称为**基变量**，与基B的列向量对应；x_N为$n-m$列向量，它的各分量称为**非基变量**，与非基矩阵N的列向量对应。这时约束等式$Ax=b$可表示为

1.4线性规划问题解的概念

$$(B, N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=b$$

或

$$Bx_B+Nx_N=b$$

如果对非基变量x_N取确定的值，则x_B有唯一的值与之对应

$$x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$$

特别，当取$x_N=0$，这时有$x_B=B^{-1}b$。

关于这类特别的解，有以下概念。

1.4线性规划问题解的概念

（2）**线性规划问题的基本解、基本可行解和可行基**：

对于线性规划问题，设矩阵 $B=(p_{j1}, p_{j2}, \cdots, p_{jm})$ 为一个基。

令所有非基变量为零，可以得到m个关于基变量 $x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jm}$ 的线性方程，解这个线性方程组得到基变量的值。

我们称这个解为一个**基本解**；若得到的基变量的值均非负，则称为**基本可行解**，同时称这个基B为**可行基**。

1.4线性规划问题解的概念

矩阵描述为，对于线性规划的解

$$x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

称为线性规划与基B对应的基本解。

若其中$B^{-1}b\geq 0$，则称以上的基本解为一基本可行解，相应的基B称为可行基。

1.4线性规划问题解的概念

我们可以证明以下结论：**线性规划的基本可行解就是可行域的极点。**

这个结论被称为线性规划的基本定理，它的重要性在于把可行域的极点这一几何概念与基本可行解这一代数概念联系起来，因而可以通过求基本可行解的线性代数的方法来得到可行域的一切极点，从而有可能进一步获得最优极点。

1.4线性规划问题解的概念

例：考虑线性规划模型

Max $z = 1500\ x_1 + 2500\ x_2$

s.t. $3\ x_1 + 2\ x_2 \leqslant 65$

$2\ x_1 + \ x_2 \leqslant 40$

$3\ x_2 \leqslant 75$

$x_1,\ \ x_2 \geqslant 0$

注意，线性规划的

解（极点）和可行

题标准形式的约束

Max $z=1500x_1+2500x_2$

s.t. $3x_1+2x_2+x_3=65$

$2x_1+x_2+\ x_4=40$

$3x_2+\ x_5=75$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$

1.4线性规划问题解的概念

$$A = [P1, P2, P3, P4, P5] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A矩阵包含以下10个3×3的子矩阵：

$B_1=[p_1, p_2, p_3]$　$B_2=[p_1, p_2, p_4]$

$B_3=[p_1, p_2, p_5]$　$B_4=[p_1, p_3, p_4]$

$B_5=[p_1, p_3, p_5]$　$B_6=[p_1, p_4, p_5]$

$B_7=[p_2, p_3, p_4]$　$B_8=[p_2, p_3, p_5]$

$B_9=[p_2, p_4, p_5]$　$B_{10}=[p_3, p_4, p_5]$

1.4线性规划问题解的概念

其中$|B_4|=0$，因而B_4不是该线性规划问题的基。其余均为非奇异方阵，因此该问题共有9个基。

对于基$B_3=[p_1, p_2, p_5]$，令非基变量$x_3=0$，$x_4=0$，在等式约束中令$x_3=0$，$x_4=0$，解线性方程组：

$3\ x_1 + 2\ x_2 + 0\ x_5 = 65$

$2\ x_1 + \ x_2 + 0\ x_5 = 40$

$0\ x_1 + 3\ x_2 + \ x_5 = 75$

得到$x_1=15$，$x_2=10$，$x_5=45$，对应的基本可行解：

$x=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T=(15, 10, 0, 0, 45)^T$。于是对应的基$B_3$是一个可行基。

1.4线性规划问题解的概念

类似可得到

$x^{(2)} = (5, 25, 0, 5, 0)^T$　（对应B_2）

$x^{(7)} = (20, 0, 5, 0, 75)^T$　（对应B_5）

$x^{(8)} = (0, 25, 15, 15, 0)^T$　（对应B_7）

$x^{(9)} = (0, 0, 65, 40, 75)^T$　（对应B_{10}）

是基本可行解；

而$x^{(3)} = (0, 32.5, 0, 7.5, -22.5)^T$（对应$B_9$）

$x^{(4)} = (65/3, 0, 0, -10/3, 75)^T$（对应$B_6$）

$x^{(5)} = (7.5, 25, -7.5, 0, 0)^T$　（对应B_1）

$x^{(6)} = (0, 40, -15, 0, -45)^T$　（对应B_8）

是基本解。B_2 B_3 B_5 B_7 B_{10}都是可行基。

1.4线性规划问题解的概念

以下是所有基本可行解

$x=(15, 10, 0, 0, 45)^T$

$x^{(2)} = (5, 25, 0, 5, 0)^T$

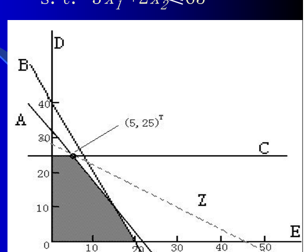
$x^{(7)} = (20, 0, 5, 0, 75)^T$

$x^{(8)} = (0, 25, 15, 15, 0)^T$

$x^{(9)} = (0, 0, 65, 40, 75)^T$

Max $z = 1500x_1+2500x_2$

s.t. $3x_1+2x_2 \leqslant 65$



1.4线性规划问题解的概念

这里指出了一种求解线性规划问题的可能途径，就是先确定线性规划问题的基，

如果是可行基，则计算相应的基本可行解以及相应解的目标函数值。

由于基的个数是有限的（最多个），因此必定可以从有限个基本可行解中找到最优解。

第一章 线性规划与单纯形法原理

§ 1. 问题与模型

1.5 线性规划问题的几何意义

1.5 线性规划问题的几何意义

1. 基本概念

凸集：设k为n维欧氏空间的一点集，任取X, Y∈K, 若连接X, Y的线段仍属于K, 则称K为凸集。即任取α, 0<α<1

$\alpha X+(1-\alpha)Y\in K$

称K为凸集。

顶点（极点）：设K是凸集，X∈K, 若X不能用不同的两点

$X^{(1)}\in K, X^{(2)}\in K$

的线性组合表示为

$X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}$ $(0<\alpha<1)$

则称X为极点。

§1.5 线性规划问题的几何意义

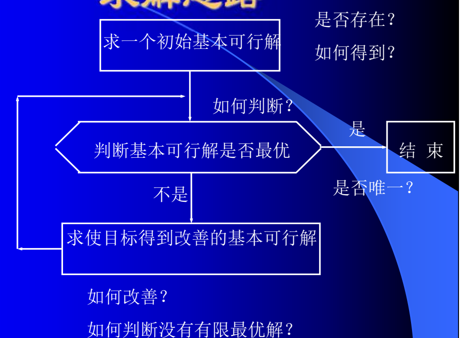
2. 基本定理

定理1. 线性规划问题的可行域为凸集。

定理2. 可行域的点X是顶点的充分必要条件为X是基本可行解。

定理3. 若可行域有界，最优解可以在极点上达到。

求解思路



第一章 线性规划与单纯形法原理

§ 2.单纯形法原理

单纯形法

- 单纯形方法引例
- 单纯形法的一般描述
- 表格单纯形法
- 一般问题的处理
- 单纯形法矩阵描述
- 几点注意事项

第一章 线性规划与单纯形法原理

§ 2.单纯形法原理

2.1单纯形法引例

2.1单纯形方法引例

例1. 用单纯形法的思想求解线性规划问题：

$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3$ 利润目标最大

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3 & \text{(工时约束)} \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 \le 9 & \text{(材料约束)} \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_5 = 9 \\ x_1 \sim x_5 \ge 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$C = (2,3,3,0,0)$

2.1单纯形方法引例

例1

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_5 = 9 \\ x_1 \sim x_5 \ge 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$C = (2,3,3,0,0)$

$p_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_1, x_2, x_3$

$x_4 = 3, x_5 = 9$

基本解（0，0，0，3，9）也是可行的

2.1单纯形方法引例

例1

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_5 = 9 \\ x_1 \sim x_5 \ge 0 \end{cases}$$

初始基本可行解（0，0，0，3，9）

含义：

不生产任何产品，工时剩余为3，材料剩余为9，利润为 Z=0

初始基本可行解是否最优解 ？

是否可以生产某种产品使目标提高？

当x_1（或x_2, x_3）增加一个单位时，会使目标增加2（或3）单位

2.1单纯形方法引例

例1

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_5 = 9 \\ x_1 \sim x_5 \ge 0 \end{cases}$$

初始基本可行解（0，0，0，3，9）

当x_1（或x_2, x_3）增加一个单位时，会使目标增加2（或3）单位 直接影响

同时，基变量x_4 x_5也会随之而变化，对目标带来一定变化 间接影响

应该考察：综合影响 = 直接影响+间接影响

2.1单纯形方法引例

例1

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_5 = 9 \\ x_1 \sim x_5 \ge 0 \end{cases}$$

初始基本可行解（0，0，0，3，9）

当x_1（或x_2, x_3）增加一个单位时，如果目标函数中基变量x_4 x_5的系数为零，则间接影响没有，直接影响就是综合影响。

为获得综合影响，从约束中解出基变量，代入目标函数，即用非基变量表示目标函数

这时非基变量的系数就是综合影响，其符号就决定了目前解是否最优。

2.1单纯形方法引例

例1

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_5 = 9 \\ x_1 \sim x_5 \geq 0 \end{cases}$$

从约束等式中解出基变量

用非基变量表示基变量

代入目标函数

用非基变量表示目标函数

此时目标函数中非基变量的系数称为该变量的检验数，表示为σ_j

判别定理：若对于所有非基变量，检验数均非正（$\sigma_j \leq 0$），则当前基本可行解最优。

2.1单纯形方法引例

例1

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_5 = 9 \\ x_1 \sim x_5 \geq 0 \end{cases}$$

初始基本可行解（0，0，0，3，9）

从约束中解出基变量，代入目标函数有：

$x_4 = 3 - x_1 - x_2 - x_3$

$x_5 = 9 - x_1 - 4x_2 - 7x_3$ 用非基变量表示基变量

$Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3$ 用非基变量表示目标函数

非基变量的检验数不全非正，因此不是最优，取某个检验数为正的变量增加可以提高目标函数值

单纯形方法引例

例1

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_5 = 9 \\ x_1 \sim x_5 \geq 0 \end{cases}$$

初始基本可行解（0，0，0，3，9）

取x_1增大，应该确定其增大的上限θ

$$x_4 = 3 - x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_5 = 9 - x_1 - 4x_2 - 7x_3$$

x_1增大时，其余非基变量保持为零，称x_1进基

$$\begin{cases} x_4 = 3 - \theta \\ x_5 = 9 - \theta \end{cases} \quad 3 - \theta \geq 0, 9 - \theta \geq 0$$

单纯形方法引例

例1

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_5 = 9 \\ x_1 \sim x_5 \geq 0 \end{cases}$$

初始基本可行解（0，0，0，3，9）

取x_1进基时，应该保持所有基变量非负，哪个基变量先成为零，哪个基变量成为非基变量，称这个基变量出基。

$$\begin{cases} x_4 = 3 - \theta \\ x_5 = 9 - \theta \end{cases} \quad 3 - \theta \geq 0, 9 - \theta \geq 0$$

$$\theta = \min\left\{\frac{3}{1}, \frac{9}{1}\right\} = 3 \qquad X_4\text{出基}$$

单纯形方法引例

例1

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_5 = 9 \\ x_1 \sim x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$B_1 = (p_1 \quad p_5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad x_4, x_2, x_3$$

$$x_1 = 3, x_5 = 9$$

基本解（3，0，0，0，6）也是可行的

单纯形方法引例

从约束等式中解出基变量

用非基变量表示基变量

代入目标函数

用非基变量表示目标函数

此时目标函数中非基变量的系数称为该变量的检验数，表示为σ_j

判别定理：若对于所有非基变量，检验数均非正（$\sigma_j \leq 0$），则当前基本可行解最优。

单纯形方法引例

例1

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_5 = 9 \\ x_1 \sim x_5 \geq 0 \end{cases}$$

新的基本可行解（3，0，0，0，6）

含义：　　生产A产品三单位，工时剩余为0，材料剩余为6，利润为 Z=6

继续判断，先解出基变量，再代入目标函数

$$\begin{aligned} x_4 &= 3 - x_1 - x_2 - x_3 \\ x_5 &= 9 - x_1 - 4x_2 - 7x_3 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_5 = 6 - 3x_2 - 6x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$Z = 2(3 - x_2 - x_3 - x_4) + 3x_2 + 3x_3 = 6 + x_2 + x_3 - 2x_4$$

有正的检验数，不是最优。

单纯形方法引例

例1

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_5 = 9 \\ x_1 \sim x_5 \geq 0 \end{cases}$$

新的基本可行解（3，0，0，0，6）

取x_2进基

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_5 = 6 - 3x_2 - 6x_3 + x_4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - x_2 \\ x_5 = 6 - 3x_2 \end{cases}$$

$$x_2 = \theta = \min\left\{\frac{3}{1}, \frac{6}{3}\right\} = 2$$

X_5出基，材料用完

最小比值原理

零和负数不做分母

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_5 = 6 + 3x_2 \end{cases}$$

$$\theta = \min\left\{\frac{3}{0} \quad \frac{6}{-3}\right\} = \infty$$

单纯形方法引例

例1

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_5 = 9 \\ x_1 \sim x_5 \geq 0 \end{cases}$$

新的基本可行解（1，2，0，0，0）

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_5 = 6 - 3x_2 - 6x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$x_1 = 1 + x_3 - \frac{4}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5$$

$$x_2 = 2 - 2x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5$$

$$Z = 6 + \left(2 - 2x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5\right) + x_3 - 2x_4$$

$$= 8 - x_3 - \frac{5}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5$$

所有检验数小于零，目标最优，最优值 Z=8

单纯形方法引例

方法步骤总结：

1 确定（观察法）一个初始基本可行解；

2 从约束中解出基变量（用非基变量表示基变量）；

3 代入目标消去基变量（用非基变量表示目标函数），得到非基变量 x_j的检验数 σ_j；

4 判断最优。若 $\sigma_j \leqslant 0$，当前解最优；若 $\sigma_k > 0$，则选 x_k进基

5 用最小比值法确定 x_k的最大值 θ，使基变量 x_l取0值，其它基变量非负，即 x_l出基，若 θ不存在，则$Z \to \infty$，没有有限最优解。

6 重复上述1到5的工作。

第一章 线性规划与单纯形法原理

§ 2.单纯形法原理

2.2单纯形法一般描述

单纯形法一般描述

初始基本可行解的确定（观察法）

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j p_j \leq b \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=n+1}^{n+m} 0x_j$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

单纯形法一般描述

初始基本可行解的确定（观察法）

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{j=n+1}^{n+m}0x_j$$

$$s.t.\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2\\\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m\\x_1,x_2,\cdots,x_{n+m}\ge 0\end{cases}$$

基 $B=(p_{n+1},p_{n+2},\cdots,p_{n+m})=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$

基本可行解 $X=(0,0,\cdots,0,b_1,b_2,\cdots,b_m)$

单纯形法一般描述

从约束中解出基变量

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{j=n+1}^{n+m}0x_j$$

$$s.t.\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2\\\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m\\x_1,x_2,\cdots,x_{n+m}\ge 0\end{cases}$$

$$x_{n+i}=b_i'-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}'x_j\qquad i=1,2,\cdots,m$$

单纯形法一般描述

代入目标消去基变量，得到非基变量x_j的检验数σ_j。

$$Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}x_{n+i}$$

$$x_{n+i}=b_i'-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}'x_j\qquad i=1,2,\cdots,m$$

$$Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}\left(b_i'-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}'x_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}b_i'+\sum_{j=1}^{n}c_jx_j-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{n+i}a_{ij}'x_j$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}b_i'+\sum_{j=1}^{n}(c_j-\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}a_{ij}')x_j$$

单纯形法一般描述

代入目标消去基变量，得到非基变量x_j的检验数σ_j。

$$Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}\left(b_i'-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}'x_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}b_i'+\sum_{j=1}^{n}c_jx_j-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{n+i}a_{ij}'x_j$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}b_i'+\sum_{j=1}^{n}(c_j-\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}a_{ij}')x_j$$

$$Z_0=\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}b_i'\qquad z_j=\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}a_{ij}'$$

$$Z=Z_0+\sum_{j=1}^{n}(c_j-z_j)x_j$$

$$\sigma_j=c_j-z_j\qquad Z=Z_0+\sum_{j=1}^{n}\sigma_jx_j$$

单纯形法一般描述

判断最优

最优性判别定理：若

$$X^0=(0,0,\cdots,0,b_1,b_2,\cdots,b_m)$$

是对应于B的基本可行解，σ_j是用非基变量表示目标函数的表达式中非基变量x_j的检验数，若对于一切非基变量的角指数j均有$\sigma_j\le 0$，则当前基本可行解为最优解。

单纯形法一般描述

没有有限最优解的判断

判别定理：若

$$X^{(0)}=(0,0,\cdots,0,b_1',b_2',\cdots,b_m')$$

是对应于B的基本可行解，非基变量x_k的检验数$\sigma_k>0$，且对于i=1,2,……,m 均有$a_{ik}'\le 0$，则问题没有有限最优解。

$$x_{n+i}=b_i'-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}'x_j\qquad i=1,2,\cdots,m$$

$$x_{n+i}=b_i'-a_{ik}'x_k\qquad i=1,2,\cdots,m$$

$$Z=Z_0+\sigma_kx_k\to\infty$$

单纯形法一般描述

改进目标

若σ_k>0,则选x_k进基,用最小比值法确定x_k的最大值θ,使基变量x_l取0值，其它基变量非负；

$$x_{n+i}=b_i'-a_{ik}'x_k\geq 0 \qquad i=1,2,\cdots,m$$

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}'}\middle| a_{ik}'>0\right\}=\frac{b_l}{a_{lk}'}=\theta$$

即x_l出基，目标改善$\sigma_k\theta$，换基过程

若θ不存在, 则Z→∞，没有有限最优解。

第一章 线性规划与单纯形法原理

§ 2.单纯形法原理

2.3表格单纯形法

表格单纯形法

标准型：

$$\max Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n+c_{n+1}x_{n+1}+\cdots+c_{n+m}x_{n+m}$$

$$s.t.\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2\\\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m\\x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1},\cdots,x_{n+m}\geq 0\end{cases}$$

表格单纯形法

基变量

C_B	X_B	c_j	c_1	…	c_n	c_{n+1}	…	c_{n+m}	θ_i
		x_j / b	x_1	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}	
c_{n+1}	x_{n+1}	b_1	a_{11}	…	a_{1n}	1		0	θ_1
c_{n+2}	x_{n+2}	b_2	a_{21}	…	a_{2n}	0		0	θ_2
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋮
c_{n+m}	x_{n+m}	b_m	a_{m1}	…	a_{mn}	0		1	θ_m
-Z		$-Z_0$	C_1-Z_1	…	C_n-Z_n	0	…	0	

基变量系数　右端常数　检验数　最小比值列

$$Z_j=\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}a_{ij} \qquad j=1,2,\ldots\ldots n$$

$$Z_0=\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}b_i$$

表格单纯形法

$$\max Z=2x_1+3x_2+3x_3$$

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3\leq 3 & \text{(工时约束)}\\x_1+4x_2+7x_3\leq 9 & \text{(材料约束)}\\x_1,x_2,x_3\geq 0\end{cases}$$

$$\max Z=2x_1+3x_2+3x_3+0x_4+0x_5$$

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=3\\x_1+4x_2+7x_3+x_5=9\\x_1\sim x_5\geq 0\end{cases}$$

C_B	X_B	c_j	2	3	3	0	0	θ
		x_j / b	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
0	x_4	3	1	1	1	1	0	
0	x_5	9	1	4	7	0	1	
－Z		0	2	3	3	0	0	

此时的基本可行解

（0，0，0，3，9）

表格单纯形法

C_B	X_B	c_j	2	3	3	0	0	θ
		x_j / b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	3	1	1	1	1	0	3/1
0	x_5	9	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	9/1
Z		0	2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
2	x_1	3	1	1	1	1	0	3/1
0	x_5	6	0	3	6	-1	1	6/3
Z		6	0	1	1	-2	0	
2	x_1	1	1	0	-1	4/3	-1/3	
3	x_2	2	0	1	2	-1/3	1/3	

此时的基本可行解

（3，0，0，0，6）

表格单纯形法

C_B	X_B	c_j	2	3	3	0	0	θ
		x_j / b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_1	1	1	0	-1	4/3	-1/3	
3	x_2	2	0	1	2	-1/3	1/3	
Z		8	0	0	-1	-5/3	-1/3	

最优解 X=(1, 2, 0, 0, 0)　　最优值 Z=8

实际意义：

每天生产A产品1单位，B产品2单位，C产品不生产

每天可获得利润8000元

求解线性规划

$$\max Z = 2x_1 + 5x_2$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max\ Z = 2x_1 + 5x_2$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

C_B	X_B	c_j	2	5	0	0	0	θ
		x_j / b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	4	1	1	1	0	0	4/1
0	x_4	2	-1	2	0	1	0	∞
0	x_5	2	1	-1	0	0	1	2/1
Z		0	2	5	0	0	0	

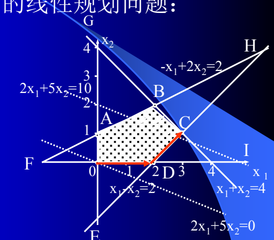
C_B	X_B	c_j	2	5	0	0	0	θ
		x_j / b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	4	1	1	1	0	0	4/1
0	x_4	2	-1	2	0	1	0	∞
0	x_5	2	1	-1	0	0	1	2/1
Z		0	2	5	0	0	0	
0	x_3	2	0	2	1	0	-1	2/2
0	x_4	4	0	1	0	1	1	4/1
2	x_1	2	1	-1	0	0	1	∞
Z		4	0	7	0	0	-2	

向右迭代一步

表格单纯形法图示

例 .用图解法求解下面的线性规划问题：

$$\max Z = 2x_1 + 5x_2$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



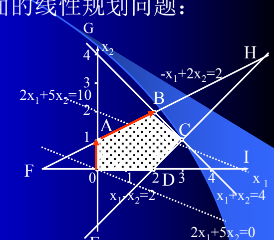
C_B	X_B	c_j	2	5	0	0	0	θ
		x_j / b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	4	1	1	1	0	0	4/1
0	x_4	2	-1	2	0	1	0	2/2
0	x_5	2	1	-1	0	0	1	∞
Z		0	2	5	0	0	0	
0	x_3	3	3/2	0	1	-1/2	0	2
5	x_2	1	-1/2	1	0	1/2	0	∞
0	x_5	3	1/2	0	0	1/2	1	6
Z		4	9/2	0	0	-5/2	0	

向上迭代一步

表格单纯形法图示

例 。用图解法求解下面的线性规划问题：

$$\max Z = 2x_1 + 5x_2$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



求解线性规划

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 0 \\ x_1 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

表格单纯形法

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

C_B	X_B	c_j	1	2	0	0	θ
		b \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	0	1	-2	1	0	∞
0	x_4	3	1	0	0	1	∞
Z		0	1	2	0	0	

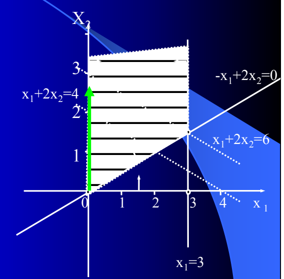
没有有限最优解

表格单纯形法图示

例. 用图解法求解下面的线性规划问题：

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 0 \\ x_1 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



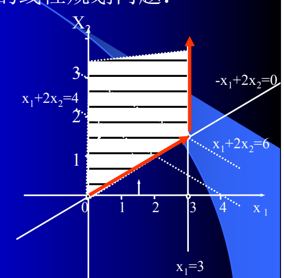
C_B	X_B	c_j	1	2	0	0	θ
		b \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	0	1	-2	1	0	0/1
0	x_4	3	1	0	0	1	3/1
Z		0	1	2	0	0	
1	x_1	0	1	-2	1	0	∞
0	x_4	3	0	2	-1	1	3/2
Z		0	0	4	-1	0	∞
1	x_1	3	1	0	0	1	∞
2	x_2	3/2	0	1	1/2	1/2	
Z		0	0	0	1	2	

表格单纯形法图示

例. 用图解法求解下面的线性规划问题：

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$

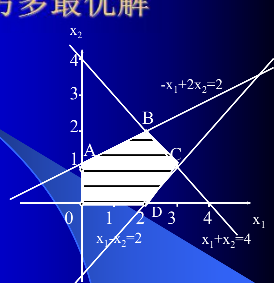
$$s.t.\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 0 \\ x_1 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



无穷多最优解

$$\max Z = 2x_1 + 2x_2$$

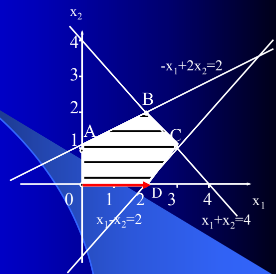
$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



C_B	X_B	c_j	2	2	0	0	0	θ
		b \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	4	1	1	1	0	0	4/1
0	x_4	2	-1	2	0	1	0	∞
0	x_5	2	1	-1	0	0	1	2/1
Z		0	2	2	0	0	0	
0	x_3	2	0	2	1	0	-1	2/2
0	x_4	4	0	1	0	1	1	4/1
2	x_1	2	1	-1	0	0	1	∞
Z		4	0	4	0	0	-2	

$\max Z = 2x_1 + 2x_2$

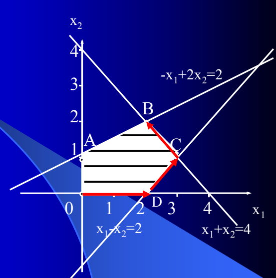
$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



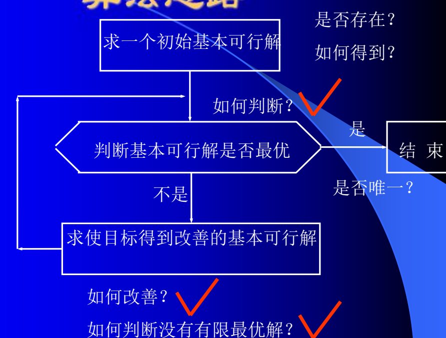
C_B	X_B	c_j	2	2	0	0	0	θ
		b \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_2	1	0	1	1/2	0	-1/2	
0	x_4	3	0	0	-1/2	1	3/2	2
2	x_1	3	1	0	1/2	0	1/2	6
	Z	8	0	0	-2	0	0	
2	x_2	2	0	1	1/3	1/3	0	2/2
0	x_5	2	0	0	-1/3	2/3	1	4/1
2	x_1	2	1	0	2/3	-1/3	0	∞
	Z	8	0	0	-2	0	0	

$\max Z = 2x_1 + 2x_2$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



算法思路



练习题：$\max\ z=3x_1+x_2+3x_3$

s.t. $2x_1+x_2+x_3 \le 2$

$x_1+2x_2+3x_3 \le 5$

$2x_1+2x_2+x_3 \le 6$

$x_i \geqslant 0$, i=1, 2, 3

用表格单纯形法求解。

X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
x_4	2	2	1	1	1	0	0	1
x_5	5	1	2	3	0	1	0	5/2
x_6	6	2	2	1	0	0	1	3
	0	3	1	3	0	0	0	
x_2	2	2	1	1	1	0	0	2
x_5	1	−3	0	1	−2	1	0	1/2
x_6	2	−2	0	−1	−2	0	1	−
	2	1	0	2	−1	0	0	

X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
x_2	1	5	1	0	3	−1	0	1/5
x_3	1	−3	0	1	−2	1	0	−
x_6	3	−5	0	0	−4	1	1	−
		7	0	0	3	−2	0	
x_1	1/5	1	1/5	0	3/5	−1/5	0	
x_3	8/5	0	3/5	0	−1/5	2/5	0	
x_6	4	0	1	1	−1	0	1	
	27/5	0	−7/5	0	−6/5	−3/5	0	

最优解为 $(1/5, 0, 8/5, 0, 0, 4)^T$

Z max =27/5

第一章 线性规划与单纯形法原理

§ 2.单纯形法原理

2.4一般问题的处理

一般问题的处理

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22} \cdots = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a \cdots = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \end{cases}$$

M是个充分大的正数

人造基

添加人工变量

造成基

去掉人工变量

处理方法一　大M法

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n - Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - \cdots - Mx_{n+m}$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1 \sim x_n \geq 0, x_{n+1} \sim x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

人工变量

一般问题的处理

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n - Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - \cdots - Mx_{n+m}$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1 \sim x_n \geq 0, x_{n+1} \sim x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

原问题的可行解 $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$

新问题的可行解 $X^{(1)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}, 0, \cdots, 0)$

目标值 $Z_0 = c_1x_1^{(0)} + \cdots, c_nx_n^{(0)}$

结论：新问题的最优解中，如果人工变量均为零，则得到的解也是原问题的最优解，否则原问题无可行解

大M法举例

$$\min Z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max Z' = -x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_4 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

C_B	X_B	c_j	-1	-2	0	0	-M	θ
		b　x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	3	1	0	0	1	0	
-M	x_5	2	-1	2	-1	0	1	2/2
－Z		0	-1	-2	0	0	0	
M			-1	2	-1	0	0	

检验数为-2+M

一般问题的处理

C_B	X_B	c_j	-1	-2	0	0	-M	θ
		b　x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	3	1	0	0	1	0	∞
-M	x_5	2	-1	2	-1	0	1	2/2
－Z		0	-1	-2	0	0	0	
M			-1	2	-1	0	0	
0	x_4	3	1	0	0	1	0	
-2	x_2	1	-1/2	1	-1/2	0	1/2	
－Z		2	-2	0	-1	0	1	
M			0	0	0	0	-1	

一般问题的处理

C_B	X_B	c_j	-1	-2	0	0	-M	θ
		b　x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	3	1	0	0	1	0	
-2	x_2	1	-1/2	1	-1/2	0	1/2	
－Z		2	-2	0	-1	0	1	
M			0	0	0	0	-1	

最优解： x_1=0　x_2=1　　最优值： Z= -2

$$\min Z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max Z' = -x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_4 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

大M法举例1

一般问题的处理

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 \quad + x_5 = 4 \\ x_1 + x_2 \quad + x_4 \quad = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

C_B	X_B	c_j	1	2	0	0	-M	θ
		x_j / b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	1	1	1	0	1	0	1/1
-M	x_5	4	-1	2	-1	0	1	4/2
－Z		0	1	2	0	0	0	
M			-1	2	-1	0	0	

一般问题的处理

C_B	X_B	c_j	-1	-2	0	0	-M	θ
		x_j / b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	1	1	1	0	1	0	1/1
-M	x_5	4	-1	2	-1	0	1	4/2
－Z		0	1	2	0	0	0	
M			-1	2	-1	0	0	
-2	x_2	1	1	1	0	1	0	
-M	x_5	2	-3	0	-1	-2	1	
－Z		2	1	0	0	2	0	
M			-3	0	-1	-2	0	

一般问题的处理

C_B	X_B	c_j	-1	-2	0	0	-M	θ
		x_j / b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-2	x_2	1	1	1	0	1	0	
-M	x_5	2	-3	0	-1	-2	1	
－Z		2	1	0	0	2	0	
M			-3	0	-1	-2	0	

所有检验数<0 已经是最优解

$x_5=2$ 人工变量不为零，表示原问题无可行解

大M法练习

例. $\max\ Z=3x_1+2x_1+x_3-x_4$

$s.t.\ 3x_1+2x_2+x_3\ =15$

$5x_1+x_2+2x_3\ =20$

$x_1+2x_2+x_3+x_4=10$

$x_1, x_2, x_3, x_4\geq 0$

$\max Z=3x_1+2x_1+x_3-x_4-M(x_5+x_6)$

$s.t.\ 3x_1+2x_2+x_3\quad +x_5=15$

$5x_1+x_2+2x_3\quad +x_6=20$

$x_1+2x_2+x_3+x_4\quad =10$

$x_i\geq 0, i=1, 2, \cdots, 6$

		3	2	1	−1	−M	−M
X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_5	15	3	2	1	0	1	0
x_6	20	5	1	2	0	0	1
x_4	10	1	2	1	1	0	0
		8M+2	3M+2	3M+2	0	0	0
x_5	3	0	7/5	-1/5	0	1	-3/5
x_1	4	1	1/5	2/5	0	0	1/5
x_4	6	0	9/5	3/5	1	0	-1/5
		0	7/5M +16/5	-M/5 +2/5	0	0	-8/5M -4/5

X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	15/7	0	1	−1/7	0	7/5	−3/7
x_1	25/7	1	0	3/7	0	−1/7	2/7
x_4	15/7	0	0	6/7	1	−9/7	5/7
		0	0	6/7	0	−M−2/7	−M+5/7
x_2	5/2	0	1	0	1/6	1/2	−1/4
x_1	5/2	1	0	0	−1/2	1/2	−1/14
x_3	5/2	0	0	1	7/6	−3/2	6/5
		0	0	0	−1	−M+1	−M

最优解为 $(5/2, 5/2, 5/2, 0, 0, 0)^T$，Z' max=15, 原问题的解为 $(5/2, 5/2, 5/2, 0)^T$, Z max=15.

一般问题的处理

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

人造基

添加人工变量

造成基

变量

$$\min Z = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+m}$$

两阶段法

$$\max Z = -x_{n+1} - x_{n+2} - \cdots - x_{n+m}$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1 \sim x_n \geq 0, x_{n+1} \sim x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

人工变量

一般问题的处理

第一阶段

$$\max Z = -x_{n+1} - x_{n+2} - \cdots - x_{n+m}$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1 \sim x_n \geq 0, x_{n+1} \sim x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

第一阶段最优解中：

如果Z<0，则原问题没有基本可行解；

如果Z=0，则若人工变量全为非基变量，则得到原问题的基本可行解．否则基本可行解退化，继续迭代就可以得到基本可行解．

一般问题的处理

第一阶段

$$\max Z = -x_{n+1} - x_{n+2} - \cdots - x_{n+m}$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1 \sim x_n \geq 0, x_{n+1} \sim x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

第二阶段

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n$$

以第一阶段最优基作为初始基本可行解，继续迭代．

两阶段法举例　一般问题的处理

$$\min Z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max Z' = -x_5$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad + x_5 = 2 \\ x_1 \qquad + x_4 \qquad = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

C_B	X_B	c_j	0	0	0	0	-1	θ
		x_j / b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	3	1	0	0	1	0	∞
-1	x_5	2	-1	2	-1	0	1	2/2
－Z		2	-1	2	-1	0	0	

一般问题的处理

C_B	X_B	c_j	0	0	0	0	-1	θ
		x_j / b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	3	1	0	0	1	0	∞
-1	x_5	2	-1	2	-1	0	1	2/2
－Z		2	-1	2	-1	0	0	
0	x_4	3	1	0	0	1	0	
0	x_2	1	-1/2	1	-1/2	0	1/2	
－Z		0	0	0	0	0	-1	

请注意：第一阶段的最优解不是唯一的

一般问题的处理

C_B	X_B	c_j	-1	-2	0	0	θ
		x_j / b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_4	3	1	0	0	0	
-2	x_2	1	-1/2	1	-1/2	1	
－Z		2	-2	0	-1	0	

删去人工变量x_5，配合原问题的目标函数，继续迭代．

$$\max Z = -x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_4 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

由于检验数全部非正，所以已经最优．

如果不是最优，则进一步迭代．

一般问题的处理

两阶段 法举例

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max Z = -x_5$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

C_B	X_B	c_j	0	0	0	0	-1	θ
		b \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	1	1	1	0	1	0	1/1
-1	x_5	4	-1	2	-1	0	1	4/2
—Z		4	-1	2	-1	0	0	

一般问题的处理

C_B	X_B	c_j	0	0	0	0	-1	θ
		b \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	1	1	1	0	1	0	1/1
-1	x_5	4	-1	2	-1	0	1	4/2
—Z		4	-1	2	-1	0	0	
0	x_2	1	1	1	0	1	0	
-1	x_5	2	-3	0	-1	-2	1	
—Z		2	-3	0	-1	-2	0	

第一阶段结束,最优值Z= -2, 因此原问题没有可行解

两阶段 法练习

例. max $Z=3x_1+2x_2+x_3-x_4$

s. t. $3x_1+2x_2+x_3 \quad =15$

$5x_1+x_2+2x_3 \quad =20$

$x_1+2x_2+x_3+x_4 \quad =10$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$

[解]第一阶段 max $Z' =-x_5-x_6$

s. t. $3x_1+2x_2+x_3 \quad +x_5 \quad =15$

$5x_1+x_2+2x_3 \quad +x_6=20$

$x_1+2x_2+x_3+x_4 \quad =10$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$

		0	0	0	0	−1	−1
X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_5	15	3	2	1	0	1	0
x_6	20	5	1	2	0	0	1
x_4	10	1	2	1	1	0	0
		8	3	3	0	0	0
x_5	3	0	7/5	−1/5	0	1	−3/5
x_1	4	1	1/5	2/5	0	0	1/5
x_4	6	0	9/5	3/5	1	0	−1/5
		0	7/5	−1/5	0	0	−8/5
x_2	15/7	0	1	−1/7	0	7/5	−3/7
x_1	25/7	1	0	3/7	0	−1/7	2/7
x_4	15/7	0	0	6/7	1	−9/7	5/7
	0	0	0	0	0	−1	−1

第二阶段:

		3	2	1	−1
X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	15/7	0	1	−1/7	0
x_1	25/7	1	0	3/7	0
x_4	15/7	0	0	6/7	1
		0	0	6/7	0
x_2	5/2	0	1	0	1/6
x_1	5/2	1	0	0	−1/2
x_3	5/2	0	0	1	7/6
		0	0	0	−1

最优解为$x_1=x_2=x_3=5/2, x_4=0$.

第一章 线性规划与单纯形法原理

§ 2.单纯形法原理

2.5单纯形法矩阵描述

单纯形法矩阵描述

$$\max\ Z = CX$$

$$s.t.\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$C = (C_B \vdots C_N) \qquad X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T = \begin{pmatrix} X_B \\ \cdots \\ X_N \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (p_1, p_2, \cdots, p_n) \underline{\Delta} (B \vdots N)$$

$$AX = (B \vdots N)\begin{pmatrix} X_B \\ \cdots \\ X_N \end{pmatrix} = BX_B + NX_N = b$$

$$X_B = B^{-1}(b - NX_N) = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$$

单纯形法矩阵描述

$$\max\ Z = CX$$

$$s.t.\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$X_B = B^{-1}(b - NX_N) = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$$

$$Z = CX = (C_B \vdots C_N)\begin{pmatrix} X_B \\ \cdots \\ X_N \end{pmatrix} = C_B X_B + C_N X_N$$

$$= C_B(B^{-1}b - B^{-1}NX_N) + C_N X_N$$

$$= C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N$$

$$\sigma_N = C_N - C_B B^{-1}N$$

$$Z = C_B B^{-1}b + \sigma_N X_N$$

单纯形法矩阵描述

$$X_B = B^{-1}(b - NX_N) = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$$

$$Z = CX = (C_B \vdots C_N)\begin{pmatrix} X_B \\ \cdots \\ X_N \end{pmatrix} = C_B X_B + C_N X_N$$

$$= C_B(B^{-1}b - B^{-1}NX_N) + C_N X_N$$

$$= C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N$$

$$\sigma_N = C_N - C_B B^{-1}N$$

$$Z = C_B B^{-1}b + \sigma_N X_N \qquad \boxed{\pi = C_B B^{-1}}$$

$$\boxed{C_B X_B - C_B B^{-1}BX_B = 0}$$

$$Z = \pi b + (c - \pi A)X$$

单纯形法矩阵描述

C_B	X_B	c_j / x_j / b	C_B	C_{N1}	C_s	θ
			X_B^T	X_{N1}^T	X_s^T	
C_B^T	X_B	$B^{-1}b$	$B^{-1}B$	$B^{-1}N1$	B^{-1}	
Z		$C_B B^{-1}b$	$C_B - C_B B^{-1}B$	$C_N - C_B B^{-1}N1$	$-C_B B^{-1}$	

单纯形表的矩阵形式

---

max $z=3x_1+x_2+3x_3$

s.t. $2x_1+x_2+x_3 \leq 2$

$x_1+2x_2+3x_3 \leq 5$

$2x_1+2x_2+x_3 \leq 6$

$\ldots 0$, i=1, 2, 3

用 $B_1^{-1}b$ P_2 P_3 P_4

$$B_1 = (P_4\ P_5\ P_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = (P_2\ P_5\ P_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4			
x_4	2	2	1	1	1	0	0	1
x_5	5	1	2	3	0	1	0	5/2
x_6	6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	1	3
	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	0	0	
x_2	2	2	1	1	1	0	0	2
x_5	1	−3	0	1	−2	1	0	1/2
x_6	2	−2	0	−1	−2	0	1	–
	−2	1	0	2	−1	0	0	

$B_1^{-1}b$

$B_2^{-1}b$

$$B_2^{-1}N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
x_2	1	5	1	0	3	−1	0	1/5
x_3	1	−3	0	1	−2	[illegible]	0	–
x_6	3	−5	0	0	−4	1	1	–
		7	0	0	3	−2	0	
x_1	1/5	1	1/5	0	3/5	−1/5	0	
x_3	8/5	0	3/5	0	−1/5	2/5	0	
x_6	4	0	1	1	−1	0	1	
	−27/5	0	−7/5	0	−	$-C_B B^{-1}$		

B_3^{-1}

$$B_3 = (P_2\ P_3\ P_6) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} 0, \quad N_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

几点注意事项

在单纯形法中

1、每一步运算只能用矩阵初等行变换；

2、表中第3列(b列)的数总应保持非负(≥ 0)；

3、当所有检验数均非正(≤ 0)时，得到最优单纯形表。若直接对目标求最小，要求所有检验数均非负；

4、当最优单纯形表存在非基变量对应的检验数为零时，可能存在无穷多解；

几点注意事项

5.进基变量的选取　若有不止一个变量可以进基时,只取一个

6.最小比值　若有不止一个最小比值时，只能选取其中之一行对应的基变量出基

7.没有有限最优解的情况

几点注意事项

8.关于退化和循环。如果在一个基本可行解的基变量中至少有一个分量 $x_{Bi}=0$ ($i=1,2,\cdots,m$)，则称此基本可行解是退化的基本可行解。

几点注意事项

可能出现以下情况：① 进行进基、出基变换后，虽然改变了基，但没有改变基本可行解（极点），目标函数当然也不会改进。进行若干次基变换后，才脱离退化基本可行解（极点），进入其他基本可行解（极点）。这种情况会增加迭代次数，使单纯形法收敛的速度减慢。② 在特殊情况下，退化会出现基的循环，一旦出现这样的情况，单纯形迭代将永远停留在同一极点上，因而无法求得最优解。

几点注意事项

在单纯形法求解线性规划问题时，一旦出现这种因退化而导致的基的循环，单纯形法就无法求得最优解，这是一般单纯形法的一个缺陷。但是实际上，尽管退化的结构是经常遇到的，而循环现象在实际问题中出现得较少。尽管如此，人们还是对如何防止出现循环作了大量研究。1952年Charnes提出了“摄动法”，1954年Dantzig，Orden和Wolfe又提出了“字典序法”，

几点注意事项

这些方法都比较复杂，同时也降低了迭代的速度。1976年，Bland提出了一个避免循环的新方法，其原则十分简单。仅在选择进基变量和出基变量时作了以下规定：

① 在选择进基变量时，在所有 $\sigma_j > 0$的非基变量中选取下标最小的进基；

② 当有多个变量同时可作为出基变量时，选择下标最小的那个变量出基。

这样就可以避免出现循环，当然，这样可能使收敛速度降低。

第一章 线性规划与单纯形法原理

§ 3.线性规划应用

线性规划应用

线性规划建模

①设立决策变量；

②明确约束条件并用变量的线性等式或不等式表示；

③用变量的线性函数表示目标，并确定是求极小还是极大；

④根据变量的物理性质研究变量是否有非负性

有时根本无法用变量的线性函数来描述目标函数或约束条件，在这种情况下，可以尝试增加一些变量或重新设定变量

生产计划问题

用若干种原材料（资源）生产某几种产品，原材料（或某种资源）供应有一定的限制，要求制定一个产品生产计划，使其在给定资源限制条件下能得到最大收益。

单耗 产品 / 资源	A_1	……..	A_n	资源可供量
B_1	a_{11}	……	a_{1n}	b_1
B_2	a_{21}	……	a_{2n}	b_2
……	……	……	……	……
B_m	a_{m1}	……	a_{mn}	b_m
单件利润	C_1	……	C_n	

生产计划问题

解 设生产产品A_j的数量为x_j

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \text{总利润最大}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & (i = 1,2,\cdots,m) \\ & \text{（生产各种产品所需要的资源}B_i\text{，不能超过其可供量）} \\ x_j \ge 0 & (j = 1,2,\cdots,n) \\ & \text{(产品计划生产数不能是负数)} \end{cases}$$

生产计划问题

例1

A，B两种产品，两道工序

产品	工序一	工序二
A	加工2小时	加工3小时
B	加工3小时	加工4小时
可利用工时	15	25

每生产一吨B，可得到两吨产品C

A每吨盈利400元， B每吨盈利800元

销售一吨C盈利300元

报废每吨C损失200元

市场预测，C最大销量为5吨

决定A，B的产量，使工厂总的盈利最大。

生产计划问题

例1

设A，B产品的生产量分别为x_1和x_2

C产品销量x_3，报废量x_4

利润总值 $Z=400x_1+800x_2+300x_3-200x_4$

工序1工时 $2x_1+3x_2\le 15$

工序2工时 $3x_1+4x_2\le 25$

C产品数量 $2x_2-x_3-x_4=0$

C产品销售量 $x_3\le 5$

非负约束 $x_1, x_2, x_3, x_4\ge 0$

生产计划问题

例1

$$\max\ Z = 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 2x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 25 \\ -2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

最优解　x_1=3.75，x_2=2.5，x_3=5, x_4=0

最优值　Z =5000

生产计划问题

例2

产品＝2个零件1+3个零件2

车间	总工时	生产效率（件 / 小时）	
		零件1	零件2
1	100	8	6
2	50	10	15
3	75	16	21

车间	生产工时数	
	零件1	零件2
1	x_{11}	x_{12}
2	x_{21}	x_{22}
3	x_{31}	x_{32}

生产计划问题

例2

车间1工时约束　$x_{11}+x_{12} \le 100$

车间2工时约束　$x_{21}+x_{22} \le 50$

车间3工时约束　$x_{31}+x_{32} \le 75$

零件1生产数量　$8x_{11}+10x_{21}+16x_{31}$

零件2生产数量　$6x_{12}+15x_{22}+21x_{32}$

非负约束　$x_{ij} \ge 0$

产品数量:　y

$\min\{4x_{11}+5x_{21}+8x_{31},\ 2x_{12}+5x_{22}+7x_{32}\}$

$2y \le 8x_{11}+10x_{21}+16x_{31}$

$3y \le 6x_{12}+15x_{22}+21x_{32}$

目标函数　max Z=y

生产计划问题

例2

$$\max\ Z = y$$

$$s.t.\begin{cases} x_{11} + x_{12} \le 100 \\ x_{21} + x_{22} \le 50 \\ x_{31} + x_{32} \le 75 \\ 8x_{11} + 10x_{21} + 16x_{31} - 2y \ge 0 \\ 6x_{12} + 15x_{22} + 21x_{32} - 3y \ge 0 \\ x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32}, y \ge 0 \end{cases}$$

最优解　x_{11}=100，x_{12}=0

x_{21}=0，　x_{22}=50

x_{31}=25，　x_{32}=50

最优值　y=600

合理下料问题

合理下料问题

从给定尺寸的材料中，按需要的尺寸截取给定数量的零件，使残余废料总量最小的问题。

三维（积材）下料问题

长、宽、高

二维（面料）下料问题

长、宽

一维（线材）下料问题

长

合理下料问题

例3

用长9米的原料截取

3.1米　200根

2.5米　100根

1.7米　300根

方案	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3.1米	2	2	1	1	1	0	0	0	0
2.5米	1	0	2	1	0	3	2	1	0
1.7米	0	1	0	2	3	0	2	3	5
废料长	0.3	1.1	0.9	0	0.8	1.5	0.6	1.4	0.5

合理下料问题

例3

设用第j种方案下料x_j根

任务：$2x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=200$

$x_1+2x_3+x_4+3x_6+2x_7+x_8=100$

$x_2+2x_4+3x_5+2x_7+3x_8+5x_9=300$

目标：废料最少或用料根数最少

用料根数*9=用料长度+废料长度

废料：$Z=0.3x_1+1.1x_2+0.9x_3+0.8x_5+1.5x_6+0.6x_7+1.4x_8+0.5x_9$

用料：$Z`=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9$

非负约束　$x_j\geq 0$　j=1,2 ……,9

合理配料问题

合理配料问题（饮食问题）

由多种原料制成含有*m*种成份的产品，已知产品中所含各种成份的比例要求，并且知道各种原料所含成份的数量，问应如何配料，才能使产品的成本最低。

饲料、药品、工业制品等

饮料、食品等

合理配料问题

例4

根据对77种食物所含的九种营养素：热量（糖与脂肪）、蛋白质、钙、铁、维生素A、维生素B_1、维生素B_2、草酸与维生素C的成份及食物的市场价格调查，按照医生所提出的对每个人每天所需的营养要求，可得表

	食　物				每天的最低需要量
营养成份	A	B	C	D	
维生素A（国际单位）	1000	1500	1750	3250	4000
维生B（毫克）	0.6	0.27	0.68	0.3	1
维生素C（毫克）	17.5	7.5	0	30	30
单　价（元）	0.8	0.5	0.9	1.5	

合理配料问题

例4

问怎样采购食物才能保证营养要求的前提下花费最省？

	食　物				每天的最低需要量
营养成份	A	B	C	D	
维生素A（国际单位）	1000	1500	1750	3250	4000
维生B（毫克）	0.6	0.27	0.68	0.3	1
维生素C（毫克）	17.5	7.5	0	30	30
单　价（元）	0.8	0.5	0.9	1.5	

设每天购买甲、乙、丙、丁四种食物的数量分别为 x_1，x_2，x_3，x_4

合理配料问题

例4

维生素A（国际单位）	1000	1500	1750	3250	4000
维生B（毫克）	0.6	0.27	0.68	0.3	1
维生素C（毫克）	17.5	7.5	0	30	30
单　价（元）	0.8	0.5	0.9	1.5	

$$\min Z=0.8x_1+0.5x_2+0.9x_3+1.5x_4\text{（总花费最省）}$$

$$s.t.\begin{cases}1000x_1+1500x_2+1750x_3+3250x_4\geq 4000 \\ \qquad\text{(对维生素}A\text{的需求限制)} \\ 0.6x_1+0.27x_2+0.68x_3+0.3x_4\geq 1 \\ \qquad\text{(对维生素}B\text{的需求限制)} \\ 17.5x_1+7.5x_2+30x_4\geq 30 \\ \qquad\text{(对维生素}C\text{的需求限制)} \\ x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0\end{cases}$$

合理配料问题

例4

$$\min Z=0.8x_1+0.5x_2+0.9x_3+1.5x_4\text{（总花费最省）}$$

$$s.t.\begin{cases}1000x_1+1500x_2+1750x_3+3250x_4\geq 4000 \\ \qquad\text{(对维生素}A\text{的需求限制)} \\ 0.6x_1+0.27x_2+0.68x_3+0.3x_4\geq 1 \\ \qquad\text{(对维生素}B\text{的需求限制)} \\ 17.5x_1+7.5x_2+30x_4\geq 30 \\ \qquad\text{(对维生素}C\text{的需求限制)} \\ x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0\end{cases}$$

$x_1=0.71753675$　　$x_2=2.0258813$

$x_3=0$　　$x_4=0.07496659$

$Z=1.69942$

应购买甲乙丁食品分别约为0.72，2.03及0.075单位

物资运输问题

运输问题

某种物资有m个产地A_i，i=1,2,….,m，产量分别为a_i个单位；有n个销地B_j，销量分别为b_j个单位，j=1,2,…..n，A_i与B_j之间的单位运价为C_{ij}，问应如何安排运输方案，才能使总运费最少？

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

产销平衡的运输问题

物资运输问题

运输问题

设从产地A_i，运往销地B_j的销量为X_{ij}，则

$$\min Z = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & i = 1 \sim m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & j = 1 \sim n \\ x_{ij} \geq 0, i = 1 \sim m, j = 1 \sim n \end{cases}$$

物资运输问题

运输问题

某地区有两个煤矿$A_1 A_2$，所产的煤要运往三个城市$B_1 B_2 B_3$，各产地的产量、销地的销量以及各产地到各销地的单位运费见下表，求使总运费最小的运输方案

	B_1	B_2	B_3	产量
A_1	x_{11} 90	x_{12} 70	x_{13} 95	200
A_2	x_{21} 80	x_{22} 65	x_{23} 75	230
销量	100	150	180	

物资运输问题

运输问题

	B_1	B_2	B_3	产量
A_1	x_{11} 90	x_{12} 70	x_{13} 95	200
A_2	x_{21} 80	x_{22} 65	x_{23} 75	230
销量	100	150	180	

$$\min Z = 90x_1 + 70x_{12} + 95x_{13} + 80x_{21} + 65x_{22} + 75x_{23}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 230 \\ x_{11} + x_{21} = 100 \\ x_{12} + x_{22} = 150 \\ x_{13} + x_{23} = 180 \\ x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \end{cases}$$

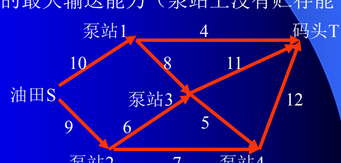
$x_{11} = 50$
$x_{12} = 150$
$x_{13} = 0$
$x_{21} = 50$
$x_{22} = 0$
$x_{23} = 180$

总运费为
Z=32500元

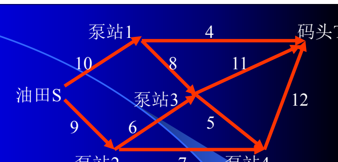
最大流量问题

例5

某油田通过输油管道向港口输送原油，中间有 4 个泵站，每段管道上的输送能力如图所示，求这个系统的最大输送能力（泵站上没有贮存能力）。



例5



从点	到点	输送量
S	泵站1	x_1
S	泵站2	x_2
泵站1	泵站3	x_3
泵站1	码头T	x_4
泵站2	泵站3	x_5
泵站2	泵站4	x_6
泵站3	泵站4	x_7
泵站3	码头T	x_8
泵站4	码头T	x_9

最大流量问题 $\max Z = x_1 + x_2$

例5

$x_1 = 10$
$x_2 = 9$
$x_3 = 6$
$x_4 = 4$
$x_5 = 5$
$x_6 = 4$
$x_7 = 0$
$x_8 = 11$
$x_9 = 4$
$Z^* = 19$

$$\begin{cases}
x_1 = x_3 + x_4 & \text{1号泵站平衡约束} \\
x_2 = x_5 + x_6 & \text{2号泵站平衡约束} \\
x_3 + x_5 = x_7 + x_8 & \text{3号泵站平衡约束} \\
x_7 + x_6 = x_9 & \text{4号泵站平衡约束} \\
x_1 \le 10 & \text{相应弧上的约束} \\
x_2 \le 9 & \text{相应弧上的约束} \\
x_3 \le 8 & \text{相应弧上的约束} \\
x_4 \le 4 & \text{相应弧上的约束} \\
x_5 \le 6 & \text{相应弧上的约束} \\
x_6 \le 7 & \text{相应弧上的约束} \\
x_7 \le 5 & \text{相应弧上的约束} \\
x_8 \le 11 & \text{相应弧上的约束} \\
x_9 \le 12 & \text{相应弧上的约束} \\
x_1 \sim x_9 \ge 0 & \text{流量非负约束}
\end{cases}$$