Sistema Terra-Júpiter-Sol

Aluno:
Amanda Rodrigues de Souza

Professor:
Thadeu Penna.

Turma:
Laboratório de Física Computacional

March 27, 2016

Resumo

Nesse artigo foram feitas análises da sensibilidade da massa de Júpite na órbita da Terra. Foi notado que é necessário uma mudança muito grande na massa de Júpiter para que cause uma desordem no Sistema Terra-Sol-Júpiter.

1 introdução

Um sistema de três corpos consiste em analisar três corpos (planetas, estrelas, etc), desprezando todo os corpos próximos. Como por exemplo, o sistema Terra-Júpiter-Sol. Onde é desprezado outros planetas, satélites, estrelas e qualquer outro corpo próximo.

Com o auxílio da literatura disponível, será realizado um programa para a elaboração de gráficos que represente as órbitas dos corpos em questão.

Será feita alterações na massa de Júpiter para observar a importância da massa desse astro no sistema.

2 Descrição do Problema

2.1 Fundamentação Teórica

2.1.1 Lei da Gravitação

Newton publicou a lei da Gravitação em 1687, e a enunciou da seguinte maneira:

"Cada partícula do universo atrai qualquer outra partícula com uma força diretamente proporcional ao produto das respectivas massas e inversamente proporcional ao quadrado das distâncias entre as partículas."

A força gravitacional atua sempre ao longo da linha que une as duas partículas, constituindo um par de ações e reações. Essas forças possuem sempre módulos iguais, mesmo quando as massas são diferentes. Visto que todas as partículas de um corpo sofre a ação de forças gravitacionais que tendem a aproximá-las entre si, mas partículas tendem a se mover para minimizar a distância entre elas. Por causa disso, o corpo tende naturalmente a possuir uma força esférica.

A gravidade é a força mais importante na escala de planetas, estrelas e galáxias. Ela é responsável por manter a nossa Terra agregada e por manter os planetas girando ao redor do Sol.

2.1.2 Sistema de Três Corpos

O problema dos três corpos é um estudo do movimento de três corpos de massas arbitrária m_1, m_2 e m_3, em movimento por ação exclusiva da atração Newtoniana entre cada par de corpos.

Este problema surge naturalmente no estudo do movimento dos planetas. Por exemplo o sistema Sol-Terra-Lua pode ser considerado como um caso particular do sistema de três corpos se desprezarmos o efeito dos outros planetas nesse sistema.

Para a formulação das equações diferenciais que regulam o movimento dos três corpos foi introduzido algumas notações.

Foi designado por m_1, m_2 e m_3 as massas dos três corpos e por O um ponto arbitrário do espaço onde os corpos se movem. Denotado por $\vec{r_1}(t)$, $\vec{r_2}(t)$ e $\vec{r_3}(t)$ os vetores de posição dos corpos em O no instante t. Então a força de atração Newtoniana exercicia no corpo i pelo corpo j é:

$$F_{i,j} = \frac{Gm_im_j}{r_{ij}^2}\vec{e_{ij}}$$

Onde r_{ij} é a distância entre os corpos, $\vec{e_{ij}}$ indica a direção do corpo i para o corpo j e G é a costante de gravitação universal. A força exercida no corpo j pelo corpo i é $F_{ji} = -F_{ij}$ Assumindo que no sistema não ha colisão entre os corpos $(r_{ij} > 0)$

A segunda lei de Newton afirma que as equações diferencias satisfeitas pelo vetor $\vec{r_i}(t)$ são:

$$m_1\vec{a_1} = F_{12} + F_{23}$$
$$m_2\vec{a_2} = -F_{12} + F_{23}$$
$$m_3\vec{a_3} = -F_{13} + F_{23}$$

onde o vetor $\vec{a}$ significa a aceleração, ou seja a segunda derivada da posição do corpo em função do tempo.

2.2 Metodologia

Para a evolução dos dados, foi utilizado o método de Euler-Cromer.

2.2.1 Método de Euler-Cromer

O método de Euler Cromer, é uma variação do método de Euler, e este método dá mais eficiência ao caso estudado. Pois, ao contrário do Método de Euler, conseguimos demonstrar conservação de energia.

É um integrador simplético e por isso, apresenta resultados melhores que o método de Euler.

integradores simpléticos são ferramentas úteis para modelagem de sistemas dinâmicos por intervalos de tempos longos. Este método é muito utilizado para estudo de Dinâmica Celeste.

O Método produz uma solução discreta aproximada pela iteração:

$$v_{n+1} = v_n + g(t_n, x_n)\delta t \tag{1}$$
$$x_{n+1} = x_n + f(t_n, v_{n+1})\delta t \tag{2}$$

Onde δt representa o tamanho do passo, no caso o tempo. Onde (1) é a equação da evolução dos dados da velocidade e (2) a equação da evolução dos dados da posição.

2.2.2 informações Utilizadas

Para a resolução de um propblema de três corpos, sendo eles Terra, Sol e Júpiter, foram utilizadas os seguintes dados:

- Massa de Júpiter em relação a massa do Sol: 0.0009545
- Massa da Terra em relação a massa do Sol: 0.000003003
- Distância entre Terra e Sol: 1 UA (Unidades Astronômicas)
- Distância entre Júpiter e Sol: 5.2 UA
- Período da Terra: 1 ano
- Período de Júpiter: 11.89 anos
- Contante Gravitacional em UA: $4\pi^2$
- δt : 0.0001

Para a variação da massa de Júpiter, foi utilizado a multiplicação por uma potência de base 10, com valores entre -1 e 5.

Excentridade é um valor entre $0 \leq e < 1$, com $e = 0$, a órbita é perfeitamente cirular. Como a órbita da Terra é $e_t = 0,0167$ e a de Júpiter é $e_j = 0,048$, podemos aproximá-las para órbitas circulares.

O sistema Solar é praticamente coplanar (exceto pela órbita do Planeta Anão Plutão), então consideraremos o sistema Terra-Sol-Júpiter um sistema em apenas duas dimensões.

3 Resultados e Discussões

Admitindo o Sol como o centro do Sistema (na coordenada 0,0). Foi obtindo as seguintes orbitas, sendo as unidades que representam as distâncias estão em Unidade Astronômica,$1UA = 1.49610^{11}m$. Para massa de Júpiter real, foi obtida a seguinte órbita, utlizando o tempo suficiente para Júpiter completar uma volta em torno do Sol.

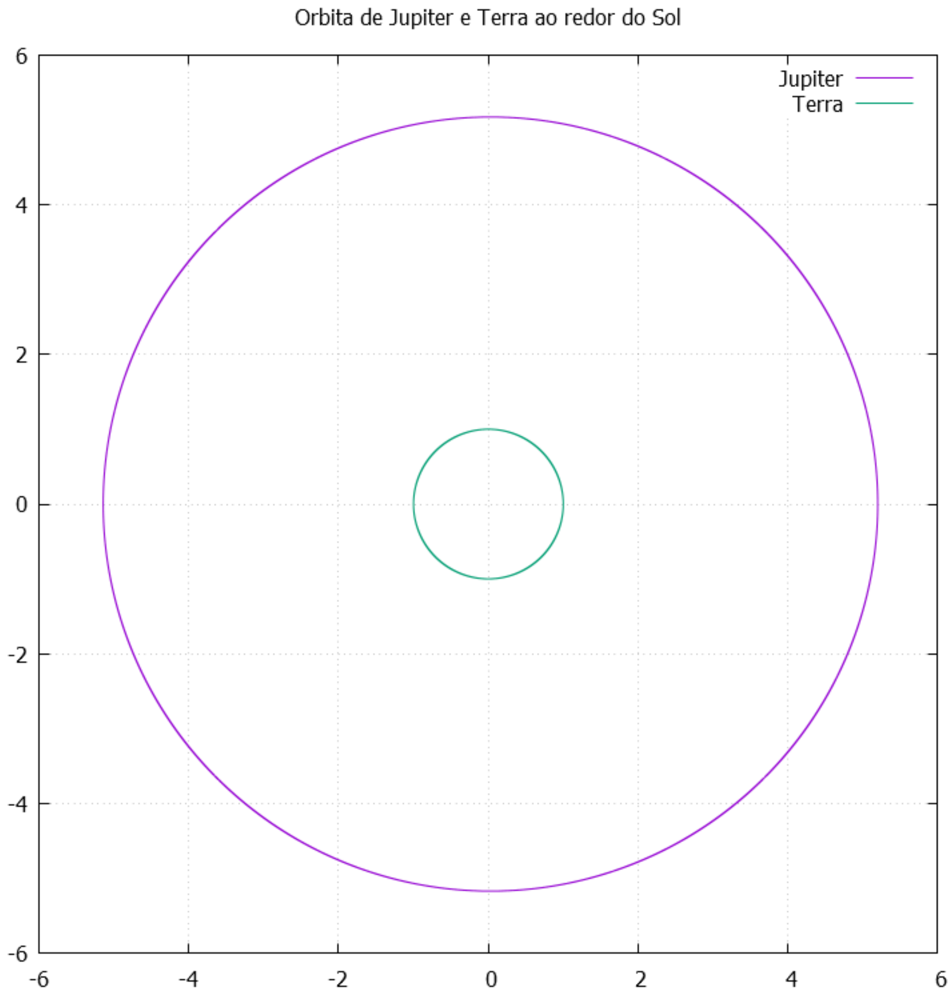


Figure 1: Órbita de Júpiter e Terra em torno do Sol. Utilizando Massas reais para Sol, Terra e Júpiter.

A órbita da Terra não há alteração em relação ao tempo.

Para a massa de Júpiter 10 vezes maior que a real, temos o seguinte gráfico:

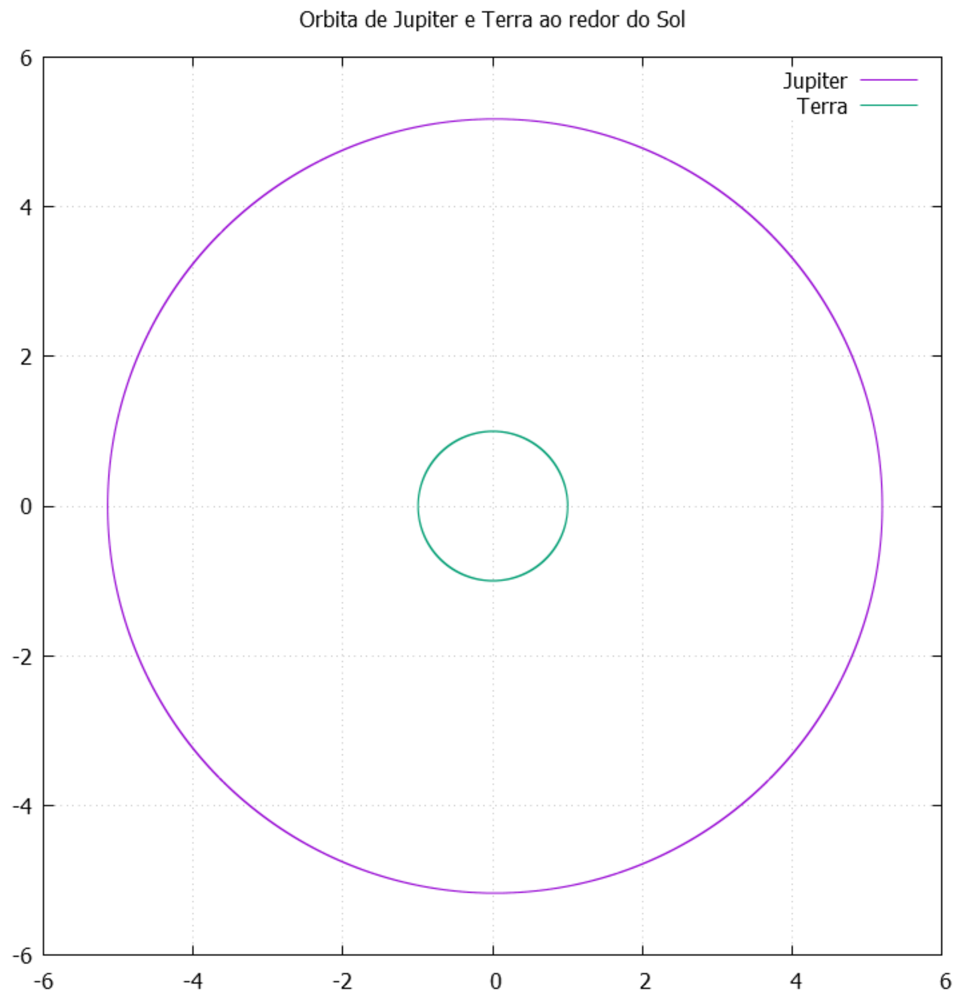


Figure 2: Órbita de Júpiter e Terra em torno do Sol. Utilizando Massas de Júpiter 10 vezes que a massa real.

Não é possível notar nenhuma alteração nas órbitas, pois a diferença de massa de Júpiter é mínima em relação as outras massas do sistema.

Agora, utilizando a massa de Júpiter cem vezes maior que a massa real, podemos notar algo no sistema:

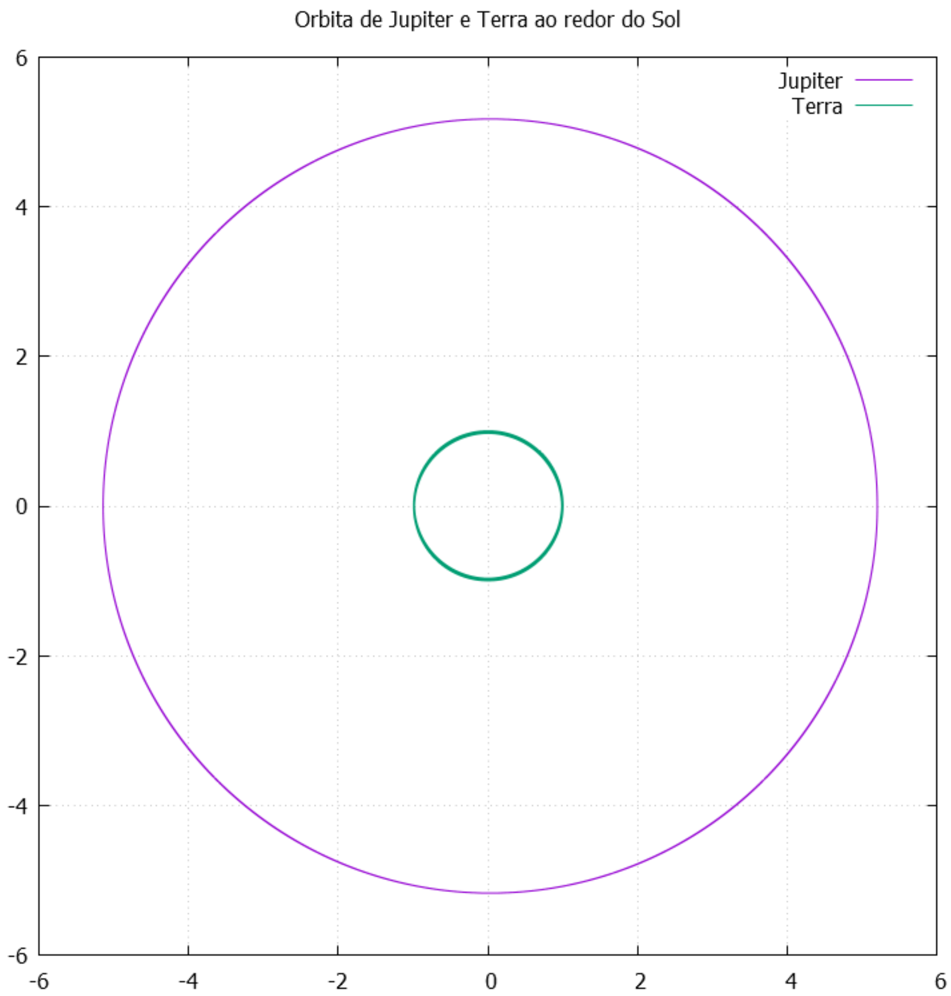


Figure 3: Órbita de Júpiter e Terra em torno do Sol. Utilizando Massas de Júpiter 100 vezes que a massa real

Com a massa 100 vezes maior, a órbita da Terra, alteram minimamente, como pode ser visto no gráfico que em alguns pontos a linha da trajetória aparenta estar um pouco mais grossa em relação a Figura 2, ou seja, há uma pequena alteração na órbita a partir da segunda translação da Terra.

Uma mudança realmente significativa acontece quando a massa de Júpiter é mil vezes maior que a real. Como é demonstrado no próximo gráfico.

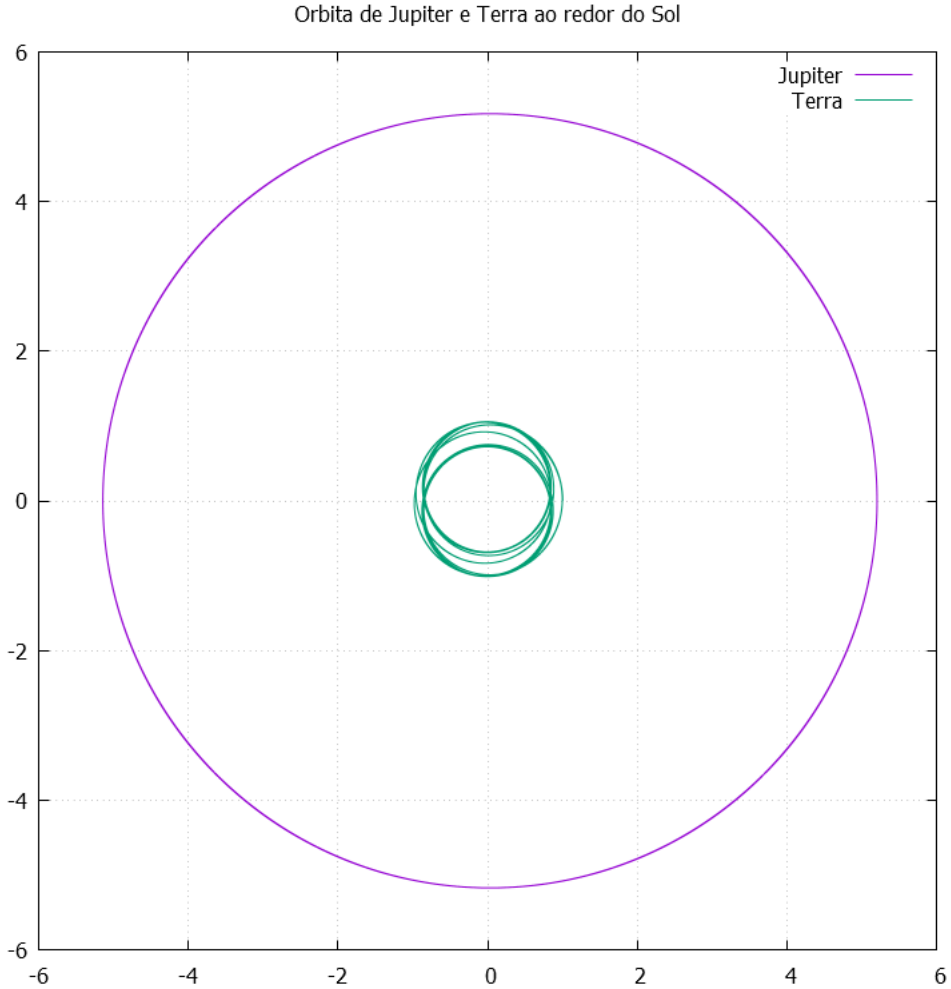


Figure 4: Órbita de Júpiter e Terra em torno do Sol. Utilizando Massas de Júpiter 1000 vezes que a massa real

Neste gráfico é fácil notar a relevância da massa de Júpiter na órbita terrestre. Porém a massa utilizada não foi o suficiente para lançar o planeta Terra no espaço. Nesse caso, a Terra ainda está presa à órbita do Sol.

Utilizando a massa de Júpiter 10^4 vezes maior que a massa real do planeta, podemos notar que foi o suficiente para que a velocidade da Terra ficasse maior que a velocidade de escape, e a Terra acabou por perder sua órbita num intervalo menor que uma translação de Júpiter em torno do Sol.

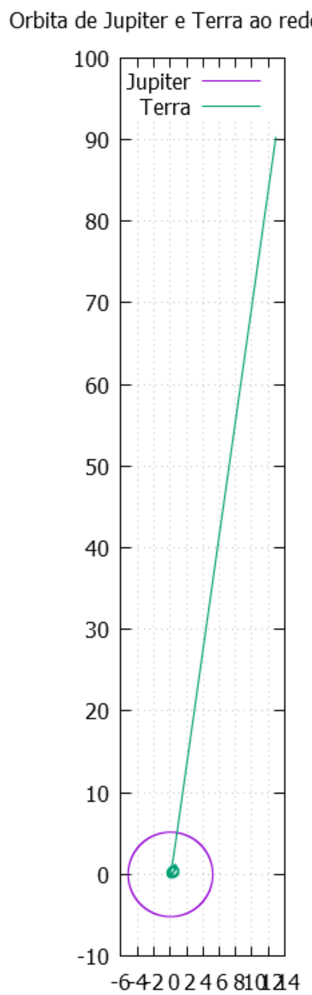
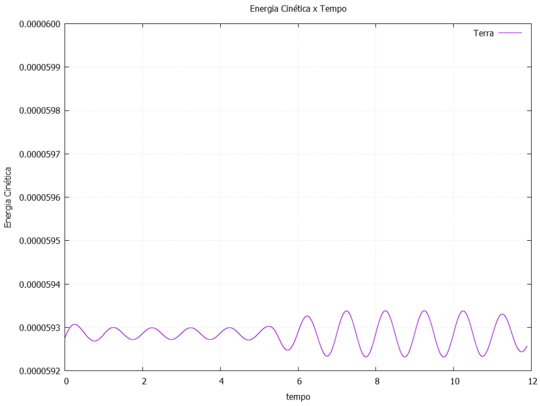
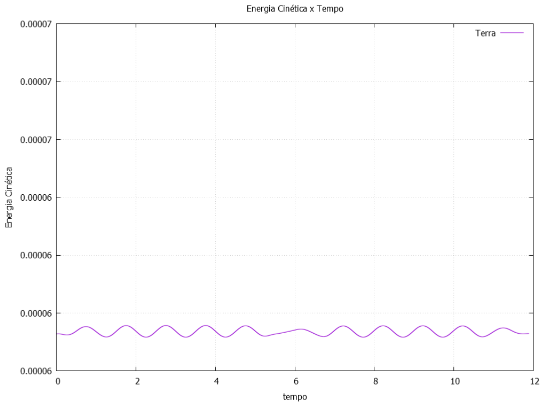


Figure 5: Massa de Júpiter 10^4 vezes maior que a real. Terra sendo lançada para fora da sua órbita

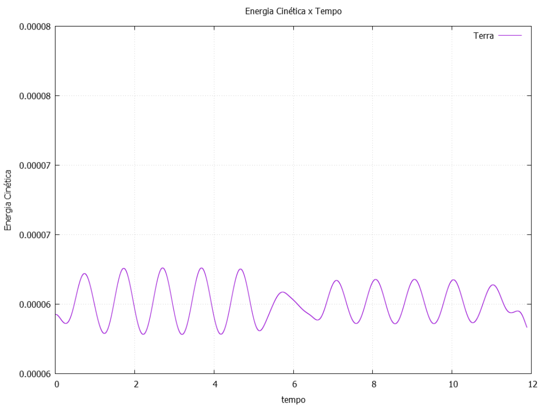
No seguinte gráfico, podemos observar a energia cinética do Planeta Terra, para cada caso:



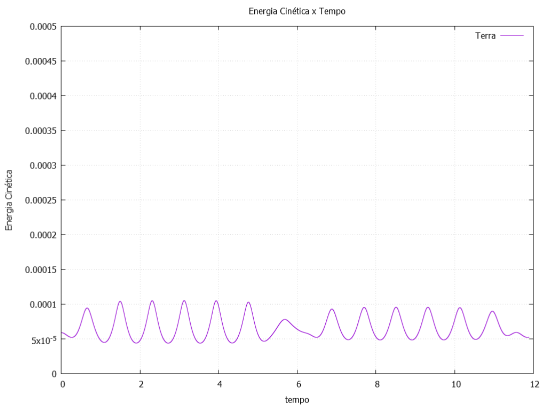
(a) Energia Cinética.Massa de Júpiter Real



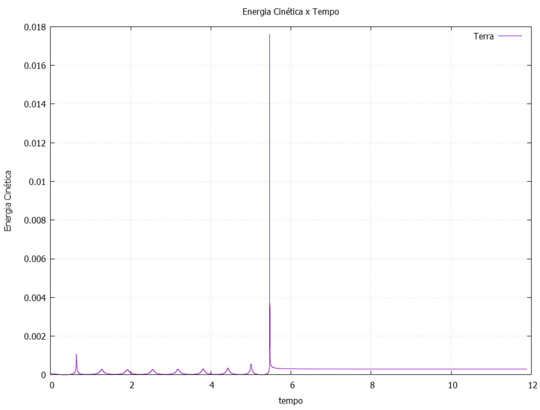
(b) Energia Cinética. Massa de Júpiter dez vezes maior que a real



(c) Energia Cinética. Massa de Júpiter cem vezes maior que a real



(d) Energia Cinética. Massa de Júpiter mil vezes maior que a real



(e) Energia Cinética. Massa de Júpiter dez mil vezes maior que a real

Figure 6: Energia Cinética em função do tempo

Nota-se que para o primeiro caso (Júpiter com Massa real), a variação da energia cinética com o tempo é mínima, tendo diferença entre a energia mínima a e máxima é aproximadamente 10^{-7}, com isso, podemos considerá-la constante.

A mudança significativa acontece apenas na figura (e). Nota-se um pico de energia cinética, neste momento a energia total fica maior que zero e a velocidade da órbita é maior que a velocidade de escape do planeta, com isso a Terra sai totalmente da sua órbita e é lançado no espaço.

3.1 Comentários Finais

Podemos concluir que para acontecer mudanças significativas no sistema precisamos de uma massa de Júpiter relativa ao Sol extremamente maior que a real. Essa mudança altera a velocidade de rotação da Terra, com isso, a velocidade da órbita ultrapassa a velocidade de escape, e a Terra sai da órbita do Sol, sendo lançado no espaço. O exato momento em que isso acontece pode ser notado no gráfico que mostra a mudança de energia cinética em função do tempo, que é o momento em que acontece no pico de energia.

4 Apêndice

4.1 Código

Em todo o projeto, foi utilizado apenas um mesmo código, onde foram feitos vários arquivos do tipo *.dat*

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#define JUPiTERAU 0.0009545
#define EARTHAU 0.000003003
main()
{
 double me, ms, mj, xe, ye, vex, vey, dt = 0.0001, t=0, eper, re, jper, xj, yj, vjx, vjy,
     rj, rej;
 char terraarquivo[10], jupiterarquivo[10];
 int i;
 FiLE *fj, *ft;
 for(i=-12;i<=12;i++){
 sprintf(terraarquivo, "terra%d.dat", i);
 sprintf(jupiterarquivo, "jupiter%d.dat", i);
 if((fj=fopen(jupiterarquivo,"w"))==NULL) printf("Fail Jupiter\n");
 if((ft=fopen(terraarquivo,"w"))==NULL) printf("Fail Terra\n");

 fprintf(fj,"#X\tY\tVx\tVy\tTempo\tR\tEc\n");
 fprintf(ft,"#X\tY\tVx\tVy\tTempo\tR\tEc\n");
 me=EARTHAU;
 ms=1.;
 mj=pow(10,i)JUPiTERAU;
 xe=1.;
 ye=0.;
 vex=0.;
 vey=2.*M_Pi;
 eper= 1.;
 jper=11.89;
 xj=5.2;
 yj=0.;
 vjx=0.;
 vjy=2.*M_Pi*xj/jper;
 for(t=0.; t<jper; t+=dt)
 {
  //printf("TESTE\n");
  re=sqrt(pow(xe,2) + pow(ye,2));
  rj=sqrt(pow(xj,2) + pow(yj,2));

  rej=sqrt(pow(xe-xj,2)) + pow(ye-yj,2);

  vex = vex -4*pow(M_Pi,2)*xe*dt/pow(re,3) - 4*pow(M_Pi,2)*(mj/ms)*(xe-xj)*dt/pow(rej,3);
  vey = vey -4*pow(M_Pi,2)*ye*dt/pow(re,3) - 4*pow(M_Pi,2)*(mj/ms)*(ye-yj)*dt/pow(rej,3);

  vjx = vjx -4*pow(M_Pi,2)*xj*dt/pow(rj,3) - 4*pow(M_Pi,2)*(me/ms)*(xj-xe)*dt/pow(rej,3);
  vjy = vjy -4*pow(M_Pi,2)*yj*dt/pow(rj,3) - 4*pow(M_Pi,2)*(me/ms)*(yj-xe)*dt/pow(rej,3);

  xe=xe+vex*dt;
  ye=ye+vey*dt;

  xj=xj+vjx*dt;
  yj=yj+vjy*dt;
  fprintf(fj,"%g\t%g\t%g\t%g\t%g\t%g\t%g\n", xj, yj, vjx, vjy, t, rj, mj*0.5*(vjx*vjx+vjy*
      vjy));
  fprintf(ft,"%g\t%g\t%g\t%g\t%g\t%g\t%g\n", xe, ye, vex, vey, t, re, me*0.5*(vex*vex+vey*
      vey));

  }
  fclose(fj);
  fclose(ft);
  }
 }
```

5 Referência

1. GiORDANO,J. Nicholas; NAKANiSHi, Hisao. *Computational Physics*. Second Edition. Upper Saddle River: Pearson Education, inc, 2006.

2. OLiVEiRA. V., CRUZ. i. O Problema dos Três Corpos. Disponível em <http://cmup.fc.up.pt/cmup/relatividade/3Corpos/3corpos.html>. Acesso em 24 de março de 2016.

3. CARVALHO, B. O., O Problema de N Corpos. 2015, julho.

4. DONOSO, J. P., Gravitação. Disponível em < http://www.ifsc.usp.br/~donoso/ambiental/gravitacao.pdf>. Acesso em 26 de março de 2016.