



Atrator de Lorenz

Aluno:

Amanda Rodrigues de Souza

Professor:

Thadeu Penna.

Turma:

Laboratório de Física Computacional

March 27, 2016

Resumo

Foi realizados vários gráficos com o intuito de mostrar a sensibilidade das condições iniciais e parâmetros de um atrator de Lorenz. Onde foi provado que o parâmetro ρ tem ligação com a amplitude do eixo "z", para valores menores de ρ , as trajetórias são mais achatadas do que para valores maiores.

Mudanças nas condições iniciais implicam em trajetórias extremamente distintas, seguindo nenhum tipo de periodicidade, porém se sobrepostas, foi notado que compõem um mesmo desenho.

1 Introdução

O atrator de Lorenz, um sistema não-linear que exhibe um movimento caótico, é um atrator estranho que já foi utilizado para previsão meteorológica.

Será apresentado o Sistema de Equações que descreve o atrator estranho, tal sistema é uma simplificação das equações de Navier Stokes, com isso será possível generalizar os resultados aqui apresentados para vários fluidos.

Será notado a sensibilidade das condições iniciais, como o parâmetro ρ e o eixo x do gráfico. Partindo de quase o mesmo ponto, com o passar do tempo os padrões se distanciam.

A dependência sensível em relação as condições iniciais caracterizam um movimento caótico.

2 Descrição do Problema

2.1 Fundamentação Teórica

2.1.1 Atrator

Em Física Matemática contemporânea, um atrator pode ser definido como um conjunto de comportamentos característicos para qual evolui um Sistema Dinâmico, independente de um ponto de partida.

Um Sistema Dinâmico pode evoluir para três tipos de Atratores:

- Atrator Fixo
- Atrator Periódico
- Atrator Estranho

O Atrator aqui estudado será o atrator estranho, que é um sistema que flutua para sempre entre vários estados de um modo que não é aleatório, nem é fixo, nem oscilatório, mas sim uma flutuação contínua caótica.

A definição de "caos" aqui empregada é diferente da conotação cotidiana dada a esta palavra. A palavra "caos" que foi primeiramente utilizada por James Yorke, e tem como significado "desordem ordenada", ou seja um padrão de organização existindo uma casualidade.

2.1.2 Edward Lorenz

Edward Norton Lorenz(1917 - 2008), matemático, meteorologista e filósofo, trabalhou com os fundamentos matemáticos do sistema de equações da meteorologia nos laboratórios do MIT (Massachusetts Institute of Technology) na década de 1960.

Seus estudos levaram ao início da Teoria do Caos, desenvolvida por Yorke, cerca de duas décadas depois do desenvolvimento de modelos computacionais dos padrões do tempo.

Lorenz descobriu que pequenas mudanças ou pequenos erros em um par de variáveis produzem efeitos tremendamente desproporcionais. Sua descoberta foi apelidada de "Efeito Borboleta".

Os trabalhos de Lorenz levaram a estudos de previsibilidade atmosférica, porém essa previsão não passava de quinze dias, a partir de quinze dias, os resultados divergiam significativamente.

2.1.3 Atrator de Lorenz

O Atrator de Lorenz trata-se de um sistema não linear, tridimensional e determinístico que exhibe comportamento caótico.

O sistema é considerado caótico por apresentar dependência sensível às condições iniciais, o que lhe confere um grau de imprevisibilidade apesar de ser determinístico. As propriedades que Lorenz observou são típicas dos sistemas dinâmicos não-lineares, o objeto de estudo da Teoria de Caos.

o Sistema de equações diferenciais de primeira ordem que governam o Atrator de Lorenz são:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(x - y) \\ \frac{dy}{dt} &= \rho x - xz - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

Onde σ chama-se número de Prandtl, ρ número de Rayleigh reduzido e β é a relação entre a altura e a largura do retângulo. Tanto σ , ρ e β são constantes positivas.

As variáveis x , y e z representam o fluxo convectivo, a distribuição de temperatura horizontal e a distribuição de temperatura vertical respectivamente.

Número de Prandtl é um número adimensional que se aproxima a razão de difusividade de momento (viscosidade cinética) e difusividade térmica (calor que se difunde através de um material) de um fluido, expressando a relação entre a difusão de quantidade de movimento e a difusão de quantidade de calor dentro do próprio fluido.

Em mecânica dos fluidos, o número de Rayleigh para um fluido é um número adimensional associado com os fluxos conduzidos por empuxo (também conhecidos como convecção livre ou convecção natural).

O sistema consiste num modelo simplificado do comportamento da atmosfera: simula o comportamento de um fluido em um plano retangular, cuja temperatura do lado inferior é maior que a do superior, gerando correntes de convecção.

O termo utilizado para referir-se a este tipo de sistema dinâmico é *Efeito Borboleta*, a qual encontra-se aplicação em várias áreas da ciência como física, engenharia, medicina, biologia, sociologia, etc. E para cada aplicação, as variáveis e parâmetros têm significados diferentes.

2.2 Metodologia

2.2.1 Método de Euler

Para a evolução dos dados, foi usado o método de Euler para um Problema de Valor inicial de uma Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem.

O método de Euler é um procedimento numérico de primeira ordem para solucionar EDOs com valor inicial dado. É o tipo mais básico de método explícito para integração numérica para EDO.

Para encontrar uma aproximação de solução de um PVI de uma equação $y'(t)$:

$y'(t) = f(t, y(t))$, onde o valor inicial é dado $y(t_0) = y_0$

Escolhe-se um valor de h que representa o tamanho de cada passo, dentro de um intervalo estipulado $t_0 \leq t \leq t_{final}$ e $t_{n+1} = t_n + h$

Então temos o método de euler:

$$y_{n+1} = y_n + h * f(t_n, y_n)$$

Onde o valor encontrado y_n é uma aproximação da solução da EDO no ponto $t_n : y_n \approx y(t_n)$

O resultado obtido por este método tem influência direta do tamanho utilizado de h , quanto menor o valor de h menor será o erro da aproximação.

2.2.2 Informações Utilizadas

Com o intuito de analisar a sensibilidade do parâmetro ρ no movimento destrito pelo atrator de Lorenz, foi mantidos os outros parâmetros fixos como:

- Posição inicial $(1.0, 1.0, 0)$
- Sigma $\sigma = 10$
- Beta $\beta = 8/3$
- Tamanho do passo $h = 0.01$
- Intervalo Utilizado $10 \leq t \leq 80$

Para analisar o interferência das posição inicial no movimento, foi feita a variação do valor inicial no eixo x , com variação entre $0.2 \leq 1.0$, gerando cinco gráficos (variação de 0.2 em 0.2). Os outro parâmetros ficaram fixos em:

- Posição inicial $(x_i, 0.0, 0.0)$
- Sigma $\sigma = 10$
- Beta $\beta = 8/3$
- Rho $\rho = 28$
- Tamanho do passo $h = 0.01$
- Intervalo Utilizado $10 \leq t \leq 80$

Para a elaboração da sobreposição dos gráficos sobre a sensibilidade de x , o intervalo utilizado foi $10 \leq t \leq 20$, tendo como objetivo deixar o gráfico mais claro e facilitar a leitura do leitor.

Em todos os gráficos, foram ignorados os dez primeiros passos, como o objetivo de eliminar possíveis ruídos nos dados.

3 Resultados e Discussões

3.1 Sensibilidade do parâmetro ρ

O ρ tem participação no tipo de comportamento dos gráficos. Para valores de ρ menores que vinte, note-se que o gráfico tem uma forma de aproximadamente uma espiral, tendendo a um equilíbrio em um ponto.

Para valores de ρ maiores que vinte e cinco, se comporta como se tentasse orbitar em torno de dois pontos de equilíbrio, com isso o gráfico se assemelha a uma silhueta de uma borboleta.

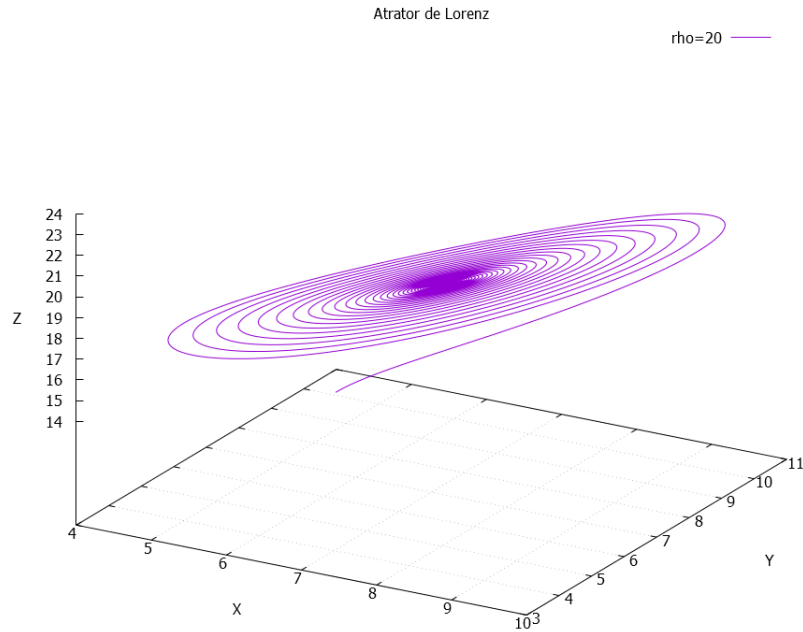


Figure 1: Espaço de fase tridimensional para $\rho = 20$

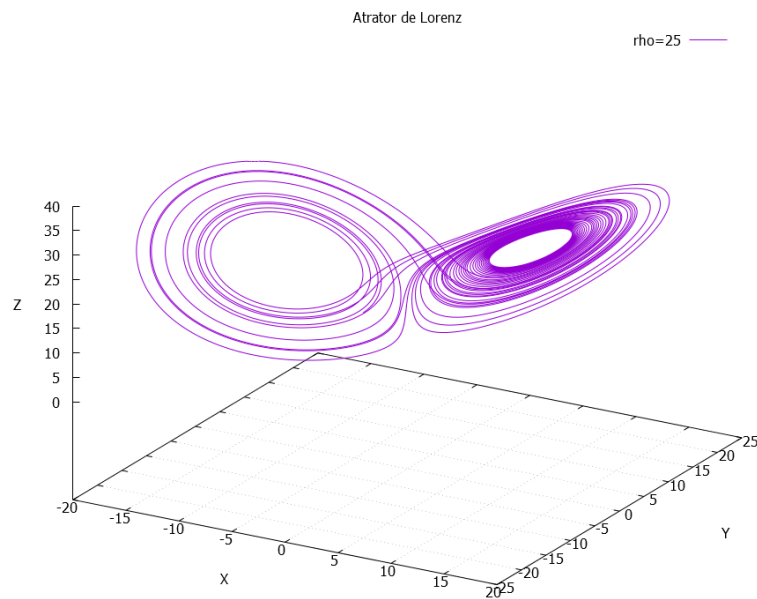


Figure 2: Espaço de fase tridimensional para $\rho = 25$

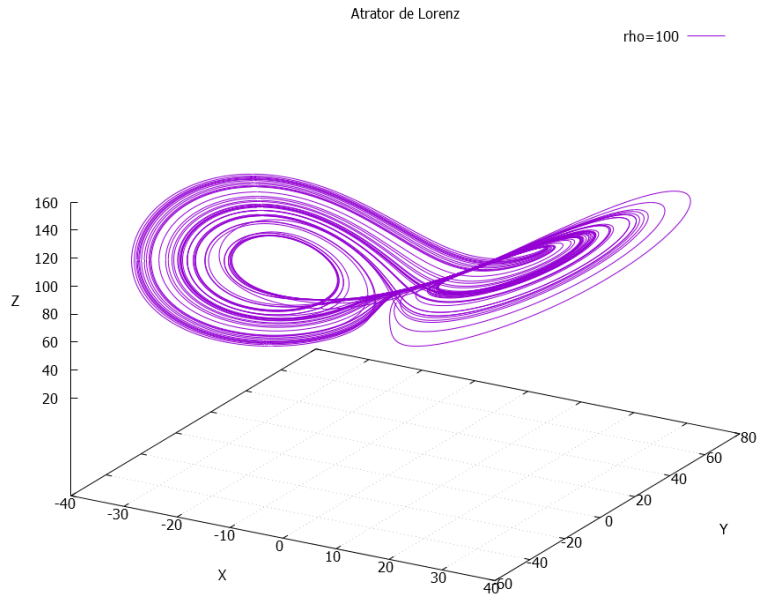


Figure 3: Espaço de fase tridimensional para $\rho = 100$

Analisando os espaços de fase (gráfico com os eixos XoZ), pode-se notar que há uma mudança no tipo de comportamento dos gráficos que ilustram uma borboleta. Para $\rho \geq 55$, os gráficos são consecutivos "oitos", e para $25 \leq \rho \leq 50$, o movimento alterna em girar em torno de um ponto e depois outro.

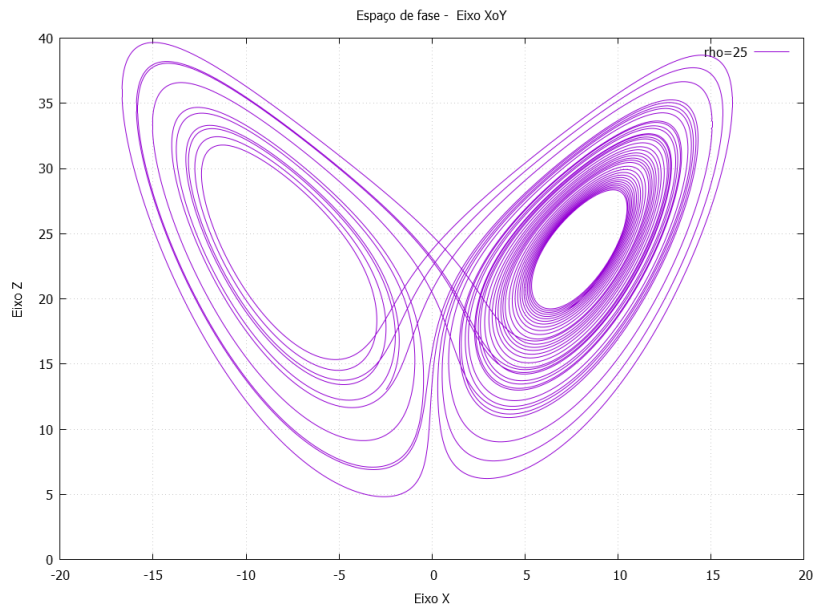


Figure 4: Espaço de fase nos eixos XoZ para $\rho = 25$

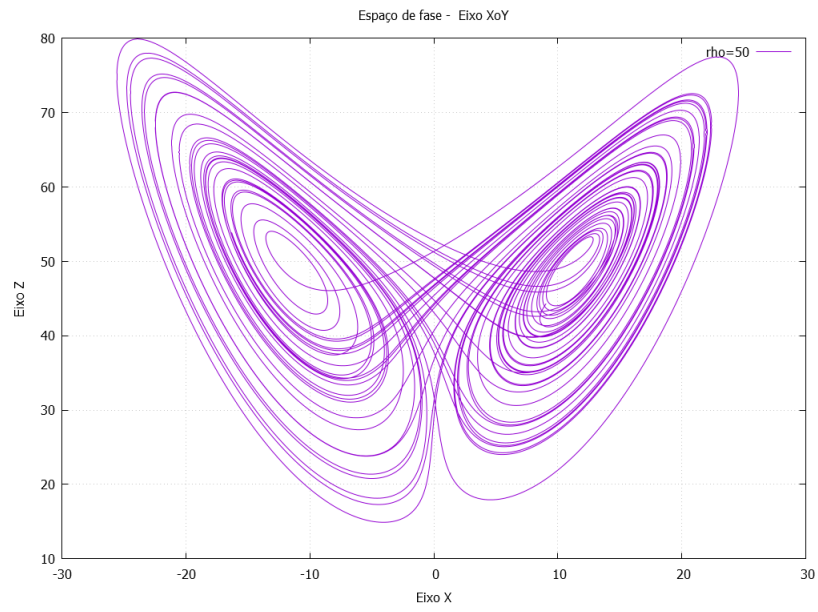


Figure 5: Espaço de fase nos eixos XoZ para $\rho = 50$

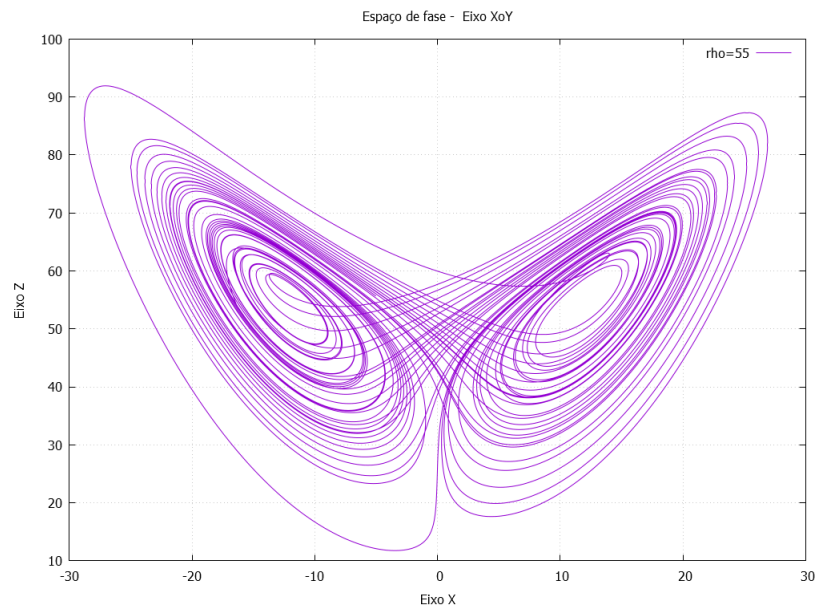


Figure 6: Espaço de fase nos eixos XoZ para $\rho = 55$

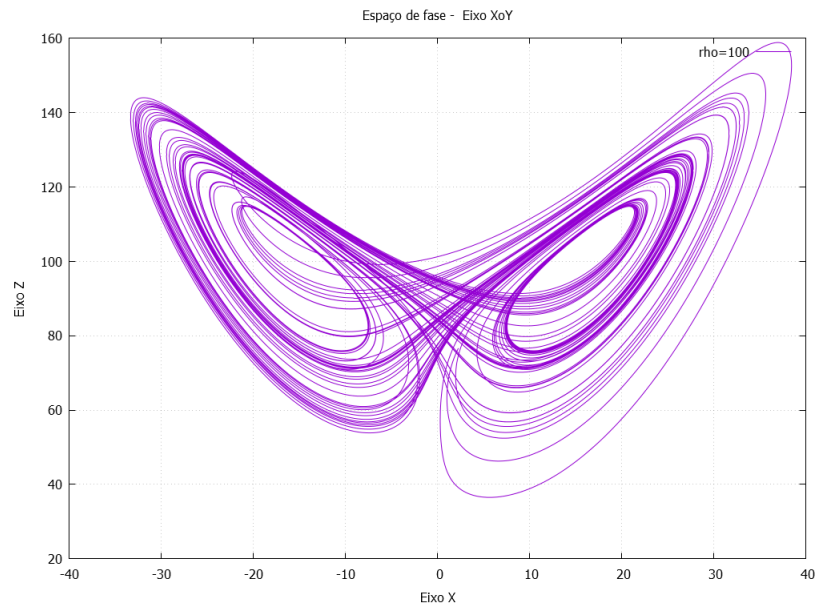


Figure 7: Espaço de fase nos eixos XoZ para $\rho = 100$

Com a observação dos gráficos de análise temporal, foi notado a influência direta do parâmetro ρ em relação a amplitude do eixo Z . Quanto maior o ρ maior o alcance o eixo Z .

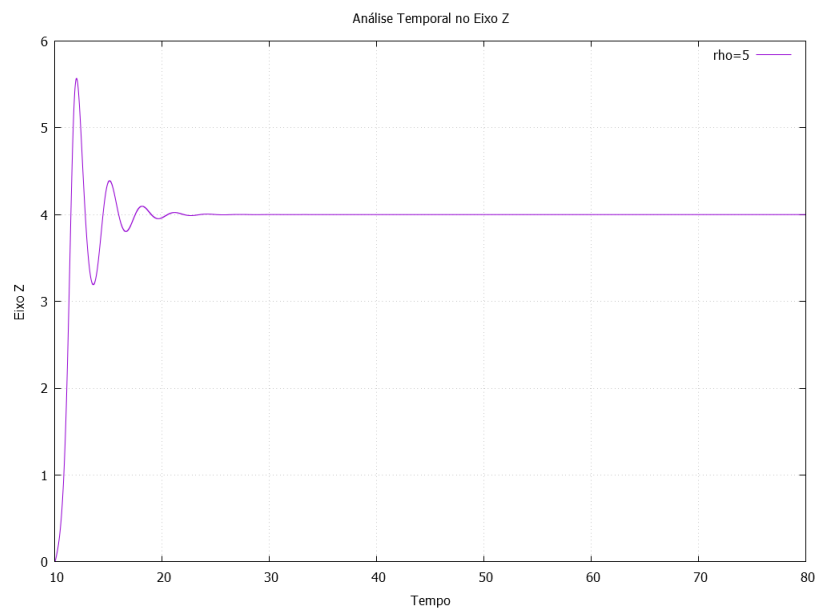


Figure 8: Análise temporal do eixo Z para $\rho = 5$

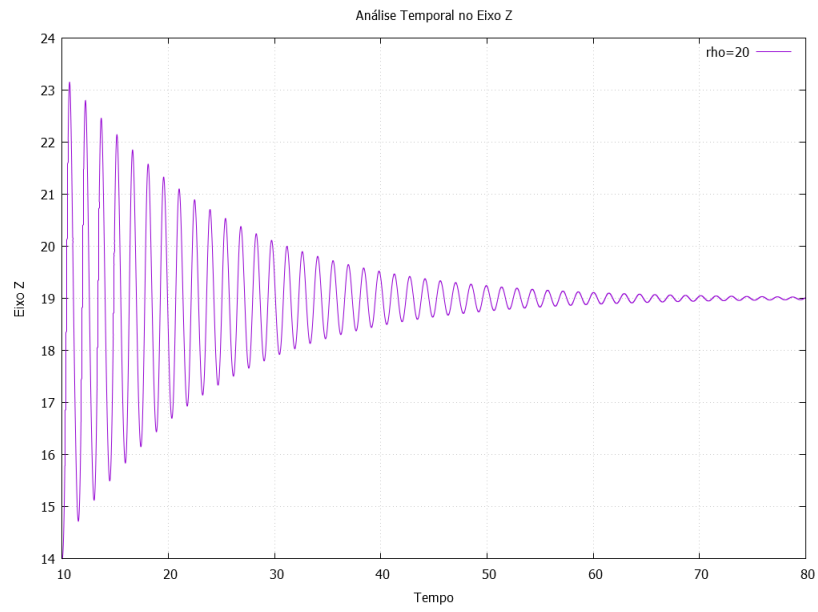


Figure 9: Análise temporal do eixo Z para $\rho = 20$

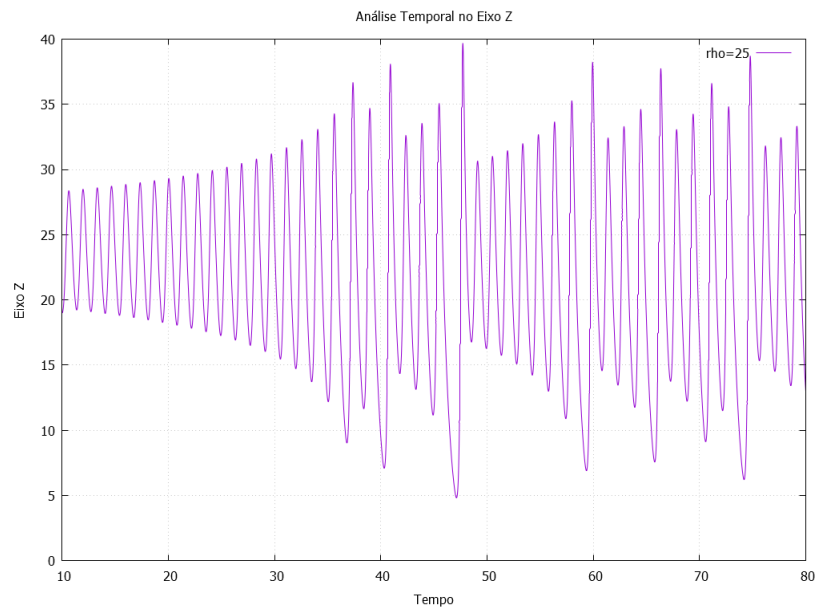


Figure 10: Análise temporal do eixo Z para $\rho = 25$

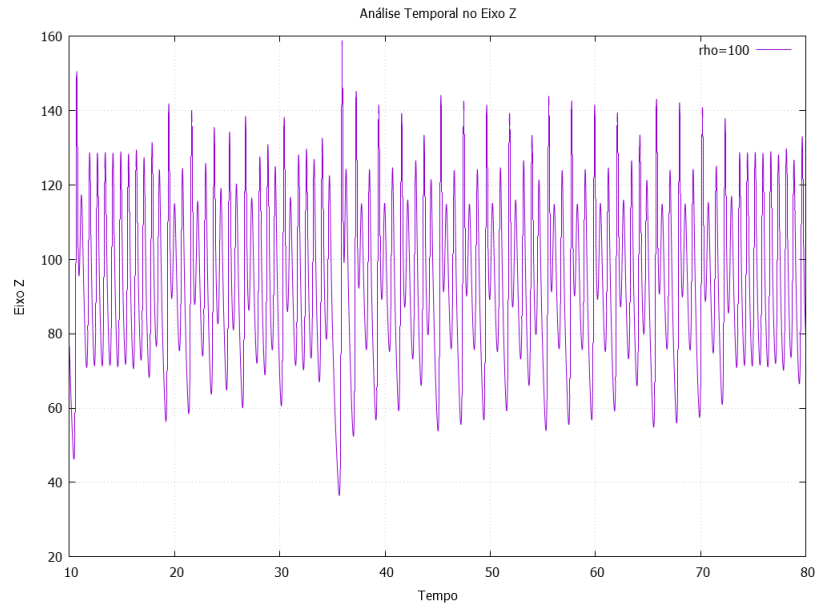


Figure 11: Análise temporal do eixo Z para $\rho = 100$

3.2 Sensibilidade do valor inicial no eixo x

Nota-se no gráfico, que para todos os valores estipulados, as trajetórias seguem dentro de um mesmo modelo, de modo que o comportamento não é aleatório e nem cíclico, o que pode-se concluir é uma flutuação caótica, ou seja, é um atrator estranho.

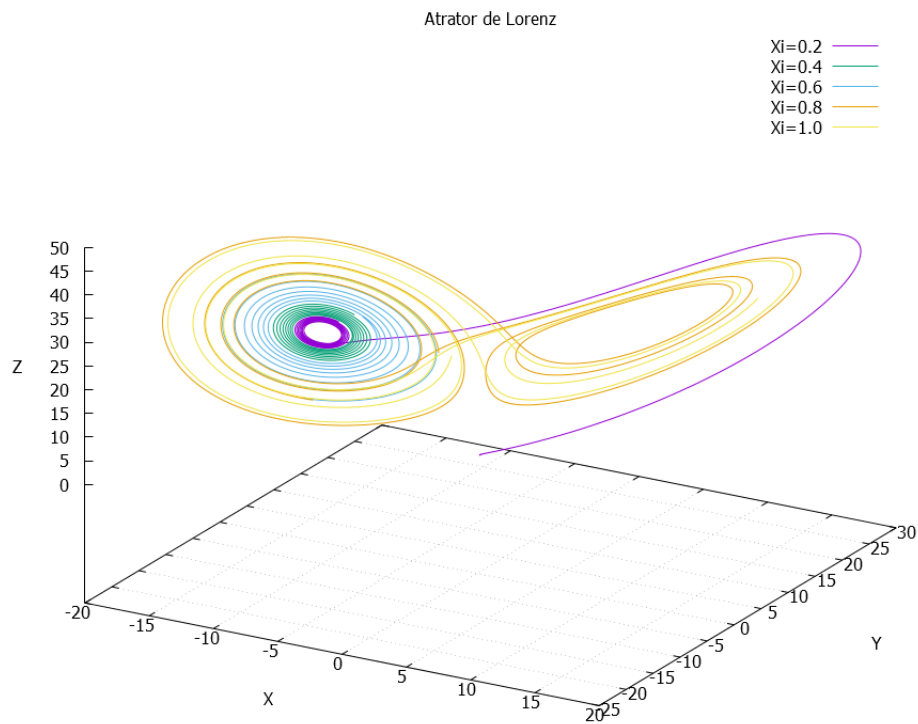


Figure 12: Sobreposição dos comportamentos das variações de X_i .

3.3 Comentários Finais

Como é um caso especial das equações de Navier Stokes (Equações diferenciais que descrevem escoamentos de fluidos) é de se esperar que caos é uma propriedade geral do sistema de praticamente todos os fluidos.

Como meteorologia é basicamente análises de fluidos e atmosfera, podemos concluir que o clima é um sistema caótico. Aplicando o atrator de Lorenz na meteorologia, geralmente a previsão é aceita até o décimo quinto dia, após isso, o sistema diverge da realidade.

Diferenças pequenas nas condições iniciais podem resultar em mudanças significativas no final do processo.

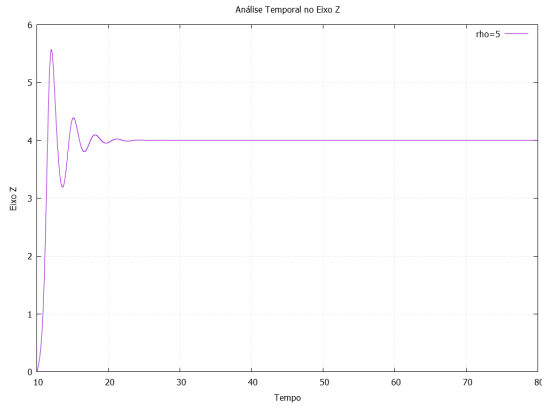
Como pode-se observar na FIGURA 12, mesmo com condições iniciais distintas, as trajetórias são diferentes porém elas se acumulam sobre uma mesma forma que não depende da condição inicial, mas sim dos parâmetros utilizados, como o ρ .

Variando o parâmetro ρ podemos notar diferentes tipos de formas, onde que para ρ menores que 20, pode-se notar que as variáveis chegam bem próximo das condições de equilíbrio, quando a diferença da posição atual e a anterior ficam bem pequenas em relação ao tempo. E para ρ maiores que 25, não há esse equilíbrio tão grande. E a trajetória se acumula numa forma que se parece com uma borboleta.

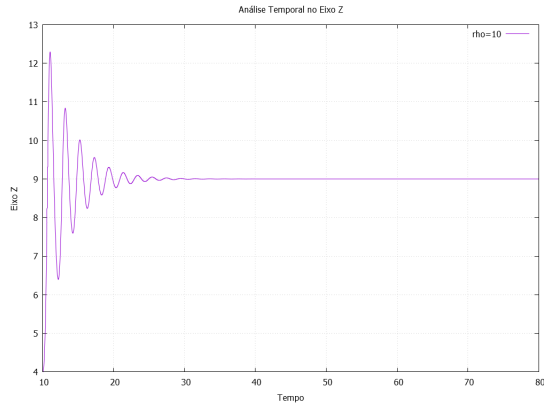
4 Apêndice

4.1 Gráficos

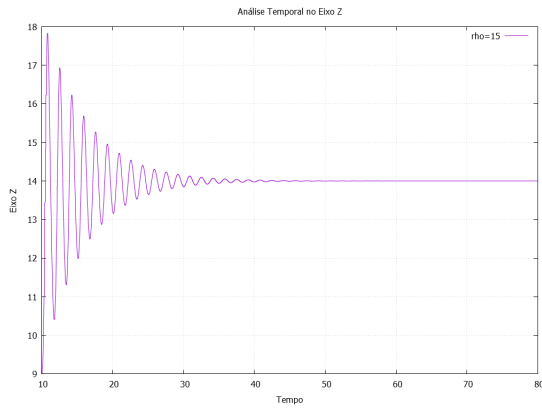
4.1.1 Análise temporal do eixo Z



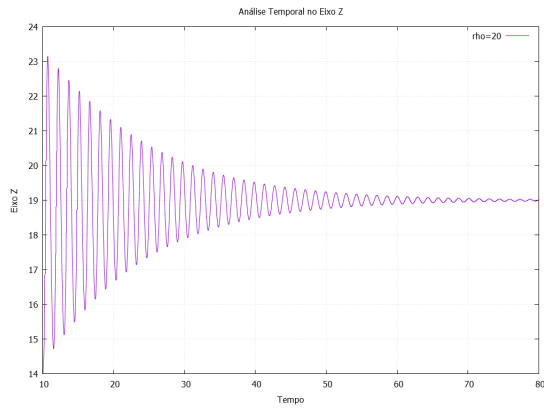
(a) Valor de $\rho = 5$ e $Z < 6$



(b) Valor de $\rho = 10$ e $Z < 13$

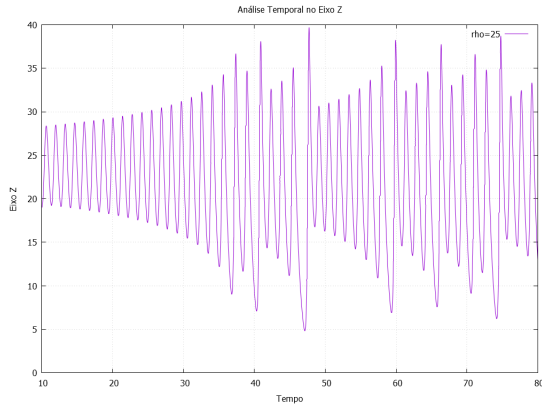


(c) Valor de $\rho = 15$ e $Z < 18$

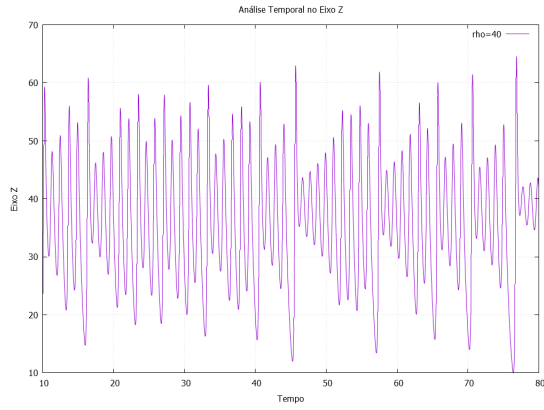


(d) Valor de $\rho = 20$ e $Z < 24$

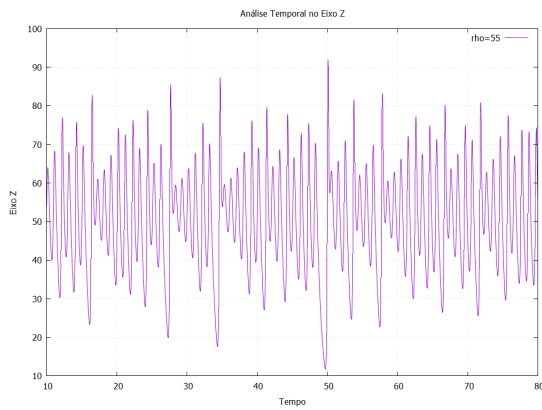
Figure 13: Variação do Alcance do Eixo Z em relação ao tempo. Gráficos que apresentam forma de espiral



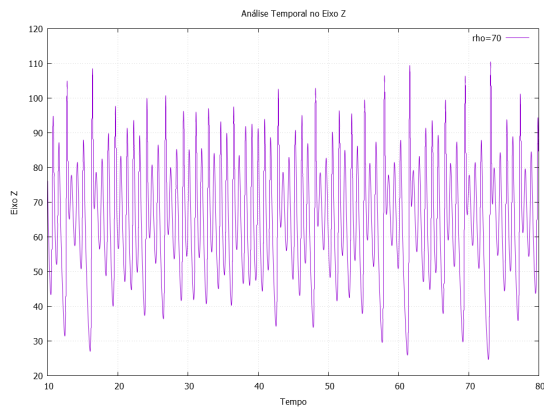
(a) Valor de $\rho = 25$ e $Z < 40$



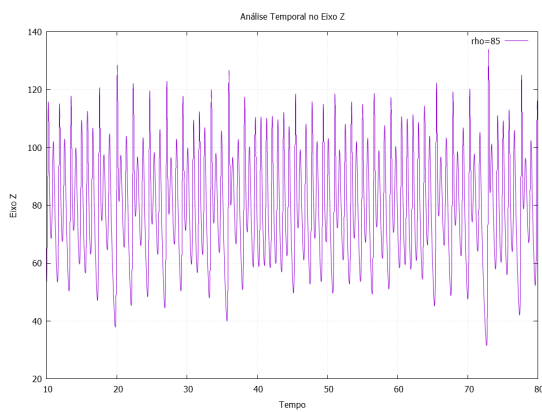
(b) Valor de $\rho = 40$ e $Z < 70$



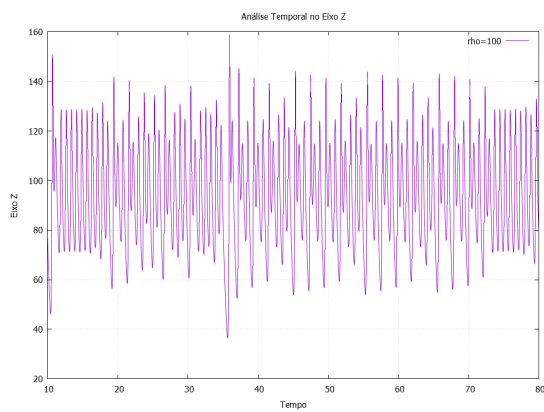
(c) Valor de $\rho = 55$ e $Z < 95$



(d) Valor de $\rho = 70$ e $Z < 110$



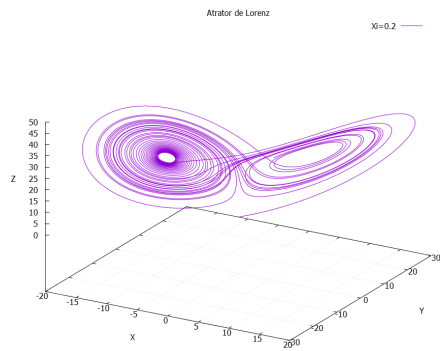
(e) Valor de $\rho = 85$ e $Z < 130$



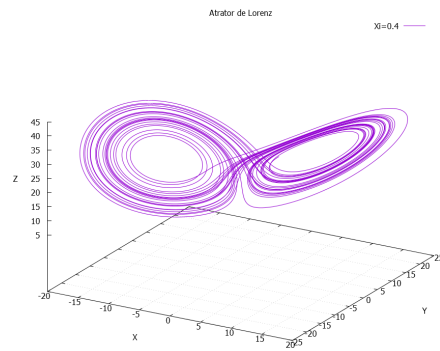
(f) Valor de $\rho = 100$ e $Z < 160$

Figure 14: Variação do Alcance do Eixo Z em relação ao tempo

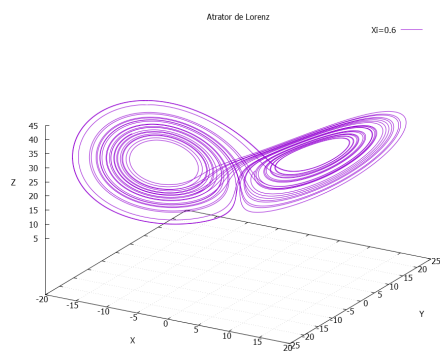
4.1.2 Variação do valor inicial de x



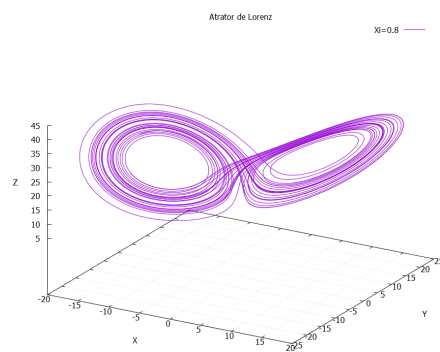
(a) Valor de $x_i = 0.2$



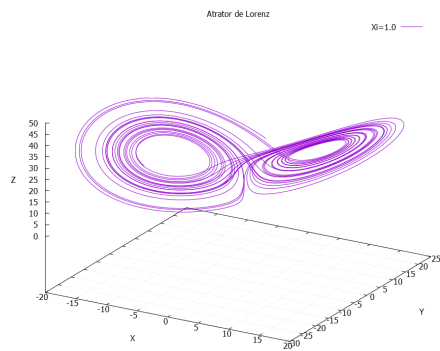
(b) Valor de $x_i = 0.4$



(c) Valor de $x_i = 0.6$



(d) Valor de $x_i = 0.8$



(e) Valor de $x_i = 1.0$

Figure 15: Variação do valor inicial de x , utilizando $\rho = 28$

4.2 Códigos

- Código Utilizado para a variação de ρ

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>

#define N 3
// omega
#define 0 10
//beta
#define B 8./3.

typedef double (*equacoes) ();

double f0(int m, double x, double y[m], double R) //dx/dt
{
    return 0*(y[1]-y[0]);
}

double f1(int m, double x, double y[m], double R) // dy/dt
{
    return R*y[0]-y[0]*y[2]-y[1];
}

double f2(int m, double x, double y[m], double R) // dz/dt
{
    return y[0]*y[1]-B*y[2];
}

void metodoEuler(int m, double x, double y[m], double h, double R)
{
    double k1[m], k2[m], k3[m], k4[m], yp[m], ypp[m];
    equacoes f[]={f0, f1, f2};
    int i;

    for(i=0; i<m; i++)
    {
        k1[i]=f[i](m, x, y, R);
        y[i]=y[i]+h/2*k1[i];
    }
}

int main(int argc, char** argv)
{
    double r, a, b, h, m, x, y[N]={1.0,1.0,0.0};

    m=N;
    h=0.001; // "dt"
    a=10.; // inicio
    b=80.; // fim

    for(r=5; r<=100; r+=5)
    {
        for(x=a; x<=b; x+=h)
        {
            printf("%g", x);
            for(i=0; i<=m; i++)
            {
                printf("\t%g", y[i]);
            }
            metodoEuler(m, x, y, h, r);
            printf("\n");
        }
        printf("\n\n");
    }
}
```

- Código Utilizado para a variação da coordenada x

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>

#define N 3
// omega
#define 0 10
//beta
#define B 8./3.
//rho
```

```

#define R 28

typedef double (*equacoes) ();

double f0(int m, double x, double y[m]) // dx/dt
{
    return 0*(y[1]-y[0]);
}

double f1(int m, double x, double y[m]) // dy/dt
{
    return R*y[0]-y[0]*y[2]-y[1];
}

double f2(int m, double x, double y[m]) // dz/dt
{
    return y[0]*y[1]-B*y[2];
}

void metodoEuler(int m, double x, double y[m], double h)
{
    double k1[m], k2[m], k3[m], k4[m], yp[m], ypp[m];
    equacoes f[]={f0, f1, f2};
    int i;

    for(i=0; i<m; i++)
    {
        k1[i]=f[i](m, x, y);
        y[i]=y[i]+h/2*k1[i];
    }
}

int main(int argc, char** argv)
{
    double r, a, b, h, m, x, y[N]={0.0,0.0,0.0};
    double j;
    int i;
    m=N;
    h=0.001; // "dt"
    a=10.; // inicio
    b=80.; // fim

    for(j=0.; j<=1.; j+=0.2)
    {
        y[0]+=j;
        for(x=a; x<=b; x+=h)
        {
            printf("%g", x);
            for(i=0; i<m; i++)
            {
                printf("\t%g", y[i]);
            }
            metodoEuler(m, x, y, h);
            printf("\n");
        }
        printf("\n\n");
    }
}

```


5 Referência

1. GIORDANO, J. Nicholas; NAKANISHI, Hisao. *Computational Physics*. Second Edition. Upper Saddle River: Pearson Education, Inc, 2006.
2. Edward Lorenz. Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Edward_Lorenz>. Acesso em 16 de março de 2016.
3. CHAOS VII: Estranhos Atratores. O efeito Borboleta. Disponível em <<http://www.chaos-math.org/pt-br/caos-vii-estranhos-atratores>>. Acesso em 16 de março de 2016.
4. Atrator de Lorenz. Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Atrator_de_Lorenz>. Acesso em 16 de março de 2016.
5. Efeito Borboleta. Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Efeito_borboleta>. Acesso em 16 de março de 2016.
6. Método de Euler. Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Euler>. Acesso em 16 de março de 2016.
7. O Atrator de Lorenz: O Efeito Borboleta num Atrator Estranho. Disponível em <<http://to-campos.planetaclix.pt/fractal/lorenz.html>>. Acesso em 16 de março de 2016.
8. BATARRO, Giovani. Solução de Equações Diferenciais Ordinárias Usando Métodos Numéricos. UFSM. Disponível em <http://www-usr.inf.ufsm.br/~gbaratto/graduacao/ELC1021/atual/textos/ED0/solucao_ED0_pelos_metodos_Euler_Runge-Kutta.pdf> Acesso em 16 de março de 2016.
9. VIANNA, Marcelo. Atratores Estranhos de Lorenz. IMPA. Disponível em <<http://w3.impa.br/~viana/out/ael.pdf>>. Acesso em 16 de março de 2016.
10. Introdução ao Caos em Sistemas Dinâmicos: Espaço de fase. UFG - Instituto de Física. Disponível em <http://www.geocities.ws/projeto_caos_ufg/minicurso/aula2.html>. Acesso em 16 de Março de 2016.