1 紧算子

1.1 紧算子的概念

Recall: 回忆在基本的拓扑学理论中我们有**紧集**的概念:

设 X 为一个拓扑空间, $A \subseteq X$ 为 X 的一个子集, 若对于 A 的任意一个开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ (即 U_α 均为 X 上的开集且 $A \subseteq \cup_{\alpha\in I}U_\alpha$), 均存在其的一个有限子覆盖 $\{U_n\} \subseteq \{U_\alpha\}$ (即 $A \subseteq \cup_n U_n$), 则称 A 为 X 的一个**紧子集**.

对于 Banach 空间, 其上的范数诱导了通常意义下的范数拓扑, 我们有如下紧算子的概念.

Definition 1. 设 X, Y 为两个 Banach 空间, $T \in L(X;Y)$ 为从 X 到 Y 的一个线性算子. 若对于 X 的任一有界子集 A, $\overline{T(A)}$ 在 Y 中为 (拓扑) 紧的, 则称 T 为一个**紧算子**. (或者也叫**全连续算子**)

Notaion: Banach 空间 X, Y 之间的紧算子全体记为 $\mathcal{K}(X;Y)$.

Recall: (1) 在泛函分析理论中, 我们熟知如下的结果: 对于赋范线性空间 X 中的子集 A, 有

$$A\text{为拓扑紧} \Longleftrightarrow A\text{为自列紧}$$

从而对于 $T \in L(X;Y)$, 我们有

$$T \in \mathcal{K}(X;Y) \Longleftrightarrow \text{对于任意有界序列}\{x_n\} \subseteq X, \{Tx_n\}\text{存在收敛子列}.$$

(2) 回顾在泛函分析中关于**完全有界**的叙述:

度量空间 (X,d) 的子集 M 若满足对于 $\forall \varepsilon > 0$, 都存在 M 的一个有限的 ε-网, 则称 M 为**完全有界**的.

以及相关的 **Hausdorff 定理**:

设 M 为完备的度量空间 (X,d) 中的一个子集, 则有

$$M\text{为列紧的} \Longleftrightarrow M\text{为完全有界的}.$$

由于 Banach 空间关于范数 $\|\cdot\|$ 所诱导的度量是完备的, 所以根据我们的定义和上述的 (1), 我们立即得到下述的等价叙述.

Proposition 1. 设 X, Y 为两个 Banach 空间, $T \in L(X;Y)$, 则下述等价:
(1) $T \in \mathcal{K}(X;Y)$;
(2) 对于 X 的任意有界集 A, $T(A)$ 紧包含于 Y;
(3) 对于 X 的任意有界集 A, $T(A)$ 在 Y 中列紧;
(4) 对于 X 中的任意有界序列 $\{x_n\}$, $\{Tx_n\}$ 在 Y 中有收敛子列;
(5) 对于 X 的任意有界集 A, $T(A)$ 为 Y 中的一个完全有界集合.

Proposition 2. 对于 Banach 空间 X, Y, 有 $\mathcal{K}(X;Y) \subseteq \mathfrak{B}(X;Y)$.

Proof: (反证) 如若不然, 则存在 $T \in \mathcal{K}(X;Y) \setminus \mathfrak{B}(X;Y)$, 则对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 存在 $x_n \in X$ 满足 $\|x_n\| = 1$ 且 $\|Tx_n\| \geq n$, 也即 $\{x_n\}$ 有界但 $\{Tx_n\}$ 不存在收敛子列, 这与 $T \in \mathcal{K}(X;Y)$ 相矛盾. □

Definition 2. 设 X, Y 为 Banach 空间, 若 $T \in L(X;Y)$ 满足

$$\dim \mathrm{Im} T < \infty$$

则称 T 为一个**有限秩算子**.

下面的结果表明, 有限秩算子若为有界的, 则其为一个紧算子.

Theorem 1. 设 X, Y 为 Banach 空间, 若 $T \in \mathfrak{B}(X;Y)$ 为一个有限秩算子, 则 $T \in \mathcal{K}(X;Y)$.

Proof: 对于 X 的任一有界子集 A, 只需注意到 $\overline{T(A)} (\subseteq \mathrm{Im} T)$ 为一个有界的闭集且 $\dim \mathrm{Im} T < \infty$, 所以 $\overline{T(A)}$ 为紧的. □

所以立即得到如下推论.

Corollary 1. 设 X, Y 为 Banach 空间, $T \in \mathfrak{B}(X;Y)$, 若 X, Y 中任一个为有限维的, 则必有 $T \in \mathcal{K}(X;Y)$.

Proof: ✓. □

Example 1. 考虑 $X = Y := l^2$, 则 $\mathrm{Id}_{l^2} \in \mathfrak{B}(l^2)$ 但 $\mathrm{Id}_{l^2} \notin \mathcal{K}(l^2)$.

Proof: 事实上, 只需注意到对于

$$e_n := (0, \ldots, 0, \frac{1}{n}, 0, \ldots)$$

则 $\{e_n\}$ 为 l^2 上的有界子集, 但是 $\{\mathrm{Id}_{l^2}(e_n)\}$ 没有收敛子列. □

Example 2. 定义 $C[a,b]$ 上的积分算子

$$K : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$$

$$x(t) \mapsto Kx(t) := \int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$

其中 $k(s,t) \in C([a,b] \times [a,b])$, 则有

$$K \in \mathcal{K}(C[a,b])$$

Proof: 根据 $C[a,b]$ 上的范数的定义, 我们得到

$$\|Kx\| \le \max_{t\in[a,b]} \left(\int_a^b |k(t,s)||x(s)|\mathrm{d}s \right) \le M(b-a)\|x\|$$

其中

$$M := \max_{(t,s)\in[a,b]\times[a,b]} |k(t,s)|$$

所以 $K \in \mathfrak{B}(C[a,b])$. 所以, 对于 $C[a,b]$ 上的任一有界集 B, 立即得到 $K(B)$ 为 $C[a,b]$ 上的有界集. 此时, 注意到, 对于 $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ 以及 $\forall x(t) \in C[a,b]$, 有

$$|Kx(t_1) - Kx(t_2)|^2 = \left| \int_a^b (k(t_1,s) - k(t_2,s))x(s)\mathrm{d}s \right|^2 \le \int_a^b |k(t_1,s) - k(t_2,s)|^2\mathrm{d}s \cdot \int_a^b |x(s)|^2\mathrm{d}s$$

由于 $k(t,s)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 一致连续, 所以立即可知 $\{Kx(t)|\ x(t) \in B \subseteq C[a,b]\}$ 为等度连续的, 所以根据泛函分析中著名的 Arzela-Ascoli 定理, $K(B)$ 为 $C[a,b]$ 的一个列紧集, 所以根据命题 1, 可知积分算子 K 为 $C[a,b]$ 上的紧算子. □

1.2 紧算子的性质

关于紧算子集合 $\mathcal{K}(X;Y)$, 有如下的重要结果.

Theorem 2. 设 X, Y 为 Banach 空间, 则 $\mathcal{K}(X;Y)$ 为 $\mathfrak{B}(X;Y)$ 的闭子空间.

Proof: 显然容易验证 $\mathcal{K}(X;Y)$ 为 $\mathfrak{B}(X;Y)$ 的线性子空间. 现在设 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{K}(X;Y)$ 满足 $T_n \longrightarrow T(n \longrightarrow \infty)$, 我们证明 $T \in \mathcal{K}(X;Y)$:

对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在充分大的 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\|T_{n_0} - T\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

对于 X 的任一有界集 A, 从而 $\overline{T_{n_0}(A)}$ 在 Y 中紧, 所以 $\overline{T_{n_0}(A)}$ 为 Y 中的一个完全有界集, 所以存在 $\overline{T_{n_0}(A)}$ 的有限 $\frac{\varepsilon}{2}$-网, 记之为 $\{y_1, \dots, y_m\}$, 即

$$\overline{T_{n_0}(A)} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \mathbb{B}_{y_j}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

其中

$$\mathbb{B}_{y_j}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) := \{y \in Y|\ \|y - y_j\| < \frac{\varepsilon}{2}\}$$

所以再由 (1) 式可得

$$\overline{T(A)} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \mathbb{B}_{y_j}(\varepsilon)$$

即 $\overline{T(A)}$ 完全有界, 从而 $\overline{T(A)}$ 在 Y 中为紧的, 所以 $T \in \mathcal{K}(X;Y)$. □

Recall: 根据 **Riesz 表示定理**, 对于 Hilbert 空间 H, 我们有一一的保范映射

$$\tau : H^* := \mathfrak{B}(H;\mathbb{K}) \longrightarrow H$$

$$f \mapsto y_f$$

其中 $f(x) = (x, y_f)$ $(\forall x \in H)$ 且 $\|f\| = \|y_f\|$. 回忆对于 Banach 空间 X 上**弱收敛**序列的定义: Banach 空间 X 上的序列 $\{x_n\}$ 以及点 $x \in X$ 若满足对于 $\forall f \in X^*$, 有

$$f(x_n) \longrightarrow f(x) \quad (n \to \infty)$$

则称 $\{x_n\}$ 弱收敛到 x, 记为 $x_n \xrightarrow{w.} x$ $(n \to \infty)$. 所以对于 Hilbert 空间 H, 由于其关于内积所诱导的范数为一个 Banach 空间, 所以 Hilbert 空间 H 上的序列 $\{x_n\}$ 称为是弱收敛到 $x \in H$ 的也等价于如下的叙述

$$(x_n, y) \longrightarrow (x, y) \quad (\forall y \in H)$$

Lemma 1. 设 H 为一个 Hilbert 空间, 则 H 中任意有界点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 均存在子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 使得 $\{x_{n_k}\}_k^{\infty}$ 在 H 中为弱收敛的. 即 H 中的有界集均为弱列紧的.

Proof: 对于 H 中的有界集 $\{x_n\}$, 令

$$M := \mathrm{Span}\{x_n |\ n \in \mathbb{N}\}$$

从而 $M \oplus M^{\perp}$ 在 H 中稠密. 注意到, 对于任一给定的 $j \in \mathbb{N}$, 数列

$$\{(x_n, x_j)\}_{n=1}^{\infty}$$

为有界的, 从而存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子序列 $\{x_{n_{j_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得数列 $\{(x_{n_{j_k}}, x_j)\}_{k=1}^{\infty}$. 利用在泛函分析中熟悉的对角线方法, 取

$$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} := \{x_{n_{k_k}}\}_{k=1}^{\infty}$$

从而对于任一取定的 $j \in \mathbb{N}$, 数列

$$\{(x_{n_k}, x_j)\}_{k=1}^{\infty}$$

是收敛的. 此时, 对于 $\forall x \in M^{\perp} = (\mathrm{Span}\{x_n |\ n \in \mathbb{N}\})^{\perp}$, 有 $(x_{n_k}, x) = 0$, 从而对于 $\forall y \in M \oplus M^{\perp}$, $\{(x_{n_k}, x)\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛. 又由于 $M \oplus M^{\perp}$ 在 H 中稠密, 从而引理得证. □

Example 3. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Hilbert 空间 H 中的一个标准正交集, 则根据泛函分析中熟悉的 Bessel 不等式, 对于 $\forall x \in H$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, x_n)| \leq \|x\|^2$$

从而

$$\lim_{n \to \infty} (x, x_n) = 0$$

所以

$$x_n \xrightarrow{w.} 0 \quad (n \to \infty)$$

特别的, 若 H 为一个可分的 Hilbert 空间, 则我们可以取 H 的标准正交基 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 通过与上面相同的论述可知, 可分 Hilbert 空间 H 的标准正交基满足

$$x_n \xrightarrow{w.} 0 \quad (n \to \infty)$$

下述结果表明, Hilbert 空间上的紧算子将弱收敛的序列变换为依范数收敛的序列.

Theorem 3. 设 H 为 Hilbert 空间, $T \in \mathfrak{B}(H)$. 则

$$T \in \mathcal{K}(H) \Longleftrightarrow \text{若}\{x_n\} \xrightarrow{w.} 0 \text{ 则}\{Tx_n\} \to 0.$$

Proof: $(\Rightarrow)$ 若 $\{Tx_n\}$ 不依照范数收敛到 0. 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 以及子序列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\|Tx_{n_k}\| > \varepsilon_0 \quad (\forall k) \tag{2}$$

由于 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛, 为一个有界集合, 从而 $\{T(x_{n_k})\}$ 存在收敛子列, 为了符号简便起见, 不妨就设 $\{Tx_{n_k}\}$ 本身是收敛的, $Tx_{n_k} \to y_0$ $(k \to \infty)$. 又由于 $x_{n_k} \xrightarrow{w.} 0$ $(k \to \infty)$, 所以对于 $\forall y \in H$, 有

$$(Tx_{n_k}, y) = (x_{n_k}, T^* y) \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

这意味着

$$Tx_{n_k} \xrightarrow{w.} 0 \quad (k \to \infty)$$

从而

$$y_0 = \lim_{k \to \infty} Tx_{n_k} = w. \lim_{k \to \infty} Tx_{n_k} = 0$$

这与 (2) 式相矛盾;

$(\Leftarrow)$ 取 H 中的任一有界序列 $\{x_n\}$, 根据前述引理, $\{x_n\}$ 为弱列紧的, 所以存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得

$$w. \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0$$

从而由我们的条件, 得到

$$\lim_{k \to \infty} T(x_{n_k} - x_0) = 0$$

即 $\{Tx_{n_k}\}$ 为 $\{Tx_n\}$ 的一个收敛子列, 从而

$$T \in \mathcal{K}(H)$$

定理得证. □

Definition 3. 设 X 为 $\mathbb{C}$ 上的一个代数, 若 X 上的范数 $\|\cdot\|$ 满足
(1) $(X, \|\cdot\|)$ 为一个 Banach 空间;
(2) $\|x_1 x_2\| \le \|x_1\| \|x_2\| \quad (\forall x_1, x_2 \in X)$
则称 X 为一个 **Banach 代数**.

Proposition 3. 设 X 为一个 Banach 空间, 则 $\mathfrak{B}(X)$ 关于算子范数为一个 Banach 代数.

Proof: 显然 ✓. □

Theorem 4. 设 X 为一个 Banach 空间, 则 $\mathcal{K}(X)$ 为 Banach 代数 $\mathfrak{B}(X)$ 的一个双边理想. 即, 对于任意 $K \in \mathcal{K}(X)$ 以及 $T \in \mathfrak{B}(X)$, 有 $KT \in \mathcal{K}(X), TK \in \mathcal{K}(X)$.

Proof: 只需注意到若 $T \in \mathfrak{B}(X)$, 则 T 将有界序列变为有界序列以及将收敛序列变为收敛序列即得. □

Corollary 2. 设 H 为一个 Hilbert 空间, $T \in \mathfrak{B}(H)$, 则

$$T \in \mathcal{K}(H) \Longleftrightarrow T^*T \in \mathcal{K}(H)$$

Proof: $(\Rightarrow)$ 由上述定理, 所以 $T^*T \in \mathcal{K}(H)$;

$(\Leftarrow)$ 设 H 中的序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n \xrightarrow{w.} 0$ $(n \to \infty)$, 所以根据定理 3, 有

$$T^*Tx_n \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

由于 $\{x_n\}$ 弱收敛进而有界, $\|x_n\| \leq M$, 我们有

$$\|Tx_n\|^2 = (Tx_n, Tx_n) = (T^*Tx_n, x_n) \leq \|T^*Tx_n\|M \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

也即

$$Tx_n \longrightarrow 0 \quad (n \longleftarrow \infty)$$

所以再次由定理 3 可知, $T \in \mathcal{K}(H)$. □

Corollary 3. 设 H 为一个 Hilbert 空间, $T \in \mathfrak{B}(H)$, 则

$$T \in \mathcal{K}(H) \Longleftrightarrow T^* \in \mathcal{K}(H)$$

Proof: 只需注意到 $(T^*)^*T^* = TT^*$ 再利用上述定理 4 和推论 2 即得. □

Remark: 根据定理 2 和定理 4, 我们可知: Banach 空间 X 上的紧算子空间 $\mathcal{K}(X)$ 为有界线性算子空间 $\mathfrak{B}(X)$(同时关于算子范数也是一个 Banach 代数) 的一个闭的双边理想.

如下的事实说明, 对于一个紧算子 $T \in \mathcal{K}(H)$, 我们可以利用有界线性算子空间 $\mathfrak{B}(H)$ 上的一个有限秩算子序列来逼近它.

Theorem 5. 设 H 为 Hilber 空间, $T \in \mathfrak{B}(H)$. 则

$$T \in \mathcal{K}(H) \Longleftrightarrow \text{存在}\mathfrak{B}(H)\text{上的有限秩算子序列}\{T_n\}\text{使得}T_n \to T \ (n \to \infty)$$

并且若 $T \in \mathcal{K}(H)$, 则 $(\ker T)^{\perp}$ 与 $\mathrm{Im}T$ 都是可分的.

Proof: $(\Leftarrow)$ 由定理 1 和定理 2 即得;

$(\Rightarrow)$ 我们先来证明若 $T \in \mathcal{K}(H)$, 则 $(\ker T)^{\perp}$ 是可分的: 设 $\{e_\alpha | \ \alpha \in \Lambda\}$ 为 $(\ker T)^{\perp}$ 的一个标准正交基, 我们证明 Λ 为至多可数集即可. 根据我们前面的例 3 可知, 对于 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 中的任一可数序列 $\{e_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, 由于 $\{e_{\alpha_n}\}$ 为一个标准正交集, 所以 $e_{\alpha_n} \xrightarrow{w.} 0 \ (n \to \infty)$, 从而再由定理 3, 得到

$$Te_{\alpha_n} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

这意味着, 对于任一给定的 $\varepsilon > 0$, 满足 $\|Te_\alpha\| \geq \varepsilon$ 的 $\alpha \in \Lambda$ 为有限多的. 从而这表明 Λ 为至多可数集, 进而 $(\ker T)^{\perp}$ 可分.

现在, 设 $\{e_n | \ n \in \mathbb{N}\}$ 为 $(\ker T)^{\perp}$ 的一个标准正交基, 记

$$L_m := \mathrm{Span}\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$$

再定义投影算子 P_m 与 P 如下

$$P_m := P_{L_m} : H \longrightarrow L_m = \mathrm{Span}\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$$

$$P := P_{(\ker T)^{\perp}} : H \longrightarrow (\ker T)^{\perp}$$

显然, P_m, P 均为正交投影算子 (可见 [4]) 并且显然可知

$$P_m \xrightarrow{s.} P \quad (m \to \infty)$$

即 P_m 强收敛于 P. 现在, 定义算子

$$T_m := TP_m$$

所以对于 $\forall x \in H$, 有

$$T_m x = TP_m x = \sum_{n=1}^{m} (x, e_n) Te_n$$

这意味着

$$\dim \mathrm{Im} T_m < \infty$$

所以 T_m 均为有限秩算子. 注意到由算子范数的定义, 对于 $\forall m \in \mathbb{N}$, 存在 $x_m \in H$ 满足 $\|x_m\| = 1$ 并且使得

$$\frac{1}{2}\|T - T_m\| \leq \|(T - T_m)x_m\| \tag{3}$$

此时, 由于 P_m 强收敛到 P 以及 P_m, P 都是自共轭的, 所以对于 $\forall h \in H$, 有

$$((P - P_m)x_m, h) = (x_m, (P - P_m)h) \leq \|P - P_m\|\|h\| \longrightarrow 0 \quad (m \longrightarrow \infty)$$

这意味着

$$(P - P_m)x_m \xrightarrow{w.} 0 \quad (m \to \infty)$$

所以根据定理 3, 得到

$$T(P - P_m)x = (T - T_m)x_m \longrightarrow 0 \quad (m \longrightarrow \infty)$$

所以由 (3) 式, 我们得到

$$\|T - T_m\| \leq 2\|(T - T_m)x_m\| \longrightarrow 0 \quad (m \longrightarrow \infty)$$

即是

$$T_m \longrightarrow T \quad (m \longrightarrow \infty)$$

所以我们找到了 $\mathfrak{B}(H)$ 上的一个有限秩算子序列 $\{T_m\}$ 以逼近 $T \in \mathcal{K}(H)$.

最后再注意到若 $T \in \mathcal{K}(H)$, 则此时由上述推论 3, $T^* \in \mathcal{K}(H)$, 所以 $(\ker T^*)^{\perp} = \overline{\mathrm{Im} T}$ 可分, 继而 $\mathrm{Im} T$ 可分. $\square$

1.3 Hilbert-Schmidt 算子

Hilbert-Schmidt 算子为一类重要的紧算子 (如下定理 6 所述).

Definition 4. 设 H 为为一个可分 Hilbert 空间, 设 $\{e_\alpha | \ \alpha \in \mathbb{N}\}$ 为 H 的一个完备的标准正交基. 若有界线性算子 $T \in \mathfrak{B}(H)$ 满足

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \|Te_\alpha\|^2 < \infty$$

则称 T 为一个 **Hilbert-Schmidt 算子**. 此时, 我们定义 Hilbert-Schmidt 算子 T 的 Hilbert-Schmidt 范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ 为

$$\|T\|_{\mathrm{HS}} := \left(\sum_{\alpha=1}^{\infty} \|Te_\alpha\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 4. Hilbert-Schmidt 范数的定义与标准正交基 $\{e_\alpha\}$ 的选取无关, 进而是良好定义的.

Proof: 设 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ 与 $\{f_\beta\}_{\beta\in\mathbb{N}}$ 为 H 的两个完备标准正交基. 从而根据泛函分析中熟知的 Parseval 等式, 有

$$\|Te_\alpha\|^2 = \sum_{\beta\in\mathbb{N}} |(Te_\alpha, f_\beta)|^2 \quad (\forall \alpha \in \mathbb{N})$$

从而

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}} \|Te_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}}\sum_{\beta\in\mathbb{N}} |(Te_\alpha, f_\beta)|^2 = \sum_{\beta\in\mathbb{N}}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}} |(e_\alpha T^* f_\beta)|^2 = \sum_{\beta\in\mathbb{N}} \|T^* f_\beta\|^2 \tag{4}$$

所以利用同样的过程, 可得

$$\sum_{\beta\in\mathbb{N}} \|Tf_\beta\|^2 = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}} \|T^* e_\alpha\|^2 \tag{5}$$

特别的, 若我们取 $\{f_\beta\} = \{e_\alpha\}$ 则由 (4) 式可得

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}} \|Te_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}} \|T^* e_\alpha\|^2$$

此时再结合 (5) 式, 即得

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}} \|Te_\alpha\|^2 = \sum_{\beta\in\mathbb{N}} \|Tf_\beta\|^2$$

所以 $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ 不依赖于标准正交基 $\{e_\alpha\}$ 的选取. □

Proposition 5. 若 T 为 Hilbert 空间 H 上的 Hilbert-Schmidt 算子, 则有

$$\|T\| \leq \|T\|_{\mathrm{HS}}$$

$$\|T\|_{\mathrm{HS}} = \|T^*\|_{\mathrm{HS}}$$

Proof: 根据上述命题证明中的过程, 立即得 $\|T\|_{\text{HS}} = \|T^*\|_{\text{HS}}$.

对于满足 $\|x\| = 1$ 的 $\forall x \in H$, 我们有

$$\|Tx\|^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} |(Tx, e_\alpha)|^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} |(x, T^* e_\alpha)|^2$$

$$\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \|x\|^2 \|T^* e_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \|T^* e_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \|T e_\alpha\|^2 = \|T\|_{\text{HS}}^2$$

所以得到

$$\|T\| \leq \|T\|_{\text{HS}}$$

命题得证. □

若我们记可分 Hilbert 空间 H 上的全体 Hilbert-Schmidt 算子构成的线性空间记为 $\mathcal{L}_2(H)$, 则有如下的结果.

Proposition 6. $(\mathcal{L}_2(H), \|\cdot\|_{\text{HS}})$ 为一个 Banach 空间.

Proof: 设 $\{T_n\} \subseteq \mathcal{L}_2(H)$ 为一个 Cauchy 序列, 由上述命题 5 可知

$$\|T_n - T_m\| \leq \|T_n - T_m\|_{\text{HS}} \longrightarrow 0 \quad (n, m \longrightarrow \infty)$$

即 $\{T_n\}$ 为 $\mathfrak{B}(H)$ 上的一个 Cauchy 序列, 由于 $\mathfrak{B}(H)$ 为 Banach 空间, 所以存在 $T \in \mathfrak{B}(H)$, 使得 $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$ $(n \to \infty)$. 下面证明 $T \in \mathcal{L}_2(H)$ 且 $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\text{HS}}} T$ $(n \to \infty)$:

由于 $\|T_n - T_m\|_{\text{HS}} \to 0$ $(n, m \to \infty)$, 所以对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得对于 $\forall n, m \geq N(\varepsilon)$, 有

$$\|T_n - T_m\|_{\text{HS}}^2 < \varepsilon$$

对于 H 的任一完备标准正交基 $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$, 设 I 为 $\mathbb{N}$ 的任一有限子集, 从而有

$$\sum_{\alpha \in I} \|T_n e_\alpha - T_m e_\alpha\|^2 \leq \|T_n - T_m\|_{\text{HS}}^2 < \varepsilon \quad (\forall n, m \geq N(\varepsilon))$$

现在, 对于任意取定的 $n \geq N(\varepsilon)$, 令 $m \to \infty$, 得到

$$\sum_{\alpha \in I} \|T_n e_\alpha - T e_\alpha\|^2 \leq \varepsilon \tag{6}$$

注意到这里我们取的是 $\mathbb{N}$ 的任一有限子集 I, 所以我们不妨就取 $I = \{1, 2, \ldots, k\}$, 从而上述 (6) 式变为

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \|T_n e_\alpha - T e_\alpha\|^2 \leq \varepsilon \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

令 $k \longrightarrow \infty$, 所以得到

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|T e_\alpha - T e_\alpha\|^2 = \|T_n - T\|_{\text{HS}}^2 \leq \varepsilon \tag{7}$$

这意味着

$$T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\text{HS}}} T \quad (n \to \infty)$$

注意到根据上述 (7) 式可知, 对于任一给定的 $\varepsilon > 0$,

$$T_n - T \in \mathcal{L}_2(H) \quad (\forall n \geq N(\varepsilon))$$

所以对于充分大的 n, 有

$$T = -(T_n - T) + T_n \in \mathcal{L}_2(H)$$

命题得证. □

进一步的, 我们有下面的推论.

Corollary 4. 对于可分 Hilbert 空间 H,
(1) $(\mathcal{L}_2(H), \|\cdot\|_{\mathrm{HS}})$ 为一个 Banach 代数.
(2) $\mathcal{L}_2(H)$ 为 Banach 代数 $\mathfrak{B}(H)$ 的双边理想.

Proof: (1) 根据上述命题, 只需证明对于 $\forall T, S \in \mathcal{L}_2(H)$, 有 $\|TS\|_{\mathrm{HS}} \leq \|T\|_{\mathrm{HS}}\|S\|_{\mathrm{HS}}$ 即可.

$$\|TS\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}} \|TSe_\alpha\|^2 \leq \sum_{\alpha\in\mathbb{N}} \|T\|^2\|Se_\alpha\|^2 = \|T\|^2 \sum_{\alpha\in\mathbb{N}} \|Se_\alpha\|^2 \tag{8}$$

再由命题 5, 所以

$$\|TS\|_{\mathrm{HS}}^2 \leq \|T\|_{\mathrm{HS}}^2\|S\|_{\mathrm{HS}}^2$$

从而 $\|TS\|_{\mathrm{HS}} \leq \|T\|_{\mathrm{HS}}\|S\|_{\mathrm{HS}}$.

(2) 对于 $\forall S \in \mathcal{L}_2(H)$ 以及 $\forall T \in \mathfrak{B}(H)$, 注意到同样的有上述 (8) 式即可. □

Theorem 6. 设 H 为可分 Hilbert 空间, 则 $\mathcal{L}_2(H) \subseteq \mathcal{K}(H)$. 并且对于任一 Hilbert-Schmidt 算子 $T \in \mathcal{L}_2(H)$, 均存在 H 上的一个有限秩算子序列 $\{T_n\}$, 使得

$$T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}} T \quad (n \to \infty)$$

Proof: 设 $T \in \mathcal{L}_2(H)$. 下面先证明在 $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ 范数下, 有限秩算子集合在 $L_2(H)$ 中稠密: 取 H 的任一完备标准正交基 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$, 由于 $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}} \|Te_\alpha\|^2 < \infty$, 从而对于 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 使得对于 $\forall\alpha \geq N(\varepsilon)$, 有

$$\sum_{\alpha\geq N(\varepsilon)} \|Te_\alpha\|^2 \leq \varepsilon$$

令 $L_N := \mathrm{Span}\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^N$, 注意到此时

$$H = L_N \oplus (L_N)^\perp$$

我们定义算子 $S =: H \longrightarrow H$ 如下

$$S|_{L_N} := T, \quad S|_{(L_N)^\perp} := 0$$

所以立即可知 S 为有限秩算子且有

$$\|T - S\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{\alpha\geq N} \|Te_\alpha\|^2 \leq \varepsilon$$

这意味着在 $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ 范数下, 有限秩算子集合在 $\mathcal{L}_2(H)$ 中稠密, 进而在范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ 下, 可以有限秩算子序列逼近 Hilbert-Schmidt 算子. 注意到如上定义的有限秩算子 S 还是有界的, 所以根据定理 5 可知, $T \in \mathcal{K}(H)$, 从而得到

$$\mathcal{L}_2(H) \subseteq \mathcal{K}(H)$$

定理得证. □

2 参阅书目

[1] *泛函分析讲义 (上)*. 张恭庆, 林源渠. 编著

[2] *线性算子的谱分析*. 孙炯, 王忠, 王万义. 编著.

[3] *Real Analysis*. Royden

[4] *投影算子, 正规算子, 自共轭算子*. LaTexed by RS.