目标规划
Goal Programming

§ 1. 目标规划的数学模型
§ 2. 目标规划的图解法
§ 3. 目标规划单纯形法

目标规划

- 目标规划是在线性规划的基础上适应各种复杂的多目标最优决策的需要而逐步的发展起来的；
- 对众多的目标分别确定一个希望实现的目标值；
- 按目标的重要级别依次进行考虑与计算；
- 求得最接近实现各个目标预定的数值方案
- 如果某些目标由于种种原因而不能完全实现，它也能指出目标值不能实现的程度和原因。

目标规划（Goal Programming）

$$\max\ S=c_1x_1+c_2x_2$$
$$\text{s.t.}\quad a_{11}x_1+a_{12}x_2\leqslant b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2\leqslant b_2$$
$$x_1,x_2\geqslant 0$$

线性规划 ⟷ 目标规划

决策目标单一 ⟷ 多目标最优决策

求最优解 ⟷ 满意解

硬约束 ⟷ 软约束

目标规划

例1 某工厂生产A,B两种产品

	A	B	拥有量
原材料	2	1	11
设备	1	2	10
利润元/件	8	10	

确定获利最大的生产方案。

目标规划

这是一个单目标规划问题，用线性规划表示如下

$$\max Z=8x_1+10x_2$$

$$s.t.\begin{cases}2x_1+x_2\le 11\\ x_1+2x_2\le 10\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

最优方案为 $x_1^*=4, x_2^*=3$

目标规划

实际上工厂在作决策时要考虑到市场等一系列其他条件。

（1）根据市场信息产品A销量有下降的趋势，故考虑产品A的产量应尽量不大于B。

（2）超过计划供应的原材料时，需要高价采购，这就使成本增加，所以原材料有严格限制。

（3）应该尽可能的充分利用设备台时，但尽量不加班。

（4）应尽可能达到并超过计划利润指标 56元。

目标规划

决策者在原材料供应受严格限制的基础上考虑：

P_1:产品B的产量应尽量不低于产品 A的产量；

P_2:尽量充分利用设备有效台时，不宜加班；

P_3:利润额应尽量不小于56元。

问题：如何建立该问题的目标规划模型以确定生产量?

目标规划数学模型的有关概念：

1.决策变量与正负偏差变量 d_i^+, d_i^- (i=1,…,m)

对每个目标函数引入正负偏差变量 d_i^+, d_i^-，$d_i^+, d_i^- \geq 0$ (i = 1, 2,…,m)，

d_i^+表示第i个目标中实际超出期望值的数值

d_i^-表示第i个目标中未达到期望值的数值

$d_i^+ \times d_i^- = 0$

应尽可能达到并超过利润指标56元。

目标规划数学模型的有关概念

2.绝对约束和目标约束

绝对约束 ：必须严格满足的等式和不等式约束

$2x_1+3x_2 \leqslant 11$ ——硬约束

目标约束：把约束右端看作要追求的目标，有正负偏差变量的约束

$2x_1+3x_2+d_1^- - d_1^+ = 11$ ——软约束

目标规划数学模型的有关概念

3.优先因子(优先等级)与权系数

优先因子： 目标的重要程度

首先达到的目标赋予优先因子 P_1，次位的目标赋于优先因子 P_2,…,并规定

$P_k >> P_{k+1}$ k=1,…,K，

权系数：

相同的优先级，各目标的重要程度 ω_j

目标规划数学模型的有关概念

- 决策者在原材料供应受严格限制的基础上考虑：
- P_1:产品B的产量应尽量不低于产品 A的产量；
- P_2:尽量充分利用设备有效台时，不宜加班；
- P_3:利润额应尽量不小于56元。

目标规划数学模型的有关概念

4.目标函数（达成函数）

目标接近期望值

构造一个新的目标函数，以求得有关偏差变量的最小值。

单一的综合性目标 Min z= f (d_i^+，d_i^-)

目标函数表达形式

在达成函数中，根据对各个目标的不同要求，一般采用三种形式：

(1).若要求尽可能地实现某个目标(第i个目标)的期望值，则希望相应的正、负偏差变量d_i^+,d_i^-尽可能地小。

$$\text{Min } z=f(d_i^+ + d_i^-)$$

目标函数表达形式

(2).若某个目标允许超过期望值，但希望尽可能不低于期望值。

$$\text{Min } z=f(d_i^-)$$

目标函数表达形式

(3).若某个目标允许低于期望值，但尽量不超过期望值。

$$\text{Min } z=f(d_i^+)$$

目标规划

例1 某工厂生产A,B两种产品

	A	B	拥有量
原材料	2	1	11
设备	1	2	10
利润元/件	8	10	

目标规划

工厂在作决策时要考虑到市场等一系列其他条件。

（1）根据市场信息产品A销量有下降的趋势，故考虑产品A的产量应尽量不大于B。

（2）超过计划供应的原材料时，需要高价采购，这就使成本增加，所以原材料有严格限制。

（3）应该尽可能的充分利用设备台时，但不希望加班。

（4）应尽可能达到并超过计划利润指标 56元。

目标规划

决策者在原材料供应受严格限制的基础上考虑：

P_1:产品B的产量应尽量不低于产品 A的产量；

P_2:尽量充分利用设备有效台时，不宜加班；

P_3:利润额应尽量不小于56元。

问题：如何建立该问题的目标规划模型以确定生产量？

P1产品… p2充… p3利润额不应小于56元 …的产量 不宜加班；

目标规划

例2 $\min Z=P_1d_1^{+}+P_2(d_2^{-}+d_2^{+})+P_3d_3^{-}$

$$
\begin{aligned}
s.t\quad & 2x_1+x_2 \le 11 \\
& x_1-x_2+d_1^{-}-d_1^{+}=0 \\
& x_1+2x_2+d_2^{-}-d_2^{+}=10 \\
& 8x_1+10x_2+d_3^{-}-d_3^{+}=56 \\
& x_1,x_2\ge 0,\ d_i^{-},d_i^{+}\ge 0\ (i=1,2,3)
\end{aligned}
$$

$\max Z=8x_1+10x_2$

$$
s.t.\begin{cases} 2x_1+x_2\le 11 \\ x_1+2x_2\le 10 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}
$$

决策者在原材料供应受严格限制

§1.目标规划的数学模型

例2 某电子公司录音机和收音机两种产品，它们均需先后经过两个工厂的加工才能成为成品，数据如下：

目标规划

	录音机	收音机
资源1：加工（第一工厂）	2小时	4小时
资源2：装配试验（第二工厂）	2.5小时	1.5小时
利润	20元/台	23元/台
预计销量	1,500台	1,000台
月储存成本	8元	15元

	第一工厂	第二工厂
设备总工时	2400	2800
运转成本/台	18元	15元

该公司依下列次序为目标的优先次序，以实现次月的生产与销售目标。

P_1 厂内的储存成本不宜超过23,000元；

P_2 录音机销售量应完成1,500台；

P_3 第一，二两工厂的设备应全力运转，避免有空闲时间，两厂的单位运转成本当作它们间的权系数。

P_4 第一个工厂的超时作业时间全月份不宜超出30小时；

P_5 收音机销售量应完成1,000台；

试建立这个问题的数学模型。

[解] 设x_1,x_2分别表示下月份录音机与收音机的生产量…

P_3 第一，二两工厂的设备应全力运转，避免有空闲时间，两厂的单位运转成本当作它们间的权系数。

1.第一、二两工厂设备运转时间约束

$2x_1+4x_2+d_1^{-}-d_1^{+}=2400$

$2.5x_1+1.5x_2+d_2^{-}-d_2^{+}=2800$

P_1 厂内的储存成本不宜超过23,000元；

2.厂内储存成本约束

$8x_1+15x_2+d_3^- - d_3^+=23000$

3.销售目标约束

$x_1 \quad +d_4^- - d_4^+=1500$

$x_2 \ +d_5^- - d_5^+=1000$

P_2 录音机销售量应完成1,500台；

P_5 收音机销售量应完成1,000台；

4.第一个工厂的超过作业时间约束

$d_1^+ + d_{11}^- - d_{11}^+=30$

5.目标（达成）函数

$\min Z=P_1d_3^+ + P_2d_4^- + P_3(6d_1^- + 5d_2^-)$

$+P_4d_{11}^+ + P_5d_5^-$

达成函数中P_3级目标的权系数是取第一、第二两工厂设备每小时运转成本的比率18:15=6:5。P_4 第一个工厂的超时作业时间全月份不宜超出30小时；

这个问题的目标规划模型为：

$\min Z=P_1d_3^+ + P_2d_4^- + P_3(6d_1^- + 5d_2^-)$

$+P_4d_{11}^+ + P_5d_5$

s.t. $2x_1+4x_2+d_1^- - d_1^+=2400$

$2.5x_1+1.5x_2+d_2^- - d_2^+=2800$

$8x_1+15x_2+d_3^- - d_3^+=23000$

$x_1 \quad +d_4^- - d_4^+=1500$

$x_2 \ +d_5^- - d_5^+=1000$

P_3 第一，二两工厂的设备应全力运转

P_4 第一个工厂的超时作业时间全月份不宜 当

P_5 收音机销售量应完成1,000台；

目标规划的一般数学模型为

$\min Z=\sum_{l=1}^{L} P_l[\sum_{k=1}^{K}(\omega_{lk}^+ d_k^+ + \omega_{lk}^- d_k^-)]$

$\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j+d_k^- - d_k^+=g_k \qquad k=1,2,\ldots,k$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le(=,\ge)b_i \qquad i=1,2,\ldots,m$

$x_j\ge0 \qquad j=1,2,\ldots,n$

$d_k^-, d_k^+\ge0 \qquad k=1,2,\ldots K$

目标规划的图解法

目标规划的图解法

线性规划图解法

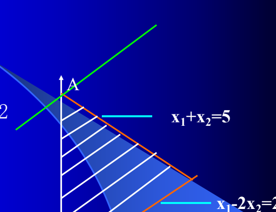
$\max\ S=-x_1+x_2$

s.t. $x_1-2x_2\leqslant 2$

$x_1+x_2\leqslant 5$

$x_1, x_2\geqslant 0$

最优解 A(0,5)



目标规划的图解法

目标规划图解法是在可行域内，

一.寻找一个使P_1级别的各目标均满足的区域R_1

二.再在R_1中寻找一个使P_2级别的各目标均满足的区域$R_2(R_1 \supseteq R_2)$

三.在R_2中寻找一个满足P_3级别各目标的区域$R_3(R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3)$；

如此下去直到寻找到一个区域R_k，满足P_k级别各目标，这个P_k即为我们的解。

称R_i为第i级的解空间。

目标规划的图解法

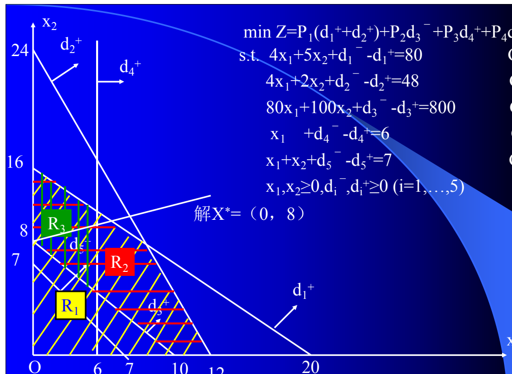
如果某一个R_i已退化为一点，则计算亦应终止，这一点亦即为最优解，它只能满足$P_1,P_2,\ldots,P_i$级目标，而无法进一步改进；以满足$P_{i+1}, P_{i+2}, \ldots, P_k$各级目标。

目标规划的图解法

例　用图解法解下列目标规划模型

$$\min Z=P_1(d_1^+ + d_2^+)+P_2 d_3^- +P_3 d_4^+ +P_4 d_5^+$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & 4x_1+5x_2+d_1^- -d_1^+=80 && G_1\\
& 4x_1+2x_2+d_2^- -d_2^+=48 && G_2\\
& 80x_1+100x_2+d_3^- -d_3^+=800 && G_3\\
& x_1 \quad +d_4^- -d_4^+=6 && G_4\\
& x_1+x_2+d_5^- -d_5^+=7 && G5\\
& x_1,x_2 \ge 0, d_i^-, d_i^+ \ge 0\ (i=1,\ldots,5)
\end{aligned}$$



$$\min Z=P_1(d_1^+ + d_2^+)+P_2 d_3^- +P_3 d_4^+ +P_4 d_5^+$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & 4x_1+5x_2+d_1^- -d_1^+=80 && G_1\\
& 4x_1+2x_2+d_2^- -d_2^+=48 && G_2\\
& 80x_1+100x_2+d_3^- -d_3^+=800 && G_3\\
& x_1 \quad +d_4^- -d_4^+=6 && G_4\\
& x_1+x_2+d_5^- -d_5^+=7 && G5\\
& x_1,x_2 \ge 0, d_i^-, d_i^+ \ge 0\ (i=1,\ldots,5)
\end{aligned}$$

[解]1.作目标约束时，先令$d_i^-, d_i^+=0$，作相应的直线

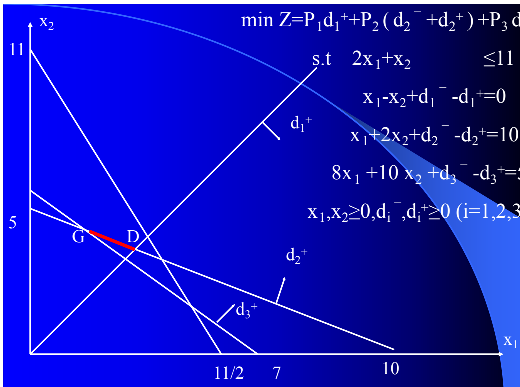
2.用垂直于各目标直线的箭头反映偏差变量的增加。

在满足了优先级别P_3后，得R_3，最后一个优先级别P_4，是通过极小化d_5^+而实现。由于不可能在R_3内使$d_5^+=0$，因此为了保证较高级别目标不被破坏，我们只能在R_3中选择一点，使其对应的d_5^+的尽可能地小。这一点为$X^*=(0,8)$，在此点$d_5^+=1$。说明P_4级目标不能完全实现，尚多于目标期望值1个单位。

练习图解法：

$$\min Z=P_1 d_1^+ +P_2(d_2^- +d_2^+)+P_3 d_3^-$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t}\quad & 2x_1+x_2 \le 11\\
& x_1-x_2+d_1^- -d_1^+=0\\
& x_1+2x_2+d_2^- -d_2^+=10\\
& 8x_1+10x_2+d_3^- -d_3^+=56\\
& x_1,x_2 \ge 0, d_i^-, d_i^+ \ge 0\ (i=1,2,3)
\end{aligned}$$



$\min Z=P_1d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$

s.t $\quad 2x_1+x_2 \quad \le 11$

$x_1-x_2+d_1^- -d_1^+=0$

$x_1+2x_2+d_2^- -d_2^+=10$

$8x_1 +10x_2 +d_3^- -d_3^+=56$

$x_1,x_2\ge 0, d_i^-, d_i^+\ge 0 \ (i=1,2,3)$

§ 3.解目标规划的单纯形法

目标规划模型如下：

$\min Z=P_1d_1^- + P_2d_{11}^+ + P_3(5d_2^- + 3d_3^-) + P_4d_1^+$

s.t. $\quad x_1+x_2+d_1^- -d_1^+=80$

$x_1 + d_2^- = 70$

$x_2 + d_3^- = 45$

$d_1^+ + d_{11}^- - d_{11}^+ = 10$

$x_1,x_2,d_i^-,d_i^+\ge 0 \ (i=1,2,3,11)$

§ 3.解目标规划的单纯形法

(1).因目标规划的目标函数为最小化，所以以$\sigma_j\ge 0$为最优判别准则；

(2).因非基变量的检验数含有不同等级的优先因子，即

$$\sigma_j=\Sigma\alpha_{kj}P_k \qquad j=1,\ldots,n$$

因$P_1>>P_2>>P_3>>\ldots>>P_k$，从每个检验数整体来看：检验数的正、负首先决定于$P_1$的系数$\alpha_{1j}$的正、负，若$\alpha_{1j}=0$，这时此检验数的正、负就决定于$P_2$的系数$\alpha_{2j}$的正、负，…

目标规划模型如下：

$\min Z=P_1d_1^- + P_2d_{11}^+ + P_3(5d_2^- + 3d_3^-) + P_4d_1^+$

s.t. $\quad x_1+x_2+d_1^- -d_1^+=80$

$x_1 + d_2^- = 70$

$x_2 + d_3^- = 45$

$d_1^+ + d_{11}^- - d_{11}^+ = 10$

$x_1,x_2,d_i^-,d_i^+\ge 0 \ (i=1,2,3,11)$

			0	0	P_1	P_4	$5P_3$	$3P_3$	0	P_2
	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_3^-	d_{11}^-	d_{11}^+
P_1	d_1^-	80	1	1	1	–1	0	0	0	0
$5P_3$	d_2^-	70	1	0	0	0	1	0	0	0
$3P_3$	d_3^-	45	0	1	0	0	0	1	0	0
0	d_{11}^-	10	0	0	0	1	0	0	1	–1
	P_1	0	-1	-1	0	1	0	0	0	0
	P_2	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	P_3	0	-5	-3	0	0	0	0	0	0
	P_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0

$\min Z=P_1d_1^- + P_2d_{11}^+ + P_3(5d_2^- + 3d_3^-) + P_4d_1^+$

d_1^-	80	1	1	1	–1	0	0	0	0
d_2^-	70	1	0	0	0	1	0	0	0
d_3^-	45	0	1	0	0	0	1	0	0
d_{11}^-	10	0	0	0	1	0	0	1	–1
P_1		-1	-1	0	1	0	0	0	0
P_2		0	0	0	0	0	0	0	1
P_3		-5	-3	0	0	0	0	0	0
P_4		0	0	0	1	0	0	0	0

$$\min Z = P_1 d_1^- + P_2 d_{11}^+ + P_3(5d_2^- + 3d_3^-) + P_4 d_1^+$$

X_B	b	x_1	x_2	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_{11}^-	d_{11}^+
d_1^-	10	0	1	1	–1	-1	0	0	0
X_1	70	1	0	0	0	1	0	0	0
d_3^-	45	0	1	0	0	0	1	0	0
d_{11}^-	10	0	0	0	1	0	0	1	–1
P_1		0	-1	0	1	1	0	0	0
P_2		0	0	0	0	0	0	0	1
P_3		0	-3	0	0	5	0	0	0
P_4		0	0	0	1	0	0	0	0

$$\min Z = P_1 d_1^- + P_2 d_{11}^+ + P_3(5d_2^- + 3d_3^-) + P_4 d_1^+$$

X_B	b	x_1	x_2	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_{11}^-	d_{11}^+
x_2	10	0	1	1	–1	-1	0	0	0
x_1	70	1	0	0	0	1	0	0	0
d_3^-	35	0	0	-1	1	1	1	0	0
d_{11}^-	10	0	0	0	1	0	0	1	–1
P_1		0	0	1	0	0	0	0	0
P_2		0	0	0	0	0	0	0	1
P_3		0	0	3	-3	2	0	0	0
P_4		0	0	0	1	0	0	0	0

X_B	b	x_1	x_2	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_{11}^-	d_{11}^+
x_2	20	0	1	1	0	-1	0	1	-1
x_1	70	1	0	0	0	1	0	0	0
d_3^-	25	0	0	-1	0	1	1	–1	1
d_2^+	10	0	0	0	1	0	0	1	–1
P_1		0	0	1	0	0	0	0	0
P_2		0	0	0	0	0	0	0	1
P_3		0	0	3	0	2	0	3	-3
P_4		0	0	0	1	0	0	–1	+1

这个问题的满意解：$x_1=70, x_2=20, d_1^-=0, d_2^+=10, d_2^-=0, d_3^-=25, d_{11}^-=0, d_{11}^+=0$

解目标规划的计算步骤：

(1).建立初始单纯形表，在表中将检验数行按优先因子分别列成k行，设k=1；

(2).检查该行中是否存在负数，且对应的前 k-1行的系数是零，若取其中最小者对应的变量为换入变量，转 (3)，若无负数，则转(5)。

(3).按最小比值规则确定换出变量，当存在两个和两个以上相同的最小比值时，选取具有较高优先级别的变量为换出变量；

(4).按单纯形法进行基变换运算，建立新的计算表，返回(2)；

(5).当k=K时，计算结束，表中的解即为满意解，否则置k=k+1，返回(2)。

练习单纯形法:

$$\min Z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$\text{s.t}\quad 2x_1 + x_2 \le 11$$
$$x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10$$
$$8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56$$
$$x_1, x_2 \ge 0, d_i^-, d_i^+ \ge 0\ (i=1,2,3)$$