

**LIBRERIA MODELLISTICA DEL CODICE "LEGO" PER LA
SIMULAZIONE DI IMPIANTI PER LA GENERAZIONE DI POTENZA - TEORIA -**

PRINCIPI GENERALI

INDICE

GUIDA ALLA LETTURA

I **GENERALITÀ SULLA MODELLIZZAZIONE DEGLI EFFLUSSI MONODIMENSIONALI E DEI FLUIDI NELLE CAVITÀ**

I.0 **SIMBOLOGIA**

I.1 **EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE PER GLI EFFLUSSI MONODIMENSIONALI**

I.1.1 **Equazioni di conservazione per fluidi monofase**

I.1.2 **Equazioni di conservazione per gli efflussi monodimensionali. Deduzione euristica.**

I.1.2.1 **Equazione di conservazione della massa**

I.1.2.2 **Equazione di conservazione della quantità di moto**

I.1.2.2.1 **Equazione di conservazione dell'energia meccanica**

I.1.2.3 **Equazione di conservazione dell'energia**

I.1.2.3.1 **Equazione di conservazione dell'energia scritta in entropia**

I.1.3 **Equazione di conservazione per efflussi di miscela acqua-vapore**

I.1.3.1 **Introduzione**

I.1.3.2 **Equazioni di conservazione fra le variabili "medie"**

I.1.3.3 **Modello di efflusso bifase "a due fluidi"**

I.1.3.4 **Modello di miscela bifase**

I.1.3.5 **Efflussi bifase monodimensionali**

I.1.3.6 **Prospetto dei possibili modelli di efflusso bifase**

I.1.3.7 **Modello di efflusso bifase monodimensionale omogeneo**

I.1.3.8 **Deduzione semplificata delle equazioni di conservazioni per efflussi bifase monodimensionali**

I.1.3.9 **Correlazione per il calcolo della densità di una miscela bifase**

- I.1.4** I fenomeni di trasporto associati alle equazioni di conservazione per un efflusso monodimensionale
- I.1.5** La separabilità della equazione di conservazione dell'energia da quelle della massa e della quantità di moto
- I.1.6** Le interazioni con l'esterno di un fluido in efflusso monodimensionale
- I.1.6.1** Correlazioni di perdita di carico per attrito
 - I.1.6.1.1** Correlazioni di perdita di carico per attrito per fluidi monofase
 - I.1.6.1.2** Correlazione di perdita di carico per attrito per fluidi bifase
 - I.1.6.1.3** Calcolo delle perdite di carico localizzate
 - I.1.6.2** Correlazioni di scambio termico convettivo fluido/parete
- I.1.7** Le proprietà termodinamiche dei fluidi
- I.1.7.1** Il calcolo delle proprietà dell'acqua
 - I.1.7.2** Il calcolo delle proprietà dei gas
- I.1.8** Equazioni di conservazione per gli efflussi monodimensionali scritte a parametri concentrati
- I.1.8.1** Equazione di conservazione della massa a parametri concentrati
 - I.1.8.2** Equazione di conservazione della quantità di moto a parametri concentrati
 - I.1.8.3** Equazione di conservazione dell'energia a parametri concentrati
 - I.1.8.4** Il problema della definizione delle medie nelle equazioni di conservazione a parametri concentrati
- I.1.9** Consistenza dei metodi numerici usati per la soluzione delle equazioni rispetto ai principi di conservazione
- I.2** EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE PER CAVITÀ CONTENENTI FLUIDO BIFASE
- I.2.1** Introduzione
- I.2.2** Equazioni di conservazione per cavità contenenti fluido bifase in condizioni di equilibrio termodinamico
- I.2.3** Equazioni di conservazione relative alle zone nelle quali una cavità può essere considerata suddivisa
- I.2.4** Deduzione euristica delle equazioni di conservazione relative alle zone di una cavità

- I.2.5 Modello matematico di fluido bifase in condizioni di non-equilibrio termodinamico fra le fasi all'interno di una cavità
 - I.2.6 Scambi termici caratteristici della cavità
 - I.2.7 Calcolo del livello del liquido in una cavità occupata da fluido bifase
- I.3 LA TRASMISSIONE DEL CALORE NELLE PARETI DELLE TUBAZIONI
- I.3.1 Equazione di conservazione dell'energia per le pareti metalliche di una tubazione contenente fluido
 - I.3.2 Equazione di conservazione dell'energia per le pareti metalliche di una tubazione in regime stazionario
 - I.3.3 Trasferimento di calore fra due fluidi attraverso una parete in regime stazionario
 - I.3.4 Modello dinamico semplificato di parete metallica di una tubazione cilindrica
- I.4 I METODI NUMERICI USATI NEL CODICE LEGO
- I.4.1 Generalità
- I.4.2 Richiami di alcune nozioni di calcolo numerico per la risoluzione di equazioni differenziali
- I.4.3 Metodo per l'integrazione numerica del sistema algebrico-differenziale utilizzato nel codice LEGO
- I.4.3.1 La formula di soluzione del sistema algebrico
 - I.4.3.2 Significato della tolleranza nella soluzione del sistema algebrico in rapporto allo schema di integrazione
 - I.4.3.3 Caratteristiche generali del metodo d'integrazione
 - I.4.3.4 Integrazione separata dell'equazione di conservazione dell'energia

GUIDA ALLA LETTURA

1. INTRODUZIONE

Il codice "LEGO" ^{(1),(2),(3),(4),(5),(6),(7)} ha lo scopo di simulare il comportamento dinamico di impianti per la produzione di energia elettrica.

Per tener conto della grande varietà di tipologie degli impianti, ad esso è stata data una struttura modulare, nella quale i singoli moduli rappresentano i componenti elementari dell'impianto stesso, quali scambiatori di calore, pompe, valvole ecc..

Questa caratteristica ha permesso di adattare facilmente il codice, inizialmente previsto per lo studio del comportamento di impianti termoelettrici ^{(8),....,(16)} allo utilizzo per gli impianti nucleari ^{(17),....,(21)} e addirittura per applicazioni in campi completamente diversi da quelli della produzione di energia, come quello della robotica ⁽²²⁾.

L'adeguamento del codice alle nuove esigenze si realizza semplicemente aggiungendo alla preesistente libreria dei moduli, composta attualmente da più di cinquanta moduli, altri moduli, costruiti rispettando certe regole ⁽²³⁾, per la simulazione dei componenti mancanti. La documentazione modellistica del codice, essenziale per permetterne un uso facile e corretto, è suddivisa in due parti fondamentali, una ⁽³⁾ contenente la descrizione dei modelli fisico-matematici sui quali i moduli dei componenti d'impianto sono basati, l'altra ⁽⁴⁾ la descrizione delle modalità d'uso degli stessi.

2. INTRODUZIONE ALLA DOCUMENTAZIONE TEORICA DEL CODICE LEGO

La parte generale (PRINCIPI GENERALI) della documentazione teorica della libreria termoidraulica codice LEGO ⁽³⁾ è suddivisa in quattro capitoli, intitolati rispettivamente il primo (cap. I.1) "Equazioni di conservazione per gli efflussi monodimensionali", il secondo (cap. I.2) "Equazioni di conservazione per cavità contenenti fluido bifase", il terzo (cap. I.3) "La trasmissione del calore nelle tubazioni", ed il quarto (cap. I.4) "I metodi numerici usati nel codice LEGO".

Esiste poi una documentazione degli aspetti teorici di ogni modulo della libreria che entra nei dettagli fisico-matematici e nei quali si fa riferimento al presente volume per i principi generali riguardanti i fenomeni che avvengono nei fluidi.

3. EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE PER GLI EFFLUSSI MONODIMENSIONALI

3.1 Equazioni di conservazione per efflussi monodimensionali di fluidi monofase

Nel par. I.1.1 dalle equazioni di conservazione in forma locale istantanea vengono definiti valori medi nel tempo delle variabili di tali equazioni per eliminare le fluttuazioni dovute alla turbolenza.

Si definiscono poi i valori medi delle variabili che caratterizzano il comportamento del fluido su ogni sezione retta del condotto da esso percorso e integrando termine a termine le equazioni sudette sulla stessa sezione si ottengono le equazioni di conservazione in forma monodimensionale nelle quali compaiono le variabili caratteristiche del fluido medie di sezione.

Nel par. I.1.2 e seguenti le equazioni di conservazione della massa, quantità di moto ed energia vengono ottenute direttamente in forma monodimensionale dal bilancio delle relative grandezze su un volume di controllo infinitesimo. Dall'equazione di conservazione della quantità di moto viene nel par. I.1.2.2.1 dedotta l'equazione di conservazione dell'energia meccanica. Dell'equazione di conservazione dell'energia vengono presentate nel par. I.1.2.3 le formulazioni nelle variabili energia interna ed entalpia, mentre nel par. I.1.2.3.1 si mostra la deduzione della stessa equazione nella variabile entropia.

3.2 Le equazioni di conservazione per efflussi bifase

Per i fluidi bifase a partire dalle equazioni di conservazione locali istantanee in forma tridimensionale per fluidi monofase si ottengono, con opportune operazioni di media, le equazioni di conservazione relative a ciascuna fase in forma tridimensionale (par. I.1.3.2). Facendo delle ipotesi semplificative si deducono poi le equazioni del modello di efflusso bifase "a due fluidi" (par. I.1.3.3) e del modello omogeneo (par. I.1.3.4).

Definendo i valori medi di sezione delle variabili e integrando su ogni sezione le equazioni tridimensionali si ottengono le equazioni degli analoghi modelli per gli efflussi bifase monodimensionali (par. I.1.3.5).

Viene infine presentata una rassegna dei possibili modelli di effusso bifase (par. I.1.3.6) e vengono evidenziate le equazioni relative al modello di miscela omogenea con o senza scorrimento fra le fasi (par. I.1.3.7).

Si mostra poi come le equazioni relative all'efflusso monodimensionale di una miscela bifase omogenea possano assumere lo stesso aspetto di quelle relative ad un fluido monofase, purchè alcune grandezze vengano opportunamente definite. Tali definizioni possono essere giustificate sia ricavando le equazioni di conservazione del fluido bifase per somma delle corrispondenti relative al fluido di ciascuna fase, con opportune ipotesi, sia, utilizzando le stesse ipotesi, direttamente dai principi primi (par. I.1.3.8). Nel par. I.1.3.9 si elencano le più comuni correlazioni per il calcolo della densità delle miscele bifase acqua-vapore in condizioni sature e ne vengono indicati i limiti di validità.

3.3 I fenomeni di trasporto associati alle equazioni di conservazione per un efflusso monodimensionale

Nel par. I.1.4 viene dapprima dimostrata l' iberbolicità del sistema costituito dalle equazioni di conservazione relative all' efflusso monodimensionale di un fluido monofase e vengono indicate le corrette modalità di assegnazione delle condizioni al contorno. Il suddetto sistema viene poi linearizzato intorno ad un regime stazionario e trasformato secondo Laplace per studiare i modi di propagazione delle perturbazioni nel suo interno e l' importanza di alcuni termini di tali equazioni per la loro corretta simulazione. Vengono infine presentate alcune considerazioni riguardanti il legame fra l' equazione di conservazione dell' energia e le altre due e la possibilità di integrare queste ultime separatamente.

3.4 Le interazioni con l' esterno di un fluido in efflusso monodimensionale

Nei paragrafi I.1.6.1.,..,I.1.6.1.2 vengono trattate le correlazioni per il calcolo delle perdite di carico dovute all' attrito del fluido con le pareti.

La forma tipica dell' espressione per il calcolo delle perdite di carico distribuite lungo un condotto viene dedotta con il metodo della analisi dimensionale. Vengono poi elencate alcune correlazioni usate per tale calcolo con fluidi monofase in regime laminare, di transizione e turbolento (par. I.1.6.1.1).

Nel caso di fluido bifase viene messo in evidenza il fatto che le correlazioni devono essere utilizzate in maniera coerente con la equazione di bilancio usata per ottenere dalla caduta di pressione totale misurata la parte di essa dovuta alle perdite per attrito. Sono poi illustrate alcune correlazioni fra le più utilizzate e vengono fatte alcune considerazioni riguardanti la loro applicabilità (par.I.1.6.2).

Il par. I.1.6.1.3 è dedicato al calcolo delle perdite di carico concentrate.

Nel par. I.1.6.2 si tratta delle correlazioni di scambio termico liminare tra fluido e parete.

Si mostra dapprima, con i metodi dell' analisi dimensionale, quale è la tipica forma di una correlazione e quali sono i numeri adimensionali che in essa generalmente compaiono. Vengono poi passati in rassegna i possibili regimi di scambio termico per acqua a pressione ipocritica e vengono elencate le correlazioni valide in corrispondenza di essi.

3.5 Le proprietà termodinamiche dei fluidi

I problemi legati al calcolo delle proprietà termodinamiche dei vari fluidi che possono evolvere in un impianto per la produzione di energia elettrica sono presentati nel par. I.1.7. Il calcolo delle proprietà dell' acqua, sia sotto forma di liquido che di vapore e di miscela bifase, è dedicato il par. I.1.7.1, mentre nel par. I.1.7.2 vengono trattati altri fluidi, quali fumi, aria, argon, elio, idrogeno e azoto.

3.6 Equazioni di conservazione per gli efflussi monodimensionali scritte a parametri concentrati

Le equazioni di conservazione per efflussi monodimensionali di fluidi monofase ricavate nei paragrafi I.1.2.,..,I.1.2.3.1 sono integrate su un volume di controllo per essere ottenute poi nella forma "a parametri concentrati" nei paragrafi I.1.8.,..,I.1.8.3. Nel par. I.1.8.4 vengono esaminate le implicazioni della scelta di una fra le tante possibili definizioni del valore medio di cella della variabile che compare nella derivata rispetto al tempo; tale esame viene fatto in particolare considerando l'equazione di conservazione dell' energia.

3.7 Consistenza dei metodi numerici usati per la soluzione rispetto ai principi di conservazione

Nel par. I.1.9 viene posto in evidenza che un requisito indispensabile della formulazione a parametri concentrati di una equazione di conservazione è quello di fornire risultati corrispondenti a quelli della soluzione della originale equazione alle derivate parziali almeno in regime stazionario. Si fa notare che ciò non avviene per l' equazione di conservazione dell' energia espressa nella variabile entropia riportata nel par. I.1.8.3 e viene fornita una formulazione approssimata della stessa equazione che soddisfa il requisito suddetto.

3.8 Equazioni di conservazione per cavità contenenti fluido bifase

Nella terminologia LEGO si definisce "cavità" un volume occupato da fluido il moto del quale non ha una direzione prevalente.

La trattazione dei modelli del fluido contenuto nelle "cavità" viene svolta nel cap. I.2. Si sono ottenute le equazioni relative a due modelli di fluido nella cavità, uno che ipotizza che la fase liquida e quella vapore si trovino sempre in equilibrio termodinamico fra di loro (par. I.2.2), l' altro che ipotizza la cavità suddivisa in due zone, denominate "zona liquido" e "zona vapore", le quali possono non essere in equilibrio termodinamico fra loro (par. I.2.5). Le equazioni di conservazione relative al fluido nelle due zone sono ottenute integrando le equazioni di conservazione in forma locale tridimensionale su volumi di controllo corrispondenti a ciascuna delle due zone, all' interno delle quali si ipotizza che le variabili che caratterizzano lo stato del fluido assumano ovunque i valori medi di zona (par. I.2.3). Tali equazioni sono riottenute con un procedimento euristico nel par I.2.4. Nel par. I.2.6 vengono discusse le problematiche dello scambio termico fra il fluido delle due zone e fra il fluido nella cavità ed eventuali fasci tubieri che la attraversano. Infine nel par. I.2.7 viene descritto un metodo per il calcolo del livello in una cavità occupata da fluido bifase.

4. LA TRASMISSIONE DEL CALORE NELLE PARETI DELLE TUBAZIONI

A partire dalla legge di Fourier per la trasmissione del calore si ottiene nel par. I.3.1 l'equazione di conservazione dell'energia, espressa in coordinate cilindriche, relativamente alla parete metallica tubazione.

Nel par. I.3.2 si ottiene la distribuzione di temperatura all'interno della parete stessa in condizioni stazionarie. Il coefficiente globale di scambio termico fra due fluidi separati da una parete metallica in regime stazionario viene calcolato nel par. I.3.3. Infine nel par. I.3.4 viene affrontato il problema della discretizzazione in senso radiale della parete metallica al fine della soluzione del problema dello scambio termico in regime transitorio e viene definita la temperatura media di ogni cella radiale.

5. I METODI NUMERICI USATI NEL CODICE LEGO

Presentato nel par. I.4.1 il sistema di equazioni algebriche e differenziali da risolvere nella sua forma standard, nel par. I.4.2 vengono richiamate alcune nozioni di calcolo numerico utili per la comprensione del metodo di soluzione effettivamente adottato nel codice LEGO. Esso viene descritto in dettaglio, sia per quel che riguarda la discretizzazione delle derivate temporali sia per la soluzione del risultante sistema algebrico, nel par. I.4.3.1. Nel par. I.4.3.2 vengono presentate alcune considerazioni sul significato delle tolleranze nella soluzione del sistema algebrico, mentre nel par. I.4.3.3 vengono riassunte le caratteristiche della procedura d'integrazione e ne vengono ricapitolati i passi fondamentali.

Una particolare tecnica per ridurre i tempi di calcolo, consistente nell'integrare separatamente l'equazione di conservazione della energia, è descritta nel par. I.4.3.4.

Simbologia relativa al cap. I.1

C_f	coefficiente di attrito alla parete
C	lunghezza del perimetro della sezione retta della tubazione
D_H	diametro idraulico
E_k, e_k	energia trasferita alla fase k attraverso l'interfaccia
\vec{F}	forza di volume
G	portata specifica di massa
G_r	numero di Grashof
\mathcal{G}	entalpia libera
\vec{g}	accelerazione di gravità
H	entalpia specifica del fluido
$\bar{\bar{I}}$	tensore unitario
\vec{i}	versore diretto come l'asse x
\vec{M}_k, \vec{m}_k	quantità di moto trasferita alla fase k attraverso l'interfaccia
\vec{n}	normale ad una superficie
\vec{n}_Σ	normale alla parete della tubazione
\vec{n}_p	normale al perimetro della sezione retta della tubazione nel piano della sezione stessa
N_u	Numero di Nusselt
p	pressione del fluido
\vec{q}	flusso termico

q	flusso di calore per unità di superficie e di tempo
r_H	raggio idraulico della tubazione
Re	numero di Reynolds
S	entropia specifica del fluido
T	temperatura assoluta del fluido
t	tempo
U	energia interna specifica del fluido
\vec{V}	velocità del fluido
ν	volume specifico del fluido
W	portata massica di fluido
X	titolo in massa
X_p	titolo in portata
X_v	titolo in volume
z	quota
α_k	grado di vuoto locale istantaneo della fase k
$\bar{\bar{C}}$	tensore degli sforzi
Γ	portata massica
Γ_k, γ_k	portata entrante nella fase k attraverso l'interfaccia
δ	spessore dell'interfaccia
λ	conducibilità del fluido
μ	viscosità del fluido
ω	perimetro interno della tubazione (= C)
ρ	densità del fluido
Σ	area della sezione retta della tubazione

Σ_k area della parte della sezione retta della tubazione occupata dalla fase k

σ tensione superficiale

$\bar{\tau}$ tensore degli sforzi dovuto alla viscosità

ζ rapporto di scorrimento

Simbologia relativa al cap. I.2

\bar{A}_l	area della sezione media orizzontale della zona "liquida"
\bar{A}_v	area della sezione media orizzontale della zona "gassosa"
C_{pl}	calore specifico del liquido
D_c	diametro equivalente esterno del fascio tubiero
\vec{g}	rilevazione gravità
H	entalpia specifica del fluido
H_B	entalpia del vapore iniettato nella zona "liquida"
H_D	entalpia del liquido spruzzato nella zona "gassosa"
$H_{i\ i}$	entalpia del fluido entrante nella zona i-esima
H_l	entalpia specifica del fluido nella zona "liquida"
$H_{l\ i}$	entalpia del liquido entrante nella zona "liquida"
$H_{l\ l}$	entalpia specifica del liquido nella zona "liquida"
$H_{l\ s}$	entalpia del liquido saturo alla pressione p
$H_{l\ v}$	entalpia specifica del vapore nella zona "liquida"
$H_{u\ i}$	entalpia del fluido uscente dalla zona i-esima
H_v	entalpia specifica del fluido nella zona "gassosa"
$H_{v\ i}$	entalpia del vapore entrante nella zona "gassosa"
$H_{v\ l}$	entalpia specifica del liquido nella zona "gassosa"
$H_{v\ s}$	entalpia del vapore saturo alla pressione p
$H_{v\ v}$	entalpia specifica del vapore nella zona "gassosa"

\bar{H}_{vI}	calore latente di evaporazione
h_c	coefficiente di scambio termico in condensazione
h_{int}	coefficiente di scambio termico all'interfaccia
k_f	conducibilità termica del film liquido
M_k	massa della tensione k
M_l	massa del fluido nella zona "liquida"
M_{lI}	massa del liquido nella zona "liquida"
M_{lv}	massa del vapore nella zona "liquida"
M_m	peso molecolare
M_v	massa del fluido nella zona "gassosa"
M_{vl}	massa del liquido nella zona "gassosa"
M_{vv}	massa del vapore nella zona "gassosa"
\vec{n}_Σ	versore normale alla superficie Σ diretto verso l'esterno
N_f	numero di tubi del fascio tubiero
p	pressione nella cavità
\vec{q}	flusso termico
\vec{q}_m	flusso termico
Q_l	potenza ceduta dal fluido nella zona "liquida"
Q_{lI}	potenza ceduta dal liquido nella zona "liquida"
Q_{lv}	potenza ceduta dal vapore nella zona "liquida"
Q_v	potenza ceduta dal fluido nella zona "gassosa"
Q_{vl}	potenza ceduta dal liquido nella zona "gassosa"

Q_{vv}	potenza ceduta dal vapore nella zona "gassosa"
R_g	costante universale dei gas
S	entropia specifica del fluido
S_l	entropia specifica del fluido nella zona "liquida"
S_{ls}	entropia del liquido saturo alla pressione p
S_v	entropia specifica del fluido nella zona "gassosa"
S_{vs}	entropia del vapore saturo alla pressione p
T_l	temperatura del fluido nella zona "liquida"
T_v	temperatura del fluido nella zona "gassosa"
U	entalpia interna specifica
U_l	energia interna specifica del fluido nella zona "liquida"
U_v	energia interna specifica del fluido nella zona "gassosa"
U_{vl}	energia interna specifica del liquido nella zona "gassosa"
U_{vv}	energia interna specifica del vapore nella zona "gassosa"
\mathcal{V}	volume della cavità
\mathcal{V}_l	volume della zona "liquida"
\mathcal{V}_{ll}	volume occupato dal liquido nella zona "liquida"
\mathcal{V}_{vv}	volume occupato dal vapore nella zona "liquida"
\mathcal{V}_v	volume della zona "gassosa"
\mathcal{V}_{vl}	volume occupato dal liquido nella zona "gassosa"
\mathcal{V}_{vv}	volume occupato dal vapore nella zona "gassosa"
\mathcal{V}_{tot}	volume totale della cavità
\vec{V}	velocità del fluido
V_{dw}	velocità media di caduta delle gocce

V_{up}	velocità media di salita delle bolle
\vec{V}_m	velocità delle miscele bifase
\vec{V}_l	velocità del liquido
\vec{V}_v	velocità del vapore
W_B	portata di vapore iniettato nella zona "liquida"
W_c	portata di liquido fra la zona "gassosa" e la zona "liquida" dovuta alla condensazione nella zona "gassosa"
W_D	portata di liquido spruzzato nella zona "gassosa"
W_{dw}	portata di vapore che passa dalla zona "liquida" alla zona "gassosa"
$W_{i\ i}$	portata entrante i-esima
W_{ii}	portata volumetrica entrante i-esima
W_{li}	portata di liquido entrante nella zona "liquida"
W_{lu}	portata di liquido uscente dalla zona "liquida"
W_{lv}	portata di vapore fra la zona "liquida" e la zona "gassosa" dovuta all'evaporazione nella zona "liquida"
W_{ui}	portata uscente i-esima
W_{ui}	portata volumetrica uscente i-esima
W_{up}	portata di liquido che passa dalla zona "gassosa" alla zona "liquida"
W_{vi}	portata di vapore entrante nella zona "gassosa"
W_{vl}	massa di fluido che passa dallo stato di vapore a quello di liquido nell'unità di tempo nella zona "gassosa"
W_{vv}	portata di vapore uscente dalla zona "gassosa"
y	livello del liquido nella cavità
y_m	livello del liquido misurato dalla strumentazione

z	quota
α_k	grado di vuoto locale della fase k
μ_f	viscosità del film liquido
ρ	densità del fluido
ρ_k	densità della fase k
ρ_l	densità specifica del fluido nella zona "liquida"
ρ_{ls}	densità del liquido saturo alla pressione p
ρ_m	densità della miscela bifase
ρ_v	densità del fluido nella zona "gassosa"
ρ_{vs}	densità di vapore saturo secco alla pressione p
Σ	superficie del confine della cavità
$\bar{\tau}_m$	tensore degli sforzi
τ_{dv}	tempo medio di caduta delle gocce
τ_{up}	tempo medio di salita delle bolle

Simbologia relativa al cap. I.3

C_m	calore specifico del metallo
E	energia interna totale
L	lunghezza di una cella
Q	potenza termica
\vec{q}	flusso di calore
R_m	resistenza termica del metallo
r	ascissa radiale
r_e	raggio esterno della tubazione
r_i	raggio interno della tubazione
T	temperatura del fluido
T_m	temperatura del metallo
ϵ	spessore della parete del tubo
γ	coefficiente di scambio termico liminare
λ_m	conducibilità termica
ρ_m	densità del metallo

Simbologia relativa al cap. I.4

a_j	coefficienti di un metodo d'integrazione multi-step
b_j	
e	errore locale di troncamento
m	numero delle variabili intermedie
n	numero degli stati
r	numero degli ingressi
t	tempo
u_i	ingresso i-esimo del sistema
v_i	variabile intermedia i-esima
x	vettore degli stati del sistema
x_i	stato i-esimo del sistema
$x_n^{(k)}$	valore della variabile x al passo di tempo n-esimo durante la k -esima iterazione
Δt	passo di integrazione

I

GENERALITÀ SULLA MODELLIZZAZIONE DEGLI EFFLUSSI MONODIMENSIONALI E DEI FLUIDI DELLA CAVITÀ

Per quanto riguarda la classificazione dei componenti a fluido, in vista del tipo di equazioni descrittive, si possono distinguere:

- Gli elementi lunghi dove i fenomeni di propagazione e di accumulo devono essere tenuti in conto. È il caso delle tubazioni e degli scambiatori. Le equazioni descrittive sono alle derivate parziali rispetto al tempo e allo spazio.
La modellizzazione degli efflussi monodimensionali gioca un ruolo essenziale nella simulazione di installazioni industriali dove una parte cospicua dei fenomeni complessi da rappresentare si riferisce a fluidi circolanti in tubazioni la cui coordinata principale è l'ascissa curvilinea nella direzione del moto del fluido. In questi casi si ammette che l'efflusso avvenga in questa direzione preferenziale e che le varie grandezze abbiano un valore medio in una sezione trasversale.
- Gli elementi corti dove i fenomeni di accumulo sono gli unici ad essere rappresentati. È il caso dei collettori riscaldatori, separatori ecc. in cui i fenomeni avvengono in una cavità e non interessa il calcolo delle variabili in funzione delle coordinate spaziali ma solo l'andamento nel tempo di proprietà media. Le equazioni descrittive sono differenziali rispetto al tempo.
- Gli elementi la cui dinamica è così veloce rispetto a quella degli altri componenti simulati che possono essere sempre considerati in regime stazionario e i fenomeni di propagazione e accumulo possono essere trascurati. È il caso di componenti come valvole, turbine, pompe, ecc. Le equazioni descrittive sono algebriche.

In questa sezione vengono rappresentate in forma generale le equazioni descrittive dei fenomeni relativi agli efflussi monodimensionali, sia monofase che bifase, ed ai fluidi nella cavità.

Nella presentazione si seguirà un duplice approccio, le equazioni degli efflussi monodimensionali saranno dapprima ottenute a partire da quelle tridimensionali con operazioni di media su una sezione retta del condotto contenente il fluido (par. I.1.1 per efflussi di fluidi monofase, par. I.1.3.2,...,I.1.3.7 per efflussi di fluidi bifase), esse verranno poi dedotte, direttamente nella forma monodimensionale, applicando i principi di conservazione direttamente alle grandezze medie sulla sezione retta, ottenendo la stessa equazione di conservazione per i fluidi monofase (par. I.1.2) e bifase (par. I.1.3.8) con un metodo meno rigoroso del precedente, ma che chiarisce il procedimento per ottenere le equazioni di conservazione ricorrendo ad una trattazione matematica assai più semplice che nel caso tridimensionale. Le equazioni di conservazione così ottenute saranno riprese, in forma più o meno semplificata, in tutti i moduli LEGO che descrivono i modelli di componenti a fluido.

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.1**EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE PER GLI EFFLUSSI MONODIMENSIONALI****I.1.1****Equazioni di conservazione per fluidi monofase**

Le equazioni di conservazione locali istantanee, cioè quelle che stabiliscono relazioni fra le variabili locali ad un istante dato, sono per un fluido monofase le seguenti^{(1),(2),(3),(4),(6),(7)}:

Conservazione della massa

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} \tilde{\rho} \vec{V} = 0 \quad (\text{I.1.1.1})$$

Conservazione della quantità di moto

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} \vec{V} + \operatorname{div} (\tilde{\rho} \vec{V} \otimes \vec{V} - \vec{\tau}) - \tilde{\rho} \vec{F} + \operatorname{grad} \tilde{\rho} = 0 \quad (\text{I.1.1.2})^*$$

Conservazione dell'energia

$$\frac{\partial}{\partial t} [\tilde{\rho} (\tilde{U} + \frac{1}{2} \tilde{V}^2)] + \operatorname{div} [\tilde{\rho} (\tilde{U} + \frac{1}{2} \tilde{V}^2) \cdot \vec{V} - \vec{\mathcal{C}} \cdot \vec{V} + \vec{q}] - \tilde{\rho} \vec{F} \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{I.1.1.3})$$

con

$$\vec{\mathcal{C}} = - \tilde{\rho} \vec{I} + \vec{\tau} \quad (\text{I.1.1.4})$$

I valori delle grandezze che compaiono nelle equazioni locali istantanee sono soggetti a variazioni, dovute alla turbolenza, che avvengono in tempi molto piccoli rispetto alle costanti di tempo macroscopiche della dinamica dei fenomeni fisici.

Nonostante il fatto che nella maggior parte dei problemi d'ingegneria si abbia a che fare con un moto turbolento, di solito le fluttuazioni dei valori delle variabili non hanno interesse, mentre si vogliono conoscere i loro andamenti su scala macroscopica.

A tale fine^{(5),(8),(9)} si definiscono i valori medi dei termini che compaiono nelle equazioni locali istantanee come

$$F = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \tilde{F}(x_0, t) dt \quad (\text{I.1.1.5})$$

* Il simbolo \otimes designa il prodotto tensoriale di due vettori $\vec{V} = (v_i)$ e $\vec{W} = (w_j)$ definito come

$$\vec{V} \otimes \vec{W} = (v_i w_j)$$

dove l'intervallo di tempo Δt deve essere grande abbastanza da rendere, in regime stazionario, F costante per ogni intervallo di tempo maggiore di Δt stesso.

La definizione (I.1.1.5) viene utilizzata per la densità ρ , la pressione p , il flusso termico \vec{q} ed il tensore degli sforzi $\bar{\tau}$ (è quindi $F = \rho, p, \vec{q}, \bar{\tau}$), mentre la velocità \vec{V} , l'energia interna U , l'entalpia H e l'entropia S sono definiti in base a

$$\rho(x_0, t_0) \psi(x_0, t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \tilde{\rho}(x_0, t) \tilde{\psi}(x_0, t) dt \quad (\text{I.1.1.6})$$

con

$$\psi = \vec{V}, U, H, S.$$

Si ipotizza inoltre che tra le variabili di stato medie esistano le stesse relazioni che fra le variabili di stato locali. Si può allora definire la temperatura media

$$T = \frac{\partial U}{\partial S} \quad \Big|_{\rho = \text{cost}}$$

Introducendo le fluttuazioni delle variabili in rapporto ai loro valori medi

$$\tilde{\rho} = \rho + \tilde{\rho}' \quad (\text{I.1.1.7})$$

$$\tilde{\psi} = \psi + \tilde{\psi}' \quad (\text{I.1.1.8})$$

con

$$\psi = \vec{V}, U, H, S$$

deve essere

$$\int_{\Delta t} \tilde{\rho}' dt = 0 \quad (\text{I.1.1.9})$$

$$\int_{\Delta t} \tilde{\rho}' \tilde{\psi}' dt = 0 \quad (\text{I.1.1.10})$$

ma

$$\rho \psi' \vec{V}' = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \tilde{\rho} \tilde{\psi}' \tilde{V}' \neq 0 \quad (\text{I.1.1.11})$$

Effettuate le operazioni di media termine e termine secondo le definizioni (I.1.1.5) e (I.1.1.6) sulle equazioni di conservazione locali istantanee si ottengono le equazioni di conservazione in termini di variabili medie, nelle quali si è inoltre ipotizzato che le forze di volume siano dovuti solo alla gravità.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{V} = 0 \quad (\text{I.1.1.12})$$

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \operatorname{div} [\rho \vec{V} \otimes \vec{V} - \bar{\tau}] + \operatorname{grad} p - \rho \vec{g} = 0 \quad (\text{I.1.1.13})$$

L'equazione di conservazione dell'energia è espressa nelle variabili energia interna (eq. I.1.1.14), entalpia (eq. I.1.1.15) ed entropia (eq. I.1.1.16), definendo

$$U^* = U + \frac{\vec{V}'^2}{2}$$

$$\frac{\partial \rho H}{\partial t} + \operatorname{div} [\rho (U^* + \frac{\vec{V}'^2}{2})] + \operatorname{div} [\rho (U^* + \frac{\vec{V}'^2}{2}) \vec{V} + \vec{q} - \bar{\tau} \cdot \vec{V} + p \vec{V}] - \rho \vec{g} \cdot \vec{V} = 0$$

$$(I.1.1.14)$$

$$\frac{\partial \rho H}{\partial t} + \operatorname{div} [\rho H \vec{V} + \vec{q}] - \frac{\partial p}{\partial t} - \vec{V} \cdot \operatorname{grad} p - \bar{\tau} \odot \operatorname{grad} \vec{V} = 0 \quad (\text{I.1.1.15})^{**}$$

$$\rho T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad} S \right) + \operatorname{div} \vec{q} - \bar{\tau} \odot \operatorname{grad} \vec{V} = 0 \quad (\text{I.1.1.16})$$

Dalle equazioni (I.1.1.12), (I.1.1.13), (I.1.1.15) o (I.1.1.16) si possono ottenere quelle relative agli efflussi monodimensionale assumendo, qualora l'efflusso abbia luogo in una direzione di gran lunga prevalente, la linea media dell'efflusso come asse x di vettore unitario \vec{i} e definendo i valori medi delle variabili in una sezione retta secondo le espressioni seguenti :

per la densità ρ , il flusso termico \vec{q} ed il tensore degli sforzi $\bar{\tau}$

$$\bar{f}(x_0, t_0) = \frac{1}{\Sigma} \iint_{\Sigma} f(x_0, y, z, t_0) dy dz \quad (\text{I.1.1.17})$$

dove

$$f = \rho, \vec{q}, \bar{\tau}$$

e per la velocità media \vec{V} , l'energia media \bar{U} , l'entalpia media \bar{H} e l'entalpia media \bar{S}

$$\bar{\rho}(x_0, t_0) \bar{\psi}(x_0, t_0) = \frac{1}{\Sigma} \iint_{\Sigma} \rho(x_0, y, z, t_0) \psi(x_0, y, z, t_0) dy dz \quad (\text{I.1.1.18})$$

dove

$$\psi = \vec{V}, U, H, S$$

** Il simbolo \odot designa il prodotto scalare di due tensori $\bar{T} = (t_{i,j})$ e $\bar{S} = (s_{i,j})$ definito come
 $\bar{T} \odot \bar{S} = S_{i,j} t_{i,j}$

Si suppone che le fluttuazioni dei diversi parametri attorno ai loro valori medi sulla sezione retta siano trascurabili, che il vettore velocità media \vec{V} sia orientato secondo l'asse delle x , e che valgano tra le funzioni di stato termodinamiche medie le stesse relazioni che valgono per quelle locali.

Integrando termini e termini le equazioni (I.1.1.12), (I.1.1.13), (I.1.1.15) o (I.1.1.16) su una sezione retta e utilizzando le definizioni (I.1.1.17) e (I.1.1.18) si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \Sigma \bar{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\rho} \vec{V} \cdot \vec{i} = 0 \quad (\text{I.1.1.19})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \Sigma \bar{\rho} \vec{V} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\rho} (\vec{V} \cdot \vec{i})^2 - \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\tau}_{xx} - \int_C \vec{i} \cdot \frac{(\vec{n}_\Sigma \cdot \bar{\tau})}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dl \\ & + \Sigma \frac{\partial}{\partial x} p - \Sigma \bar{\rho} \vec{g} \cdot \vec{i} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.1.1.20})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \Sigma \bar{\rho} \bar{H} + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma (\bar{\rho} \bar{H} \bar{V} + \vec{q} \cdot \vec{i}) - \frac{\partial \Sigma p}{\partial t} - \Sigma \bar{\tau}_{xx} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \\ & - \bar{V} \Sigma \frac{\partial p}{\partial x} + \bar{V} \int_C \vec{i} \cdot \frac{(\vec{n}_\Sigma \cdot \bar{\tau})}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dl + \int_C \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}_\Sigma}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dl = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.1.1.21})$$

oppure

$$\begin{aligned} & \Sigma \bar{\rho} \bar{T} \frac{d \bar{S}}{dt} - p \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \vec{q} \cdot \vec{i} - \Sigma \bar{\tau}_{xx} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \\ & + \bar{V} \int_C \vec{i} \cdot \frac{(\vec{n}_\Sigma \cdot \bar{\tau})}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dl + \int_C \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}_\Sigma}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dl = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.1.1.22})$$

dove

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + V \frac{\partial S}{\partial x} \quad (\text{I.1.1.23})$$

Normalmente nelle equazioni (I.1.1.20), (I.1.1.21) e (I.1.1.23) vengono trascurati i termini di secondo ordine, facendo così scompaiono i termini contenenti $\bar{\tau}_{xx}$ e $\vec{q} \cdot \vec{i}$

Essi rappresentano rispettivamente gli attriti interni al fluido dovuti alla viscosità ed il flusso termico dovuto alla conducibilità termica del fluido. Nel caso di portata nulla il trascurare quest'ultimo termine può dare luogo a gradienti di temperatura fisicamente non giustificabili.

Il termine

$$\int_C \vec{i} \cdot \frac{(\vec{n}_\Sigma \cdot \bar{\tau})}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dl$$

relativo alla forza di attrito alle pareti dovute alla viscosità, viene normalmente posto nella forma

$$\int_C \vec{i} \frac{(\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{\tau})}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} d l = |\vec{\tau}_p| \omega \quad (\text{I.1.1.24})$$

dove ω è il perimetro della sezione retta. A sua volta si pone

$$|\vec{\tau}_p| = -\frac{1}{2} C_f \rho |V| |V| \quad (\text{I.1.1.25})$$

nella quale C_f è funzione del regime di moto ed è normalmente espresso tramite correlazioni (vedere al par. I.1.6.1).

Il termine

$$\int_l \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}_\Sigma}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} d l$$

relativo alla potenza scambiata fra il fluido ed il suo contenitore, è di solito espresso nella forma

$$\int_l \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}_\Sigma}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} d l = \frac{q \omega}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} \quad (\text{I.1.1.26})$$

nella quale la potenza scambiata per unità di superficie q è calcolata per mezzo di correlazioni (vedere I.1.6.2).

N.B. Avvertenza riguardante la simbologia.

Per una generica grandezza f la notazione \tilde{f} designa il suo valore locale istantaneo, \bar{f} il suo valore locale medio nell'intervallo temporale Δt (vedasi la I.1.1.5) e \tilde{f}' la sua variazione locale istantanea rispetto al valore medio locale.

$$\tilde{f} = f + \tilde{f}'$$

con

$$\int_{\Delta t} \tilde{f}' dt = 0$$

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.1.2

Equazioni di conservazione per gli efflussi monodimensionali. Deduzione euristica.

Le equazioni possono essere dedotte sia utilizzando il punto di vista Euleriano in cui viene fissato un volume di controllo nel tubo di fluido, sia utilizzando il punto di vista Lagrangiano in cui viene seguita la massa di fluido M limitata dalle superfici Σ_1 e Σ_2 di Fig.1 nel suo spostamento durante il tempo $d t$.

$$\Sigma_1, \Sigma_2 \rightarrow \Sigma'_1, \Sigma'_2$$

Noi utilizzeremo quest'ultimo approccio.

Le ascisse x e $x + \Delta x$ che delimitano la porzione di fluido di cui seguiamo l'evoluzione nel tempo e nello spazio risultano funzioni del tempo :

$$x(t) \text{ e } \{x(t) + \Delta x(t)\} \quad \text{sono le ascisse di } C_1 \text{ e } C_2$$

$$x(t + \Delta t) \text{ e } \{x(t + \Delta t) + \Delta x(t + \Delta t)\} \quad \text{sono le ascisse di } C'_1 \text{ e } C'_2$$

In Fig. 1 è anche rappresentato il fatto che, in generale, la tubazione può deformarsi nel tempo

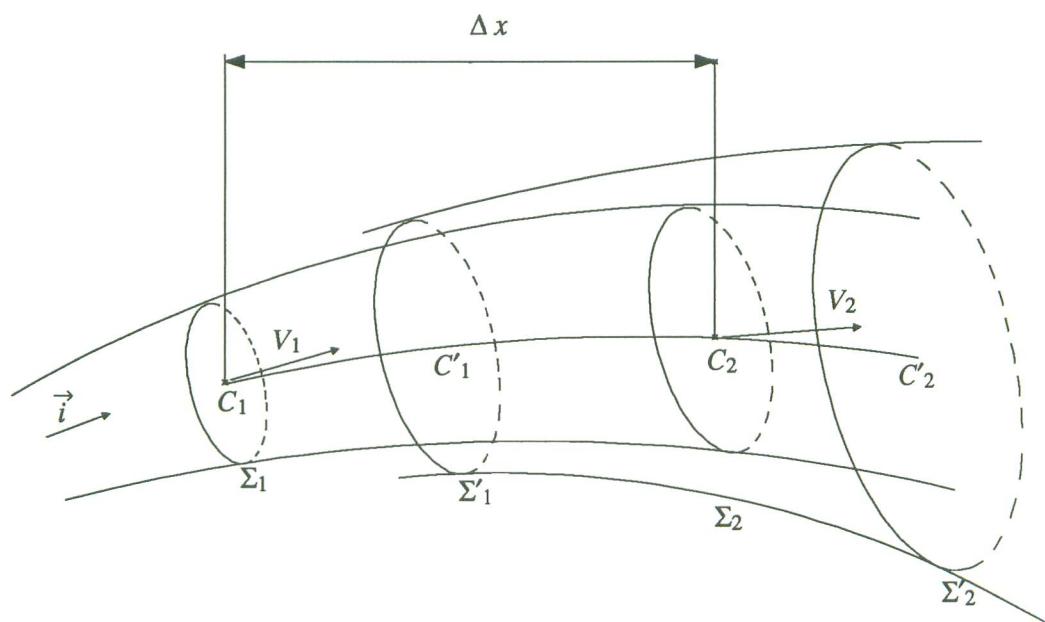


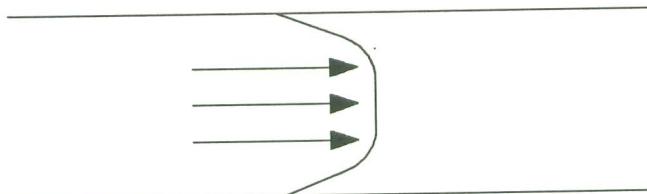
Fig. 1

Nel seguito useremo il teorema di derivazione sotto il segno di integrale:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(\xi, t) d\xi = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial t} d\xi + f(x_2, t) \frac{dx_2}{dt} - f(x_1, t) \frac{dx_1}{dt} \quad (\text{I.1.2.1})$$

Supporremo valide le solite ipotesi:

- 1) La pressione è uniforme in una sezione trasversale.
 - 2) Il vettore velocità è orientato secondo l'asse x .
 - 3) Le relazioni termodinamiche di equilibrio restano applicabili ai valori medi dell'efflusso su una sezione trasversale.
Ciò permette allora di definire la temperatura media
- $$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{p=cost}$$
- 4) Gli scambi termici avvengono per convezione tra parete e fluido.
 - 5) Le forze di attrito dovute alla viscosità sono localizzate alla parete. Ciò è giustificato dal profilo di velocità in un efflusso turbolento.



- 6) L'unica forza di volume è quella di gravità.

I.1.2.1 Equazione di conservazione della massa

Il principio di conservazione della massa M impone che :

$$\frac{dM}{dt} = 0 \quad (\text{I.1.2.1.1})$$

cioè

$$\frac{d}{dt} \int_{x(t)}^{x(t) + \Delta x(t)} \rho(\xi, t) \Sigma(\xi, t) d\xi = 0 \quad (\text{I.1.2.1.2})$$

E per la (I.1.2.1) :

$$\int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial \rho \Sigma}{\partial t} dx + \rho(x + \Delta x) \Sigma(x + \Delta x) V(x + \Delta x) - \rho(x) \Sigma(x) V(x) = 0 \quad (\text{I.1.2.1.3})$$

per

$$\Delta x \rightarrow 0$$

si ha

$$\frac{\partial \rho \Sigma}{\partial t} dx + \left(\rho(x) + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) \left(\Sigma(x) + \frac{\partial \Sigma}{\partial x} dx \right) \left(V(x) + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) - \rho(x) \Sigma(x) V(x) = 0 \quad (\text{I.1.2.1.4})$$

da cui trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo:

$\frac{\partial \rho \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial \rho \Sigma V}{\partial x} = 0$

(I.1.2.1.5)

se poi Σ è costante

$$\frac{\partial \rho V}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.1.2.1.6})$$

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.1.2.2 Equazione di conservazione della quantità di moto

La legge di conservazione della quantità di moto applicata alla massa M stabilisce che:

$$\frac{dM\vec{V}}{dt} = \int \vec{F} \quad (\text{I.1.2.2.1})$$

$$\frac{d}{dt} \int_{x(t)}^{x(t) + \Delta x(t)} \rho(\xi, t) \Sigma(\xi, t) \vec{V}(\xi, t) d\xi = \int \vec{F} \quad (\text{I.1.2.2.2})$$

\vec{F} sono le forze esterne che agiscono sulla massa M .

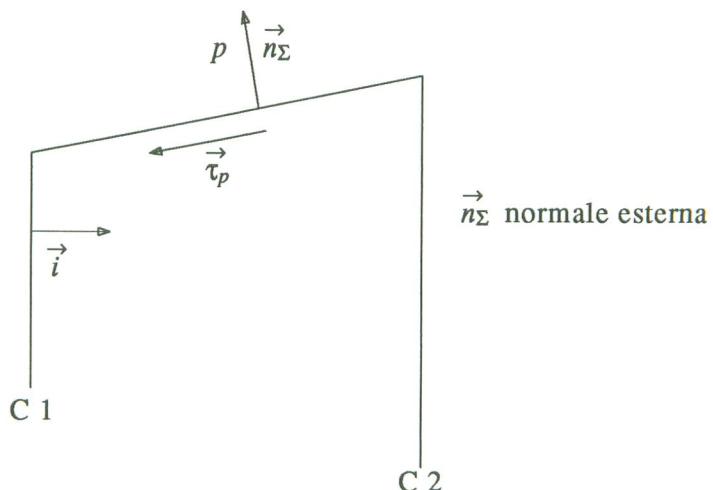
Proiettiamo questa equazione sull'asse dell'efflusso di versore \vec{i} .

Per la (I.1.2.1) la (I.1.2.2.2) diviene:

$$\int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial \rho \Sigma V}{\partial t} d\xi + \rho(x + \Delta x) \Sigma(x + \Delta x) V^2(x + \Delta x) - \rho(x) \Sigma(x) V^2(x) = \int \vec{F} \cdot \vec{i} \quad (\text{I.1.2.2.3})$$

Il bilancio delle forze esterne si stabilisce come segue:

- Forza di pressione in ingresso: $p_1 \Sigma_1$
- Forza di pressione in uscita: $-p_2 \Sigma_2$
- Forza di pressione esercitata sulla superficie laterale Σ_e : $\int_{\Sigma_e} p \vec{n}_\Sigma \cdot \vec{i} d\Sigma_e$



– Forza di attrito:

come già detto supponiamo che essa si eserciti sotto forma di una forza tangenziale alla parete $\vec{\tau}_p$. Il suo valore è

$$\int_{\Sigma_e} \vec{\tau}_p \cdot \vec{i} d\Sigma_e$$

– Forza di volume:

$$M \vec{g} \cdot \vec{i}$$

Possiamo allora scrivere:

$$\begin{aligned} & \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial \rho \Sigma V}{\partial t} d\xi + \rho(x + \Delta x) \Sigma(x + \Delta x) V^2(x + \Delta x) - \rho(x) V^2 \Sigma(x)(x) = \\ & p_1 \Sigma_1 - p_2 \Sigma_2 - \int_{\Sigma_e} p \vec{n}_{\Sigma} \cdot \vec{i} d\Sigma_l + \int_{\Sigma_e} \vec{\tau}_p \cdot \vec{i} d\Sigma_e + M \vec{g} \cdot \vec{i} \end{aligned} \quad (\text{I.1.2.2.4})$$

per

$$\Delta x \rightarrow 0$$

si ha:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho \Sigma V}{\partial t} dx + \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) \left(\Sigma + \frac{\partial \Sigma}{\partial x} dx \right) \left(V^2 + \frac{\partial V^2}{\partial x} dx \right) - \rho(x) \Sigma(x) V^2(x) = \\ & p \Sigma - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \left(\Sigma + \frac{\partial \Sigma}{\partial x} dx \right) - p \vec{n} \cdot \vec{i} d\Sigma_e + \vec{\tau}_p \cdot \vec{i} d\Sigma_e + \Sigma \rho dx \vec{g} \cdot \vec{i} \end{aligned} \quad (\text{I.1.2.2.5})$$

ma

$$-\vec{n}_{\Sigma} \cdot \vec{i} d\Sigma_e = \frac{\partial \Sigma}{\partial x} dx \quad (\text{I.1.2.2.6})$$

$$\vec{\tau}_p \cdot \vec{i} d\Sigma_e = |\vec{\tau}_p| \bar{\omega} dx \quad (\text{I.1.2.2.7})$$

dove $\bar{\omega}$ è il perimetro interno del tubo

$$\frac{\partial}{\partial t} \Sigma \rho V dx + \frac{\partial}{\partial x} \rho \Sigma V^2 dx = -\frac{\partial p \Sigma}{\partial x} dx + p \frac{\partial \Sigma}{\partial x} dx + |\vec{\tau}_p| \bar{\omega} dx + \Sigma \rho \vec{g} \cdot \vec{i} dx \quad (\text{I.1.2.2.8})$$

cioè:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Sigma \rho V + \frac{\partial}{\partial x} \rho \Sigma V^2 + \Sigma \frac{\partial p}{\partial x} - |\vec{\tau}_p| \bar{\omega} - \Sigma \rho \vec{g} \cdot \vec{i} = 0$$

(I.1.2.2.9)

Il termine $|\vec{\tau}_p|$ è dato in genere da una correlazione che si può mettere nella forma:

$$|\vec{\tau}_p| = - \frac{C_f \rho |V| |V|}{2} \quad (\text{I.1.2.2.10})$$

valida per regime turbolento.

La presenza di $|V| |V|$ si spiega per il fatto che il senso di moto può invertirsi.

C_f è il coefficiente di attrito.

Se la sezione Σ è costante si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho V + \frac{\partial}{\partial x} \rho V^2 + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{C_f \rho |V| |V|}{2 r_H} - \rho \vec{g} \cdot \vec{i} = 0 \quad (\text{I.1.2.2.11})$$

dove

$$r_H = \frac{\Sigma}{\bar{\omega}}$$

In questa equazione, il primo termine rappresenta l'accelerazione del fluido, il secondo la variazione nello spazio del flusso di quantità di moto, il terzo le forze di pressione, il quarto quelle di attrito per moti turbolenti e l'ultimo le forze di gravità.

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.1.2.2.1 Equazione di conservazione dell'energia meccanica

Notiamo dapprima che:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Sigma \rho \frac{V^2}{2} = \Sigma \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{V^2}{2} + \frac{V^2}{2} \frac{\partial \Sigma \rho}{\partial t} = \Sigma \rho V \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V^2}{2} \frac{\partial \Sigma \rho}{\partial t} \quad (\text{I.1.2.2.1.1})$$

cioè

$$\frac{\partial}{\partial t} \Sigma \rho \frac{V^2}{2} = V \frac{\partial \Sigma \rho V}{\partial t} + \left(\frac{V^2}{2} - V^2 \right) \frac{\partial \Sigma \rho}{\partial t} = V \frac{\partial \Sigma \rho V}{\partial t} - \frac{V^2}{2} \frac{\partial \Sigma \rho}{\partial t} \quad (\text{I.1.2.2.1.2})$$

e analogamente

$$\frac{\partial}{\partial x} \Sigma \rho V \frac{V^2}{2} = V \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \rho V^2 - \frac{V^2}{2} \frac{\partial \Sigma \rho V}{\partial x} \quad (\text{I.1.2.2.1.3})$$

Moltiplicando ora ambo i membri della (I.1.2.2.9) per V , usando la (I.1.2.2.1.2) e (I.1.2.2.1.3) e l'equazione di conservazione della massa si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Sigma \rho \frac{V^2}{2} + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \rho V \frac{V^2}{2} + \Sigma V \frac{\partial p}{\partial x} - |\vec{\tau}_p| \vec{\omega} \cdot \vec{V} - \Sigma \rho \vec{g} \cdot \vec{i} V = 0$$

(I.1.2.2.1.4)*

Dalla (I.1.2.2.1.4), in regime stazionario, trascurando il termine di attrito e di gravità e per sezioni a portata massica costante

$$(W = \Sigma \rho V = \text{cost})$$

si ha:

$$W \frac{\partial}{\partial x} \frac{V^2}{2} + \frac{W}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.1.2.2.1.5})$$

cioè, se anche la densità è costante

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{cost} \quad (\text{Teorema di Bernoulli}) \quad (\text{I.1.2.2.1.6})$$

* Immaginando un volume di controllo finito il primo termine della (I.2.2.1.4) rappresenta l'accumulo di energia cinetica, il secondo il bilancio tra l'energia cinetica entrante e uscente.

Nel loro insieme, riferendosi all'approccio Lagrangiano rappresentano la variazione di energia cinetica intervenuta su una porzione di fluido in movimento.

L'ultimo termine corrisponde alla variazione di energia potenziale. Quindi i tre termini considerati traducono per i fluidi l'analogo principio di conservazione dell'energia meccanica per un punto materiale. I termini di pressione e di attrito sono legati al lavoro di forze superficiali.

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.1.2.3 Equazione di conservazione dell'energia

Applichiamo il primo principio della termodinamica alla massa di fluido M :

$$\frac{d}{dt} \left(M U + \frac{1}{2} M V^2 + M g z \right) = \frac{d \mathcal{L}}{dt} + \frac{d Q}{dt} \quad (\text{I.1.2.3.1})$$

dove $d \mathcal{L}$ è il lavoro compiuto dalle forze di contatto agenti sulla massa M nel tempo dt e $d Q$ è il calore ricevuto nel tempo dt .

Per la (I.1.2.1) la (I.1.2.3.1) diviene:

$$\begin{aligned} & \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \Sigma \left(U + \frac{V^2}{2} + g z \right) \right\} d\xi + \\ & \rho(x+\Delta x) \Sigma(x+\Delta x) \left[U(x+\Delta x) + \frac{1}{2} V^2(x+\Delta x) + g z(x+\Delta x) \right] V(x+\Delta x) + \\ & \rho(x) \Sigma(x) \left[U(x) + \frac{1}{2} V^2(x) + g z(x) \right] \cdot V(x) = \frac{d \mathcal{L}}{dt} + \frac{d Q}{dt} \end{aligned} \quad (\text{I.1.2.3.2})$$

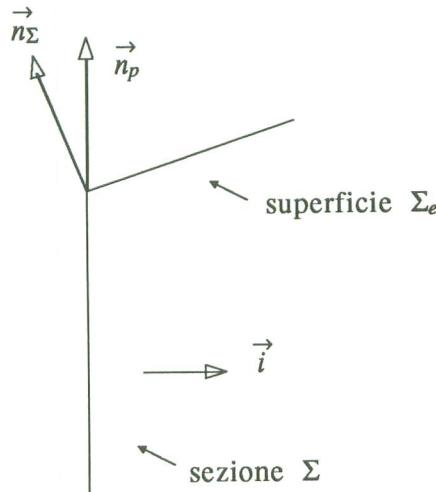
Valutiamo il lavoro delle forze che agiscono sulla massa M :

- Forza di pressione in ingresso: $p_1 \Sigma_1 V_1 dt$
- Forza di pressione in uscita: $p_2 \Sigma_2 V_2 dt$
- Pressione sulla superficie laterale se la parete è deformabile: $- \int_{\nu} p d\nu$
- Forza di attrito: Il lavoro delle forze di attrito è nullo essendo nulla la velocità del fluido alla parete.

La (I.1.2.3.2) diventa, facendo tendere $\Delta x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \Sigma \left(U + \frac{V^2}{2} + g z \right) \right\} + \left(\rho \Sigma V + \frac{\partial \rho \Sigma V}{\partial x} dx \right) \\ & \cdot \left\{ \left(U + \frac{\partial U}{\partial x} dx \right) + \frac{1}{2} \left(V^2 + \frac{\partial V^2}{\partial x} dx \right) + g \left(z + \frac{\partial z}{\partial x} dx \right) \right\} - \rho \Sigma V \left\{ U + \frac{1}{2} V^2 + g z \right\} = \\ & \int_{\Sigma_e} q d\Sigma_e + p \Sigma V - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \left(\Sigma + \frac{\partial \Sigma}{\partial x} dx \right) \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) - p \frac{\partial \Sigma}{\partial t} dx \end{aligned} \quad (\text{I.1.2.3.3})$$

q è il flusso di calore per unità di superficie e di tempo



\vec{n}_p è la normale al contorno C nel piano della sezione trasversale Σ . Si nota allora che:

$$d\Sigma_e = \frac{dl}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dx \quad (\text{I.1.2.3.4})$$

$$\int_{\Sigma_e} q d\Sigma_e = \int_C \frac{q}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dl dx = \frac{q}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} \bar{\omega} dx \quad (\text{I.1.2.3.5})$$

In questa trattazione si è tenuto conto del solo calore che può entrare nel fluido attraverso la sua superficie laterale Σ_l considerando trascurabile quello associato alla diffusione che transita nella direzione del moto. *

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo la (I.1.2.3.3) diventa:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \rho \Sigma \left(U + \frac{V^2}{2} + gz \right) + \frac{\partial}{\partial x} \rho \Sigma V \left(U + \frac{V^2}{2} + gz \right) = \\ & \frac{q \bar{\omega}}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} - \frac{\partial}{\partial x} \Sigma p V - p \frac{\partial \Sigma}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{I.1.2.3.6})$$

Tenendo conto della definizione di entalpia:

$$H = U + \frac{p}{\rho}$$

la (I.1.2.3.6) diventa

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \Sigma \left(H + \frac{V^2}{2} + gz \right) + \frac{\partial}{\partial x} \rho \Sigma V \left(H + \frac{V^2}{2} + gz \right) - \Sigma \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{q \bar{\omega}}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} \quad (\text{I.1.2.3.7})$$

* Esso non dipende dal moto del fluido ma solo dai gradienti di temperatura lungo l'ascissa curvilinea.

Il primo termine della (I.1.2.3.7), tenendo conto dell'equazione di conservazione della massa (I.1.2.3.5) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \Sigma \left(H + \frac{V^2}{2} + g z \right) = \rho \Sigma \frac{\partial}{\partial t} \left(H + \frac{V^2}{2} + g z \right) - \left(H + \frac{V^2}{2} + g z \right) \frac{\partial \rho \Sigma V}{\partial x} \quad (\text{I.1.2.3.8})$$

Sostituendo la (I.1.2.3.8) nella (I.1.2.3.7) in cui si sia eseguita la derivata rispetto ad x del prodotto che compare e poichè, per definizione:

$$r_H = \frac{\Sigma}{\omega}$$

si ottiene, dopo aver diviso la (I.1.2.3.7) per Σ

$$\left[\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(H + \frac{V^2}{2} + g z \right) + \rho V \frac{\partial}{\partial x} \left(H + \frac{V^2}{2} + g z \right) - \frac{\partial p}{\partial t} \right] = \frac{q}{r_H \vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} \quad (\text{I.1.2.3.9})$$

In questa equazione il termine sotto derivata temporale rappresenta la variazione dell'energia totale nel tempo, quello sotto derivata spaziale rappresenta il trasporto di energia e il terzo termine il lavoro delle forze di pressione. A secondo membro è messo in evidenza il flusso termico.

Questa formulazione, in cui non compare Σ , è valida per Σ costante o no.

Notiamo che:

$$g z = - \vec{g} \cdot \vec{i} x \quad (\text{I.1.2.3.10})$$

per cui, nella (I.1.2.3.9):

$$\frac{\partial g z}{\partial t} = - \frac{\partial x}{\partial t} \vec{g} \cdot \vec{i} = 0$$

perchè x e t sono le due variabili indipendenti.

Introdotta la notazione di derivata sostanziale:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{I.1.2.3.11})$$

la (I.1.2.3.9) diventa:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(H + \frac{V^2}{2} + g z \right) - \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{q}{r_H \vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} \quad (\text{I.1.2.3.12})$$

Se si vuol tener conto della diffusione longitudinale del calore nel fluido, nel 2° membro della (I.1.2.3.9) va aggiunto il termine

$$+ \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

dove λ è la conducibilità del fluido.

I.1.2.3.1 Equazione dell'energia scritta in entropia

Sottraendo dall'equazione dell'energia nella forma (I.1.2.3.7) quella dell'energia meccanica (I.1.2.2.1.4) si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \rho V H + \frac{\partial}{\partial t} \Sigma \rho H - \Sigma \left(\frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \mid \vec{\tau}_p \mid \bar{\omega} V + \Sigma \rho \vec{g} \cdot \vec{i} V \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \rho \Sigma V g z + \frac{\partial}{\partial t} \rho \Sigma g z = \frac{q \bar{\omega}}{\vec{n}_{\Sigma} \cdot \vec{n}_p} \end{aligned} \quad (\text{I.1.2.3.1.1})$$

Notiamo che, per l'equazione di conservazione della massa, e per le (I.1.2.3.10) e (I.1.2.3.11)

$$\Sigma \rho \vec{g} \cdot \vec{i} V + \frac{\partial \rho \Sigma g z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho \Sigma V g z = \Sigma \rho \vec{g} \cdot \vec{i} V + \rho \Sigma \frac{\partial g z}{\partial t} - \rho \Sigma V \vec{g} \cdot \vec{i} = 0 \quad (\text{I.1.2.3.1.2})$$

per cui la (I.1.2.3.1.1.) diviene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Sigma \rho V H + \frac{\partial}{\partial t} \Sigma \rho H - \Sigma \left(\frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{q \bar{\omega}}{\vec{n}_{\Sigma} \cdot \vec{n}_p} - \mid \vec{\tau}_p \mid \bar{\omega} V \quad (\text{I.1.2.3.1.3})$$

Usando ancora l'equazione di conservazione della massa:

$$\Sigma \rho V \frac{\partial H}{\partial x} + \Sigma \rho \frac{\partial H}{\partial t} - \Sigma \left(\frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{q \bar{\omega}}{\vec{n}_{\Sigma} \cdot \vec{n}_p} - \mid \vec{\tau}_p \mid \bar{\omega} V \quad (\text{I.1.2.3.1.4})$$

Per definizione di entalpia:

$$H = U + p V \quad (\text{I.1.2.3.1.5})$$

$$dH = dU + p dV + V dp \quad (\text{I.1.2.3.1.6})$$

e per il primo principio

$$dU + p dV = dQ = T dS \quad (\text{I.1.2.3.1.7})$$

$$dH = T dS + V dp \quad (\text{I.1.2.3.1.8})$$

cioè

$$dH = T dS + \frac{dp}{\rho} \quad (\text{I.1.2.3.1.9})$$

ed introducendo la derivata sostanziale, la (I.1.2.3.1.4), tenuto conto della (I.1.2.3.1.9) diviene

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \frac{q}{r_H \vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} + \frac{C_f \rho |V|^2 + V|}{2 r_H} \quad (\text{I.1.2.3.1.10})$$

con

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + V \frac{\partial S}{\partial x} \quad (\text{I.1.2.3.1.11})$$

I.1.3 Equazioni di conservazioni per efflussi di miscela acqua-vapore

I.1.3.1 Introduzione

Una caratteristica peculiare delle miscele bifase⁽¹⁾ è la presenza di una o più interfacce che separano le fasi stesse. Volendo utilizzare per l'analisi del moto di un fluido bifase i consueti metodi della meccanica dei fluidi, l'efflusso bifase può essere considerato come un campo di moto suddiviso in regioni a confini mobili nelle quali è presente una sola fase. In ciascuna di tali regioni sono valide le equazioni di conservazione dei fluidi monofase con le appropriate condizioni alle interfacce. Pertanto è teoricamente possibile formulare un problema di efflusso bifase in termini delle variabili locali instantanee, ma le difficoltà matematiche che si riscontrano sono spesso insormontabili, dovute principalmente alla esistenza di interfacce mobili, il movimento delle quali è incognito, ed alla esistenza di fluttuazioni delle variabili dovute alla turbolenza ed al movimento delle interfacce. Nella grande maggioranza dei problemi d'ingegneria non è però necessario conoscere i dettagli microscopici del moto del fluido, bensì gli aspetti macroscopici del suo comportamento⁽³⁾.

Tramite opportune operazioni di media si possono ottenere valori medi delle variabili che caratterizzano il moto del fluido non influenzati dalle fluttuazioni locali istantanee.

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.1.3.2 Equazioni di conservazione fra le variabili "medie"

Il calcolare i valori medi in un certo intervallo di tempo delle grandezze che caratterizzano lo stato del fluido in una miscela bifase si propone due obiettivi:

- eliminare le fluttuazioni di tali grandezze dovute alla turbolenza, analogamente a quanto si fa nel caso di fluidi monofase.
- poter trattare le due fasi, che vanno alternativamente occupando un elemento di volume, come due mezzi continui presenti simultaneamente nello stesso punto con una definita probabilità di presenza per ogni fase.

Si scelga quindi un intervallo di tempo Δt sufficientemente grande per smorzare le variazioni delle variabili ma molto piccolo rispetto alle costanti di tempo macroscopiche della dinamica dei fenomeni fisici.

Supponendo che le interfacce fra le fasi abbiano uno spessore finito δ tendente a zero e considerando un punto qualunque risulterà che nell'intervallo di tempo Δt esso è circondato per un tempo Δt_T da una fase continua e per un tempo Δt_s da una interfaccia con

$$\Delta t = \Delta t_T + \Delta t_s \quad (\text{I.1.3.2.1})$$

$$\Delta t_T = \Delta t_l + \Delta t_v \quad (\text{I.1.3.2.2})$$

È così possibile definire il grado locale di vuoto α_k della fase k nel punto x_0 all'istante t_0 come la densità media di presenza della fase k in quel punto durante l'intervallo di tempo Δt nell'intorno dell'istante t_0 .

Tralasciando i passaggi matematici risulta, ricordando che $\lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta t_s = 0$

$$\text{per } t \in \left[t_0 - \frac{\Delta t}{2}, t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right]$$

$$\alpha_k(x_0, t_0) = \frac{\Delta t_k}{\Delta t} \quad (\text{I.1.3.2.3})$$

ed è

$$\alpha_l + \alpha_v = 1 \quad (\text{I.1.3.2.4})$$

Utilizzando tale definizione, si vogliono ottenere le equazioni di conservazione relative ai valori medi delle variabili che caratterizzano lo stato del fluido ^{(1),(2)}.

Le equazioni locali istantanee sono sotto riportate per ogni fase

- $k = v$ fase vapore
- $k = l$ fase liquido
- $k = i$ interfaccia

Equazione di conservazione della massa:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_k}{\partial t} + \operatorname{div} \tilde{\rho}_k \vec{V}_k = 0 \quad (\text{I.1.3.2.5})$$

per l'interfaccia

$$\tilde{\rho}_v (\vec{V}_v - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_v + \tilde{\rho}_l (\vec{V}_l - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_l = 0 \quad (\text{I.1.3.2.6})$$

Equazione di conservazione della quantità di moto:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_k \vec{V}_k}{\partial t} + \operatorname{div} (\tilde{\rho}_k \vec{V}_k \otimes \vec{V}_k - \vec{\tau}_k) - \tilde{\rho}_k \vec{F} + \operatorname{grad} \tilde{\rho}_k = 0 \quad (\text{I.1.3.2.7})$$

per l'interfaccia

$$[\tilde{\rho}_v \vec{V}_v \otimes (\vec{V}_v - \vec{V}_i) - \vec{\zeta}_v] \cdot \vec{n}_v + [\tilde{\rho}_l \vec{V}_l \otimes (\vec{V}_l - \vec{V}_i) - \vec{\zeta}_l] \cdot \vec{n}_l + \vec{\sigma} = 0 \quad (\text{I.1.3.2.8})^*$$

dove $\vec{\sigma}$ è un vettore dovuto alla forza di tensione superficiale e

$$\vec{\zeta}_k = - \tilde{\rho}_k \vec{I} + \vec{\tau}_k$$

Equazione di conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{\rho}_k (\tilde{U}_k + \frac{1}{2} \tilde{V}_k^2)] + \operatorname{div} [\tilde{\rho}_k (\tilde{U}_k + \frac{1}{2} \tilde{V}_k^2) \cdot \vec{V}_k - \vec{\zeta}_k \cdot \vec{V}_k + \vec{q}_k] \\ - \tilde{\rho}_k \vec{F} \cdot \vec{V}_k = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.1.3.2.9})$$

per l'interfaccia

$$\frac{d_s \tilde{U}_i}{d t} + \tilde{U}_i \operatorname{div}_s \vec{V}_i = S_k [\tilde{\rho}_k \vec{n}_k \cdot (\vec{V}_k - \vec{V}_i) (\tilde{U}_k + \frac{\tilde{V}_k^2}{2}) + \vec{n}_k (\vec{q}_k - \vec{\zeta}_k \cdot \vec{V}_k)] + \vec{\sigma}' \quad (\text{I.1.3.2.10})^{**}$$

dove $\vec{\sigma}'$ dipende da $\vec{\sigma}$ e \vec{V}_i

Si mediano rispetto al tempo tutti i termini delle equazioni locali istantanee nella maniera seguente (ricordando anche che $\lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta t = \Delta t_T$)

$$F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t_T} \tilde{F} (x_0, t) dt \quad (\text{I.1.3.2.11})$$

* Il simbolo \otimes designa il prodotto tensoriale di due vettori $\vec{V} = (v_i)$ e $\vec{W} = (w_i)$ definito come
 $\vec{\tau} = \vec{V} \otimes \vec{W} = (v_i w_i)$

** I simboli d_s/dt e div_s designano rispettivamente la derivata convettiva e la divergenza superficiale, definite in (6). Il metodo per ottenere la (I.1.3.2.10) è illustrato in (1), parte prima, par. II.2.1.

dove F è di volta in volta la densità ρ_k , la pressione p_k , il flusso termico \vec{q}_k ed il tensore degli sforzi τ_k .

Si definiscono poi la velocità media \vec{V}_k , l'energia interna media U_k , l'entalpia media H_k e l'entropia media S_k tramite la relazione

$$\rho_k(x_0, t_0) \Psi_k(x_0, t_0) = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{\Delta t_k} \tilde{\rho}_k(x_0, t) \tilde{\Psi}_k(x_0, t) dt \quad (\text{I.1.3.2.12})$$

con

$$\Psi = \vec{V}, U, H, S.$$

e si verifica che la relazione

$$H_k = U_k + \frac{p_k}{\rho_k} \quad (\text{I.1.3.2.13})$$

è ancora valida.

Si suppone inoltre che le fluttuazioni delle variabili siano sufficientemente piccole rispetto alle loro variazioni macroscopiche da poter ammettere che esistano fra le variabili di stato medie le stesse relazioni che fra le variabili istantanee, ed in particolare

$$U_k = U_k(S_k, \rho_k)$$

Si definisce la temperatura media T_k come

$$T_k = \left. \frac{\partial U_k}{\partial S_k} \right|_{\rho_k = \text{cost}} \quad (\text{I.1.3.2.14})$$

Si suppone che la pressione media p_k sopra definito verifichi la relazione

$$p_k = - \left. \frac{\partial U_k}{\partial \frac{1}{\rho_k}} \right|_{S_k = \text{cost}} \quad (\text{I.1.3.2.15})$$

e che sia verificata anche la relazione

$$dU_k = T_k dS_k - p_k d\left(\frac{1}{\rho_k}\right) \quad (\text{I.1.3.2.16})$$

Valgono allora

$$U_k = U_k(p_k, T_k) \quad (\text{I.1.3.2.17})$$

$$\rho_k = \rho_k(p_k, T_k) \quad (\text{I.1.3.2.18})$$

$$H_k = H_k(p_k, T_k) \quad (\text{I.1.3.2.19})$$

$$G_k = H_k - T_k S_k \quad (\text{I.1.3.2.20})$$

Si ipotizza inoltre che le fluttuazioni delle variabili intorno ai valori medi

$$\tilde{\rho}_k = \rho_k + \tilde{\rho}'_k \quad (\text{I.1.3.2.21})$$

$$\tilde{\Psi}_k = \Psi_k + \tilde{\Psi}'_k \quad (\text{I.1.3.2.22})$$

con

$$\tilde{\Psi}_k = \vec{V}_k, \tilde{U}_k, \tilde{H}_k, \tilde{S}_k$$

abbiano valor medio nullo nell'intervallo Δt_k

$$\int_{\Delta t_k} \tilde{\rho}'_k dt = 0 \quad (\text{I.1.3.2.23})$$

e

$$\int_{\Delta t_k} \tilde{\rho}_k \tilde{\Psi}'_k dt = 0 \quad (\text{I.1.3.2.24})$$

mentre è

$$\rho_k \Psi'_k \vec{V}'_k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{\Delta t_k} \tilde{\rho}_k \tilde{\Psi}'_k \vec{V}'_k dt \neq 0 \quad (\text{I.1.3.2.25})$$

Eseguendo sulle equazioni locali istantanee le operazioni di media sull'intervallo Δt e sostituendo con esse le variabili medie sopra definite si ottiene per ogni fase ($k = 1$ oppure $k = v$)

Equazione di conservazione della massa:

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div} \alpha_k \rho_k \vec{V}_k = \Gamma_k \quad (\text{I.1.3.2.26})$$

con

$$\Gamma_v + \Gamma_l = 0 \quad (\text{I.1.3.2.27})$$

Equazione di conservazione della quantità di moto:

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k \vec{V}_k}{\partial t} + \vec{\operatorname{div}} \left[\alpha_k \left(\rho_k \vec{V}_k \otimes \vec{V}_k - \vec{\tau}_k + \vec{\tau}_k^T \right) \right] + \vec{\operatorname{grad}} \alpha_k p_k - \alpha_k \rho_k \vec{F} = \vec{M}_k \quad (\text{I.1.3.2.28})$$

dove $\vec{\tau}_k^T$ è il contributo al tensore degli sforzi dovuto alla turbolenza ed \vec{M}_k è la quantità di moto scambiata attraverso l'interfaccia, tale che

$$\vec{M}_l + \vec{M}_v = 0 \quad (\text{I.1.3.2.29})$$

Equazione di conservazione dell'energia:

posto

$$U_k^* = U_k + \frac{\vec{V}'_k^2}{2} \quad (\text{I.1.3.2.30})$$

è

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\alpha_k \rho_k \left(U_k^* + \frac{V_k^2}{2} \right) \right] + \operatorname{div} \left[\alpha_k \left(\rho_k \left(U_k^* + \frac{V_k^2}{2} \right) \vec{V}_k + \vec{q}_k + \vec{q}_k^T - \bar{\bar{C}}_k \cdot \vec{V}_k \right) \right] - \alpha_k \rho_k \vec{F} \cdot \vec{V}_k = E_k \quad (\text{I.1.3.2.31})$$

dove \vec{q}_k^T è il flusso di calore turbolento ed E_k è l'energia scambiata attraverso l'interfaccia, tale che

$$E_l + E_v = 0 \quad (\text{I.1.3.2.32})$$

Al sistema formato dalle precedenti sei equazioni si devono aggiungere le relazioni

$$\alpha_l + \alpha_v = 1 \quad (\text{I.1.3.2.33})$$

e quelle che definiscono :

- il tensore degli sforzi dovuti all'viscosità $\bar{\bar{C}}_k$
- il flusso termico \vec{q}_k
- il tensore degli sforzi dovuto alla turbolenza $\tau_k^{=T}$
- il flusso di calore turbolento \vec{q}_k^T
- le forze di volume \vec{F}
- gli scambi di massa Γ_k , di quantità di moto \vec{M}_k e di energia E_k all'interfaccia
- l'energia cinetica dovuta alla turbolenza $U_k^* - U_k$
- una condizione di cambiamento di fase che specifichi la temperatura dell'interfaccia T_i
- una condizione d'interfaccia che dia una relazione fra p_v e p_l
- le equazioni di stato termodinamico.

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.1.3.3 Modello di efflusso bifase " a due fluidi"

Le equazioni ottenute nel paragrafo precedente possono essere prese come base per un modello di efflusso bifase, ma a tale scopo esse vengono di solito semplificate, perché alcuni termini che in esse compaiono possono essere trascurati nella gran maggioranza dei casi.

Le ipotesi comunemente accettate sono le seguenti:

- le pressioni delle due fasi sono uguali
- gli sforzi e l'energia dovuti alla turbolenza sono trascurabili
- le forze di volume sono dovute solo alla gravità

Con queste ipotesi il sistema di equazioni assume la forma seguente:

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_k \rho_k \vec{V}_k) = \Gamma_k \quad (\text{I.1.3.3.1})$$

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k \vec{V}_k}{\partial t} + \operatorname{div} [\alpha_k (\rho_k \vec{V}_k \otimes \vec{V}_k - \bar{\tau}_k)] + \operatorname{grad} \alpha_k p - \alpha_k \rho_k \vec{g} = \vec{M}_k$$

(I.1.3.3.2)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\alpha_k \rho_k \left(U_k + \frac{\vec{V}_k^2}{2} \right) \right] + \operatorname{div} \left[\alpha_k \left(\rho_k \left(U_k + \frac{\vec{V}_k^2}{2} \right) \vec{V}_k + \vec{q}_k - \bar{\tau}_k \cdot \vec{V}_k + p \vec{V}_k \right) \right] \\ & - \alpha_k \rho_k \vec{g} \cdot \vec{V}_k = E_k \end{aligned} \quad (\text{I.1.3.3.3})$$

L'equazione di conservazione dell'energia può essere scritta sotto forma di bilancio entalpico

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \alpha_k \rho_k H_k}{\partial t} + \operatorname{div} [\alpha_k (\rho_k H_k \vec{V}_k + \vec{q}_k)] - \frac{D_k \alpha_k p}{Dt} - \alpha_k \bar{\tau}_k \odot \operatorname{grad} \vec{V}_k \\ & - \left(\frac{\vec{V}_k^2}{2} \Gamma_k - \vec{M}_k \cdot \vec{V}_k + E_k \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.1.3.3.4})^{**}$$

e, utilizzando la relazione

$$T_k D_k S_k = D_k H_k - \frac{1}{\rho_k} D_k p \quad , \quad (\text{I.1.3.3.5})$$

** Sono state utilizzate le seguenti notazioni matematiche:

- per ogni funzione F è

$$\frac{D_k F}{D t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{V}_k \cdot \operatorname{grad} F$$

- il simbolo \odot designa il prodotto scalare di due tensori $\bar{\tau} = (t_{ij})$ e $\bar{S} = (s_{ij})$ definito come

$$\bar{\tau} \odot \bar{S} = \sum_{ij} t_{ij} s_{ij}$$

di bilancio entropico

$$\alpha_k \rho_k T_k \frac{D_k S_k}{D t} - p \frac{D_k \alpha_k}{D t} + \text{div } \alpha_k \vec{q}_k - \alpha_k \bar{\tau}_k \odot \vec{\text{grad}} \vec{V}_k - \left[\Gamma_k \left(\frac{V_k^2}{2} - H_k \right) - \vec{M}_k \cdot \vec{V}_k + E_k \right] = 0 \quad (\text{I.1.3.3.6})$$

Le equazioni all'interfaccia sono

$$\alpha_l + \alpha_v = 1 \quad (\text{I.1.3.3.7})$$

$$\Gamma_l + \Gamma_v = 0 \quad (\text{I.1.3.3.8})$$

$$M_l + M_v = 0 \quad (\text{I.1.3.3.9})$$

$$E_l + E_v = 0 \quad (\text{I.1.3.3.10})$$

Il sistema è completato da relazioni che definiscono:

- il tensore degli sforzi dovuto alla viscosità $\bar{\tau}_k$
- il flusso termico \vec{q}_k
- gli scambi di massa Γ_k , di quantità di moto M_k e di energia E_k all'interfaccia
- le equazioni di stato termodinamiche.

I.1.3.4 Modello di miscela bifase

L'insieme delle due fasi può essere considerato come una miscela omogenea avente un certo numero di proprietà sue caratteristiche.

Esse vengono definite nella maniera seguente:

$$\text{densità} \quad \rho_m = \alpha_v \rho_v + \alpha_l \rho_l \quad (\text{I.1.3.4.1})$$

$$\text{flusso termico} \quad \vec{q}_m = \alpha_v \vec{q}_v + \alpha_l \vec{q}_l \quad (\text{I.1.3.4.2})$$

$$\text{tensore degli sforzi} \quad \bar{\bar{\tau}}_m = \alpha_v \bar{\bar{\tau}}_v + \alpha_l \bar{\bar{\tau}}_l \quad (\text{I.1.3.4.3})$$

La velocità media \vec{V} , l'energia interna U , l'entalpia H , l'entropia S sono definite da

$$\rho_m \Psi_m = \alpha_v \rho_v \Psi_v + \alpha_l \rho_l \Psi_l \quad (\text{I.1.3.4.4})$$

con

$$\Psi = \vec{V}, U, H, S$$

Dalla definizione di entalpia libera G

$$G = H - TS \quad (\text{I.1.3.4.5})$$

definendone il valore medio, analogamente e quanto fatto per l'entalpia e l'entropia, come

$$G_m = \frac{\alpha_v \rho_v G_v + \alpha_l \rho_l G_l}{\rho_m} \quad (\text{I.1.3.4.6})$$

si ottiene la temperatura media di miscela T_m

$$T_m = \frac{H_m - G_m}{S_m} \quad (\text{I.1.3.4.7})$$

Si può inoltre verificare che è ancora valida la relazione

$$H_m = U_m + \frac{p}{\rho_m} \quad (\text{I.1.3.4.8})$$

Sommendo a due a due le equazioni: (I.1.3.3.1), (I.1.3.3.2), (I.1.3.3.3), (I.1.3.3.4), (I.1.3.3.6) relative ad ogni fase e utilizzando le definizioni delle proprietà medie si ottengono le equazioni di conservazione per la miscela.

Equazione di conservazione della massa

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_m + \operatorname{div} \rho_m \vec{V}_m = 0 \quad (\text{I.1.3.4.9})$$

Equazione di conservazione della quantità di moto

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \rho_m \vec{V}_m + \operatorname{div} [\rho_m \vec{V}_m \otimes \vec{V}_m - \bar{\tau}_m] + \operatorname{grad} p - \vec{g} \cdot \rho_m \\ & + \operatorname{div} \frac{\alpha_v \alpha_l \rho_v \rho_l}{\rho_m} (\vec{V}_v - \vec{V}_l) \otimes (\vec{V}_v - \vec{V}_l) = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.1.3.4.10})$$

Equazione di conservazione dell'energia

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \rho_m \left(U_m + \frac{V_m^2}{2} \right) + \operatorname{div} \left[\rho_m \left(U_m + \frac{V_m^2}{2} \right) \vec{V}_m + \vec{q}_m - \bar{\tau}_m \cdot \vec{V}_m + p \vec{V}_m \right] - \rho_m \vec{g} \cdot \vec{V}_m \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\alpha_v \alpha_l \rho_v \rho_l}{2 \rho_m} (\vec{V}_v - \vec{V}_l)^2 + \operatorname{div} \frac{\alpha_v \alpha_l \rho_v \rho_l}{\rho_m} \\ & \cdot \left[\frac{\vec{V}_m}{2} \cdot (\vec{V}_v - \vec{V}_l)^2 + (\vec{V}_v - \vec{V}_l) \cdot \left(U_v + \frac{V_v^2}{2} - U_l - \frac{V_l^2}{2} \right) \right] \\ & - \operatorname{div} \frac{\alpha_v \alpha_l}{\rho_m} \left[\rho_l \bar{\tau}_v - \rho_v \bar{\tau}_l - p (\rho_l - \rho_v) \right] (\vec{V}_v - \vec{V}_l) = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.1.3.4.11})$$

Introducendo la definizione di titolo di vapore in massa X

$$X = \frac{\alpha_v \rho_v}{\rho_m} \quad (\text{I.1.3.4.12})$$

e sottraendo alla (I.1.3.4.11) la (I.1.3.4.10) moltiplicata per \vec{V} , l'equazione di conservazione dell'energia in termini di entalpia diventa

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \rho_m H_m + \operatorname{div} \rho_m H_m \vec{V}_m + \operatorname{div} \vec{q}_m - \left[\bar{\tau}_m - \rho_m X (1-X) (\vec{V}_v - \vec{V}_l) \otimes (\vec{V}_v - \vec{V}_l) \right] \\ & \cdot \operatorname{grad} \vec{V}_m - \frac{D p}{D t} + \rho_m \frac{D}{D t} X (1-X) \frac{(\vec{V}_v - \vec{V}_l)^2}{2} + \operatorname{div} \rho_m X (1-X) (1-2X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \frac{(\vec{V}_v - \vec{V}_l)^2}{2} (\vec{V}_v - \vec{V}_l) + \operatorname{div} \rho_m X (1 - X) (\vec{V}_v - \vec{V}_l) (H_v - H_l) - \operatorname{div} \rho_m \frac{X (1 - X)}{\rho_v \rho_l} \\
 & \cdot [\rho_l \bar{\tau}_v - \rho_v \bar{\tau}_l] (\vec{V}_v - \vec{V}_l) = 0 \tag{I.1.3.4.13}
 \end{aligned}$$

Esprimendo poi la (I.1.3.4.13) in termini di entropia si ottiene ⁽³⁾

$$\begin{aligned}
 & \rho_m T_m \frac{D}{Dt} S_m + \rho_m (G_v - G_l) \frac{D}{Dt} X - \rho_m (T_v - T_l) \\
 & \cdot \left[X \frac{S_v}{S_m} \frac{D}{Dt} (1 - X) S_l - (1 - X) \frac{S_l}{S_m} \frac{D}{Dt} X S_v \right] + \operatorname{div} \vec{q}_m \\
 & - \left[\bar{\tau}_m - \rho_m X (1 - X) (\vec{V}_v - \vec{V}_l) \otimes (\vec{V}_v - \vec{V}_l) \right] \odot \operatorname{grad} \vec{V}_m \\
 & + \rho_m \frac{D}{Dt} X (1 - X) \frac{(\vec{V}_v - \vec{V}_l)^2}{2} + \operatorname{div} \rho_m X (1 - X) (1 - 2X) \frac{(\vec{V}_v - \vec{V}_l)^2}{2} (\vec{V}_v - \vec{V}_l) \\
 & + \operatorname{div} \rho_m X (1 - X) (H_v - H_l) (\vec{V}_v - \vec{V}_l) - \operatorname{div} \frac{\rho_m X (1 - X)}{\rho_v \rho_l} \\
 & \cdot [\rho_l \bar{\tau}_v - \rho_v \bar{\tau}_l] (\vec{V}_v - \vec{V}_l) = 0 \tag{I.1.3.4.14}
 \end{aligned}$$

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.1.3.5 Efflussi bifase monodimensionali

Fra gli efflussi bifase sono di particolare importanza quelli nei quali il movimento macroscopico del fluido è in una sola direzione, come ad esempio nelle tubazioni. In questi casi si può definire la linea media dell'efflusso come asse delle ascisse di vettore unitario \vec{i} e stabilire le equazioni sui valori medi in una sezione retta⁽⁴⁾.

Si definisce un certo numero di valori medi spaziali nel punto d'ascissa x_0 ad ogni istante t_0 . Si suppone inoltre che le fluttuazioni delle diverse grandezze attorno ai loro valori medi in una sezione retta siano trascurabili.

Si pone

$$\iint_{\Sigma} \alpha_k(x_0, y, z, t_0) dy dz = \Sigma_k(x_0, t_0) \quad (\text{I.1.3.5.1})$$

Si noti che è

$$\Sigma_l + \Sigma_v = \Sigma \quad (\text{I.1.3.5.2})$$

poichè in ogni punto è

$$\alpha_l + \alpha_v = 1 \quad (\text{I.1.3.5.3})$$

Σ_k non è altro che la superficie della sezione retta occupata dalla fase k.

Si definisce il grado di vuoto medio $\bar{\alpha}_k$ all'istante t_0 nella sezione di ascissa x_0 come

$$\bar{\alpha}_k = \frac{\Sigma_k}{\Sigma} \quad (\text{I.1.3.5.4})$$

La pressione, che è stata supposta uguale per le due fasi, viene considerata la stessa su una sezione retta.

I valori medi spaziali delle varie grandezze sono

densità

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_k(x_0, t_0) &= \frac{1}{\Sigma_k} \iint_{\Sigma} \alpha_k(x_0, y, z, t_0) \\ &\cdot \rho_k(x_0, y, z, t_0) dy dz \end{aligned} \quad (\text{I.1.3.5.5})$$

flusso termico

$$\begin{aligned} \vec{q}(x_0, t_0) &= \frac{1}{\Sigma_k} \iint_{\Sigma} \alpha_k(x_0, y, z, t_0) \\ &\cdot \vec{q}(x_0, y, z, t_0) dy dz \end{aligned} \quad (\text{I.1.3.5.6})$$

tensori degli sforzi

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(x_0, t_0) &= \frac{1}{\Sigma_k} \iint_{\Sigma} \alpha_k(x_0, y, z, t_0) \\ &\cdot \bar{\tau}(x_0, y, z, t_0) dy dz \end{aligned} \quad (\text{I.1.3.5.7})$$

La velocità media \vec{V}_k , l'energia media \bar{U}_k , l'entalpia media \bar{H}_k l'entropia media \bar{S}_k sono dati da

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_k(x_0, t_0) \bar{\Psi}_k(x_0, t_0) &= \frac{1}{\Sigma_k} \iint_{\Sigma} \alpha_k(x_0, y, z, t_0) \rho_k(x_0, y, z, t_0) \\ &\cdot \Psi_k(x_0, y, z, t_0) dy dz \end{aligned} \quad (\text{I.1.3.5.8})$$

dove

$$\psi = \vec{V}, U, H, S$$

Si verifica che vale ancora la relazione

$$\bar{H}_k = \bar{U}_k + \frac{p}{\bar{\rho}_k} \quad (\text{I.1.3.5.9})$$

Facendo per le funzioni di stato termodinamiche le stesse ipotesi che per gli efflussi tridimensionali è

$$\bar{T}_k = \left(\frac{\partial \bar{U}_k}{\partial \bar{S}_k} \right) \bar{\rho}_k \quad (\text{I.1.3.5.10})$$

$$d \bar{U}_k = \bar{T}_k d \bar{S}_k - p d \left(\frac{1}{\bar{\rho}_k} \right) \quad (\text{I.1.3.5.11})$$

$$\bar{U}_k = U_k(p, \bar{T}_k) \quad (\text{I.1.3.5.12})$$

$$\bar{\rho}_k = \rho_k(p, \bar{T}_k) \quad (\text{I.1.3.5.13})$$

$$\bar{H}_k = H_k(p, \bar{T}_k) \quad (\text{I.1.3.5.14})$$

$$\bar{G}_k = \bar{H}_k - \bar{T}_k \cdot \bar{S}_k \quad (\text{I.1.3.5.15})$$

Integrando sulla superficie Σ della sezione retta le equazioni (I.1.3.3.1), (I.1.3.3.2), (I.1.3.3.3), (I.1.3.3.4) e (I.1.3.3.6) si ottengono le equazioni di conservazione per gli efflussi monodimensionali.

Equazione di conservazione della massa

$$\frac{\partial}{\partial t} \Sigma \bar{\alpha}_k \bar{\rho}_k + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\alpha}_k \bar{\rho}_k \bar{V}_k = \gamma_k \quad (\text{I.1.3.5.16})$$

Equazione di conservazione della quantità di moto

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Sigma \bar{\alpha}_k \bar{\rho}_k \bar{V}_k + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\alpha}_k \bar{\rho}_k \bar{V}_k^2 + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\alpha}_k p - \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\alpha}_k \bar{\tau}_{kxx} \\ + p \int_C \alpha_k \frac{\vec{i} \cdot \vec{n}_\Sigma}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dl - \int_C \alpha_k \vec{i} \frac{\left(\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{\tau}_k \right)}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dl - \Sigma \bar{\alpha}_k \bar{\rho}_k \vec{g} \cdot \vec{i} = m_k \end{aligned}$$

(I.1.3.5.17)

Equazione di conservazione dell'energia nella variabile entalpia

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \sum \bar{\alpha}_k \bar{\rho}_k \bar{H}_k + \frac{\partial}{\partial x} \sum \bar{\alpha}_k \left(\bar{\rho}_k \bar{H}_k \bar{V}_k + \vec{\bar{q}}_k \cdot \vec{i} \right) - \frac{D \sum \bar{\alpha}_k p}{D t} \\
 & - \sum \bar{\alpha}_k \bar{\tau}_{kxx} \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial x} - \bar{V}_k p \int_C \bar{\alpha}_k \frac{\vec{i} \cdot \vec{n}_\Sigma}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dl + \bar{V}_k \int_C \bar{\alpha}_k \vec{i} \cdot \frac{(\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{\tau}_k)}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dl \\
 & + \int_C \bar{\alpha}_k \frac{\vec{q}_k \cdot \vec{n}_\Sigma}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dl - \left(\frac{\bar{V}_k^2}{2} \gamma_k - m_k \bar{V}_k + e_k \right) = 0
 \end{aligned} \tag{I.1.3.5.18}$$

Equazione di conservazione dell'energia nella variabile entropia

$$\begin{aligned}
 & \bar{\alpha}_k \bar{\rho}_k \bar{T}_k \frac{d \bar{S}_k}{d t} - p \frac{D \sum \bar{\alpha}_k}{D t} + \frac{\partial}{\partial x} \sum \bar{\alpha}_k \vec{\bar{q}}_k \cdot \vec{i} - \sum \bar{\alpha}_k \bar{\tau}_{kxx} \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial x} \\
 & - \bar{V}_k p \int_C \bar{\alpha}_k \frac{\vec{i} \cdot \vec{n}_\Sigma}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dl + \bar{V}_k \int_C \bar{\alpha}_k \vec{i} \cdot \frac{(\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{\tau}_k)}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dl + \int_C \bar{\alpha}_k \frac{\vec{q}_k \cdot \vec{n}_\Sigma}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dl \\
 & - \left[\left(\frac{\bar{V}_k^2}{2} - H_k \right) \gamma_k - m_k \bar{V}_k + e_k \right] = 0
 \end{aligned} \tag{I.1.3.5.19}$$

nelle quali si è posto

$$\gamma_k = \iint_{\Sigma} \Gamma_k d\Sigma$$

$$m_k = \iint_{\Sigma} M_k d\Sigma$$

$$e_k = \iint_{\Sigma} E_k d\Sigma$$

e con la notazione

$$\int_C dl$$

si è indicata l'integrazione lungo il contorno della sezione retta.

Aggiungendo al sistema costituito dalle tre equazioni di conservazione (I.1.3.5.16), (I.1.3.5.17) e (I.1.3.5.18) o (I.1.3.5.19) per entrambe le fasi (liquido, $k = l$; vapore, $k = v$) le relazioni

$$\bar{\alpha}_l + \bar{\alpha}_v = 1 \tag{I.1.3.5.20}$$

$$\gamma_l + \gamma_v = 0 \tag{I.1.3.5.21}$$

$$m_l + m_v = 0 \tag{I.1.3.5.22}$$

$$e_l + e_v = 0 \quad (\text{I.1.3.5.23})$$

le relazioni per il calcolo di $\bar{\tau}_k$, \vec{q}_k , γ_k , m_k ed e_k e le equazioni di stato si ottiene il modello di efflusso bifase monodimensionale "a due fluidi".

Una volta definita la proprietà media di una miscela bifase come

densità $\bar{\rho}_m = \bar{\alpha}_v \rho_v + \bar{\alpha}_l \rho_l$ (I.1.3.5.24)

flusso termico $\vec{q}_m = \bar{\alpha}_v \vec{q}_v + \bar{\alpha}_l \vec{q}_l$ (I.1.3.5.25)

tensore degli sforzi $\bar{\tau}_{mxx} = \bar{\alpha}_v \bar{\tau}_{vxx} + \bar{\alpha}_l \bar{\tau}_{lxx}$ (I.1.3.5.26)

la velocità media \bar{V}_m , l'energia media \bar{U}_m , l'entalpia \bar{H}_m , l'entropia \bar{S}_m e l'entalpia libera \bar{G}_m tramite

$$\bar{\rho}_m \bar{\Psi}_m = \alpha_v \bar{\rho}_v \bar{\Psi}_v + \bar{\alpha}_l \bar{\rho}_l \bar{\Psi}_l \quad (\text{I.1.3.5.27})$$

la temperatura di miscela \bar{T}_m come

$$\bar{T}_m = \frac{\bar{H}_m - \bar{G}_m}{\bar{S}_m} \quad (\text{I.1.3.5.28})$$

ed il titolo di vapore in massa \bar{X} come

$$\bar{X} = \frac{\bar{\alpha}_v \bar{\rho}_v}{\bar{\rho}_m}, \quad (\text{I.1.3.5.29})$$

verificato che è

$$\bar{H}_m = \bar{U}_m + \frac{p}{\bar{\rho}_m}, \quad (\text{I.1.3.5.30})$$

facendo l'ipotesi che le pareti delle tubazioni siano indefformabili, si possono stabilire le equazioni di conservazione per un efflusso monodimensionale di miscela bifase.

Equazione di conservazione della massa

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum \bar{\rho}_m + \frac{\partial}{\partial x} \sum \bar{\rho}_m \bar{V}_m = 0 \quad (\text{I.1.3.5.31})$$

Equazione di conservazione della quantità di moto

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \sum \bar{\rho}_m \bar{V}_m + \frac{\partial}{\partial x} \sum \bar{\rho}_m \bar{V}_m^2 + \sum \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \sum \bar{\tau}_{mxx} + \frac{\partial}{\partial x} \sum \bar{\rho}_m \bar{X} \\ & \cdot (1 - \bar{X}) (\bar{V}_v - \bar{V}_l)^2 - \int_C \frac{\vec{i} \cdot [\vec{n}_\Sigma \cdot (\bar{\alpha}_l \bar{\tau}_l + \bar{\alpha}_v \bar{\tau}_v)]}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} d l - \sum \bar{\rho}_m \vec{g} \cdot \vec{i} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.1.3.5.32})$$

Equazione di conservazione dell'energia nella variabile entalpia

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \Sigma \bar{\rho}_m \bar{H}_m + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\rho}_m \bar{H}_m \bar{V}_m - \Sigma \frac{D p}{D t} + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \vec{\bar{q}}_m \cdot \vec{i} \\
 & - \Sigma \left[\vec{\tau}_{mxx} - \bar{\rho}_m \bar{X} (1 - \bar{X}) \left(\bar{V}_v - \bar{V}_l \right)^2 \right] \frac{\partial \bar{V}_m}{\partial x} \\
 & + \Sigma \bar{\rho}_m \frac{D}{D t} \bar{X} (1 - \bar{X}) \frac{\left(\bar{V}_v - \bar{V}_l \right)^2}{2} + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\rho}_m \bar{X} (1 - \bar{X}) (1 - 2 \bar{X}) \frac{\left(\bar{V}_v - \bar{V}_l \right)^3}{2} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\rho}_m \bar{X} (1 - \bar{X}) \left(\bar{V}_v - \bar{V}_l \right) \left(\bar{H}_v - \bar{H}_l \right) \\
 & - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\Sigma \bar{\rho}_m \bar{X} (1 - \bar{X})}{\bar{\rho}_v \bar{\rho}_l} \left[\bar{\rho}_l \bar{\tau}_{vxx} - \bar{\rho}_v \bar{\tau}_{lxz} \right] \left(\bar{V}_v - \bar{V}_l \right) + \int_C \frac{\left(\alpha_l \vec{\bar{q}}_l + \alpha_v \vec{\bar{q}}_v \right) \cdot \vec{n}_\Sigma}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} d l \\
 & + \bar{V}_m \int_C \frac{\vec{i} \cdot \left[\vec{n}_\Sigma \cdot \left(\alpha_l \vec{\bar{\tau}}_l + \alpha_v \vec{\bar{\tau}}_v \right) \right]}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} d l = 0 \tag{I.1.3.5.33}
 \end{aligned}$$

Equazione di conservazione dell'energia nella variabile entropia

$$\begin{aligned}
 & \Sigma \bar{\rho}_m \bar{T}_m \frac{D \bar{S}_m}{D t} + \Sigma \bar{\rho}_m \left(\bar{G}_v - \bar{G}_l \right) \frac{D \bar{X}}{D t} - \Sigma \bar{\rho}_m \left(\bar{T}_v - \bar{T}_l \right) \\
 & \cdot \left[\bar{X} \frac{\bar{S}_v}{\bar{S}_m} \frac{D}{D t} (1 - \bar{X}) \bar{S}_l - (1 - \bar{X}) \frac{\bar{S}_l}{\bar{S}_m} \frac{D}{D t} \bar{X} \bar{S}_v \right] + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \vec{\bar{q}}_m \cdot \vec{i} \\
 & - \Sigma \left[\bar{\tau}_{mxx} - \bar{\rho}_m \bar{X} (1 - \bar{X}) \left(\bar{V}_v - \bar{V}_l \right)^2 \right] \frac{\partial \bar{V}_m}{\partial x} + \Sigma \bar{\rho}_m \frac{D}{D t} \bar{X} (1 - \bar{X}) \frac{\left(\bar{V}_v - \bar{V}_l \right)^2}{2} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\rho}_m \bar{X} (1 - \bar{X}) (1 - 2 \bar{X}) \frac{\left(\bar{V}_v - \bar{V}_l \right)^3}{2} + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\rho}_m \bar{X} (1 - \bar{X}) \left(\bar{V}_v - \bar{V}_l \right) \\
 & \cdot \left(\bar{H}_v - \bar{H}_l \right) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\Sigma \bar{\rho}_m \bar{X} (1 - \bar{X})}{\bar{\rho}_v \bar{\rho}_l} \left[\bar{\rho}_l \bar{\tau}_{vxx} - \bar{\rho}_v \bar{\tau}_{lxz} \right] \left(\bar{V}_v - \bar{V}_l \right) \\
 & + \int_C \frac{\left(\alpha_l \vec{\bar{q}}_l + \alpha_v \vec{\bar{q}}_v \right) \cdot \vec{n}_\Sigma}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} d l + \bar{V}_m \int_C \vec{i} \cdot \frac{\left[\vec{n}_\Sigma \cdot \left(\alpha_l \vec{\bar{\tau}}_l + \alpha_v \vec{\bar{\tau}}_v \right) \right]}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} d l = 0 \tag{I.1.3.5.34}
 \end{aligned}$$

Naturalmente questo sistema associato a quello costituito dalle equazioni per una fase è equivalente al sistema di equazioni del modello "a due fluidi".

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.1.3.6 Prospetto dei possibili modelli di efflusso bifase

Nei paragrafi precedenti si sono stabilite le equazioni del modello di efflusso bifase più completo, cioè quello "a due fluidi". Esso è costituito dalle equazioni di conservazione per la miscela e per una fase (oppure dalle equazioni di conservazione per entrambe le fasi) e da un certo numero di equazioni costitutive.

Il modello può essere semplificato sostituendo alcune equazioni di conservazione con ipotesi supplementari che permettono di stabilire relazioni fra le variabili⁽⁵⁾.

La casistica dei modelli possibili è riassunta nella tabella seguente.

IPOTESI		EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE		N° EQUAZIONI COSTITUTIVE
N°	NATURA	N°	NATURA	
0		6	6 equazioni di conservazione (modello "a due fluidi")	7
1	1 relazione fra variabili termiche	5	1 conservazione massa 2 conservazione quantità di moto 2 conservazione energia	6
		5	2 conservazione massa 2 conservazione quantità di moto 1 conservazione energia	5
2	1 relazione fra le velocità	5	2 conservazione massa 1 conservazione quantità di moto 2 conservazione energia	5
	2 relazione fra variabili termiche	4	1 conservazione massa 2 conservazione quantità di moto 1 conservazione energia	4
	1 relazione fra le velocità 1 relazione fra variabili termiche	4	1 conservazione massa 1 conservazione quantità di moto 2 conservazione energia	4
		4	2 conservazione massa 1 conservazione quantità di moto 1 conservazione energia	3
3	1 relazione fra le velocità 2 relazione fra variabili termiche	3	3 equazioni di conservazione per la miscela	2

Fra tutti i modelli possibili, presentati nella tabella precedente, quelli di maggiore interesse sono i seguenti:

1) Modello "a due fluidi"

- | | |
|-------------------------------|--|
| 6 equazioni di conservazione: | <ul style="list-style-type: none"> -3 per la miscela (massa, quantità di moto, energia) -3 per una fase (massa, quantità di moto, energia) |
| 7 equazioni costitutive | |
| 4 equazioni di stato | |
| 6 incognite principali: | pressione p , grado di vuoto α , due velocità \vec{V}_l e \vec{V}_v , due entalpie H_l e H_v o due entropie S_l e S_v |

Questo modello è utilizzato quando le due fasi sono poco accoppiate.

La principale difficoltà nel suo utilizzo consiste nella scelta delle equazioni costitutive.

2) Modello a cinque equazioni.

Si impone una relazione fra la velocità \vec{V}_v e \vec{V}_l delle due fasi (sia nella forma $\vec{\zeta} = \vec{V}_v - \vec{V}_l$, sia in quella $\vec{V}_v = \zeta \vec{V}_l$)

- | | |
|-------------------------------|--|
| 5 equazioni di conservazione: | <ul style="list-style-type: none"> -3 per la miscela (massa, quantità di moto, energia) -2 per una fase (massa, energia) |
| 5 equazioni costitutive | |
| 4 equazioni di stato | |
| 5 incognite principali: | pressione p , grado di vuoto α , velocità media \vec{V}_m , due entalpie H_l e H_v o due entropie S_l e S_v . |

3) Modelli a quattro equazioni

Se oltre ad una relazione fra le velocità si impone una condizione sulle variabili termiche (ad esempio $T_v = T_l$ oppure $T_v = T_{\text{saturazione}}$) si presentano due possibilità

- | | |
|-----------------------------------|---|
| 3a) 4 equazioni di conservazione: | <ul style="list-style-type: none"> -3 per la miscela (massa, quantità di moto, energia) -1 per una fase (energia) |
| 4 equazioni costitutive | |
| 4 equazioni di stato | |

4 incognite principali:

pressione p , velocità media \vec{V}_m , due entalpie H_l e H_v o due entropie S_l e S_v .

3b) 4 equazioni di conservazione:

- 3 per la miscela (massa, quantità di moto, energia)
- 1 per una fase (massa)

3 equazioni costitutive

4 equazioni di stato

4 incognite principali:

pressione p , grado di vuoto α , velocità \vec{V}_m , entalpia media H_m o entropia media S_m .

Quest'ultimo modello è noto come "modello di diffusione".

Dei due modelli a quattro equazioni è quello che richiede il minor numero di equazioni costitutive.

4) Modello omogeneo.

Oltre alla relazione fra la velocità si impongono due condizioni sulle variabili termiche, ad esempio

$$T_v = T_{\text{saturazione}} \quad T_l = T_{\text{saturazione}}$$

3 equazioni di conservazione per la miscela (massa, quantità di moto, energia)

2 equazioni costitutive

2 equazioni di stato

3 incognite principali:

pressione p , velocità media \vec{V}_m , entalpia media H_m o entropia media S_m .

Il modello omogeneo, le equazioni del quale sono analoghe a quelle del modello di un flusso monofase, è molto usato sia per la sua semplicità sia perché è sufficiente per la maggior parte delle applicazioni.

Per questo motivo nel paragrafo seguente sono riportate le equazioni ad esso relative sia nel caso di eguale velocità fra le fasi (modello senza scorimento), sia nel caso di velocità diverse (modello con scorimento).

I.1.3.7 Modello di efflusso bifase monodimensionale omogeneo

a) Modello senza scorrimento

$$\frac{\partial}{\partial t} \Sigma \bar{\rho}_m + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\rho}_m \bar{V}_m = 0 \quad (\text{I.1.3.7.1})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \Sigma \bar{\rho}_m \bar{V}_m + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\rho}_m \bar{V}_m^2 + \Sigma \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\tau}_{mxx} \\ & - \int_C \frac{\vec{i} \cdot [\vec{n}_\Sigma \cdot (\alpha_l \bar{\tau}_l + \alpha_v \bar{\tau}_v)]}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dl - \Sigma \bar{\rho}_m \vec{g} \cdot \vec{i} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.1.3.7.2})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \Sigma \bar{\rho}_m \bar{H}_m + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\rho}_m \bar{H}_m \bar{V}_m - \Sigma \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \vec{q}_m \cdot \vec{i} - \Sigma \bar{\tau}_{mxx} \frac{\partial \bar{V}_m}{\partial x} \\ & + \int_C \frac{(\alpha_l \vec{q}_l + \alpha_v \vec{q}_v) \cdot \vec{n}_\Sigma}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dl + \bar{V}_m \int_C \frac{\vec{i} \cdot [\vec{n}_\Sigma \cdot (\alpha_l \bar{\tau}_l + \alpha_v \bar{\tau}_v)]}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dl = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.1.3.7.3})$$

L'equazione (I.1.3.7.3) può essere sostituita dalla equazione

$$\begin{aligned} & \Sigma \bar{\rho}_m \bar{T}_m \frac{D \bar{S}_m}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \vec{q}_m \cdot \vec{i} - \Sigma \bar{\tau}_{mxx} \frac{\partial \bar{V}_m}{\partial x} + \int_C \frac{(\alpha_l \vec{q}_l + \alpha_v \vec{q}_v) \cdot \vec{n}_\Sigma}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dl \\ & + \bar{V}_m \int_C \frac{\vec{i} \cdot [\vec{n}_\Sigma \cdot (\alpha_l \bar{\tau}_l + \alpha_v \bar{\tau}_v)]}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dl = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.1.3.7.4})$$

b) Modello con scorrimento

$$\frac{\partial}{\partial t} \Sigma \bar{\rho}_m + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\rho}_m \bar{V}_m = 0 \quad (\text{I.1.3.7.5})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \Sigma \bar{\rho}_m \bar{V}_m + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\rho}_m \bar{V}_m^2 + \Sigma \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\tau}_{mxx} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\rho}_m \bar{X} (1 - \bar{X}) (\bar{V}_v - \bar{V}_l)^2 - \int_C \frac{\vec{i} \cdot [\vec{n}_\Sigma \cdot (\alpha_l \bar{\tau}_l + \alpha_v \bar{\tau}_v)]}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dl - \Sigma \bar{\rho}_m \vec{g} \cdot \vec{i} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.1.3.7.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Sigma \bar{\rho}_m \bar{H}_m + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\rho}_m \bar{H}_m \bar{V}_m - \Sigma \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \vec{q}_m \cdot \vec{i}$$

$$\begin{aligned}
 & - \Sigma \left[\vec{\tau}_{mxx} - \bar{\rho}_m \bar{X} (1 - \bar{X}) (\bar{V}_v - \bar{V}_l)^2 \right] \frac{\partial \bar{V}_m}{\partial x} + \Sigma \bar{\rho}_m \frac{D}{Dt} \bar{X} (1 - \bar{X}) \frac{(\bar{V}_v - \bar{V}_l)^2}{2} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\rho}_m \bar{X} (1 - \bar{X}) (1 - 2\bar{X}) \frac{(\bar{V}_v - \bar{V}_l)^3}{2} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\rho}_m \bar{X} (1 - \bar{X}) (\bar{V}_v - \bar{V}_l) (\bar{H}_v - \bar{H}_l) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\Sigma \bar{\rho}_m \bar{X} (1 - \bar{X})}{\bar{\rho}_v \bar{\rho}_l} \\
 & \cdot \left[\bar{\rho}_l \bar{\tau}_{vxx} - \bar{\rho}_v \bar{\tau}_{lxz} \right] (\bar{V}_v - \bar{V}_l) + \int_C \frac{\left(\alpha_l \vec{q}_l + \alpha_v \vec{q}_v \right) \cdot \vec{n}_\Sigma}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} d\ell \\
 & + V_m \int_C \frac{\vec{i} \cdot \left[\vec{n}_\Sigma \cdot \left(\alpha_l \bar{\tau}_l + \alpha_v \bar{\tau}_v \right) \right]}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} d\ell = 0 \tag{I.1.3.7.7}
 \end{aligned}$$

L'equazione (I.1.3.7.7) può essere sostituita da

$$\begin{aligned}
 & \Sigma \bar{\rho}_m \bar{T}_m \frac{D \bar{S}_m}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x} \vec{q}_m \cdot \vec{i} - \Sigma \left[\bar{\tau}_{mxx} - \bar{\rho}_m \bar{X} (1 - \bar{X}) (\bar{V}_v - \bar{V}_l)^2 \right] \frac{\partial \bar{V}_m}{\partial x} \\
 & + \Sigma \bar{\rho}_m \frac{D}{Dt} \bar{X} (1 - \bar{X}) \frac{(\bar{V}_v - \bar{V}_l)^2}{2} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\rho}_m \bar{X} (1 - \bar{X}) (1 - 2\bar{X}) \frac{(\bar{V}_v - \bar{V}_l)^3}{2} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \bar{\rho}_m \bar{X} (1 - \bar{X}) (\bar{V}_v - \bar{V}_l) (\bar{H}_v - \bar{H}_l) \\
 & - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\Sigma \bar{\rho}_m \bar{X} (1 - \bar{X})}{\bar{\rho}_v \bar{\rho}_l} \left[\bar{\rho}_l \bar{\tau}_{vxx} - \bar{\rho}_v \bar{\tau}_{lxz} \right] (\bar{V}_v - \bar{V}_l) \\
 & + \int_C \frac{\left(\alpha_l \vec{q}_l + \alpha_v \vec{q}_v \right) \cdot \vec{n}_\Sigma}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} d\ell + \bar{V}_m \int_C \frac{\vec{i} \cdot \left[\vec{n}_\Sigma \cdot \left(\alpha_l \bar{\tau}_l + \alpha_v \bar{\tau}_v \right) \right]}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} d\ell = 0 \tag{I.1.3.7.8}
 \end{aligned}$$

Normalmente nelle equazioni sopra riportate vengono trascurati i termini del secondo ordine, cioè si pone

$$\bar{\tau}_{mxx} = 0, \bar{\tau}_{lxz} = 0, \bar{\tau}_{vxx} = 0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} \Sigma \vec{q}_m \cdot \vec{i} = 0$$

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.1.3.8 Deduzione semplificata delle equazioni di conservazione per efflussi bifase monodimensionali.

Le equazioni di conservazione relative al modello di efflusso bifase monodimensionale omogeneo riportati nel par. I.1.3.7 vengono di solito drasticamente semplificate trascurando i termini contenenti la derivata della pressione e gli attriti, e poste in forma simile a quelle degli efflussi monodimensionali monofase, cioè:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial G \Sigma}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.1.3.8.1})$$

$$\frac{\partial G \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial v' G^2 \Sigma}{\partial x} = - \Sigma \frac{\partial p}{\partial x} + \int_C \tau dl + \bar{\rho} \vec{g} \cdot \vec{i} \Sigma \quad (\text{I.1.3.8.2})$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{H} \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial G H' \Sigma}{\partial x} = \int_C q_c dl \quad (\text{I.1.3.8.3})$$

nelle quali sono state utilizzate le seguenti definizioni, ricordando che $\alpha = \Sigma_v / \Sigma = \Sigma_v / \Sigma_v + \Sigma_l$:

$$\bar{\rho} = \rho_l (1 - \alpha) + \rho_v \alpha \quad (\text{I.1.3.8.4})$$

$$G = \rho_l V_l (1 - \alpha) + \rho_v V_v \alpha \quad (\text{I.1.3.8.5})$$

$$v' = \frac{1}{G^2} \left[\rho_l V_l^2 (1 - \alpha) + \rho_v V_v^2 \alpha \right] \quad (\text{I.1.3.8.6})$$

$$\bar{H} = \frac{1}{\bar{\rho}} \left[\rho_l H_l (1 - \alpha) + \rho_v H_v \alpha \right] \quad (\text{I.1.3.8.7})$$

$$H' = \frac{1}{G} \left[\rho_l V_l H_l (1 - \alpha) + \rho_v V_v H_v \alpha \right] \quad (\text{I.1.3.8.8})$$

Introducendo la definizione di titolo di vapore in portata X_p

$$X_p = \frac{\rho_v V_v \alpha}{G} \quad (\text{I.1.3.8.9})$$

le velocità di fase V_l e V_v ed il rapporto di scorrimento ξ hanno le seguenti espressioni

$$V_l = \frac{(1 - X_p) G}{(1 - \alpha) \rho_l} \quad (\text{I.1.3.8.10})$$

$$V_v = \frac{X_p G}{\alpha \rho_v} \quad (\text{I.1.3.8.11})$$

$$\xi = \frac{V_v}{V_l} = \frac{X_p}{1 - X_p} \cdot \frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot \frac{\rho_l}{\rho_v} \quad (\text{I.1.3.8.12})$$

Di conseguenza risulta anche

$$v' = \frac{(1 - X_p)^2}{\rho_l (1 - \alpha)} + \frac{X_p^2}{\rho_v \alpha} \quad (\text{I.1.3.8.13})$$

e

$$H' = H_l (1 - X_p) + H_v X_p \quad (\text{I.1.3.8.14})$$

Facendo inoltre uso della definizione di titolo in massa:

$$x = \frac{\rho_v \alpha}{\bar{\rho}} \quad (\text{I.1.3.8.9}^I)$$

si ha pure

$$\bar{H} = H_l (1 - x) + H_v X \quad . \quad (\text{I.1.3.8.14}^I)$$

Le equazioni (I.1.3.8.1), (I.1.3.8.2) e (I.1.3.8.3) possono essere ottenute, con considerazioni di natura euristica, in vari modi.

È interessante notare che, immaginando un efflusso bifase come dovuto all'efflusso di due fluidi monofase, ciascuno dei quali occupa una parte della sezione retta del condotto pari ad α per il fluido in fase vapore e ad $1 - \alpha$ per il fluido in fase liquido entrambi alla stessa pressione, si possono ottenere le equazioni (I.1.3.8.1), (I.1.3.8.2) e (I.1.3.8.3) sommando le equazioni di conservazione relative a ciascuno dei due fluidi.

Dalla (I.1.2.1.5), ponendo

$$\Sigma_l = (1 - \alpha) \Sigma \quad (\text{I.1.3.8.15})$$

e

$$\Sigma_v = \alpha \Sigma \quad (\text{I.1.3.8.16})$$

si ottiene l'equazione di conservazione della massa rispettivamente per il liquido e per il vapore

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_l \Sigma (1 - \alpha)] + \frac{\partial}{\partial x} [\rho_l \Sigma (1 - \alpha) V_l] = -\gamma \quad (\text{I.1.3.8.17})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_v \Sigma \alpha) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_v \Sigma \alpha V_v) = \gamma \quad (\text{I.1.3.8.18})$$

dove γ rappresenta lo scambio di massa fra le fasi nell'unità di tempo.

Analogamente per l'equazione di conservazione della quantità di moto, a partire dalla (I.1.2.2.9) si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_l \Sigma (1 - \alpha) V_l \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_l \Sigma (1 - \alpha) V_l^2 \right] + \Sigma (1 - \alpha) \frac{\partial p}{\partial x} - \left| \vec{\tau}_p \right| \bar{\omega}_l - \Sigma (1 - \alpha) \rho_l \vec{g} \cdot \vec{i} = -m \quad (\text{I.1.3.8.19})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_v \Sigma \alpha V_v \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_v \Sigma \alpha V_v^2 \right) + \Sigma \alpha \frac{\partial p}{\partial x} - \left| \vec{\tau}_{pv} \right| \bar{\omega}_v - \Sigma \alpha \rho_v \vec{g} \cdot \vec{i} = m \quad (\text{I.1.3.8.20})$$

dove nel termine m sono inclusi tutti gli scambi di forze e di quantità di moto fra le due fasi (cioè fra i due fluidi) ed i termini relativi all'attrito con la parete, cioè

$$\left| \vec{\tau}_p \right| \bar{\omega}$$

sono valutati relativamente a ciascun fluido per la parte del perimetro del condotto con la quale esso è a contatto.

Infine per l'equazione di conservazione dell'energia dalla (I.1.2.3.7) si ottiene, considerando che z è la quota del baricentro della sezione ed è la stessa per entrambe le fasi,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_l \Sigma (1 - \alpha) \left(H_l + \frac{V_l^2}{2} + g z \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_l \Sigma (1 - \alpha) \left(H_l + \frac{V_l^2}{2} + g z \right) V_l \right] - \Sigma (1 - \alpha) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{q_l \bar{\omega}_l}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} - e \quad (\text{I.1.3.8.21})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_v \Sigma \alpha \left(H_v + \frac{V_v^2}{2} + g z \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_v \Sigma \alpha \left(H_v + \frac{V_v^2}{2} + g z \right) V_v \right] - \Sigma \alpha \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{q_v \bar{\omega}_v}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} + e \quad (\text{I.1.3.8.22})$$

dove il termine e rappresenta tutti gli scambi di energia fra le due fasi ed i termini relativi allo scambio termico con la parete sono calcolati relativamente a ciascun fluido per la parte del perimetro del condotto con la quale esso è a contatto.

Sommendo la (I.1.3.8.17) con la (I.1.3.8.18), la (I.1.3.8.19) con la (I.1.3.8.20) e la (I.1.3.8.21) con la (I.1.3.8.22), trascurando in queste ultime due equazioni i termini di energia cinetica $V^2/2$, di energia potenziale $g z$ e quelli contenenti $\partial p / \partial t$ si ottengono le equazioni seguenti

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_l (1 - \alpha) + \rho_v \alpha \right] \Sigma + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_l V_l (1 - \alpha) + \rho_v V_v \alpha \right] \Sigma = 0 \quad (\text{I.1.3.8.23})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_l V_l (1 - \alpha) + \rho_v \alpha \right] \Sigma + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_l V_l^2 (1 - \alpha) + \rho_v V_v^2 \alpha \right] \Sigma + \Sigma \frac{\partial p}{\partial x} - |\vec{\tau}_p| \omega - \Sigma \left[\rho_l (1 - \alpha) + \rho_v \alpha \right] \vec{g} \cdot \vec{i} = 0 \quad (\text{I.1.3.8.24})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_l (1 - \alpha) H_l + \rho_v \alpha H_v \right] \Sigma + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_l (1 - \alpha) V_l H_l + \rho_v \alpha V_v H_v \right] \Sigma = \frac{q \omega}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} \quad (\text{I.1.3.8.25})$$

dove è

$$\omega = \bar{\omega}_v + \bar{\omega}_l \quad (\text{I.1.3.8.26})$$

$$|\vec{\tau}_p| = \frac{1}{\omega} \left(|\vec{\tau}_{pv}| \bar{\omega}_v + |\vec{\tau}_{pl}| \bar{\omega}_l \right) \quad (\text{I.1.3.8.27})$$

$$q = \frac{1}{\omega} \left(q_v \bar{\omega}_v + q_l \bar{\omega}_l \right) \quad (\text{I.1.3.8.28})$$

Utilizzando le definizioni (I.1.3.8.4), (I.1.3.8.5), (I.1.3.8.6), (I.1.3.8.7) e (I.1.3.8.8) e tenendo conto che si può porre

$$\int_C \tau dl = |\vec{\tau}_p| \omega \quad (\text{I.1.3.8.29})$$

e

$$\int_C q_c dl = \frac{q \omega}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} \quad (\text{I.1.3.8.30})$$

si ottengono dalle (I.1.3.8.23), (I.1.3.8.24) e (I.1.3.8.25) le (I.1.3.8.1), (I.1.3.8.2) e (I.1.3.8.3).

Un altro modo di ottenere le (I.1.3.8.1), (I.1.3.8.2) e (I.1.3.8.3) è quello di ricavarle dalle equazioni di conservazione in forma generale relative al fluido contenuto in un volume di controllo ⁽¹⁾.

Le leggi di conservazione della massa, quantità di moto ed energia, relative ad un fluido contenuto in un volume \mathcal{V} e di superficie Σ , hanno l'espressione

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\mathcal{V}} \rho d \mathcal{V} \right] + \int_{\Sigma} \rho \vec{V} \cdot \vec{n}_\Sigma d \Sigma = 0 \quad (\text{I.1.3.8.31})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\mathcal{V}} \rho \vec{V} d \mathcal{V} \right] + \int_{\Sigma} \left(\rho \vec{V} \right) \vec{V} \cdot \vec{n}_\Sigma d \Sigma = \int_{\Sigma} \vec{n}_\Sigma \vec{C} d \Sigma + \int_{\mathcal{V}} \rho \vec{F} d \mathcal{V} \quad (\text{I.1.3.8.32})$$

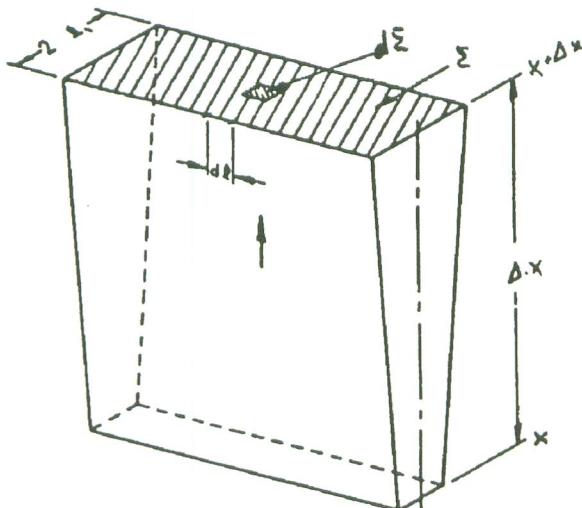
$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\nu} \rho \left(U + \frac{1}{2} V^2 \right) d \nu \right] + \int_{\Sigma} \rho \left(U + \frac{1}{2} V^2 \right) \vec{V} \cdot \vec{n}_{\Sigma} d \Sigma = \\ - \int_{\Sigma} \vec{Q} \cdot \vec{n}_{\Sigma} d \Sigma + \int_{\Sigma} (\bar{\bar{C}} \cdot \vec{V}) \cdot \vec{n}_{\Sigma} d \Sigma + \int_{\nu} \rho \vec{V} \cdot \vec{F} d \nu \quad (I.1.3.8.33)$$

dove

$$\bar{\bar{C}} = - p \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}}$$

è il tensore degli sforzi, somma della pressione p e delle forze dovute alla viscosità $\bar{\bar{\tau}}$, \vec{Q} il flusso termico fra pareti e fluido, \vec{F} la forza di volume per unità di massa. Si è ipotizzato che non vi sia generazione di potenza all'interno del fluido.

Con riferimento alla figura seguente



il primo termine dell'equazione (I.1.3.8.31) può essere espresso come

$$\int_{\nu} \rho d \nu = \int_x^{x+\Delta x} \left(\int_{\Sigma} \rho d \Sigma \right) dx \quad (I.1.3.8.34)$$

ed il secondo, tenendo conto che la velocità attraverso le pareti laterali del volume è nulla, come

$$\int_{\Sigma} \rho \vec{V} \cdot \vec{n}_{\Sigma} d \Sigma = \left(\int_{\Sigma} \rho V_x d \Sigma \right)_{x+\Delta x} - \left(\int_{\Sigma} \rho V_x d \Sigma \right)_x \quad (I.1.3.8.35)$$

dove V_x è la componente del vettore \vec{V} nella direzione dell'asse x .

Sostituendo nella (I.1.3.8.31) le (I.1.3.8.34) e (I.1.3.8.35), dividendo la (I.1.3.8.31) per Δx e calcolandone il limite per Δx tendente a 0 si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \rho d\Sigma + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\Sigma} \rho V_x d\Sigma = 0 \quad (\text{I.1.3.8.36})$$

Sviluppando gli integrali che compaiono nell'equazione (I.1.3.8.32) in maniera analoga a quanto fatto per l'equazione (I.1.3.8.31), considerando la pressione costante su ogni piano normale all'asse x e supponendo che la forza di volume sia dovuta solo alla gravità si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x+\Delta x} \int_{\Sigma} \rho V_x d\Sigma + \left(\int_{\Sigma} \rho V_x^2 d\Sigma \right)_{x+\Delta x} - \left(\int_{\Sigma} \rho V_x^2 d\Sigma \right)_x = - \left(p \Sigma \right)_{x+\Delta x} \\ & + \left(p \Sigma \right)_x - \int_x^{x+\Delta x} \left(\int_C \tau dI \right) dx - \int_x^{x+\Delta x} \left(\int_{\Sigma} \rho g d\Sigma \right) dx + \int_x^{x+\Delta x} p \frac{d\Sigma}{dx} dx \end{aligned} \quad (\text{I.1.3.8.37})$$

Dividendo tutti i termini della (I.1.3.8.37) per Δx e calcolandone il limite per Δx tendente a 0 si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Sigma} \rho V_x d\Sigma \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\Sigma} \rho V_x^2 d\Sigma \right) = - \Sigma \frac{\partial p}{\partial x} - \int_C \tau dI - g \int_{\Sigma} \rho d\Sigma \quad (\text{I.1.3.8.38})$$

Operando sull'equazione (I.1.3.8.33) nella stessa maniera che per l'equazione (I.1.3.8.31) ed utilizzando la relazione fra l'entalpia H e l'energia interna U

$$H = U + \frac{p}{\rho} \quad (\text{I.1.3.8.39})$$

si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Sigma} \rho H d\Sigma \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\Sigma} \rho V_x H d\Sigma \right) = \int_C q_I dI + \frac{\partial}{\partial t} p \Sigma \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Sigma} \frac{1}{2} \rho V^2 d\Sigma \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\Sigma} \frac{1}{2} \rho V^2 V_x d\Sigma \right) + g \int_{\Sigma} \rho V_x d\Sigma \right] \end{aligned} \quad (\text{I.1.3.8.40})$$

Nell'equazione (I.1.3.8.40) vengono normalmente trascurati i termini posti fra parentesi quadre al secondo membro; ciò equivale a considerare trascurabili nel bilancio energetico gli effetti di variazione dell'energia cinetica e potenziale e la conduzione del calore in senso assiale. Assai spesso viene trascurato anche il termine

$$\frac{\partial}{\partial t} p \Sigma$$

Definendo poi

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \rho \, d\Sigma \quad (\text{I.1.3.8.41})$$

$$G = \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \rho \, V_x \, d\Sigma \quad (\text{I.1.3.8.42})$$

$$v' = \frac{1}{\Sigma G^2} \int_{\Sigma} \rho \, V_x^2 \, d\Sigma \quad (\text{I.1.3.8.43})$$

$$\bar{H} = \frac{1}{\bar{\rho} \Sigma} \int_{\Sigma} \rho \, H \, d\Sigma \quad (\text{I.1.3.8.44})$$

$$H' = \frac{1}{G \Sigma} \int_{\Sigma} \rho \, H \, V_x \, d\Sigma \quad (\text{I.1.3.8.45})$$

e sostituendo nelle equazioni (I.1.3.8.36), (I.1.3.8.38) e (I.1.3.8.40), quest'ultima semplificata come detto sopra si ottengono le (I.1.3.8.1), (I.1.3.8.2) e (I.1.3.8.3).

Se inoltre si ipotizza che in ogni sezione retta le fasi liquido e vapore siano completamente separate e ciascuna di esse abbia nella parte della sezione di sua competenza velocità V_k , entalpia H_k e densità ρ_k costanti (con $k = l$ per la fase liquido e $k = v$ per la fase vapore), denominato grado di vuoto α il rapporto fra l'area della sezione retta occupata dal vapore e l'area totale, le definizioni (I.1.3.8.41), ..., (I.1.3.8.45) danno

$$\bar{\rho} = \rho_l (1 - \alpha) + \rho_v \alpha \quad (\text{I.1.3.8.46})$$

$$G = \rho_l V_l (1 - \alpha) + \rho_v V_v \alpha \quad (\text{I.1.3.8.47})$$

$$v' = \frac{1}{G^2} \left[\rho_l V_l^2 (1 - \alpha) + \rho_v V_v^2 \alpha \right] \quad (\text{I.1.3.8.48})$$

$$\bar{H} = \frac{1}{\bar{\rho}} \left[\rho_l H_l (1 - \alpha) + \rho_v H_v \alpha \right] \quad (\text{I.1.3.8.49})$$

$$H' = \frac{1}{G} \left[\rho_l V_l H_l (1 - \alpha) + \rho_v V_v H_v \alpha \right] \quad (\text{I.1.3.8.50})$$

identiche alla (I.1.3.8.4), ..., (I.1.3.8.8.).

Nel caso che si adotti l'ipotesi restrittiva di uguale velocità fra le fasi (rapporto di scorrimento $\xi = 1$) si ottiene

$$\alpha = \frac{\rho_l X_p}{\rho_l X_p + \rho_v (1 - X_p)} \quad (\text{I.1.3.8.51})$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{v'} = \frac{\rho_l \rho_v}{\rho_l X_p + \rho_v (1 - X_p)} \quad (\text{I.1.3.8.52})$$

$$\bar{H} = H' = H_l (1 - X_p) + H_v X_p \quad (\text{I.1.3.8.53})$$

Pertanto per la descrizione di un efflusso bifase con rapporto di scorrimento ξ pari ad uno è sufficiente l'utilizzo di una sola definizione di

densità $\rho = \bar{\rho} = \frac{1}{v'}$

entalpia $H = \bar{H} = H'$

velocità $V = V_l = V_v$

titolo $X = X_p = \alpha \rho_v / \rho = \frac{G_v}{G}$

ed è

$$G = \rho V \quad (\text{I.1.3.8.54})$$

Anche nel caso in cui sia $\xi \neq 1$ l'equazione (I.1.3.8.3) può essere posta in una forma nella quale compare solo l'entalpia di volume \bar{H} e non l'entalpia di portata H' .

Ricordando la definizione di titolo in massa X

$$X = \frac{\rho_v \alpha}{\bar{\rho}} \quad (\text{I.1.3.8.55})$$

La relazione fra il titolo con massa X e titolo in portata X_p è

$$X_p = \frac{\xi X}{\xi X + (1 - X)} = \frac{\xi X}{1 + (\xi - 1) X} \quad (\text{I.1.3.8.56})$$

Sommendo all'equazione (I.1.3.8.3) la (I.1.3.8.1) moltiplicata per $-H'$ si ottiene

$$(\bar{H} - H') \frac{\partial \bar{\rho} \Sigma}{\partial t} + \bar{\rho} \Sigma \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \Sigma G \frac{\partial H'}{\partial x} = \int_c q_c d l \quad (\text{I.1.3.8.57})$$

Si ipotizza che sia $\bar{\rho}$ che H' non dipendano da p , ma solo da \bar{H} .

Se le pareti del condotto sono rigide, cioè se Σ non dipende da t , si può porre

$$(\bar{H} - H') \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{\rho} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \bar{\rho} \left[(\bar{H} - H') \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{H}} + 1 \right] \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (\text{I.1.3.8.58})$$

e

$$a = (\bar{H} - H') \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{H}} = \frac{(\xi - 1) X (1 - X)}{1 + (\xi - 1) X} \frac{\rho_l - \rho_v}{\rho_l \rho_v} \bar{\rho} \quad (\text{I.1.3.8.59})$$

Posto poi

$$\frac{\partial H'}{\partial x} = \frac{\partial H'}{\partial \bar{H}} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} \quad (\text{I.1.3.8.60})$$

e

$$C = \frac{\partial H'}{\partial \bar{H}} = \frac{\xi + (1 - X) \frac{\partial \xi}{\partial X}}{[1 + (\xi - 1) X]^2} \quad (\text{I.1.3.8.61})$$

sostituendo nella (I.1.3.8.57) si ottiene

$$\bar{\rho} (1 + a) \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + G C \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} = \frac{1}{\Sigma} \int_C q_c d l \quad (\text{I.1.3.8.62})$$

che, definendo la velocità media \bar{V} della miscela come

$$\bar{V} = \frac{G}{\bar{\rho}}$$

diventa

$$\bar{\rho} \left[(1 + a) \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + C \bar{V} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} \right] = \frac{1}{\Sigma} \int_C q_c d l \quad (\text{I.1.3.8.63})$$

La (I.1.3.8.63) assume quindi la stessa forma dell'equazione di conservazione dell'energia per i fluidi monofase tranne che per i fattori correttivi a e C

Si noti che imponendo che sia sempre $\xi = 1$ (modello omogeneo senza scorimento) risultano

$$a = 0 \quad \text{e} \quad C = 1$$

per qualunque valore del titolo X fra 0 e 1.

Il calcolo della forza dovuta all'attrito del fluido con la parete, rappresentata dal termine

$$\int_C \tau d l$$

nell'equazione (I.1.3.8.2), e della potenza termica scambiata fra parete e fluido, rappresentata dal termine

$$\int_C q_c d l$$

nell'equazione (I.1.3.8.3), viene fatto tramite correlazioni (si vedano rispettivamente i paragrafi (I.1.6.1) e (I.1.6.2)).

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.1.3.9 Correlazioni per il calcolo della densità di una miscela bifase.

In questo paragrafo sono presentate le principali correlazioni disponibili in letteratura per il calcolo della densità di miscela bifase liquido vapore, relative ad efflussi monodimensionali di acqua in condizioni sature..

Le correlazioni non forniscono direttamente la densità di miscela $\bar{\rho}_m$, ma il rapporto di scorrimento ξ (per \vec{V}_v e \vec{V}_l aventi lo stesso verso)

$$\xi = \frac{V_v}{V_l}$$

o il grado di vuoto $\bar{\alpha}$.

Le relazioni fra densità, grado di vuoto e rapporto di scorrimento sono le seguenti

$$\bar{\rho}_m = (1 - \bar{\alpha}) \rho_l + \bar{\alpha} \rho_v \quad (\text{I.1.3.9.1})$$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{1 + \xi \frac{1 - X_p}{X_p} \frac{\rho_v}{\rho_l}} \quad (\text{I.1.3.9.2})$$

Si definiscono poi il titolo in portata X_p ed il titolo volumetrico X_v

$$X_p = \frac{X \xi}{1 + X (\xi - 1)} \quad (\text{I.1.3.9.3})$$

$$X_v = \frac{1}{1 + \frac{1 - X_p}{X_p} \frac{\rho_v}{\rho_l}} \quad (\text{I.1.3.9.4})$$

La formulazione analitica ed i limiti di validità delle correlazioni sono presentati nella seguente tabella .

CORRELAZIONE	FORMULAZIONE ANALITICA	LIMITI DI VALIDITÀ				
		Geometria	Portata	Pressione	Diametro Equival.	Titolo
			(kg/m ² s)	(bar)	(m)	(%)
MODELLO OMOGENEO	$\alpha = \frac{X_p}{X_p + (1 - X_p) \rho_v / \rho_l}$	Tubi verticali	> 1500	> 130	-	-
LOCKART - MARTINELLI - NELSON	$\chi^2 = \left(\frac{\rho_v}{\rho_l} \right) \left(\frac{\mu_l}{\mu_v} \right)^n \left(\frac{1 - X_p}{X_p} \right)^2 - n$ ⁽¹⁾ $\bar{\alpha} = (1 - \chi^{0.8})^{-0.378}$ ⁽²⁾ $\bar{\alpha} = X_v = X$ $n = \begin{cases} 1 & \text{laminare} \\ 0.2 & \text{turbolento} \end{cases}$	Tubi verticali	-	⁽¹⁾ P = patm ⁽²⁾ p = pcritica	-	-
BANKOFF	$\bar{\alpha} = \frac{K X_p}{X_p + (1 - X_p) \rho_v / \rho_l}$ <p>K = 0.71 + 0.00145 P P. in bar</p>	Tubi verticali	-	4 ÷ 200	-	-
ARMAND	$\bar{\alpha} = \frac{X_p (0.833 + 0.167 X)}{X_p + (1 - X_p) \rho_v / \rho_l}$	Tubi orizzontali	-	30 ÷ 100	0.056+0.090	0 ÷ 90
THOM	$\bar{\alpha} = \frac{\gamma X_p}{1 + X_p (\gamma - 1)}$, $\gamma = \left(\rho_v / \rho_v \right) \frac{1}{\xi}$, $\xi = f(P)$	Tubi verticali	< 1000	1 ÷ 200	-	3 ÷ 100
OSMACHKIN	$\xi = 1 + \frac{(0.6 + 1.5 X_v^2) (1 - P/P_c)}{(G/\rho_l)^{0.50}} (g D_e)^{0.25}$	Fasci di barre	> 500	> 40	0.005+0.020	-
ZUBER - FINDLAY	$\bar{\alpha} = \frac{X_p}{C_o [X_p + \rho_v / \rho_l (1 - X_p)] + \rho_v \frac{V_{gj}}{G}}$ <p>C_o e V_{gj} dipendenti dal tipo di moto</p>	Tubi verticali Fasce di barre	-	-	-	-

CORRELAZIONE	FORMULAZIONE ANALITICA	LIMITI DI VALIDITÀ				
		Geometria	Portata	Pressione	Diametro Equival.	Titolo
			(kg/m ² s)	(bar)	(m)	(%)
ZUBER - DIX	α come Zuber-Findlay $C_o = X_v \left[1 + \left(\frac{1}{X_v} - 1 \right)^b \right]$ $b = (\rho_v/\rho_l)^{0.1}$ $V_{gj} = 2.9 \left[\frac{g \sigma (\rho_l - \rho_v)}{\rho_l^2} \right]^{0.25}$	-	270 +2 700	1 + 100	0.0127+0.05	-
ZUBER - ROUHANY	α come Zuber-Findlay $C_o = 1 + 0.2 \left[\frac{(g D_e)^{0.25}}{\sqrt{G}/\rho_l} \right] (1 - \bar{X}_p)$ $V_{gj} = 1.18 (1 - X_p) [g \delta (\rho_l - \rho_v)]^{0.25} (\sqrt{\rho_l})^{-1}$	-	-	-	-	-
CISE SLIP	$\xi - 1 = \Delta \xi = K \sqrt{\frac{y}{1 + C y} - C y}$ $y = \frac{X_v}{1 - X_v} ; K = 1.578 R e^{-0.19} \left(\frac{\rho_l}{\rho_v} \right)^{0.22}$ $C = 0.0273 W b R e^{-0.51} \left(\frac{\rho_l}{\rho_v} \right)^{-0.08}$	Tubi verticali Fasci di barre	50+3500	5+90	0.003+0.05	-

- **Modello omogeneo.** In questo paragrafo per modello omogeneo si intende un modello di miscela bifase nel quale il rapporto di scorrimento ξ è posto uguale ad 1; a tale denominazione si dà quindi un significato più ristretto di quello attribuitogli nei paragrafi precedenti. Si tratta di un modello estremamente semplice, ma che di solito conduce a sottostimare notevolmente la densità. I risultati possono essere considerati attendibili solo in condizioni di alta pressione (quando la pressione si avvicina a quella critica le proprietà delle due fasi divengono simili fra di loro, il rapporto di scorrimento quindi tende a 1) oppure di alte portate specifiche (in presenza di notevole turbolenza la miscela bifase tende ad omogeneizzarsi).
- **Lockhart - Martinelli - Nelson**⁽³⁾. La correlazione si basa sul parametro χ , che rappresenta la radice quadrata del rapporto fra le cadute di pressione per attrito per unità di lunghezza calcolata come se la portata della sola fase liquida o vapore fluisse da sola attraverso l'intera sezione del condotto. A pressione atmosferica la correlazione fornisce il grado di vuoto in funzione del parametro χ , mentre alla pressione critica il grado di vuoto coincide con il titolo volumetrico ed anche con quello in massa, come si ricava facilmente dalla (I.1.3.9.2) ponendo

$$\xi = 1 \quad e \quad \rho_l = \rho_v$$

A pressioni intermedie si può interpolare fra i due valori così calcolati.

- **Bankoff**⁽⁴⁾. In questa correlazione il grado di vuoto è pari al titolo volumetrico moltiplicato per un coefficiente correttivo k , correlato alla pressione. Il coefficiente k è sempre minore di 1, il che fisicamente significa che il grado di vuoto è minore del titolo volumetrico, ossia che il rapporto di scorrimento è maggiore di 1. Inoltre k aumenta con la pressione (vale 1 alla massima pressione del suo campo di validità), coerentemente con la tendenza all'omogeneità delle miscele bifase ad alta pressione.
- **Armand**⁽⁵⁾. Analoga alla precedente, salvo che il fattore correttivo k è correlato al titolo anziché alla pressione. Anche in questo caso k è sempre minore o uguale a 1, cioè il rapporto di scorrimento è superiore a 1; diviene uguale a 1 per il titolo pari a 1 (solo vapore)
- **Thom**⁽⁶⁾. In questa correlazione il grado di vuoto è legato al titolo in portata e al parametro empirico γ ; si può facilmente ricavare la relazione che lega γ a ξ utilizzando l'equazione (I.1.3.9.3) dalla quale si ottiene

$$\gamma = \frac{\rho_l}{\rho_v} \frac{1}{\xi}$$

γ , e quindi ξ , dipende dalla sola pressione secondo la seguente tabella

	PRESSIONE (bar)						
	1.0	17.2	41.4	86.2	151.7	206.9	221.1
(ρ_l/ρ_v)	1600	99.1	38.3	15.33	6.65	2.48	1
ξ	6.45	2.48	1.92	1.57	1.35	1.15	1.00
γ	246	40	20	9.80	4.95	2.15	1.0

Il rapporto di scorrimento è funzione decrescente della pressione e vale 1 alla pressione critica.

- **Osmachkin** ⁽⁷⁾. Questa correlazione fornisce il rapporto di scorrimento; esso risulta in ogni caso maggiore di 1, decresce con la pressione e tende a 1 avvicinandosi alla pressione critica. Il rapporto di scorrimento è inoltre funzione crescente del titolo volumetrico e del diametro equivalente e decrescente della portata specifica.
- **Zuber-Findlay** ⁽⁸⁾. Più che di una correlazione si tratta di un metodo per il calcolo del grado di vuoto (e di conseguenza della densità) che differisce sostanzialmente da quelli precedentemente esposti. Infatti in questo caso il grado di vuoto è espresso, oltre che mediante il titolo e le densità delle due fasi, mediante due altri parametri: C_0 e V_{gj} . Nei precedenti metodi si utilizzava invece un solo parametro (di solito il fattore di scorrimento ξ). Nel rapporto di scorrimento ξ venivano conglobati due effetti fisici nettamente diversi: lo scorrimento locale fra le fasi e la distribuzione disuniforme del vapore sulla sezione. Nel modello di Zuber-Findlay invece i due effetti sono separati: V_{gj} rappresenta una velocità di scorrimento fra il gas e la miscela bifase nel suo insieme, e tiene quindi conto degli scorrimenti locali; C_0 è invece un parametro di distribuzione, che rappresenta l'effetto di scorrimento risultante da una distribuzione disuniforme del gas nelle zone ad alta e a bassa velocità. Pertanto V_{gj} assumerà di solito valori positivi, almeno nel caso di moto ascendente; C_0 può essere maggiore o minore di 1 secondo che i vuoti siano maggiormente concentrati al centro o in prossimità delle pareti. La condizione di miscela omogenea è rappresentata da V_{gj} nulla e C_0 pari a 1.
- **Zuber-Dix** ⁽⁹⁾. Nel modello di Zuber-Findlay i valori dei parametri C_0 e V_{gj} dipendono in linea di principio dal regime di moto; risulta tuttavia più conveniente esprimere tali parametri con correlazioni empiriche, valide indipendentemente dal regime di moto. La correlazione di Dix fornisce appunto delle espressioni empiriche per i parametri da inserire nel modello di Zuber-Findlay; la densità viene di solito predetta con notevole accuratezza.
- **Zuber-Rouhany** ⁽¹⁰⁾. Per la correlazione di Rouhany valgono considerazioni del tutto analoghe a quella di Dix. Anche con questa correlazione i risultati sono di solito accurati; la densità risulta generalmente un po' inferiore a quella predetta da Dix.

- **CISE slip**⁽¹¹⁾. Si tratta di una correlazione sviluppata al CISE; il termine slip si riferisce al rapporto di scorrimento ("slip ratio"). La correlazione fornisce infatti il rapporto di scorrimento, in funzione del titolo volumetrico e di due gruppi adimensionali così definiti:

$$Re = \frac{G D_e}{\mu}$$

$$Wb = \frac{G^2 D_e}{\sigma \rho_l}$$

dove D_e è il diametro idraulico del condotto.

Il rapporto di scorrimento risulta sempre superiore all'unità. Oltre ai limiti di validità riportati in tabella, si tenga presente che la correlazione perde significato quando l'espressione sotto radice diviene negativa; ciò si verifica quando il titolo volumetrico diviene troppo alto, precisamente per

$$X_v > \frac{1 - C}{C^2 - C + 1}$$

L'espressione di C è riportata nella tabella precedente.

La correlazione CISE slip fornisce risultati abbastanza soddisfacenti, se si eccettua il caso delle basse portate specifiche, ove si osserva una sottostima delle densità misurate sperimentalmente.

I.1.4

I fenomeni di trasporto associati alle equazioni di conservazione per un efflusso monodimensionale

Le equazioni di conservazione relative ad un efflusso monodimensionale di un fluido monofase sono:

Equazione di conservazione della massa (vedasi I.1.2.1.5)

$$\frac{\partial \rho \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial \rho \Sigma V}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.1.4.1})$$

Equazione di conservazione della quantità di moto (vedasi I.1.2.2.9)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Sigma \rho V) + \frac{\partial}{\partial x} (\Sigma \rho V^2) + \Sigma \frac{\partial p}{\partial x} - |\vec{\tau}_p| \bar{\omega} - \Sigma \rho \vec{g} \cdot \vec{i} = 0 \quad (\text{I.1.4.2})$$

Equazione di conservazione dell'energia (vedasi I.1.2.3.1.10)

$$\Sigma \rho T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + V \frac{\partial S}{\partial x} \right) = \frac{q \bar{\omega}}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} - |\vec{\tau}_p| \bar{\omega} V \quad (\text{I.1.4.3})$$

Si suppone che la sezione del condotto Σ sia spazialmente e temporalmente costante.

Si assumono come incognite la pressione p , la velocità V e l'entropia specifica S .

È quindi

$$\rho = \rho(p, S) \quad (\text{I.1.4.4})$$

e

$$T = T(p, S) \quad (\text{I.1.4.5})$$

Dividendo le (I.1.4.1), (I.1.4.2) e (I.1.4.3) per Σ , sostituendo la (I.1.4.1) nella (I.1.4.2) e la (I.1.4.4) sia nella (I.1.4.2) che nella (I.1.4.3) si ottiene il seguente sistema di equazioni differenziali quasi-lineare del primo ordine.

$$\frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial V}{\partial x} + V \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{I.1.4.6})$$

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{|\vec{\tau}_p|}{r_H} - \rho \vec{g} \cdot \vec{i} = 0 \quad (\text{I.1.4.7})$$

$$\rho T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + V \frac{\partial S}{\partial x} \right) = \frac{q}{r_H \vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} - \frac{|\vec{\tau}_p|}{r_H} V \quad (\text{I.1.4.8})$$

Indicando la velocità del suono con

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \Big|_{s=const}} ,$$

sostituendo la (I.1.4.8) nella (I.1.4.6) e riordinando si ottiene

$$\frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho T r_H} \left(\frac{q}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} - |\vec{\tau}_p| V \right) \frac{\partial \rho}{\partial S} = 0 \quad (\text{I.1.4.9})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{|\vec{\tau}_p|}{r_H \rho} - \vec{g} \cdot \vec{i} = 0 \quad (\text{I.1.4.10})$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + V \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{1}{\rho T r_H} \left(\frac{q}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} - |\vec{\tau}_p| V \right) = 0 \quad (\text{I.1.4.11})$$

cioè, in forma matriciale

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = B \quad (\text{I.1.4.12})$$

dove è

$$U = \begin{vmatrix} p \\ V \\ S \end{vmatrix} \quad A = \begin{vmatrix} V & \rho a^2 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & V & 0 \\ 0 & 0 & V \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} -\frac{a^2}{\rho T r_H} \left(\frac{q}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} - |\vec{\tau}_p| V \right) \frac{\partial \rho}{\partial S} \\ \frac{\tau_p}{r_H \rho} + \vec{g} \cdot \vec{i} \\ \frac{1}{\rho T r_H} \left(\frac{q}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} - |\vec{\tau}_p| V \right) \end{vmatrix}$$

Gli autovalori della matrice A valgono

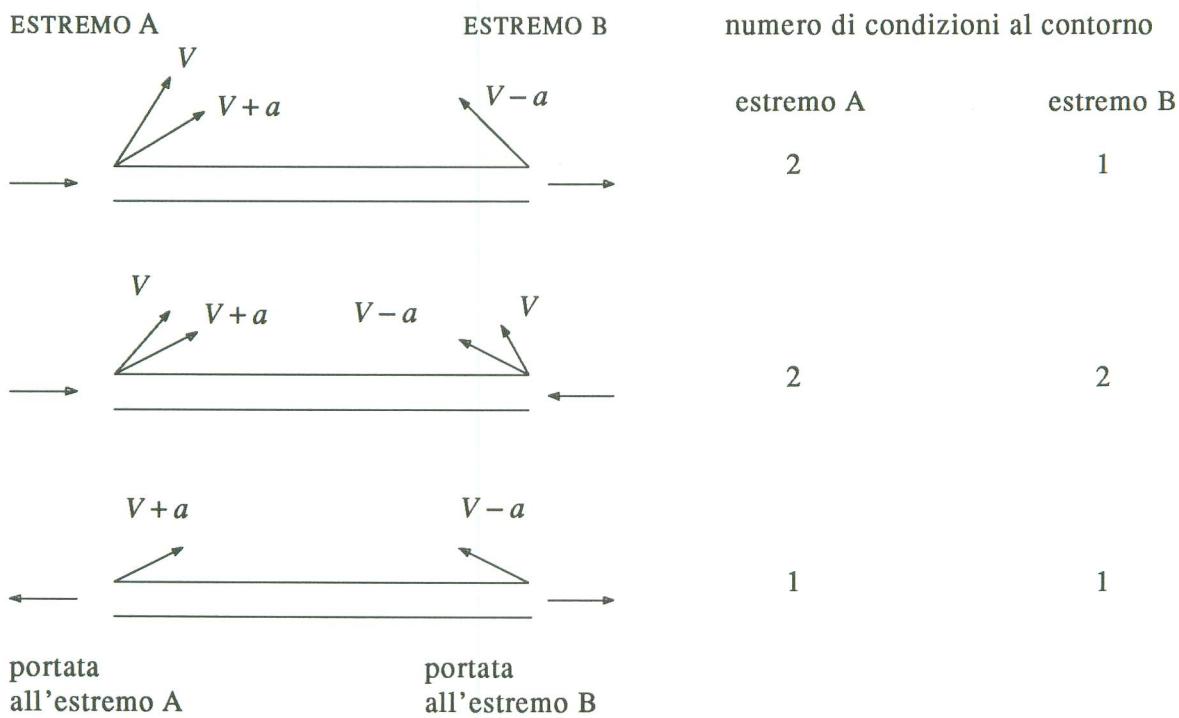
$$\lambda_1 = V + a \quad \lambda_2 = V - a \quad \lambda_3 = V$$

Poichè essi sono tutti reali il sistema (I.1.4.12) è iperbolico. Ciò significa che il modello matematico del sistema fluido in esame permette lo studio dei fenomeni di propagazione all'interno del sistema di eventi perturbativi che si verificano sul suo contorno.

Si ricorda infatti che gli autovalori della matrice A rappresentano i coefficienti angolari delle tangenti alle linee, nel piano (x, t) , lungo le quali si propagano le perturbazioni nel sistema in esame, linee che prendono il nome di linee caratteristiche.

Dall'esame della matrice A si vede che la terza equazione, che dà la distribuzione spazio-temporale di S, è indipendente dalle altre due ai fini della determinazione degli autovalori e dà origine all'autovalore $\lambda_3 = V$.

Il significato delle linee caratteristiche chiarisce le modalità di assegnazione delle condizioni al contorno, che devono ovviamente essere date in corrispondenza di caratteristiche entranti nel sistema. Pertanto il numero di condizioni al contorno necessarie nelle varie situazioni è mostrato, nel caso di efflusso subsonico, nello schema seguente che indica, nelle varie situazioni di portata agli estremi, le linee caratteristiche entranti nel sistema.



In particolare la condizione al contorno specificante l'entropia S (o l'entalpia H) deve essere sempre assegnata all'estremo, o agli estremi, nei quali si ha una caratteristica entrante nel sistema avente direzione caratteristica V .

Il sistema di equazioni (I.1.4.12) è incondizionatamente iperbolico per fluido monofase. Per fluido bifase esso lo è ancora se si assume un rapporto di scorrimento pari ad uno. Nel caso dell'adozione di modelli di efflusso bifase a tre equazioni con rapporto di scorrimento calcolato tramite correlazioni (si veda il paragrafo I.1.3) si rileva l'esistenza, nello spazio V, p, S , di zone nelle quali il suddetto sistema di equazioni non risulta più iperbolico^{(1),(2)}.

Ciò rende mal posto il problema ai valori iniziali in tali zone⁽³⁾. Ci si limita qui a segnalare che tale problema sorge anche con l'adozione di altri modelli di efflusso bifase⁽⁴⁾ descritti nel par. I.1.3.

Si vuole ora trovare una soluzione analitica del sistema (I.1.4.12) per perturbazioni di piccola ampiezza, nel caso ideale di assenza di attrito e di scambio di potenza con l'esterno nullo. Si considera una tubazione a sezione costante ed a sviluppo orizzontale.

Le equazioni (I.1.4.9), (I.1.4.10) e (I.1.4.11) divengono

$$\frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.1.4.13})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.1.4.14})$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + V \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.1.4.15})$$

La soluzione stazionaria nelle ipotesi fatte è

$$\begin{cases} V(x) = V_0 & \text{uniforme} \\ p(x) = p_0 & \text{uniforme} \\ S(x) = S_0 & \text{uniforme} \end{cases} \quad (\text{I.1.4.16})$$

Linearizzando le (I.1.4.13), (I.1.4.14) e (I.1.4.15) intorno alla soluzione stazionaria (I.1.4.16) con le posizioni

$$\delta V(x, t) = V(x, t) - V_0$$

$$\delta p(x, t) = p(x, t) - p_0$$

$$\delta S(x, t) = S(x, t) - S_0$$

si ottiene

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \delta p}{\partial x} + \rho_0 a_0^2 \frac{\partial \delta V}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.1.4.17})$$

$$\frac{\partial \delta V}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \delta V}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.1.4.18})$$

$$\frac{\partial \delta S}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \delta S}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.1.4.19})$$

Trasformando le suddette equazioni secondo Laplace e indicando

$$\bar{V}(x, s) = \mathcal{L}(\delta V(x, t))$$

$$\bar{p}(x, s) = \mathcal{L}(\delta p(x, t))$$

$$\bar{S}(x, s) = \mathcal{L}(\delta S(x, t))$$

le (I.1.4.17), (I.1.4.18) e (I.1.4.19) si trasformano in un sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$s\bar{p} + V_0 \frac{d\bar{p}}{dx} + \rho_0 a_0^2 \frac{d\bar{V}}{dx} = 0 \quad (\text{I.1.4.20})$$

$$s\bar{V} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\bar{p}}{dx} + V_0 \frac{d\bar{V}}{dx} = 0 \quad (\text{I.1.4.21})$$

$$s\bar{S} + V_0 \frac{d\bar{S}}{dx} = 0 \quad (\text{I.1.4.22})$$

La (I.1.4.22) può essere integrata indipendentemente dalle altre due equazioni ottenendo

$$\bar{S}(x, s) = \bar{S}(0, s) e^{-s \frac{x}{V_0}} \quad (\text{I.1.4.23})$$

Antitrasformando la (I.1.4.23) risulta

$$\delta S(x, t) = \delta S\left(0, t - \frac{x}{V_0}\right) \quad (\text{I.1.4.24})$$

La (I.1.4.24) mostra che le perturbazioni di entropia si propagano con la velocità V_0 del fluido. Di conseguenza la perturbazione che si ha all'ingresso del sistema all'istante t transiterà nel punto di ascissa x con ampiezza pari a quella iniziale e con un ritardo

$$\tau = \frac{x}{V_0}$$

Riordinando le equazioni (I.1.4.20) e (I.1.4.21) si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \frac{d\bar{p}}{dx} = \frac{s}{a_0^2 - V_0^2} \left(V_0 \bar{p} - \rho_0 a^2 \bar{V} \right) \\ \frac{d\bar{V}}{dx} = \frac{s}{a_0^2 - V_0^2} \left(-\frac{1}{\rho_0} \bar{p} + V_0 \bar{V} \right) \end{cases} \quad (\text{I.1.4.25})$$

Posto il sistema (I.1.4.25) in forma matriciale

$$\frac{dU}{dx} = A U \quad (\text{I.1.4.26})$$

dove

$$U = \begin{vmatrix} \bar{p} \\ \bar{V} \end{vmatrix} \quad \text{ed} \quad A = \begin{vmatrix} \frac{s V_0}{a_0^2 - V_0^2} & -\frac{s \rho_0 a_0^2}{a_0^2 - V_0^2} \\ -\frac{s}{\rho_0 (a_0^2 - V_0^2)} & \frac{s V_0}{a_0^2 - V_0^2} \end{vmatrix}$$

Indicati gli autovalori di A con

$$\lambda_1 = \frac{s}{a_0 - V_0} \quad \lambda_2 = -\frac{s}{a_0 + V_0}$$

ed i corrispondenti autovettori con

$$U_{01} = \begin{vmatrix} 1 \\ \frac{-1}{\rho_0 a_0} \end{vmatrix} \quad \text{ed} \quad U_{02} = \begin{vmatrix} 1 \\ \frac{1}{\rho_0 a_0} \end{vmatrix}$$

la soluzione del sistema è

$$U = C_1 U_{01} e^{\lambda_1 x} + C_2 U_{02} e^{\lambda_2 x} \quad (\text{I.1.4.27})$$

Imponendo ad esempio come condizioni al contorno

$$\bar{p}(O, s) \quad \text{e} \quad \bar{V}(L, s),$$

definendo L la lunghezza della tubazione, si ottiene il sistema seguente nelle incognite C_1 e C_2

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 + C_2 = \bar{p}(O, s) \\ -\frac{1}{\rho_0 a_0} C_1 e^{\frac{sL}{a_0 - V_0}} + \frac{1}{\rho_0 a_0} C_2 e^{-\frac{sL}{a_0 + V_0}} = \bar{V}(L, s) \end{array} \right. \quad (\text{I.1.4.28})$$

e risolvendo

$$C_1 = \frac{1}{e^{\frac{sL}{a_0 - V_0}} + e^{-\frac{sL}{a_0 + V_0}}} \left[\bar{p}(O, s) e^{-\frac{sL}{a_0 + V_0}} - \rho_0 a_0 \bar{V}(L, s) \right] \quad (\text{I.1.4.29})$$

$$C_2 = \frac{1}{e^{\frac{sL}{a_0 - V_0}} + e^{-\frac{sL}{a_0 + V_0}}} \left[\bar{p}(0, s) e^{\frac{sL}{a_0 - V_0}} - \rho_0 a_0 \bar{V}(L, s) \right] \quad (\text{I.1.4.30})$$

Esplcitando le espressioni delle componenti del vettore U dalla (I.1.4.27) si ottengono

$$\bar{p}(x, s) = C_1 e^{\frac{sx}{a_0 - V_0}} + C_2 e^{-\frac{sx}{a_0 + V_0}} \quad (\text{I.1.4.31})$$

$$\bar{V}(x, s) = -\frac{C_1}{\rho_0 a_0} e^{\frac{sx}{a_0 - V_0}} + \frac{C_2}{\rho_0 a_0} e^{-\frac{sx}{a_0 + V_0}} \quad (\text{I.1.4.32})$$

Dalle (I.1.4.31) e (I.1.4.32) si constata che le variazioni della pressione e della portata sono la somma di due perturbazioni, una che si trasmette nel senso del moto del fluido ad una velocità pari alla somma della velocità del fluido e di quella del suono, l'altra in senso opposto ad una velocità pari alla differenza fra la velocità del suono e quella del fluido. L'ampiezza di queste perturbazioni dipende dalle condizioni al contorno e da s secondo le (I.1.4.29) e (I.1.4.30).

Se, come succede molto spesso, la velocità del fluido V è molto inferiore a quella del suono si può fare l'approssimazione

$$\lambda_1 \approx \frac{s}{a} \quad \text{e} \quad \lambda_2 \approx -\frac{s}{a}$$

Ciò equivale a trascurare il termine

$$V_0 \frac{d\bar{p}}{dx}$$

nella (I.1.4.20) ed il termine

$$V_0 \frac{d\bar{V}}{dx}$$

nella (I.1.4.21).

Riferendosi al modello non lineare costituito dalle equazioni (I.1.4.6), (I.1.4.7) e (I.1.4.8), con la suddetta approssimazione i termini trascurati risultano essere nella equazione di conservazione della massa (I.1.4.6) il termine

$$V \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}$$

nell'equazione di conservazione della quantità di moto (I.1.4.7) il termine

$$\rho V \frac{\partial V}{\partial x}$$

Il significato di tali termini è più chiaro se nelle equazioni di conservazione si assumono come incognite principali la pressione p , la portata massima W e l'entropia specifica S , ricordando che è

$$W = \rho V \Sigma \quad (\text{I.1.4.33})$$

Le equazioni (I.1.4.1), (I.1.4.2) e (I.1.4.3) diventano, sostituendo in esse la (I.1.4.33), sviluppando le derivate tenendo conto della (I.1.4.4) e che

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{s=cost} = \frac{1}{a^2},$$

e supponendo che Σ sia costante

$$\Sigma \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.1.4.34})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{\Sigma} \left[\frac{2W}{\rho} \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{W^2}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] + \Sigma \frac{\partial p}{\partial x} \\ - |\vec{\tau}_p| \omega - \Sigma \rho \vec{g} \cdot \vec{i} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.1.4.35})$$

$$T \left(\Sigma \rho \frac{\partial S}{\partial t} + W \frac{\partial S}{\partial x} \right) - \frac{q \omega}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} + |\vec{\tau}_p| \omega \frac{W}{\rho \Sigma} = 0 \quad (\text{I.1.4.36})$$

Le linee caratteristiche del sistema costituito dalle equazioni (I.1.4.34), (I.1.4.35) e (I.1.4.36) sono ovviamente le stesse del sistema formato dalle (I.1.4.6), (I.1.4.7) e (I.1.4.8), con tangenti aventi come coefficiente angolare

$$\lambda_1 = V + a \quad \lambda_2 = V - a \quad \lambda_3 = V.$$

Si può facilmente verificare che ipotizzare che sia

$$\lambda_1 \approx a \quad \text{e} \quad \lambda_2 \approx -a$$

equivale a porre uguale a zero nell'equazione (I.1.4.35) i termini

$$\frac{2W}{\Sigma \rho} \frac{\partial W}{\partial x} \quad \text{e} \quad - \frac{W^2}{\Sigma \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Notando che è

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{W^2}{\rho \Sigma} = \frac{2W}{\Sigma \rho} \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{W^2}{\rho^2 \Sigma} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} \right) \quad *$$

si constata che trascurare nell'equazione di conservazione della quantità di moto il termine

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{W^2}{\rho \Sigma} ,$$

che tiene conto della variazione spaziale del flusso di quantità di moto, corrisponde a ipotizzare che le perturbazioni di pressione e di portata si propaghino nel fluido con la velocità del suono.

Si consideri ora come caso particolare quello di un fluido a densità costante

$$\rho(x, t) = \rho_0 = \text{costante}$$

Si ipotizzi inoltre che il moto del fluido sia turbolento, e si possa quindi ritenere costante il fattore d'attrito C_f .

In tale ipotesi l'equazione (I.1.4.6) diventa

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.1.4.37})$$

quindi la velocità V è la stessa in ogni punto del condotto. Sostituendo la (I.1.4.37) e la (I.1.2.2.10) nella (I.1.4.7) si ottiene

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{C_f}{2 r_H} V^2 \rho - \rho \vec{g} \cdot \vec{i} = 0 \quad (\text{I.1.4.38})$$

che, essendo V e ρ indipendenti da x , può essere integrata su tutta la lunghezza del condotto l diventando

$$l \rho \frac{dV}{dt} = p_{x=0} - p_{x=l} - \frac{C_f l}{2 r_H} V^2 \rho + \rho \int_0^l \vec{g} \cdot \vec{i} dx \quad (\text{I.1.4.39})$$

L'indipendenza da x della velocità V , secondo la (I.1.4.37), può essere spiegata anche considerando che se ρ è costante è

* Si noti che il termine $\frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x}$ non influisce sui valori di λ .

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_{s = \text{cost}} = 0$$

e la velocità del suono a risulta infinita poichè è

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}} \Big|_{s = \text{cost}}$$

Di conseguenza le perturbazioni di pressione e di velocità, che si propagano con velocità pari a

$$V + a \quad \text{e} \quad V - a \quad ,$$

hanno una velocità di propagazione infinita.

La velocità V può essere calcolata in ogni istante integrando nel tempo la (I.1.4.39), noti che siano gli andamenti temporali della pressione alle estremità del condotto.

Infine, nota V , l'integrazione separata della (I.1.4.8) permette di calcolare l'andamento temporale di S in ogni punto del condotto purchè siano note l'entropia del fluido all'ingresso del condotto e la potenza q in ogni punto.

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.1.5**La separabilità della equazione di conservazione dell'energia da quelle della massa e della quantità di moto.**

Si consideri l'efflusso monodimensionale di un fluido monofase (o bifase omogeneo) in un condotto a sezione costante.

Il modello matematico ad esso relativo è costituito dalle tre equazioni di conservazione che, dal par. I.1.4, possono essere poste nelle forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial V}{\partial x} + V \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{I.1.5.1})$$

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{|\vec{\tau}_p|}{r_H} - \rho \vec{g} \cdot \vec{i} = 0 \quad (\text{I.1.5.2})$$

$$\rho T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + V \frac{\partial S}{\partial x} \right) = \frac{q}{r_H \vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} - \frac{|\vec{\tau}_p|}{r_H} V , \quad (\text{I.1.5.3})$$

dalla legge costitutiva per il calcolo di $|\vec{\tau}_p|$, che avrà in generale la forma

$$|\vec{\tau}_p| = - f(\text{Re}) \frac{1}{2} V |V| \rho \quad (\text{I.1.5.4})$$

con

$$\text{Re} = \frac{\rho V D_H}{\mu} , \text{ (numero di Reynolds)}$$

dove D_H è il diametro idraulico del condotto, definito come il rapporto fra il quadruplo dell'area della sezione di passaggio del fluido ed il perimetro di esso bagnato, e dalle correlazioni per il calcolo della densità ρ , della temperatura T e della viscosità μ del fluido in funzione della pressione p e dell'entropia specifica S

$$\rho = \rho(p, S) \quad (\text{I.1.5.5})$$

$$T = T(p, S) \quad (\text{I.1.5.6})$$

$$\mu = \mu(p, S) \quad (\text{I.1.5.7})$$

Nell'ipotesi che la densità ρ e la viscosità μ non dipendano dall'entropia S del fluido (quindi ovviamente $\partial \rho / \partial S = 0$) nessun termine delle (I.1.5.1) e (I.1.5.2) dipende esplicitamente o implicitamente da S .

Le (I.1.5.1) e (I.1.5.2) possono essere allora integrate separatamente dalla (I.1.5.3), determinando gli andamenti spaziali e temporali di V e di p , noti i quali può essere integrata la (I.1.5.3).

Qualora il moto del fluido sia in regime turbolento, nel qual caso la dipendenza del fattore d'attrito C_f dal numero di Reynolds Re è trascurabile (par. I.1.6.1.1), l'ipotesi dell'indipendenza della viscosità μ dall'entropia S non è più necessaria ai fini della separabilità dell'equazione di conservazione dell'energia dalle altre equazioni di conservazione.

Nel caso che come variabili dipendenti si assumano la pressione r , la velocità V e l'entalpia H (al posto dell'entropia S) le (I.1.5.1), (I.1.5.2) e (I.1.5.3) diventano

$$\frac{\partial \rho}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial V}{\partial x} + V \left(\frac{\partial \rho}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{I.1.5.8})$$

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{|\vec{\tau}|}{r_H} - \rho \vec{g} \cdot \vec{i} = 0 \quad (\text{I.1.5.9})$$

$$\rho \frac{\partial H}{\partial t} + \rho V \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial t} - V \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{q}{r_H \vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} - \frac{|\vec{\tau}_p|}{r_H} V \quad (\text{I.1.5.10})$$

dove la (I.1.5.10) è ottenuta dividendo per Σ la (I.1.2.3.1.4).

È importante notare che con tale scelta delle variabili, l'equazione (I.1.5.10) di conservazione dell'energia non può più essere integrata separatamente dalle altre due equazioni di conservazione (I.1.5.8) e (I.1.5.9), pur nelle ipotesi che ρ e μ siano costanti, poiché in essa compaiono esplicitamente le derivate della pressione p .

I.1.6 Le interazioni con l'esterno di un fluido in efflusso monodimensionale

I.1.6.1. Correlazioni di perdita di carico per attrito.

I.1.6.1.1. Correlazioni di perdita di carico per attriti per fluidi monofase.

Si consideri un condotto rettilineo, con pareti lisce, a sezione circolare di diametro D e si consideri un tratto l tale che $l \gg D$. D e l sono le caratteristiche geometriche che intervengono nella determinazione delle perdite di carico distribuite. Le caratteristiche fisiche del fluido che influenzano il fenomeno e che quindi intervengono nella determinazione delle perdite sono la viscosità μ e la densità ρ . Inoltre interviene la portata Γ o la portata specifica di massa

$$\bar{G} = \frac{\Gamma}{\Sigma}$$

o la velocità media di sezione

$$\bar{V} = \frac{\Gamma}{\rho \Sigma}$$

Si applichi il metodo di analisi dimensionale di Buckingham ⁽¹⁾.

Le variabili fondamentali prescelte, tante quante le unità di misura fondamentali delle variabili coinvolte nel processo, sono la densità ρ , la velocità V ed il diametro D^* , scelte fra le cinque variabili rilevanti ai fini della determinazione delle perdite di carico per attrito, che sono, oltre alle tre sopra citate, la viscosità del fluido μ e la perdita di carico per attrito per unità di lunghezza $\Delta p / l$

Si può porre allora

$$\pi_1 = \rho^a V^b D^c \frac{\Delta p}{l} \quad (\text{I.1.6.1.1.1})$$

$$\pi_2 = \rho^d V^e D^f \mu \quad (\text{I.1.6.1.1.2})$$

Ricordando che le dimensioni delle variabili suddette sono, assumendo come unità fondamentali la massa M , la lunghezza L ed il tempo T

* Più in generale per condotto a sezione non circolare o per fasci di tubi si fa riferimento al diametro idraulico D_H , definito come il rapporto fra il quadruplo dell'area Σ della sezione di passaggio del fluido ed il perimetro da esso bagnato. Per un condotto a sezione circolare completamente bagnata dal fluido D e D_H coincidono

$$\rho = [M \ L^{-3}]$$

$$V = [L \ T^{-1}]$$

$$D = [L]$$

$$\frac{\Delta p}{l} = [M \ L^{-2} \ T^{-2}]$$

$$\mu = [M \ L^{-1} \ T^{-1}]$$

imponendo che π_1 e π_2 siano adimensionali si ottiene

$$a = -1 \quad b = -2 \quad c = 1$$

$$d = -1 \quad e = -1 \quad f = -1$$

quindi

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{l} \frac{D}{\rho V^2} \quad (\text{I.1.6.1.1.3})$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D} \quad (\text{I.1.6.1.1.4})$$

Si noti che il gruppo adimensionale π_2 è il reciproco del numero di Reynolds Re.

Per il primo teorema di Buckingham è

$$F(\pi_1, \pi_2) = 0 \quad (\text{I.1.6.1.1.5})$$

che può essere scritto come

$$\pi_1 = f_1(\pi_2) \quad (\text{I.1.6.1.1.6})$$

cioè

$$\frac{\Delta p_l}{l} = 2 C_f(\text{Re}) \frac{\rho \bar{V}^2}{D} \quad (\text{I.1.6.1.1.7})$$

dove C_f è una funzione solo del numero di Reynolds ed è chiamato "fattore d'attrito". L'andamento di C_f al variare del numero di Reynolds è stato ricavato e confermato da moltissime misure sperimentali.

Esso subisce una brusca variazione nel passaggio del moto dal regime laminare al regime turbolento. Una rappresentazione analitica di tale andamento è la seguente:

- per il regime laminare

$$C_f = \frac{16}{Re} \quad Re < 4000 \quad (\text{I.1.6.1.1.8})$$

- per il regime turbolento e tubi lisci si sono proposte moltissime correlazioni. A titolo di esempio si citano le due seguenti

$$C_f = 0,046 Re^{-0,20} \quad 5 \cdot 10^3 < Re < 2 \cdot 10^5 \quad (\text{Colburn}) \quad (\text{I.1.6.1.1.9})$$

$$C_f = 0,0014 + 0,125 Re^{-0,32} \quad 3 \cdot 10^3 < Re < 3 \cdot 10^6 \quad (\text{Drew}) \quad (\text{I.1.6.1.1.10})$$

Mentre la relazione (I.1.6.1.1.8) non è applicabile ai condotti non circolari tramite la sostituzione del diametro con il diametro equivalente (poichè esso non è sufficiente in tal caso a rappresentare la sezione del condotto), le relazioni (I.1.6.1.1.9) e (I.1.6.1.1.10) valgono con buona approssimazione, come si verifica sperimentalmente, anche per condotti di diversa geometria introducendo in esse al posto di D il diametro equivalente.

Altre relazioni usate sono :

$$C_f = 0,079 Re^{-0,25} \quad 3000 \leq Re \leq 10^5 \quad (\text{Blasius}) \quad (\text{I.1.6.1.1.11})$$

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} = 4 \lg (Re \sqrt{C_f}) - 0,40 \quad 4000 \leq Re \leq 3,24 \cdot 10^6 \quad (\text{Nikuradse}) \quad (\text{I.1.6.1.1.12})$$

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} = 4,06 \lg (\sqrt{C_f} Re) - 0,6 \quad (\text{Von Karman}) \quad (\text{I.1.6.1.1.13})$$

Nella tabella seguente è riportato il confronto delle equazioni del fattore d'attrito C_f per diversi valori del numero di Reynolds per moto turbolento e tubi lisci:

Re	Blasius	Colburn	Nikuradse	Karman	Drew
3.000	0.0107	0.00930	0.0109	0.0109	0.0110
10.000	0.00700	0.00730	0.00772	0.00774	0.00797
100.000	0.00443	0.0040	0.00448	0.00449	0.00456
1.000.000	0.00250	0.00280	0.00291	0.00292	0.00290
10.000.000	0.00140	0.00183	0.00204	0.00202	0.00218

Se le pareti del condotto non sono lisce, ma presentano una rugosità, si può avere un disturbo nel moto in regime laminare con la creazione di componenti turbolente, anche se il numero di Reynolds è inferiore ai valori critici di transizione.

Qualora la rugosità sia abbastanza regolare e piccola rispetto al diametro del condotto, si può introdurre come parametro che la caratterizza il rapporto e/D essendo e l'altezza media delle protuberanze. In tal caso C_f risulta funzione oltre che di Re anche del parametro e/D come può vedersi dalla fig. I.1.6.1. Si può notare che all'aumentare di e/D aumenta il valore di C_f e che esso diventa praticamente indipendente da Re . Se la rugosità è molto piccola (e/D piccoli) solo ad elevati numeri di Reynolds si ha uno scostamento dal comportamento del tubo liscio, ciò significa che le rugosità diventano efficaci a pari dimensioni, solo quando il numero di Reynolds supera un certo valore, tanto maggiore quanto più è piccola la rugosità. Nella regione di completa turbolenza, cioè

$$\frac{\frac{D}{2e}}{Re \sqrt{C_f}} > 0,005$$

C_f dipende soltanto dalla rugosità relativa ed è indipendente dal numero di Reynolds; in detta regione vale la seguente formula:

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} = 4 \ln \frac{D}{2e} + 3,48 \quad (\text{Nikuradse}) \quad (\text{I.1.6.1.1.14})$$

Per la regione di transizione, cioè per

$$\frac{\frac{D}{2e}}{Re \sqrt{C_f}} \leq 0,005$$

Colebrook propone la seguente equazione:

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} = 4 \ln \frac{D}{2e} + 3,48 - 4 \ln \left(1 + 9,35 \frac{\frac{D}{2e}}{Re \sqrt{C_f}} \right)$$

In questa regione il fattore d'attrito è in funzione sia della rugosità relativa che del numero di Reynolds.

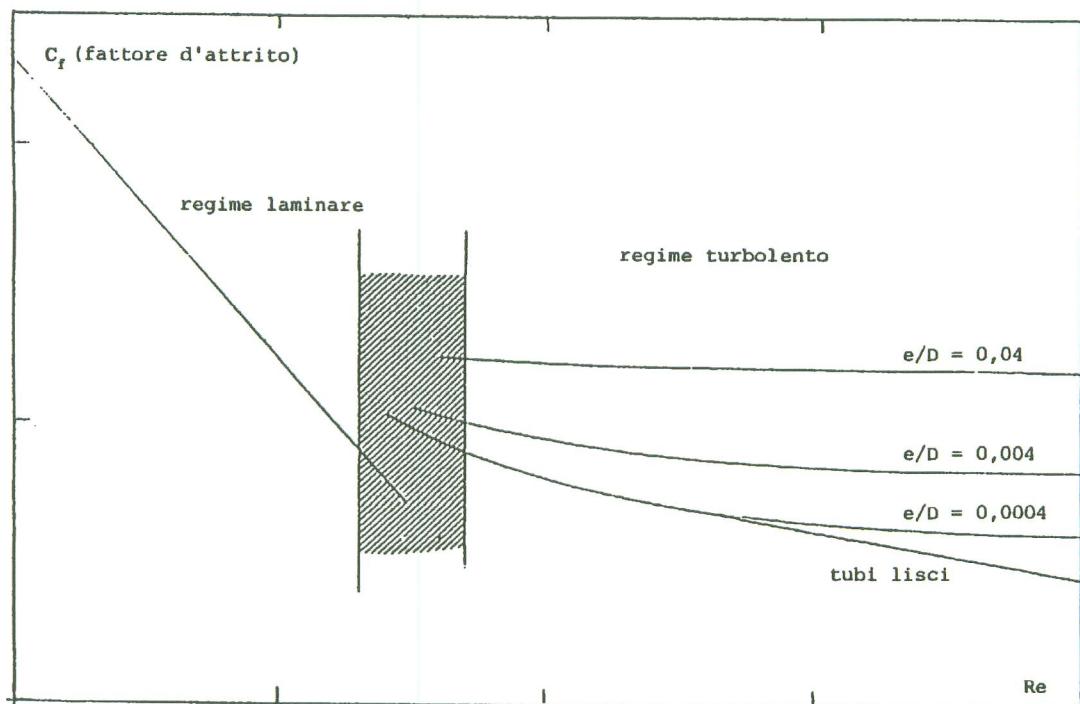


Fig. I.1.6.1

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.1.6.1.2 Correlazioni di perdita di carico per attrito per fluidi bifase.

Analogamente a quanto avviene per i fluidi monofase, un fluido bifase che percorre un condotto in regime stazionario subisce delle variazioni di pressione attribuibili ad effetti di vario tipo:

- resistenze dovute agli attriti (termine dissipativo);
- variazioni di velocità del fluido lungo l'asse del condotto dovute ad esempio a variazioni di densità (termine accelerativo);
- forza peso (termine gravitazionale);
- eventuale lavoro fornito o sottratto al fluido (termine meccanico);
- resistenze dovute a variazioni di sezione o di direzione dell'asse del condotto (perdite di carico localizzate).

La misura delle perdite di carico per attrito lungo una tubazione avviene in realtà misurando la variazione di pressione totale lungo la tubazione stessa e sottraendo i contributi dovuti ai termini non dissipativi ed alle perdite localizzate. Poiché in una sezione di tubazione predisposta per tali misure il termine meccanico e le perdite localizzate sono nulli e di solito ci si riferisce a tubazioni ad asse verticale è quindi necessario valutare sia il termine accelerativo che il termine gravitazionale. Ciò non presenta alcun problema nel caso di fluidi monofase, mentre nel caso di fluidi bifase è necessario a tal fine conoscere il grado di vuoto α e il titolo X della miscela, il cui reciproco legame viene determinato dalla correlazione usata per il calcolo della densità della miscela (par. I.1.3.9). Difatti dall'equazione di conservazione della quantità di moto che in regime stazionario e per un condotto a sezione Σ costante diviene

$$\frac{d}{dx} \left[\rho_v \alpha V_v^2 + \rho_l (1 - \alpha) V_l^2 \right] + \frac{dp}{dx} - \frac{\vec{\tau}_p | \omega}{\Sigma} - \vec{g} \cdot \vec{i} [\alpha \rho_v + (1 - \alpha) \rho_l] = 0 \quad (\text{I.1.6.1.2.1})$$

Ricordando la definizione di portata massica specifica G

$$G = \rho_v \alpha V_v + \rho_l (1 - \alpha) V_l \quad (\text{I.1.6.1.2.2.})$$

e del titolo in portata X_p

$$X_p = \frac{\rho_v \alpha V_v}{G} \quad (\text{I.1.6.1.2.3})$$

per le quali valgono le eguaglianze

$$\rho_v \alpha V_v^2 = G^2 \frac{X_p^2}{\alpha \rho_v} \quad \rho_e (1 - \alpha) V_l^2 = G^2 = \frac{(1 - X_p)^2}{\rho_l (1 - \alpha)} \quad (\text{I.1.6.1.2.4})$$

e tenendo conto che G è costante si perviene all'espressione della caduta di pressione per unità di lunghezza, designata nel presente paragrafo come dp/dx

come somma dei tre termini, rispettivamente accelerativo, dissipativo e gravitazionale:

$$-\frac{dp}{dx} = G^2 \frac{d}{dx} \left[\frac{X_p^2}{\alpha \rho_v} + \frac{(1 - X_p)^2}{(1 - \alpha) \rho_l} \right] - \frac{|\vec{\tau}_p| \omega}{\Sigma} - \vec{g} \cdot \vec{i} [\alpha \rho_v + (1 - \alpha) \rho_l] \quad (\text{I.1.6.1.2.5})$$

L'espressione può essere resa formalmente analoga alla corrispondente per i fluidi monofase utilizzando le seguenti definizioni.

$$\bar{\rho} = \alpha \rho_v + (1 - \alpha) \rho_l \quad (\text{I.1.6.1.2.6})$$

$$\rho_{qdm} = \left[\frac{\bar{X}_p^2}{\alpha \rho_v} + \frac{(1 - \bar{X}_p)^2}{(1 - \alpha) \rho_l} \right]^{-1} \quad (\text{I.1.6.1.2.7})$$

da cui si ottiene

$$-\frac{dp}{dx} = G^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\rho_{qdm}} \right) - |\vec{\tau}_p| \frac{\omega}{\Sigma} - \bar{\rho} \vec{g} \cdot \vec{i} \quad (\text{I.1.6.1.2.8})$$

L'espressione della caduta di pressione può essere ottenuta anche a partire dall'equazione di conservazione dell'energia (1).

Sommando le equazioni (I.1.3.8.21) e (I.1.3.8.22), utilizzando la definizione (I.1.3.8.28), mettendo in evidenza l'energia interna U invece dell'entalpia H ed annullando le derivate rispetto al tempo si ottiene l'equazione di conservazione dell'energia relativa ad una miscela bifase in condizioni stazionarie.

$$\frac{d}{dx} \left[\rho_v \Sigma \alpha \left(U_v + \frac{p}{\rho_v} + \frac{V_v^2}{2} + g z \right) V_v + \rho_l \Sigma (1 - \alpha) \left(U_l + \frac{p}{\rho_l} + \frac{V_l^2}{2} + g z \right) V_l \right] = q \omega \quad (\text{I.1.6.1.2.9})$$

L'area di passaggio Σ della sezione di prova è costante.

Ricordando che, dalle definizioni della portata specifica G e da quelle del titolo in portata X_p si ottengono

$$\rho_v \alpha V_v = X_p G \quad (\text{I.1.6.1.2.10})$$

$$\rho_l (1 - \alpha) V_l = (1 - X_p) G \quad (\text{I.1.6.1.2.11})$$

la (I.1.6.1.2.9) riordinata e divisa per Σ diviene

$$\begin{aligned} G \frac{d}{dx} [U_v X_p + U_l (1 - X_p)] + \frac{1}{2} G^3 \frac{d}{dx} \left[\frac{X_p^3}{\alpha^2 \rho_v^2} + \frac{(1 - X_p)^3}{(1 - \alpha)^2 \rho_l^2} \right] \\ + \frac{d}{dx} p [\alpha V_v + (1 - \alpha) V_l] + g G \frac{dz}{dx} = \frac{q}{\Sigma} \omega \end{aligned} \quad (\text{I.1.6.1.2.12})$$

Si noti che è

$$-g \frac{dz}{dx} = \vec{g} \cdot \vec{i} \quad (\text{I.1.6.1.2.13})$$

Ricordando le definizioni di velocità di miscela V_m

$$V_m = \alpha V_v + (1 - \alpha) V_l \quad (\text{I.1.6.1.2.14})$$

e di densità di portata

$$\rho_p = \frac{\rho_v \alpha V_v + \rho_l (1 - \alpha) V_l}{V_m} = \frac{G}{V_m} \quad (\text{I.1.6.1.2.15})$$

la (I.1.6.1.2.12) viene scritta nella forma

$$\begin{aligned} G \frac{d}{dx} [U_v X_p + U_l (1 - X_p)] + \frac{1}{2} G^3 \frac{d}{dx} \left[\frac{X_p^3}{\alpha^2 \rho_v^2} + \frac{(1 - X_p)^3}{(1 - \alpha)^2 \rho_l^2} \right] \\ + G \frac{d}{dx} \frac{p}{\rho_p} - G \vec{g} \cdot \vec{i} = \frac{q}{\Sigma} \omega \end{aligned} \quad (\text{I.1.6.1.2.16})$$

Per il primo principio della termodinamica è

$$\frac{d}{dx} [U_v X_p + U_l (1 - X_p)] = \frac{q \omega}{G \Sigma} + \frac{d R_m}{d x} - p \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\rho_p} \right) \quad (\text{I.1.6.1.2.17})$$

nel quale il termine

$$\frac{d R_m}{d x}$$

rappresenta il rapporto fra l'energia per unità di massa dissipata (con "dissipazione" si intende la trasformazione irreversibile di energia meccanica in energia termica) nel tratto dx per effetto degli attriti e la lunghezza dx del tratto stesso.

Sostituendo la (I.1.6.1.2.17) nella (I.1.6.1.2.16) e dividendo per G si ottiene

$$\frac{d R_m}{d x} + \frac{1}{2} G^2 \frac{d}{dx} \left[\frac{X_p^3}{\alpha^2 \rho_v^2} + \frac{(1 - X_p)^3}{(1 - \alpha)^2 \rho_l^2} \right] + \frac{1}{\rho_p} \frac{dp}{dx} - \vec{g} \cdot \vec{i} = 0 \quad (\text{I.1.6.1.2.18})$$

ed infine

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2} \rho_p G^2 \frac{d}{dx} \left[\frac{X_p^3}{\alpha^2 \rho_v^2} + \frac{(1-X_p)^3}{(1-\alpha)^2 \rho_l^2} \right] + \rho_p \frac{dR_m}{dx} - \rho_p \vec{g} \cdot \vec{i} \quad (\text{I.1.6.1.2.19})$$

Anche in questo caso la caduta di pressione è espressa come somma di tre termini, uno accelerativo, uno dissipativo ed uno gravitazionale, le espressioni dei quali sono però diverse da quelle ottenute utilizzando l'equazione di conservazione della quantità di moto, quindi, mentre il risultato deve essere lo stesso in termini di caduta di pressione complessiva, diversa è la ripartizione fra i termini che lo compongono.

Come esempio tipico si consideri il termine gravitazionale: nel caso del bilancio di quantità di moto esso risulta proporzionale alla densità di miscela $\bar{\rho}$, come è intuitivo se si considera che la densità di miscela determina il peso della colonna di fluido; nel caso del bilancio di energia il termine gravitazionale contiene invece la densità di portata, il che è pure ovvio in quanto in questo caso interessa il lavoro che si deve compiere per sollevare da una quota ad un'altra una certa quantità di fluido. Generalmente, come si è visto, la densità di miscela è sensibilmente più alta di quella di portata, per cui il termine gravitazionale risulta inferiore nel bilancio di energia; ciò sarà ovviamente compensato con un aumento degli altri termini. Nel caso che si imponga che le due fasi abbiano uguale velocità ($\xi = 1$) allora i termini cinetici e gravitazionali nelle (I.1.6.1.2.5) e (I.1.6.1.2.19) sono uguali; di conseguenza anche il termine dissipativo della (I.1.6.1.2.19) deve coincidere con il termine d'attrito della (I.1.6.1.2.5).

Quel che importa sottolineare è che generalmente, nel caso dei fluidi bifase, i tre termini che compongono la caduta di pressione risultano diversi secondo che si faccia riferimento ad un bilancio di quantità di moto o di energia; è necessaria quindi una scelta preliminare fra i due tipi di bilancio quando si vogliono formulare correlazioni che forniscano ad esempio il termine dissipativo, e di tale scelta bisogna tener conto nell'applicazione delle correlazioni stesse.

Nel seguito vengono presentate le più comuni correlazioni per il calcolo del termine di caduta di pressione per attrito, che verrà indicato con la notazione

$$\frac{dP_F}{dx} = - |\vec{\tau}_p| \frac{\omega}{\Sigma}$$

Tutte le correlazioni presentate fanno riferimento ad un bilancio di quantità di moto, il termine d'attrito al quale esse si riferiscono è quindi quello che compare nell'equazione (I.1.6.1.2.5).

Generalmente le correlazioni si riferiscono a condotti di sezione circolare, ma possono essere applicate ad altre geometrie utilizzando il diametro equivalente idraulico.

È opportuno introdurre la definizione di un parametro ampiamente usato nelle correlazioni di cadute di pressione per attrito in bifase: si tratta del moltiplicatore d'attrito Φ_{Lo}^2 definito dalla relazione :

$$\frac{dP_F}{dx} = \Phi_{Lo}^2 \left(\frac{dP_F}{dx} \right)_{Lo} \quad (\text{I.1.6.1.2.20})$$

dove l'espressione

$$\left(\frac{dP_F}{dx} \right)_{Lo}$$

rappresenta la caduta di pressione che si verificherebbe se solo liquido fluisse nello stesso condotto con portata pari alla portata totale della miscela.

Risulta quindi

$$\left(\frac{dF_F}{dx} \right)_{LO} = 2 C_f \frac{G^2}{\rho_l D} \quad (I.1.6.1.21)$$

dove il fattore di attrito C_f è valutato con la viscosità del liquido.

In alcuni casi è utilizzato anche un moltiplicatore d'attrito Φ_L^2 , riferito alla caduta di pressione che si avrebbe se il liquido fluisse nello stesso condotto con la sua sola portata. Si ha quindi:

$$\frac{dP_F}{dx} = \Phi_L^2 \left(\frac{dP_F}{dx} \right)_L \quad (I.1.6.1.2.22)$$

dove

$$\left(\frac{dP_F}{dx} \right)_L = 2 C_f \frac{G^2 (1 - X_p)^2}{\rho_l D} \quad (I.1.6.1.2.23)$$

- **Modello omogeneo.** In questo modello, come è noto, il fluido bifase è trattato come un fluido monofase avente densità pari alla densità di portata. I termini accelerativo e gravitazionale possono quindi essere valutati senza ricorrere a correlazioni di grado di vuoto; per quanto riguarda il termine d'attrito, esso viene espresso come segue:

$$\frac{dP_F}{dx} = 2 C_{fm} \frac{G^2}{\rho_p D} \quad (I.1.6.1.2.24)$$

L'espressione (I.1.6.1.2.24) è formalmente identica a quella dei fluidi monofase; la densità utilizzata è ovviamente quella di portata.

Il fattore d'attrito della miscela bifase C_{fm} può essere convenientemente calcolato con una delle relazioni normalmente impiegate per i fluidi monofase in moto turbolento. Si avrà quindi

$$C_{fm} = C_{fm} (\text{Re}_m) \quad (I.1.6.1.2.25)$$

dove il numero di Reynolds della miscela è definito come

$$\text{Re}_m = \frac{G D}{\mu_m} \quad (I.1.6.1.2.26)$$

Circa le modalità di definizione della viscosità μ_m , della miscela esistono numerose versioni; fra queste la più semplice è quella dovuta ad Owens:

$$\mu_m = \mu_l \quad (I.1.6.1.2.27)$$

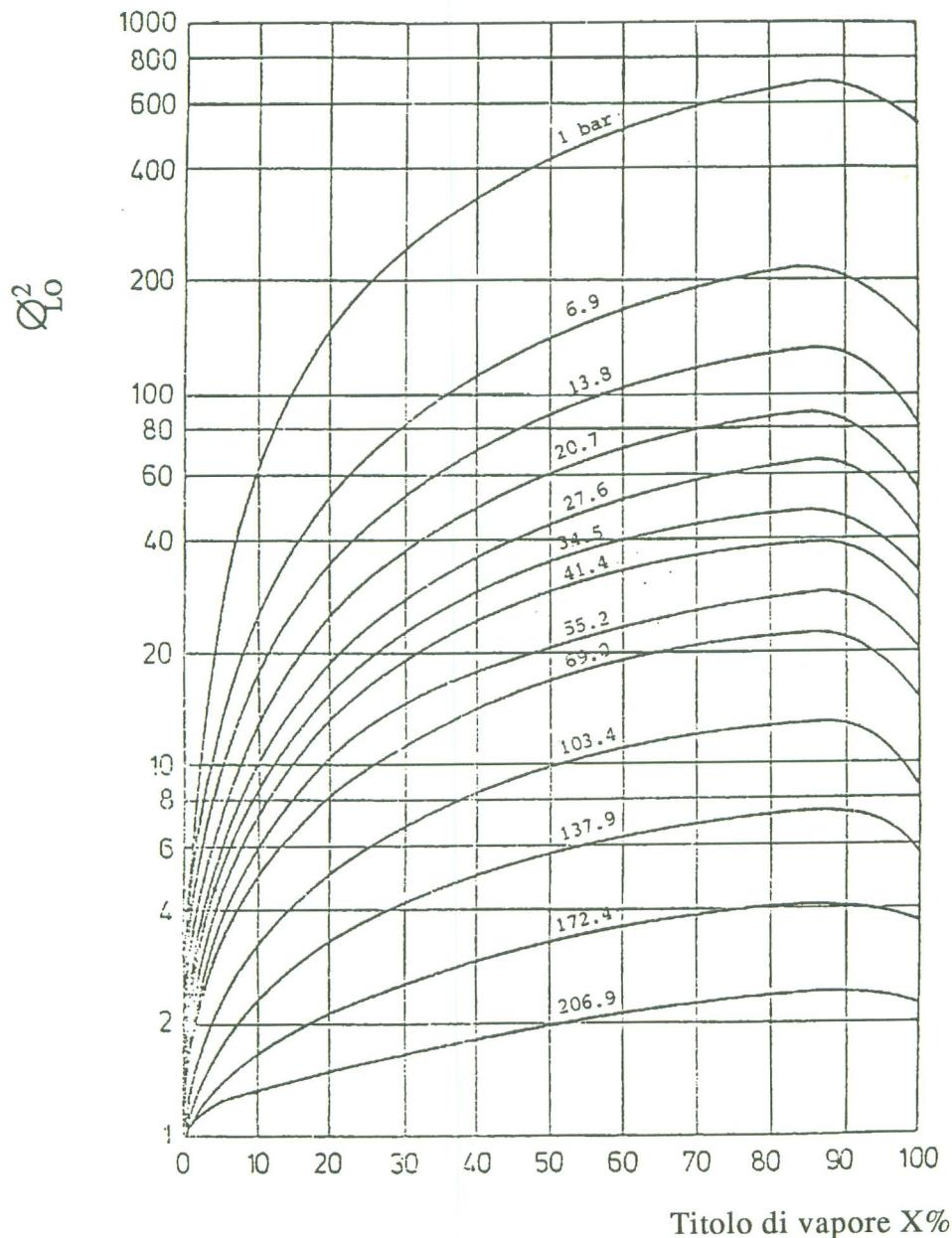


Fig. I.1.6.2 Moltiplicatore d'attrito secondo Martinelli-Nelson, in funzione del titolo e della pressione

La (I.1.6.1.2.27) è basata sulla considerazione che nella maggior parte dei casi la parete del condotto è bagnata dal liquido, per cui la viscosità da impiegarsi nel calcolo della caduta di pressione per attrito è quella del liquido.

Le altre versioni per il calcolo della viscosità μ_m prevedono generalmente delle medie pesate fra viscosità del vapore e del liquido.

Analogamente a quanto si è detto a proposito del grado di vuoto, il modello omogeneo fornisce risultati soddisfacenti solo in condizioni di alta pressione o alta portata specifica.

- **Martinelli-Nelson.**⁽³⁾. Questa correlazione è basata sul moltiplicatore d'attrito Φ_{LO}^2 : analogamente a quanto si è visto per la corrispondente correlazione di densità, il moltiplicatore è stato correlato con il parametro χ di Martinelli a pressione atmosferica; il valore di Φ_{LO}^2 alla pressione critica è invece posto uguale all'unità, come è ovvio essendo le proprietà del vapore uguali a quelle del liquido; per le pressioni intermedie si procede per interpolazione. La correlazione in origine forniva quindi Φ_{LO}^2 in funzione di χ e della pressione; poiché per una miscela bifase monocomponente χ è funzione solamente di titolo e pressione, è possibile esprimere in modo più pratico il moltiplicatore in funzione di titolo e pressione. La correlazione è presentata in forma grafica in fig. I.1.6.2. Il moltiplicatore d'attrito risulta funzione crescente del titolo e decrescente della pressione. La correlazione di Martinelli-Nelson, molto nota e ampiamente applicata in passato, presenta come principale inconveniente il fatto di esprimere Φ_{LO}^2 in funzione di pressione e titolo e non della portata specifica; l'evidenza sperimentale dimostra infatti che vi è una dipendenza significativa da quest'ultimo parametro.
- **Jones**⁽⁷⁾. per ovviare all'inconveniente di cui si è detto riguardo all'effetto della portata specifica, Jones ha introdotto un fattore correttivo da moltiplicare per il Φ_{LO}^2 calcolato secondo Martinelli-Nelson. Si ha quindi:

$$\frac{dP_F}{dx} = \Omega \Phi_{LO}^2 \left(\frac{dP_F}{dx} \right)_{LO} \quad (\text{I.1.6.1.2.28})$$

dove Φ_{LO}^2 è quello valutato secondo Martinelli-Nelson, mentre Ω è funzione della pressione e della portata specifica.

$$\Omega = \begin{cases} 1.36 + 0.0073p + 0.074 \left(\frac{G}{10^3} \right) - 0.0076p \left(\frac{G}{10^3} \right) \\ \qquad \qquad \qquad \text{per } G \leq 950 \frac{kg}{m^2 s} \\ 1.26 - 0.0058p + 0.161 \left(\frac{10^3}{G} \right) - 0.0055p \left(\frac{10^3}{G} \right) \\ \qquad \qquad \qquad \text{per } G > 950 \frac{kg}{m^2 s} \end{cases} \quad (\text{I.1.6.1.2.29})$$

La pressione è espressa in bar, la portata specifica in $kg/m^2 s$.

- **Baroczy**⁽⁴⁾. Anche questa correlazione, analogamente a quella di Jones, calcola i valori del moltiplicatore d'attrito in funzione della portata specifica, oltre che degli altri parametri (riducibili a titolo e pressione). La correlazione è fornita in forma grafica: in fig. I.1.6.3 è presentato il moltiplicatore d'attrito per la portata di riferimento pari a :

$$1356 \text{ kg/m}^2 \text{ s};$$

tale fattore è funzione del titolo e del parametro adimensionale

$$\frac{\rho_v}{\rho_l} \left(\frac{\mu_l}{\mu_v} \right)^{0,2} \quad (\text{I.1.6.1.2.30})$$

funzione della sola pressione per una miscela bifase monocomponente.

Per portate diverse da quella di riferimento, il valore di Φ_{LO}^2 si ottiene moltiplicando il precedente per un termine correttivo presentato in fig. I.1.6.4. Questo fattore risulta funzione, oltre che di G, anche del titolo e del parametro definito dalla (I.1.6.1.2.30).

Le curve presentano andamenti piuttosto irregolari; pare peraltro che questa correlazione fornisca risultati soddisfacenti e sia applicabile ad un'ampia varietà di fluidi, compresi i metalli liquidi.

- **Chisolv**⁽⁵⁾. In questo caso il parametro che viene correlato non è Φ_{LO}^2 , ma Φ_L^2 . Tale parametro viene espresso come segue:

$$\Phi_L^2 = 1 + \frac{C}{\chi} + \frac{1}{\chi^2} \quad (\text{I.1.13.1.2.31})$$

χ è il parametro di Martinelli, mentre C può essere calcolato come segue:

$$C = \left[1 + (C_2 - 1) \sqrt{\frac{\rho_l}{\rho_v} - 1} \right] \cdot \left[\frac{\rho_l}{\rho_v} + \sqrt{\frac{\rho_v}{\rho_l}} \right] \quad (\text{I.1.6.1.2.32})$$

Con un'opportuna scelta del parametro C_2 è possibile ottenere una valutazione delle cadute di pressione in tubi lisci e rugosi, e anche delle perdite di carico localizzate. Chisolv fornisce varie modalità per il calcolo di C_2 a seconda delle condizioni geometriche e termoidrauliche; a titolo di esempio si riporta l'espressione di C valida in condizioni abbastanza tipiche:

$$C_2 = \frac{2000}{G} \quad (\text{I.1.6.1.2.33})$$

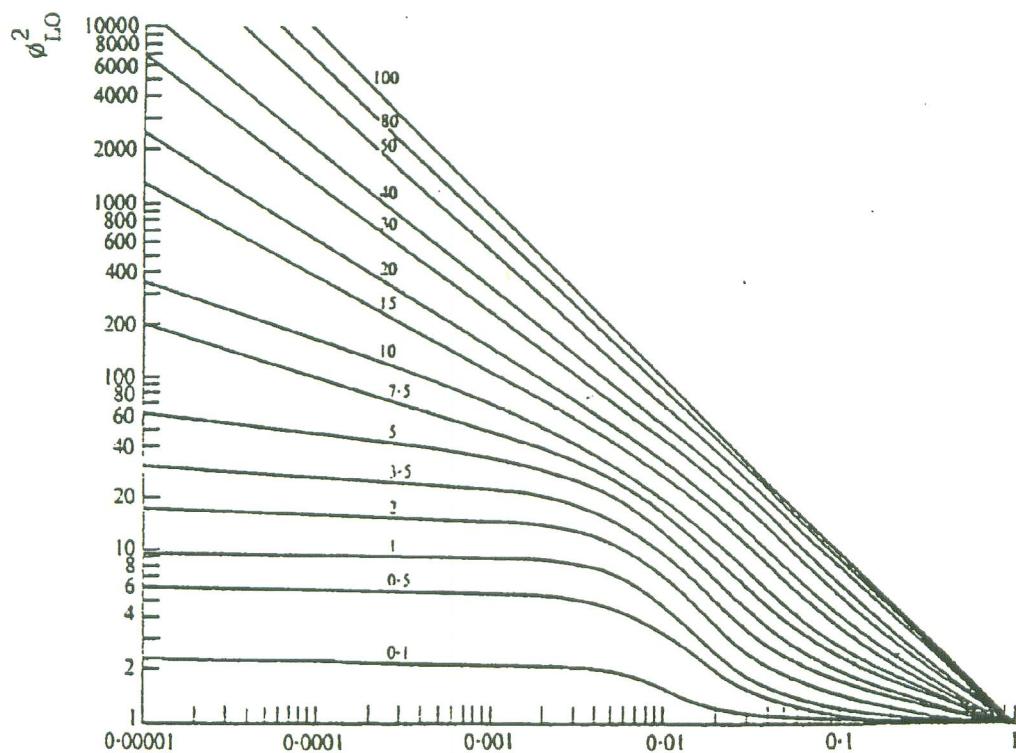
G è espressa in $\text{kg/m}^2 \text{ s}$. Questa espressione vale per

$$G < 2000 \text{ kg/m}^2 \text{ s}$$

e per

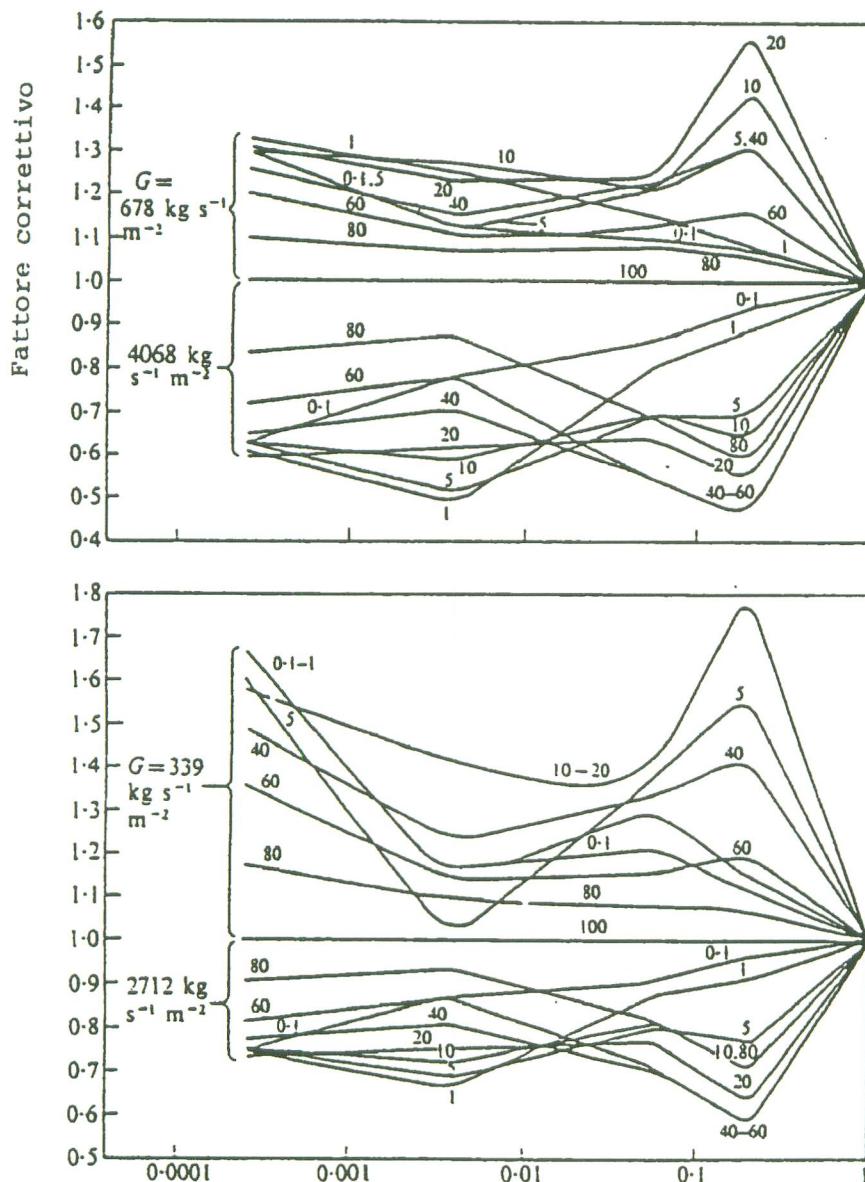
$$\sqrt{\rho_l / \rho_v} < 9$$

cioè, nel caso di acqua e vapore, per pressione superiore a circa 20 bar.



$$\frac{\rho_v}{\rho_l} \left(\frac{\mu_l}{\mu_v} \right)^{0.2}$$

Fig. I.1.6.3 Moltiplicatore d'attrito secondo Baroczy per la portata specifica di $1356 \text{ kg/m}^2 \text{ s}$
I numeri sulle curve indicano il titolo percentuale.



$$\frac{\rho_v}{\rho_l} \left(\frac{\mu_l}{\mu_v} \right)^{0.2}$$

Fig. I.1.6.4 Fattore correttivo del moltiplicatore d'attrito di Baroczy per l'effetto della portata specifica. I numeri sulle curve indicano il titolo percentuale

- **Becker**⁽⁶⁾. Questa correlazione fornisce il moltiplicatore d'attrito Φ_{LO}^2 in funzione di titolo e pressione, secondo la seguente espressione:

$$\Phi_{LO}^2 = 1 + 10 \left(\frac{p_{cr}}{p} \right) X_p \quad (\text{I.1.6.1.2.34})$$

Il moltiplicatore d'attrito risulta funzione decrescente della pressione e crescente del titolo, il che è fisicamente corretto. La correlazione è attraente per la sua semplicità, ma possiede un campo di validità piuttosto ristretto; è applicabile infatti per pressioni fino a 70 bar e titoli non superiori al 20 + 30 %. Un altro inconveniente è quello di non tener conto della dipendenza del moltiplicatore d'attrito dalla portata specifica.

I.1.6.1.3 Calcolo delle perdite di carico localizzate

Un fluido che percorre un condotto subisce oltre alle perdite di carico dovute all'attrito, distribuite lungo tutta la lunghezza del condotto, anche perdite di carico concentrate in particolari punti del condotto, dovute a variazioni di sezione, variazione di direzione, diramazioni, strumenti di misura o apparecchi di sezionamento (valvole).

La valutazione di tali perdite di carico Δp_c viene effettuata empiricamente facendo ricorso alla seguente formula

$$\Delta p_c = k_c \frac{G^2}{2 \rho} \quad (\text{I.1.6.1.3.1})$$

nella quale k_c è un coefficiente adimensionale di perdite di carico determinato sperimentalmente, e la portata specifica G e la densità ρ del fluido sono calcolate in una sezione opportuna (di solito a monte della singolarità). Nel caso di efflusso di fluido bifase è necessario sapere a quale definizione di densità si è fatto ricorso per il calcolo di ρ nella determinazione di k_c con la (I.1.6.1.3.1).

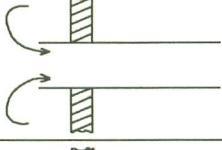
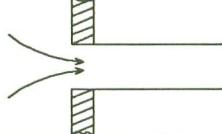
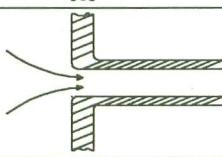
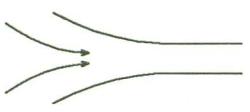
La determinazione dei valori dei coefficienti di perdite di carico localizzate non è di solito importante per l'utilizzatore del codice LEGO, poichè questi ha normalmente a disposizione i valori della pressione in alcuni punti dell'impianto nelle condizioni iniziali del transitorio, ed in base a questi può far sì che il codice stesso determini il coefficiente d'attrito in modo da ottenere le corrette differenze di pressione, distribuendo lungo le tubazioni perdite di carico che sono in realtà concentrate in alcuni punti di esse.

Qualora la distribuzione iniziale della pressione nell'impianto non sia nota è necessario calcolarla facendo ricorso, per quel che riguarda le perdite di carico localizzate, alla (I.1.6.1.3.1) A tal fine si forniscono nel seguito di questo paragrafo i valori di k_c relativi alle singolarità più comuni^{(2),(8)}.

a – Perdite di carico per variazioni di sezione

1) Perdite d'ingresso in condotto

La perdita dipende fortemente dal profilo dell'organo d'ingresso. L'ordine di grandezza di k_c è il seguente:

a bordo rientrante	$k_c = 1$	
a spigolo vivo	$k_c = 0,5$	
a spigolo smussato	$k_c = 0,15$	
a imbocco profilato	$k_c = 0,05$	
a imbocco inclinato	$k_c = k_{\perp} + 0,3 \cos \alpha + 0,2 \cos^2 \alpha$	

A tale perdita di carico si deve ovviamente aggiungere una diminuzione di pressione $\Delta p_{c\ in}$ corrispondente all' aumento di energia cinetica del fluido.

$$\Delta p_{c\ in} = \frac{1}{2} \frac{G^2}{\rho} \quad (\text{I.1.6.1.3.2})$$

2) Perdite d'uscita da un condotto

Teoricamente è $k_c = 1$, in pratica poichè il profilo di velocità non è uniforme conviene porre $k_c = 1.06$.

Tale perdita è in gran parte compensata dal recupero di pressione dovuto alla diminuzione dell'energia cinetica del fluido.

3) Aumento della sezione della tubazione.

In generale, riferendo k_c alla sezione a monte dell'aumento, di diametro D_1 , mentre le sezioni a valle ha diametro D_2 , si ha

$$k_c = \bar{k} \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 \quad (\text{I.1.6.1.3.3})$$

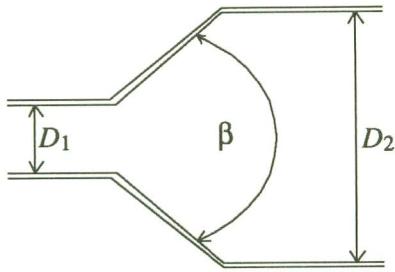


Fig. I.1.6.5

Nel caso di un allargamento brusco ($\beta = 180^\circ$) è $\bar{k} = 1$.

Nel caso di un divergente conico di angolo β la perdita di carico è minima per un certo angolo β_0 , funzione del numero di Reynolds dell'efflusso:

Re	10^4	$5 \cdot 10^4$	10^5	$2 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$
β_0	15°	10°	8°	7°	5°

per un diffusore conico con angolo β compreso fra β_0 e 50° vale la relazione

$$\bar{k} = 0.02 \cdot \beta \quad (\beta \text{ espresso in gradi}) \quad (\text{I.1.6.1.3.4})$$

Un diffusore con $\beta > 50^\circ$ non ha alcun interesse, poiché la sua perdita di carico è maggiore di quella dell'allargamento brusco.

4) Riduzione della sezione della tubazione.

Il coefficiente k_c viene di solito riferito alla sezione a valle.

Di solito si hanno raccordi conici con angolo $\beta < 30^\circ$, per i quali è al massimo

$$k_c = 0.05$$

b - Perdite di carico per variazione di direzione.

Nel caso di curve a raggio di curvatura costante R , oltre alla normale perdita di carico per attrito, c'è una perdita di carico dovuta al cambiamento di direzione, il valore della quale è determinato in base alla (I.1.6.1.3.1), e k_c è calcolato con la relazione

$$k_c = \frac{1 - e^{-\frac{\beta}{90}}}{3 \sqrt{\frac{R}{D}}} \quad (\beta \text{ espresso in gradi}) \quad \frac{R}{D} \geq 1.5 \quad (\text{I.1.6.1.3.5})$$

Qualora si abbiano due curve a 90° l'una di seguito all'altra, il coefficiente di perdita di carico relativo ad entrambe le curve è

$$k_c = 2f k_c (90^\circ) \quad (\text{I.1.6.1.3.6})$$

ed il fattore f si ottiene dalle curve seguenti

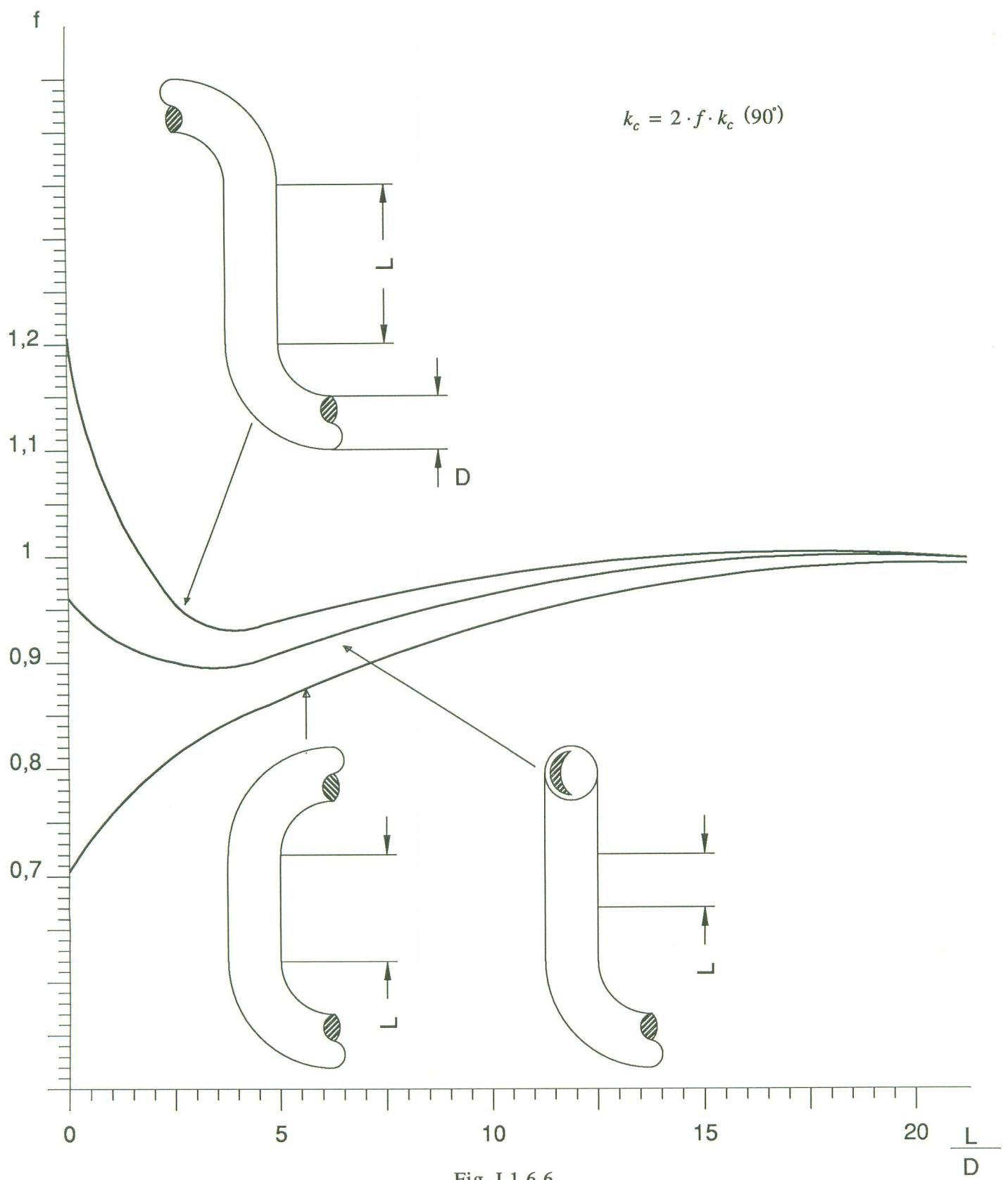


Fig. I.1.6.6

c – Perdite di carico nelle diramazioni.

Nel caso di diramazioni si devono considerare due coefficienti di perdita di carico, quello sul percorso diretto k_{cd} e quello sulla diramazione k_{cb} . Entrambi vanno riferiti alla sezione nella quale circola la portata totale. Nelle diramazioni nelle quali parte della portata viene derivata ci si riferisce quindi alla sezione a monte della diramazione, in quelle nelle quali due portate confluiscono in una ci si riferisce alla sezione a valle.

Si considerano sempre due perdite di carico:

quella sul passaggio diretto

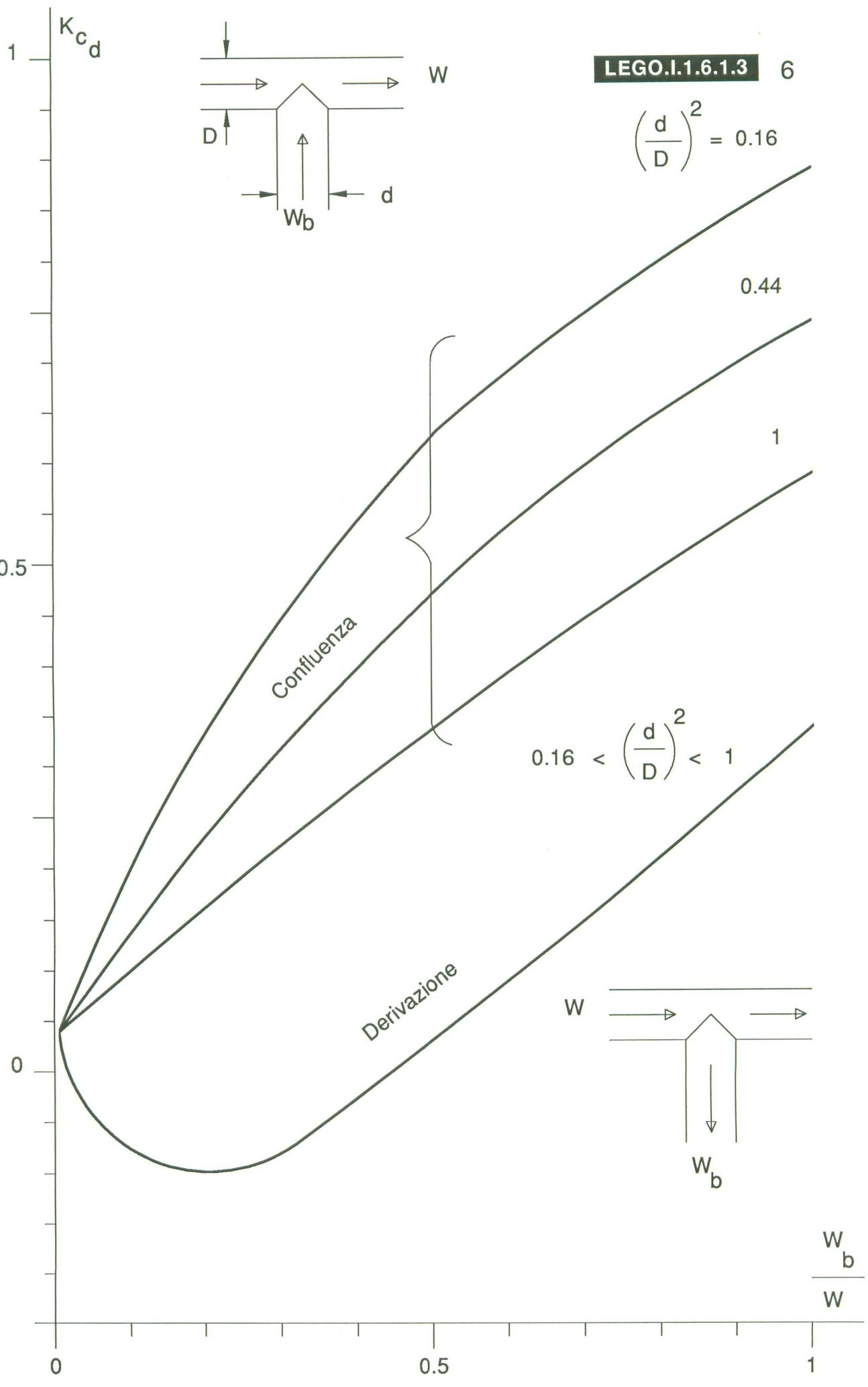
$$\Delta p_{cd} = k_{cd} \frac{G^2}{2 \rho} \quad (\text{I.1.6.1.3.7})$$

e quella sulla diramazione

$$\Delta p_{cb} = k_{cb} \frac{G^2}{2 \rho} ; \quad (\text{I.1.6.1.3.8})$$

In entrambe le relazioni la portata specifica G e la densità ρ sono quelle nella sezione di riferimento.

Nel caso di diramazioni a T i valori dei coefficienti di perdita di carico in funzione del rapporto fra la portata totale W e quella della diramazione W_b possono essere ottenuti dalle curve nelle figure seguenti.



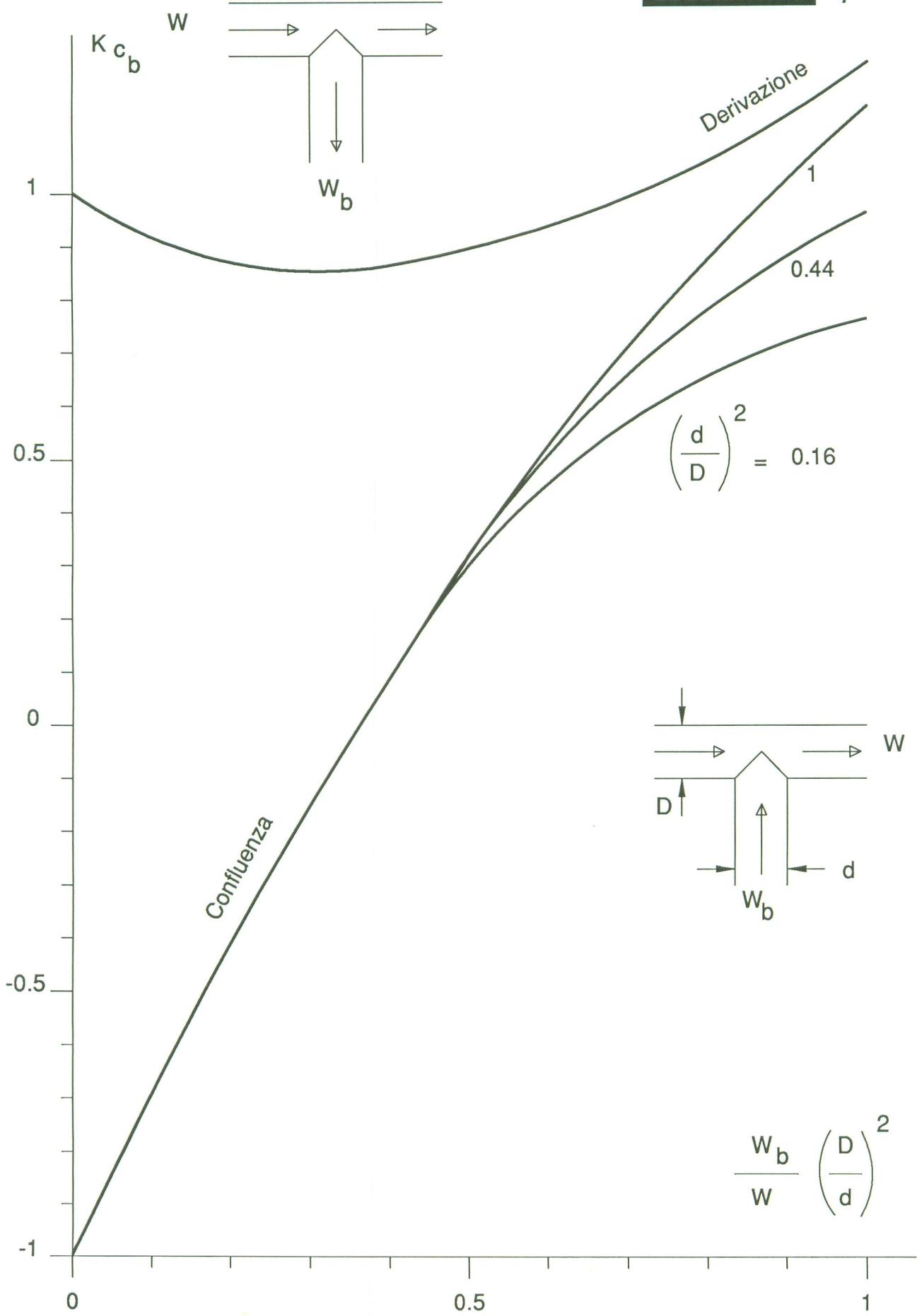


Fig. I.1.6.8

d – Perdite di carico negli strumenti di misura.

Lo strumento di misura più usato per la determinazione della portata è l'orifizio in parete sottile, a cavallo del quale viene misurata la perdita di carico.

Il valore del coefficiente della perdita di carico k_c dovuta ad un orifizio in parete sottile di diametro d inserito in un tubo di diametro D è dato da

$$k_c = \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2} - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right]^2 \left(\frac{D}{d} \right)^4 \quad (\text{I.1.6.1.3.9})$$

Tale espressione vale per valori del numero di Reynolds, calcolato nella sezione dell'orifizio, maggiori di 10^5 e per valori del numero di Mach inferiori a 0.5.

e – Perdita di carico attraverso le valvole.

Una valvola è di solito caratterizzata tramite un coefficiente C_v così definito :

Una valvola ha C_v uguale a 1 se attraverso di essa transita la portata di un gallone USA al minuto di acqua a 15°C con una differenza di pressione a cavallo della valvola stessa di 1 psi. La relazione fra il coefficiente di perdita di carico k_c e C_v per una valvola con sezione di passaggio pari a Σ è la seguente :

$$k_c = \left[\frac{5.91 \cdot 10^4 \Sigma}{C_v} \right]^2 \quad (\text{I.1.6.1.3.10})$$

Qualora C_v non sia noto, in base al tipo di valvola la tabella seguente dà l'ordine di grandezza di k_c

valvola a opercolo $k_c \approx 0.2$

valvola a sede:

– a percorso diretto $k_c \approx 0.6$

– a percorso a S o a L $k_c \approx \text{da 2 a 4}$

valvola a farfalla $k_c \approx 0.2$

valvola di non ritorno $k_c \geq 0.5$

I.1.6.2 Correlazioni di scambio termico convettivo fluido/parete

Nell'equazione (I.1.2.3.9) di conservazione dell'energia per un fluido in moto in un condotto, compare il termine

$$\frac{q_i}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p},$$

che tiene conto della potenza termica scambiata tra il fluido e la parete del canale in cui esso scorre.

Questo termine di scambio energetico è legato alla differenza che in generale esiste fra la temperatura della superficie della parete lambita dal fluido e la temperatura del fluido stesso. Va qui specificato che, poiché in questo paragrafo si tratta di scambio termico convettivo con fluidi in moto in condotti, quando si parlerà di temperatura del fluido si intenderà sempre una opportuna temperatura media di "nocciolo" (temperatura di "bulk"), cioè un valore risultante da una media delle temperature locali del fluido sulla sezione trasversale del condotto, nel punto che si stia considerando.

Nell'approccio monodimensionale col quale è stata scritta l'equazione di conservazione dell'energia, si immagina ovviamente che il fluido abbia temperatura costante sulla sezione trasversale del condotto, pari alla temperatura media suddetta; in realtà si ha invece una variazione radiale di temperatura, con un forte gradiente in prossimità della parete del canale ed un gradiente in genere più ridotto verso il centro del canale, come mostrato in Fig. I.1.6.9 (il profilo radiale di temperatura mostrato in Fig. I.1.6.9 è tipico del caso di moto turbolento, in un condotto di un fluido a bassa conducibilità termica, come è per esempio l'acqua; questo caso è peraltro quello di gran lunga più comune nelle applicazioni).

Per esprimere il termine legato al calore scambiato dal fluido con la superficie della parete di confinamento si introduce abitualmente il coefficiente di scambio termico convettivo fluido/parete, definito dalla

$$q_x = \gamma (T_{mi} - T) \quad (\text{I.1.6.2.1})$$

Tale coefficiente è un parametro empirico, che dipende in generale da una serie di grandezze fisiche relative al fluido e alla parete: esso viene correlato a queste grandezze, con espressioni che cercano di mettere opportunamente in luce la sua dipendenza da ciascuna di esse. Una volta individuate le grandezze fisiche da cui è ragionevole assumere che il coefficiente di scambio termico dipenda, le correlazioni di cui si è detto sopra, esprimendo il legame funzionale tra coefficiente di scambio e variabili indipendenti, vengono in genere messe a punto sulla base di numeri adimensionali trovati con la tecnica dell'analisi dimensionale. Essa si poggia sul teorema di Buckingham, il quale afferma che una relazione funzionale

$$F(g_1, g_2, \dots, g_n) = 0$$

dove

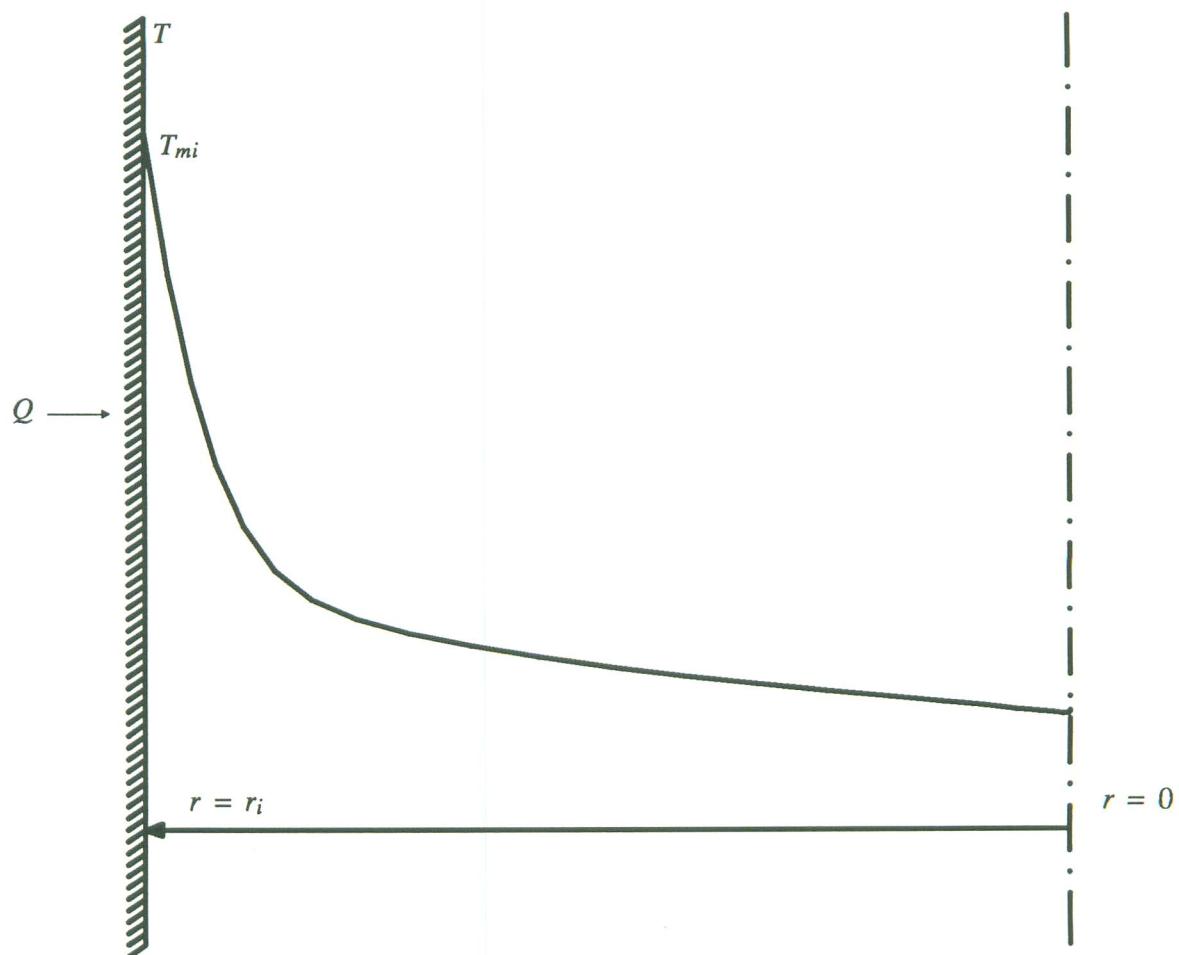


Fig. I.1.6.9 Tipico profilo della temperatura del fluido in un canale, in presenza di scambio termico in convezione forzata.

$$g_1, g_2, \dots, g_n$$

sono n grandezze che sono coinvolte nel fenomeno fisico in considerazione, può essere ricondotta a una forma del tipo

$$F^* (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-j}) = 0 \quad (I.1.6.2.2)$$

dove

$$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-j}$$

sono gruppi adimensionali aventi la forma seguente

$$\begin{aligned} \pi_1 &= g_1^{a_1} g_2^{b_1} \dots g_j^{j_1} g_{j+1} \\ \pi_2 &= g_1^{a_2} g_2^{b_2} \dots g_j^{j_2} g_{j+2} \\ \pi_{n-j} &= g_1^{a_{n-j}} g_2^{b_{n-j}} \dots g_j^{j_{n-j}} g_{j+n-j} \end{aligned} \quad (I.1.6.2.3)$$

Nelle (I.1.6.2.2) e (I.1.6.2.3), j è il numero di grandezze fondamentali che sono in gioco nel fenomeno fisico: in problemi di scambio termico, esse sono le quattro grandezze lunghezza, massa, tempo e temperatura.

In riferimento al caso di scambio termico in convezione forzata, è ragionevole supporre che il coefficiente di scambio γ dipenda da viscosità dinamica μ , conducibilità λ , densità ρ e calore specifico a pressione costante C_p del fluido, dalla sua velocità V e da un parametro geometrico che nel caso di convezione forzata in condotti è il diametro idraulico della tubazione $D_H = 2r_H$.

Si avrà quindi una relazione del tipo

$$F(\lambda, \mu, \gamma, \rho, C_p, V, D_H) = 0$$

che, essendo 7 le grandezze in gioco e 4 le grandezze fondamentali, si può ricondurre a una relazione fra 3 gruppi adimensionali:

$$F^* (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0 \quad (I.1.6.2.4)$$

Assumendo μ, λ, ρ, D_H , come grandezze base per la costruzione dei numeri adimensionali, dovranno allora valere le relazioni.

$$\begin{aligned} [\pi_1] &= [\mu^{a_1} \lambda^{b_1} \rho^{c_1} D_H^{e_1} \gamma] = [1] \\ [\pi_2] &= [\mu^{a_2} \lambda^{b_2} \rho^{c_2} D_H^{e_2} C_p] = [1] \\ [\pi_3] &= [\mu^{a_3} \lambda^{b_3} \rho^{c_3} D_H^{e_3} V] = [1] \end{aligned} \quad (I.1.6.2.5)$$

Sostituendo nelle (I.1.6.2.5) le dimensioni fisiche delle grandezze che vi compaiono e imponendo che le dimensioni di ciascun prodotto π siano quelle di un numero puro, si trovano gli esponenti

$$a_i, b_i, c_i, e_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

I gruppi adimensionali che ne risultano sono i ben noti numeri di Nusselt (Nu), di Prandtl (Pr) e di Reynolds (Re), che compaiono regolarmente nelle correlazioni di scambio termico liminare fluido/parete, in condizioni di convezione forzata:

$$\pi_1 = \frac{\gamma D_H}{\lambda} = Nu \quad (I.1.6.2.6)$$

$$\pi_2 = \frac{C_p \mu}{\lambda} = Pr \quad (I.1.6.2.7)$$

$$\pi_3 = \frac{\rho V D_H}{\mu} = \frac{G D_H}{\mu} = Re \quad (I.1.6.2.8)$$

Nella (I.1.6.2.8), $G = \rho V$ è la portata massica specifica (per unità di sezione trasversale del condotto) del fluido. La (I.1.6.2.4) diventa quindi:

$$F^*(Nu, Pr, Re) = 0$$

che si trova più generalmente scritta nella forma:

$$Nu = K Re^\alpha Pr^\beta \quad (I.1.6.2.9)$$

in cui, tenendo conto della (I.1.6.2.6), si può mettere in evidenza al primo membro il coefficiente di scambio

$$\gamma = K \frac{\lambda}{D_H} Re^\alpha Pr^\beta \quad (I.1.6.2.10)$$

Nelle (I.1.6.2.9) e (I.1.6.2.10) K è una costante moltiplicativa. La (I.1.6.2.9) è la relazione che è stata quasi sistematicamente presa come base per l'ottenimento di correlazioni di scambio termico convettivo in condotti. In relazioni del tipo della (I.1.6.2.9), la costante moltiplicativa K e gli esponenti α e β , nonché ogni altro esponente di eventuali altri fattori moltiplicativi che dovessero comparirvi, vengono poi stabiliti in modo da permettere una buona riproduzione dei valori di coefficiente di scambio che sono stati ottenuti in prove sperimentali volte a determinarne l'entità in certe condizioni di interesse. Correlazioni di questo tipo sono quindi senz'altro di natura empirica, anche se la presenza in esse dei gruppi adimensionali trovati con la tecnica dell'analisi dimensionale permette di mettere in luce in modo corretto l'influenza reciproca delle varie grandezze fisiche che influenzano il fenomeno.

meno. Le proprietà fisiche del fluido che compaiono nella (I.1.6.2.9) sono in genere calcolate in corrispondenza della pressione e della temperatura che il fluido possiede nel punto in cui si vuole valutare il coefficiente di scambio; talvolta queste proprietà fisiche vengono valutate ad una temperatura diversa da quella di "bulk" del fluido: per esempio, in corrispondenza della temperatura della superficie della parete lambita dal fluido T_{mi} , oppure di una temperatura di "film", T_F , pari alla media delle temperature del fluido e della superficie della parete da esso bagnata:

$$T_F = \frac{T_{mi} + T}{2} . \quad (\text{I.1.6.2.11})$$

A volte, al secondo membro della (I.1.6.2.9) compaiono anche fattori moltiplicativi aggiuntivi, costituiti spesso da opportune potenze di rapporti di proprietà fisiche valutate a diversi valori della temperatura (per esempio quella di parete e quella del fluido); a volte, infine, vengono adottati nella (I.1.6.2.9) dei numeri di Prandtl e di Reynolds definiti secondo le eqq. (I.1.6.2.7) e (I.1.6.2.8) rispettivamente, ma con diverse definizioni di C_p e G . Va notato che correlazioni aventi la forma (I.1.6.2.9) sono state soprattutto sviluppate per l'ottenimento del coefficiente di scambio in presenza di fluidi monofase, sia in fase liquida che in fase gassosa. Tuttavia, correlazioni della stessa struttura sono anche state utilizzate per esprimere il coefficiente di scambio in presenza di miscele bifase liquido/gas (tipico è il caso di una miscela bifase monocomponente liquido/vapore): è appunto in tali casi che si riscontrano più frequentemente le modifiche di cui si è fatto cenno sopra, o addirittura l'uso di correlazioni di struttura più complicata, di cui il secondo membro della (I.1.6.2.9) (o una sua modifica) costituisce solo un termine. Benché lo scambio termico in condizioni di vera e propria convezione naturale (moti convettivi localizzati presso pareti scambianti, dovuti a squilibri di densità del fluido) non interessi per l'applicazione pratica che viene presentata in questo paragrafo, si fa qui menzione del fatto che in convezione naturale l'analisi dimensionale porta a mettere in luce una struttura correlativa del tipo della (I.1.6.2.9), in cui però il numero di Reynolds viene sostituito dal numero di Grashof, Gr , avente la seguente forma

$$Gr = \frac{D_H^3 \bar{\rho} \left[\bar{\rho} g \beta (T_{mi} - T) \right]}{\mu^2}$$

dove $\bar{\rho}$ è una densità media del fluido, g il modulo dell'accelerazione di gravità e β il coefficiente di dilatazione isobara:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dT} \right)_{p=const}$$

Detto quindi della natura essenzialmente empirica (detta da un approccio ingegneristico al problema dello scambio termico convettivo) delle correlazioni più frequentemente impiegate per la determinazione del coefficiente di scambio termico liminare fluido/parete, e messane in luce la tipica struttura e i numeri adimensionali che vi compaiono, occorre definire meglio

il problema di scambio termico che interessa per le applicazioni tipiche del codice LEGO, e per il quale è stata concepita la struttura del pacchetto di correlazioni di scambio che nel codice stesso viene utilizzato e che in questo paragrafo viene presentato⁽⁹⁾.

Questo pacchetto di correlazioni è in grado di trattare lo scambio termico in convezione forzata di acqua in moto in condotti di sezione qualunque (caratterizzata dal diametro idraulico) e comunque orientati rispetto alla verticale (direzione del campo gravitazionale) in cui si abbia cessione di calore dalle pareti del condotto verso il fluido (cioè la superficie delle pareti lambita dal fluido abbia temperatura maggiore di quella di bulk del fluido); per acqua a pressione inferiore a quella del punto critico ($p_c = 221,2 \text{ bar}$) vengono trattati i casi in cui l'acqua sia nello stato di liquido sottoraffreddato, di miscela bifase liquido/vapore e di vapore surriscaldato. Va specificato che in questa sede si includono sotto la dizione "convezione forzata" i casi in cui il moto dell'acqua in un circuito idraulico sia determinato dallo squilibrio di densità fra rami del circuito, per effetto della cessione di calore al fluido in atto in uno dei rami stessi.

Non vengono invece coperti dall'insieme di correlazioni qui presentate i casi di scambio termico in convezione naturale (moti convettivi localizzati alle pareti) e di ebollizione a piscina (pool boiling: cessione di calore ad acqua stagnante contenuta in un recipiente); non essendo coperti i casi in cui sia il fluido a cedere calore alle pareti della tubazione, non viene altresì trattato il caso di scambio termico di acqua in condensazione.

Prima di passare all'esposizione dei regimi di scambio termico inclusi nel pacchetto di correlazioni, si deve notare che il coefficiente di scambio che esso calcola, coefficiente che è rispondente alla definizione data dalla (I.1.6.2.1), è relativo alla generica cella assiale della discretizzazione a parametri concentrati che viene fatta dell'equazione di conservazione dell'energia. Si fa quindi l'ipotesi che il coefficiente di scambio definito dalla (I.1.6.2.1), che, a rigore, ha carattere locale (è cioè relativo ad un elementino d'area di superficie infinitesima), sia invece relativo a una superficie finita, pari a quella della cella di tubo in esame (superficie che può anche essere elevata). In altre parole, il flusso termico che appare nella (I.1.6.2.1) è un flusso medio di cella, per cui il coefficiente di scambio termico è da intendersi come definito dalla

$$Q_i = \gamma (T_{m,i} - T) \Sigma_i \quad (\text{I.1.6.2.12})$$

dove Q_i è la potenza termica scambiata per convezione tra fluido e parete e Σ_i la superficie interna (a contatto con il fluido) della parete della cella per la quale si sta effettuando il calcolo di γ .

In un condotto in cui l'acqua che scorre con prevalenza imposta riceve calore dalle pareti del condotto stesso, si possono instaurare diversi regimi di scambio termico: quelli che sono stati selezionati per definire l'insieme di correlazioni usate in ambito LEGO vengono di seguito brevemente descritti, con riferimento anche alla Fig. I.1.6.10, in cui tali regimi di scambio sono illustrati nel caso, di gran lunga più tipico per le applicazioni, di moto del fluido verso l'alto in un condotto disposto verticalmente, con pressione inferiore a quella del punto critico. Ai regimi di scambio termico elencati di seguito va aggiunto quello in cui l'acqua abbia pressione ipercritica.

Regimi di scambio termico per acqua a pressione ipocritica ($p < 221,2\text{bar}$)

- Convezione forzata con liquido sottoraffreddato (regione A in Fig. I.1.6.10).
Sia il fluido che la superficie della parete da esso bagnata hanno temperatura inferiore a $T_{SAT}(p)$, dove p è la pressione del fluido.
- Ebollizione sottoraffreddata (regione B in Fig. I.1.6.10).
Il fluido ha ancora temperatura inferiore $T_{SAT}(p)$, ma la temperatura della superficie della parete a contatto col fluido è sufficientemente superiore a $T_{SAT}(p)$ da provocare l'attivazione di centri di nucleazione di bolle di vapore sulla superficie stessa.
- Ebollizione satura e convezione forzata con film liquido (regioni C, D, E, F in Fig. 2).
Si tratta di due regimi di scambio fenomenologicamente distinti, per i quali viene però applicata una stessa correlazione di scambio termico: in questi regimi il fluido ha raggiunto la temperatura di saturazione $T_{SAT}(p)$. Il primo regime consiste in un vero e proprio fenomeno di ebollizione di massa, con formazione di bolle di vapore alla parete e successiva loro migrazione verso il centro del condotto. Il secondo consiste nella trasmissione del calore per convezione dalla parete ad un film di liquido che su essa scorre, attraverso il quale il calore si trasmette essenzialmente per conduzione, per essere poi ceduto al nucleo centrale di vapore nel condotto per evaporazione all'interfaccia liquido/vapore.
- Ebollizione di transizione (transition boiling o partial film boiling; regime non evidenziato in Fig. I.1.6.10, che si riferisce a una situazione stazionaria).
È il regime transitoriamente attraversato dal fluido dopo il verificarsi della crisi termica di tipo dryout (asciugamento del film liquido alla parete): la parete è bagnata dal liquido con intermittenza (nel tempo) e parzialmente.
- Convezione forzata con bifase disperso (regione G in Fig. I.1.6.10)
Il film liquido alla parete si è definitivamente esaurito: il liquido è presente solo sotto forma di goccioline trascinate dalla corrente di vapore. Le pareti del condotto sono lambite da vapore, al quale cedono calore per convezione. Le goccioline di liquido evaporano progressivamente per effetto del calore ceduto ad esse dal vapore, che tende a surriscaldarsi (non c'è più equilibrio termodinamico tra il liquido e vapore, avendo quest'ultimo una temperatura maggiore di $T_{SAT}(p)$; la miscela liquido/vapore ha comunque ancora titolo termodinamico inferiore ad uno).
- Convezione forzata con vapore surriscaldato (regione H in Fig. I.1.6.10).
È il regime di scambio che si ha per titoli termodinamici superiori a uno, cioè quando l'entalpia del fluido è superiore a quella corrispondente al vapore saturo secco: il fluido è quindi vapore surriscaldato, anche se in realtà, per deboli surriscaldamenti (titoli termodinamici di poco superiori a uno), la corrente di vapore surriscaldato può trascinare delle residue goccioline di liquido.

L'insieme di regimi di scambio termico sopra presentati, incluso quello di convezione forzata con acqua a pressione ipercritica, definisce a sua volta un insieme di interfacce

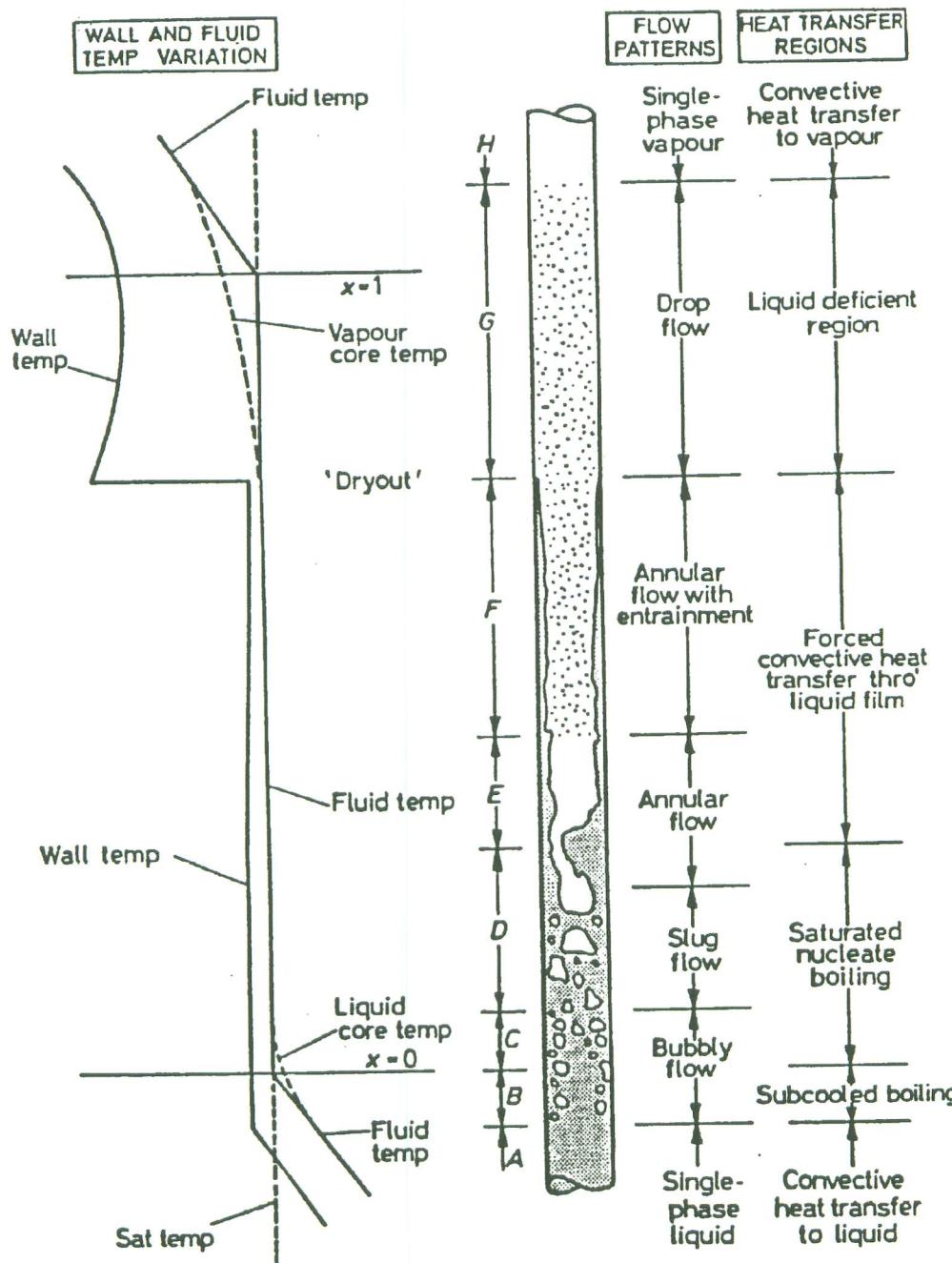


Fig. I.1.6.10 Regimi di scambio termico (e di moto) in convezione forzata in un canale verticale.

fisiche tra i regimi stessi; tali interfacce sono i confini fisici che separano i vari regimi di scambio tra loro. Nel seguito vengono presentate queste interfacce e i criteri che ad esse si associano, in base ai quali viene riconosciuto, nel pacchetto di scambio termico impiegato nel LEGO, il passaggio da un regime di scambio ad uno contiguo.

Interfacce tra regimi di scambio termico e criteri di interfaccia

- Scambio termico a pressione ipercritica/scambio termico a pressione ipocritica
Il criterio di interfaccia è qui evidente: si tratta di una discriminazione sul valore di pressione del fluido. Per

$$p > p_c \quad (\text{I.1.6.2.13})$$

dove

$$p_c = 221,2 \text{ bar}$$

è la pressione del punto critico dell'acqua, si ha scambio termico a pressioni ipercritiche; in caso contrario lo scambio termico è a pressioni ipocritiche, e si hanno i regimi di scambio che sono stati sopra elencati.

- Convezione forzata con liquido sottoraffreddato/ebollizione sottoraffreddata.
Il criterio per l'innesto dell'ebollizione sottoraffreddata è il seguente:

$$x < 0 \quad \text{e} \quad \Delta T_{SAT} \geq \Delta T_{ONB} \quad (\text{I.1.6.2.14})$$

dove

$$x = \frac{h - h_l}{h_v - h_l} \quad (\text{I.1.6.2.15})$$

è il titolo termodinamico (o entalpico),

$$\Delta T_{SAT} = T_{mi} - T_{SAT} \quad (\text{I.1.6.2.16})$$

e

$$\Delta T_{ONB} = 0,556 \left(\frac{q_x}{1082 p_b^{1,156}} \right)^{0,463 p_b^{0,0234}} \quad (\text{I.1.6.2.17})$$

ΔT_{ONB} è la differenza tra T_{mi} e T_{SAT} necessaria per l'inizio di formazione di bolle di vapore alla superficie della parete bagnata dal liquido; la sua espressione (I.1.6.2.17) è una correlazione dovuta a Bergles-Rohsenow. Nella (I.1.6.2.17) il flusso termico q_x

è in W/m^2 . Con p_b in tutto il paragrafo viene indicata la pressione p del fluido espressa però in bar.

- Ebollizione sottoraffredata/ebollizione satura e convezione forzata con film liquido. Il criterio per l'inizio dell'ebollizione satura è:

$$x \geq 0 \quad \text{e} \quad T_{mi} < T_{CHF} \quad (\text{I.1.6.2.18})$$

dove x è dato dalla (I.1.6.2.15), mentre T_{CHF} è la temperatura della superficie interna della parete corrispondente al flusso termico critico (Critical Heat Flux). Il calcolo di T_{CHF} viene riportato più avanti.

- Ebollizione satura e convezione forzata con film liquido/ebollizione di transizione. Il criterio di interfaccia è

$$x \geq 0 \quad \text{e} \quad T_{mi} \geq T_{CHF} \quad (\text{I.1.6.2.19})$$

dove il titolo termodinamico x è dato dalla (I.1.6.2.15) e T_{CHF} è calcolato nel modo specificato più avanti.

- Ebollizione di transizione/convezione forzata con bifase disperso.

Il criterio per l'inizio del regime di convezione forzata con bifase disperso è

$$T_{mi} \geq T_{MSFB} \quad (\text{I.1.6.2.20})$$

dove T_{MSFB} è la temperatura della superficie interna della parete del condotto nel punto di Minimum Stable Film Boiling. Per il calcolo di T_{MSFB} viene adottata la seguente relazione, che è una modifica di una correlazione di Henry, dovuta a Bjornard e Griffith:

$$T_{MSFB} = T_{HN} + (T_{HN} - T) \left(\frac{\rho \lambda C_p}{\rho_m \lambda_m C_m} \right)^{\frac{1}{2}} - C \quad (\text{I.1.6.2.21})$$

$$T_{HN} = \begin{cases} 581,45 & \text{per } p_b < 1,032 \text{ bar} \\ 581,45 + 5,932 (p_b - 1,032)^{\frac{1}{2}} & \text{per } 1,032 \text{ bar} \leq p_b \leq 68,95 \text{ bar} \\ 630,34 + 1,366 (p_b - 68,95)^{\frac{1}{2}} & \text{per } p_b \geq 68,95 \text{ bar} \end{cases} \quad (\text{I.1.6.2.22})$$

$$C = \begin{cases} 127,3 - 26,37 p_b & \text{per } p_b < 4,826 \text{ bar} \\ 0 & \text{per } p_b \geq 4,826 \text{ bar} \end{cases} \quad (\text{I.1.6.2.23})$$

– Convezione forzata con bifase disperso/convezione forzata con vapore surriscaldato.
Il criterio per l'inizio del regime di convezione forzata con vapore surriscaldato è:

$$x_e \geq 1 \quad (\text{I.1.6.2.24})$$

dove x_e è un titolo effettivo di vapore, calcolato con la correlazione di Groeneveld-Delorme riportata più avanti (si vedano le eqq. (I.1.6.2.53) + (I.1.6.2.58)).

Calcolo di T_{CHF}

La temperatura della superficie interna della parete corrispondente al flusso termico critico q_{CHF} (Critical Heat Flux), T_{CHF} , viene calcolata tramite la seguente relazione iterativa:

$$T_{CHFn} = T_{CHFn-1} - \frac{q_{Chen}(T_{CHFn-1}) - q_{CHF}}{\left. \frac{\partial q_{Chen}}{\partial T_{mi}} \right|_{T_{CHFn-1}}} \quad (\text{I.1.6.2.25})$$

Nella (I.1.6.2.25) l'indice n indica l'iterazione n-esima; $q_{Chen}(T_{mi})$ è il flusso termico corrispondente alla correlazione di scambio termico di Chen:

$$q_{Chen}(T_{mi}) = \alpha_{Chen}(T_{mi})(T_{mi} - T) \quad (\text{I.1.6.2.26})$$

in cui $\alpha_{Chen}(T_{mi})$ è il coefficiente di scambio calcolato con la correlazione di Chen (si vedano le eqq. (I.1.6.2.44) + (I.1.6.2.49)) in corrispondenza della temperatura T_{mi} della superficie interna della parete metallica. La derivata

$$\partial q_{Chen}/\partial T_{mi}$$

è calcolata numericamente, come rapporto incrementale corrispondente a

$$\Delta T_{mi} = 0,01K$$

q_{CHF} è il flusso termico critico, calcolato con una correlazione di crisi termica. La (I.1.6.2.25) dà il valore ricercato di T_{CHF} , T_{CHFn} , quando è verificata la disegualanza.:

$$\left| \frac{q_{Chen}(T_{CHFn-1}) - q_{CHF}}{q_{Chen}(T_{CHFn-1})} \right| < 0,01$$

Il valore di partenza per l'innesto del metodo iterativo è dato dalla correlazione di Thom:

$$T_{CHF0} = T_{SAT} + 0,0225 \ q_{CHF} \ \exp \left(-\frac{pb}{86,87} \right)$$

dove e q_{CHF} in W/m^2 .

Per il calcolo di q_{CHF} si procede secondo lo schema seguente:

- $G < 100 \text{ kg/s m}^2$ q_{CHF} = correlazione di Zuber modificata
- $100 \leq G \leq 200$ q_{CHF} = interpolazione lineare tra q_{CHF} di Zuber e q_{CHF} (200) calcolato con una delle correlazioni per $G > 200 \text{ kg/s m}^2$
- $G > 200 \text{ kg/s m}^2$ q_{CHF} = correlazione di Bowring, o di Biasi, o di Kon'Kov, in alternativa tra loro.

Le correlazioni di crisi termica che vengono impiegate in questo schema sono illustrate di seguito.

-Correlazione di Zuber modificata.

$$q_{CHF} = 0,2085 (1 - \alpha) H_{vI} \rho_v^{\frac{1}{2}} \left[g \sigma (\rho_l - \rho_v) \right]^{\frac{1}{4}} \quad (\text{I.1.6.2.27})$$

dove α è la frazione di vuoto, calcolata assumendo un rapporto di scorrimento unitario tra la fase vapore e la fase liquido

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{1-X}{X} \frac{\rho_v}{\rho_l}} \quad (\text{I.1.6.2.28})$$

mentre σ è la tensione superficiale dell'acqua, in N/m.

-Correlazione di Bowring.

$$q_{CHF} = \frac{0,25 H_{vI}}{C} (A - X) \quad (\text{I.1.6.2.29})$$

$$A = \frac{2,317 F_1}{1 + 0,0143 F_2 D_H^{0,5} G} \quad (\text{I.1.6.2.30})$$

$$C = \frac{0,077 F_3}{1 + 0,347 F_4 (G/1356)^n} \quad (\text{I.1.6.2.31})$$

$$n = 2 - \frac{0,5 p_b}{68,95} \quad (\text{I.1.6.2.32})$$

i parametri F_1, F_2, F_3, F_4 sono funzioni, qui non riportate, della pressione del fluido.

-Correlazione di Biasi.

Il flusso termico critico è il maggiore tra i due valori seguenti:

$$q_{CHF} = \frac{1,883 \cdot 10^7}{(100 D_H)^n (G/10)^{0,06}} \left[\frac{y_p}{(G/10)^{1/6}} - X \right] \quad (\text{I.1.6.2.33})$$

$$q_{CHF} = \frac{3,78 \cdot 10^7 h_p}{(100 D_H)^n (G/10)^{0,6}} (1 - X) \quad (\text{I.1.6.2.34})$$

dove

$$y_p = 0,7249 + 0,099 \left(\frac{p_b}{0,981} \right) \exp \left[- 0,032 \left(\frac{p_b}{0,981} \right) \right] \quad (\text{I.1.6.2.35})$$

$$h_p = - 1,159 + 0,149 \left(\frac{p_b}{0,981} \right) \exp \left[- 0,019 \left(\frac{p_b}{0,981} \right) \right] + \frac{8,99 \left(\frac{p_b}{0,981} \right)}{10 + \left(\frac{p_b}{0,981} \right)} \quad (\text{I.1.6.2.36})$$

$$n = \begin{cases} 0,6 & \text{per } D_H < 0,010 \text{ m} \\ 0,4 & \text{per } D_H \geq 0,010 \text{ m} \end{cases} \quad (\text{I.1.6.2.37})$$

-Correlazione di Kon'Kov

A seconda del valore di pressione del fluido il flusso termico critico assume una delle tre espressioni seguenti:

$$q_{CHF} = \left[25,6 x^{-1} G^{-1/3} \left(1000 D_H \right)^{-0,07} e^{-0,01715 p_b} \right]^8 \quad (\text{I.1.6.2.38})$$

per $4,96 \text{ bar} \leq p_b \leq 29,4 \text{ bar}$

$$q_{CHF} = \left[46 x^{-1} G^{-\frac{1}{3}} \left(1000 D_H \right)^{-0,07} e^{-0,00255 p_b} \right]^8$$

per $29,4 \text{ bar} \leq p_b \leq 98 \text{ bar}$

(I.1.6.2.39)

$$q_{CHF} = \left[76,6 x^{-1} G^{-\frac{1}{3}} \left(1000 D_H \right)^{-0,07} e^{-0,00795 p_b} \right]^8$$

per $98 \text{ bar} \leq p_b \leq 196 \text{ bar}$

(I.1.6.2.40)

-Correlazioni di scambio termico

Vengono qui riportate le correlazioni che, per ciascun regime di scambio termico tra quelli sopra elencati, permettono il calcolo del coefficiente di scambio termico laminare acqua/parete nell'apposito "pacchetto" del codice LEGO. Si noterà come le correlazioni abbiano sempre una struttura analoga alla (I.1.6.2.10), con eventualmente qualcuna delle modifiche di cui si dà cenno nei commenti relativi alla (I.1.6.2.9). Si ricorda che le espressioni dei numeri di Prandtl, Pr, e di Reynolds, Re, sono date dalle (I.1.6.2.7) e (I.1.6.2.8) rispettivamente.

-Convezione forzata con acqua a pressione ipercritica.

Viene utilizzata una forma modificata della correlazione di Swenson:

$$\gamma = 0,00459 \frac{\lambda_F}{D_H} Re_F^{0,923} Pr_F^{0,613} \left(\frac{\rho_F}{\rho} \right)^{0,231} \quad (I.1.6.2.41)$$

dove l'indice F stà a indicare che le proprietà fisiche vanno valutate alla temperatura

$$T_F = 0,7 T + 0,3 T_{mi} \quad (I.1.6.2.42)$$

-Convezione forzata con liquido sottoraffreddato.

Viene impiegata la correlazione di Dittus-Boelter:

$$\gamma = 0,023 \frac{\lambda}{D_H} Re^{0,8} Pr^{0,4} \quad (I.1.6.2.43)$$

-Ebollizione sottoraffreddata.

Per questo regime di scambio termico viene adottata una modifica (dovuta a Butterworth) della correlazione di Chen, che è quella utilizzata per i regimi di ebollizione satura e di convezione forzata con film liquido (eqq. (I.1.6.2.44) ÷ (I.1.6.2.49)). Essa consiste nel porre

$$F = 1$$

nelle (I.1.6.2.44) e (I.1.6.2.49), e porre

$$X = 0$$

nella (I.1.6.2.45). Poichè si pone $F = 1$, non è necessario inoltre calcolare il parametro di Martinelli χ (eq. (I.1.6.2.48)).

-Ebolizione satura e convezione forzata con film liquido.

Viene adottata la correlazione di Chen, in cui il coefficiente di scambio è dato dalla somma di un contributo convettivo, avente quindi struttura analoga al secondo membro della (I.1.6.2.10), e di un contributo di ebollizione, di struttura completamente diversa poichè derivato da una correlazione di scambio termico valida per pool boiling. La correlazione di Chen è:

$$\begin{aligned} \gamma &= 0,023 \frac{\lambda_1}{d_H} \text{Re}_L^{0,8} \ Pr^{0,4} \ F \\ &+ 0,00122 \frac{\lambda_l^{0,79} C_p l^{0,45} \rho_l^{0,49}}{\sigma^{0,5} \mu_l^{0,29} H_v^{0,24} \rho_v^{0,24}} \Delta T_{SAT}^{0,24} \Delta p_{SAT}^{0,75} \ S \end{aligned} \quad (\text{I.1.6.2.44})$$

Nel primo termine a secondo membro della (I.1.6.2.44) il numero di Reynolds Re_L è

$$\text{Re}_L = \frac{G (1 - X) D_H}{\mu_l} \quad (\text{I.1.6.2.45})$$

Nel secondo termine della (I.1.6.2.44) σ è la tensione superficiale in N/m , ΔT_{SAT} è dato dalla (I.1.6.2.16) e Δp_{SAT} è la differenza tra la pressione di saturazione corrispondente a T_{mi} e la pressione del fluido (che, essendo in stato di saturazione, ha temperatura T_{SAT}). I coefficienti correttivi F e S che compaiono nella (I.1.6.2.44) sono dati rispettivamente dalle seguenti espressioni:

$$F = \begin{cases} 1 & \text{per } \chi_{tt}^{-1} \leq 0,1 \\ 2,35 (\chi_{tt}^{-1} + 0,213) & \text{per } \chi_{tt}^{-1} > 0,1 \end{cases} \quad (\text{I.1.6.2.46})$$

$$S = \begin{cases} [1 + 0,12 (10^{-4} \text{ Re}_{TP})^{1,14}]^{-1} & \text{per } \text{Re}_{TP} < 32,45 \cdot 10^4 \\ [1 + 0,42 (10^{-4} \text{ Re}_{TP})^{0,78}]^{-1} & \text{per } 32,5 \cdot 10^4 \leq \text{Re}_{TP} < 70 \cdot 10^4 \\ 0,1 & \text{per } \text{Re}_{TP} \geq 70 \cdot 10^4 \end{cases} \quad (\text{I.1.6.2.47})$$

dove χ_{tt} è il parametro di Martinelli:

$$\chi_{tt} = \left(\frac{1 - X}{X} \right)^{0,9} \left(\frac{\rho_v}{\rho_l} \right)^{0,5} \left(\frac{\mu_l}{\mu_v} \right) \quad (\text{I.1.6.2.48})$$

mentre

$$\text{Re}_{TP} = \text{Re}_L F^{1,25} \quad (\text{I.1.6.2.49})$$

-Ebolizione di transizione.

Il coefficiente di scambio termico viene calcolato con un criterio proposto da Bjornard e Griffith, in modo che il corrispondente flusso termico sia la somma di due contributi, uno relativo allo scambio termico con parete bagnata da liquido e uno relativo allo scambio termico con parete lambita da vapore:

$$\gamma = \frac{\delta q_{CHF} + (1 - \delta) q_{MSFB}}{T_{mi} - T} \quad (\text{I.1.6.2.50})$$

dove

$$\delta = \left(\frac{T_{mi} - T_{MSFB}}{T_{CHF} - T_{MSFB}} \right)^2 \quad (\text{I.1.6.2.51})$$

e q_{MSFB} è il flusso termico nel punto di Minimum Stable Film Boiling.

$$q_{MSFB} = \gamma_{MSFB} (T_{MSFB} - T) \quad (\text{I.1.6.2.52})$$

dove γ_{MSFB} è il coefficiente di scambio, calcolato, per $T_{mi} = T_{MSFB}$, con la correlazione valida nel regime di convezione forzata con bifase disperso (eqg. (I.1.6.2.53) + (I.1.6.2.58)).

Nelle (I.1.6.2.50) + (I.1.6.2.52) compaiono le temperature T_{MSFB} e T_{CHF} e il flusso termico q_{CHF} : T_{MSFB} è data dalle (I.1.6.2.21) + (I.1.6.2.23), mentre per il calcolo di T_{CHF} e q_{CHF} si vedano le equazioni da (I.1.6.2.25) a (I.1.6.2.40).

-Convezione forzata con bifase disperso.

Il coefficiente di scambio termico viene calcolato con la correlazione di Groeneveld-Delorme:

$$\gamma = 0,008348 \frac{\lambda_F}{D_H} \left\{ \text{Re}_F \left[X_e + \frac{\rho_v}{\rho_l} (1 - X_e) \right] \right\}^{0,8774} Pr^{0,6112} \quad (\text{I.1.6.2.53})$$

in cui il titolo effettivo X_e è dato da

$$X_e = \frac{H_l}{H_{ve} - H_l} \quad (\text{I.1.6.2.54})$$

dove H_{ve} è l'entalpia effettiva del vapore, fornita dalle relazioni

$$H_{ve} = H_v + H_{vl} e^{-t_g \psi} \quad (\text{I.1.6.2.55})$$

$$\begin{aligned} \psi &= 0,13864 Pr_v^{0,2031} \left\{ \text{Re}_v \left[X + \frac{\rho_v}{\rho_l} (1 - X) \right] \right\} \\ &\cdot \left(\frac{q D_H C_{pv}}{H_{vl} \lambda_v} \right)^{-0,09232} (1,3072 - 1,0833 X + 0,8455 X^2) \end{aligned} \quad (\text{I.1.6.2.56})$$

Nella (I.1.6.2.55) si pone

$$\psi = \begin{cases} 0 & \text{per } \psi < 0 \\ \pi/2 & \text{per } \psi > \pi/2 \end{cases} \quad (\text{I.1.6.2.57})$$

Nella (I.1.6.2.53) l'indice F indica che le proprietà fisiche devono essere calcolate alla temperatura T_F

$$T_F = \frac{T_{mi} + T_{ve}}{2} \quad (\text{I.1.6.2.58})$$

avente definizione uguale alla (I.1.6.2.11), in cui però la temperatura del fluido T è sostituita dalla temperatura effettiva del vapore T_{ve} (il vapore in questo regime di scambio tende a surriscaldarsi, perdendo l'equilibrio termodinamico con le goccioline di liquido che trascina), corrispondente all'entalpia effettiva H_{ve} data alla (I.1.6.2.55).

-Convezione forzata con vapore surriscaldato.

Viene utilizzata per il calcolo del coefficiente di scambio la correlazione di Hadaller, la cui forma (I.1.6.2.53), con un numero di Reynolds modificato per tener conto della

miscela bifase (con titolo X_e), è stata utilizzata da Groeneveld e Delorme per correlare il coefficiente di scambio in regime di convezione con bifase disperso. La correlazione di Hadaller è :

$$\gamma = 0.008348 \frac{\lambda_F}{D_H} \text{Re}_F^{0.8774} Pr_F^{0.6112} \quad (\text{I.1.6.2.59})$$

in cui, ancora, l'indice F indica che le proprietà fisiche vanno calcolate alla temperatura T_F data dalla (I.1.6.2.11).

In conclusione, si riporta in Fig. I.1.6.11 lo schema del pacchetto di scambio termico che viene impiegato nel codice LEGO e che viene presentato in questo paragrafo. Questo schema mette in evidenza l'insieme di regimi di scambio termico, di criteri di interfaccia per la determinazione del regime di scambio in gioco, e di correlazioni per il calcolo del coefficiente di scambio, che questo pacchetto contiene.

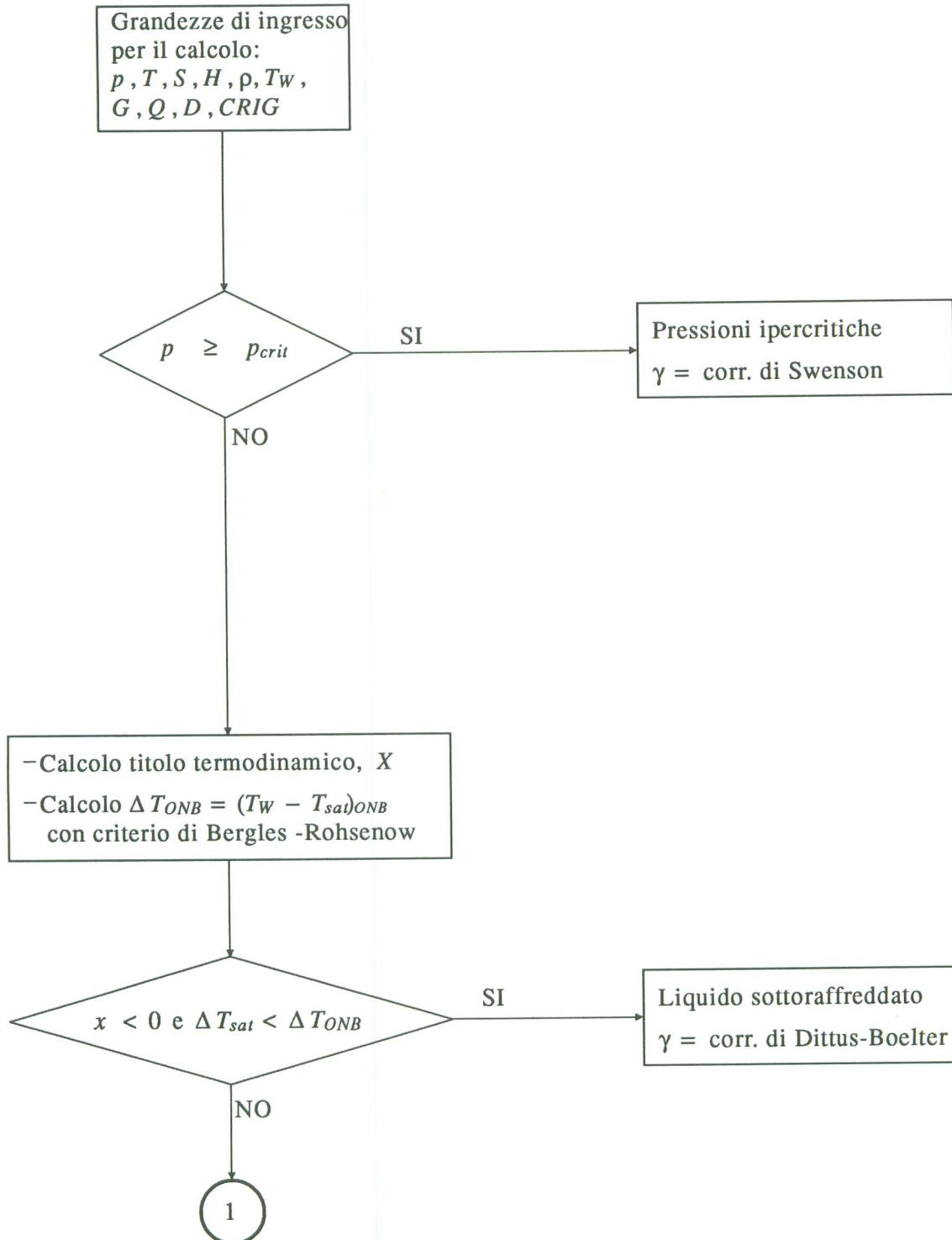


Fig. I.1.6.11 Schema del pacchetto di scambio termico convettivo impiegato nel LEGO
(cont.)

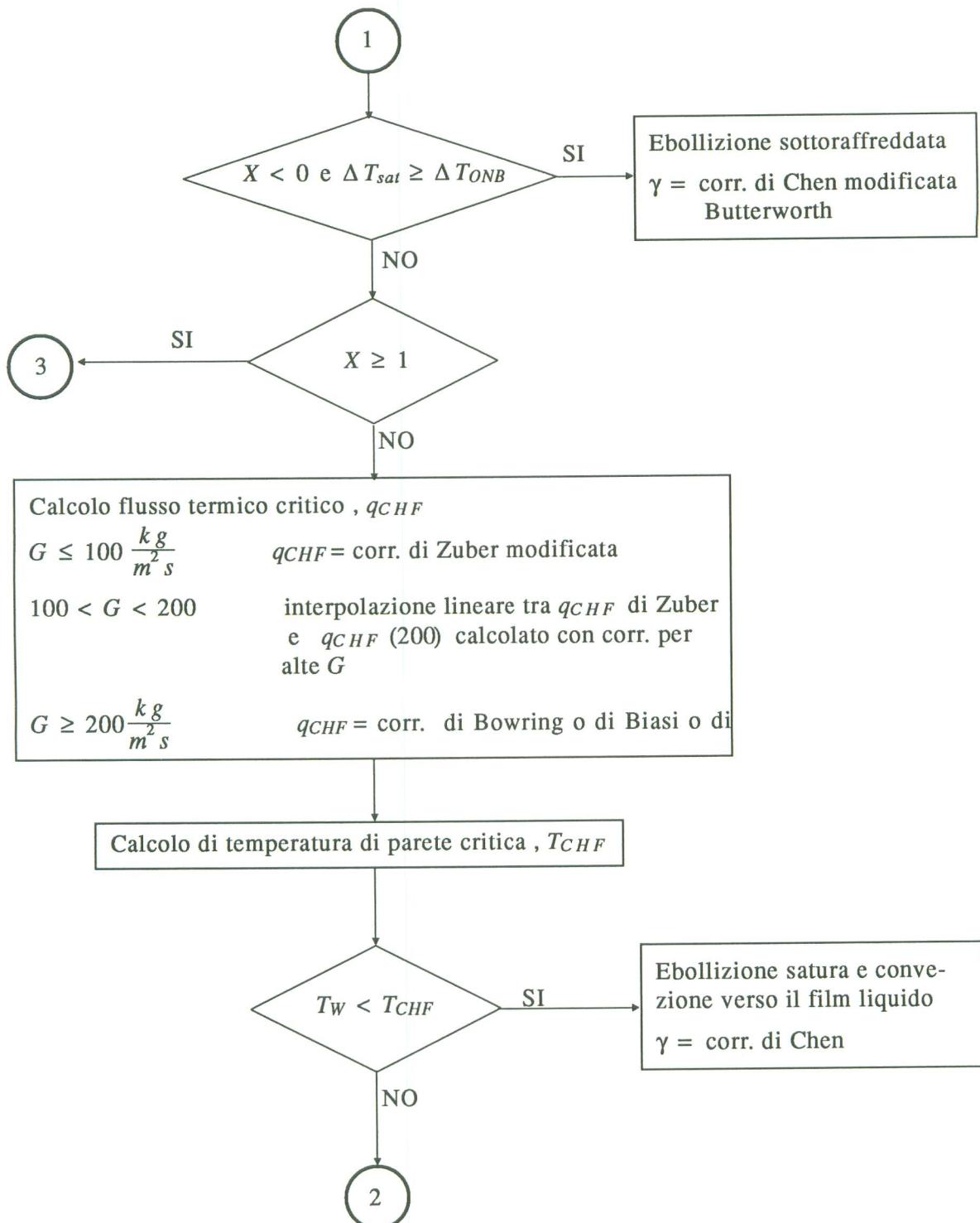


Fig. I.1.6.11 Schema del pacchetto di scambio termico convettivo impiegato nel LEGO
(cont.)

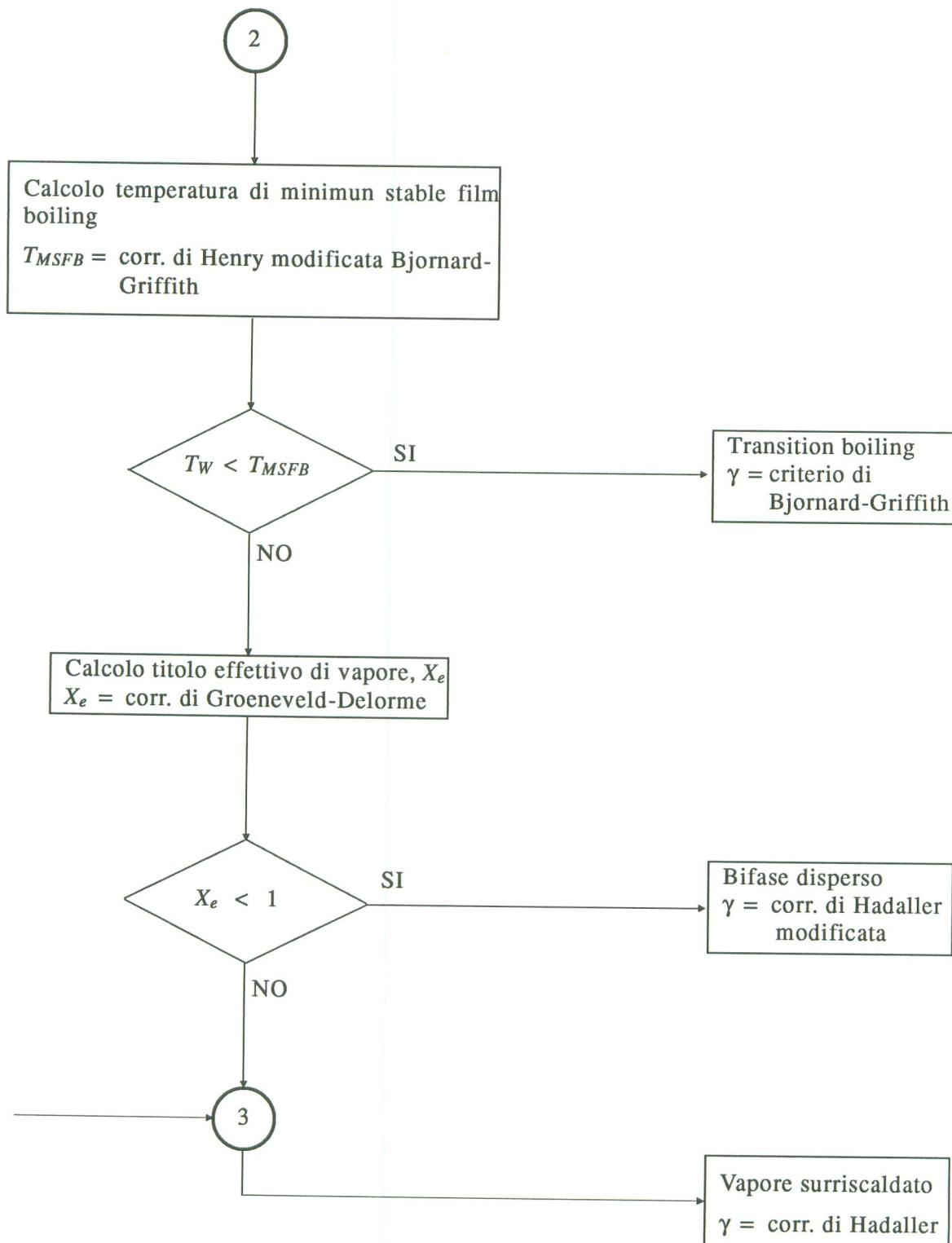


Fig. I.1.6.11 Schema del pacchetto di scambio termico convettivo impiegato nel LEGO

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.1.7 Le proprietà termodinamiche dei fluidi

Il problema di simulare l'evoluzione dinamica delle condizioni termoidrauliche di un fluido, per una assegnata geometria del sistema che lo contiene, è risolubile purchè siano note le condizioni iniziali ed al contorno e purchè del fluido vengano formulate non solo le equazioni di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia, ma siano date le leggi costitutive del fluido stesso, fra le quali sono le sue equazioni di stato.

I fluidi che devono essere presi in considerazione in un codice per la simulazione di impianti per la produzione di energia elettrica sono l'acqua, sia allo stato liquido che allo stato di vapore o di miscela bifase, l'aria, i fumi prodotti dalla combustione di carbone o di idrocarburi ed i gas più comuni.

Le proprietà da calcolare sono l'entalpia H , l'entropia S , la temperatura T , la densità ρ , il calore specifico a pressione costante C_p , la viscosità μ , la conducibilità termica λ e le derivate parziali della densità rispetto alla pressione e ad una variabile termica (entalpia, entropia o temperatura). Tale calcolo deve poter essere effettuato in tutte le condizioni di interesse pratico.

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.1.7.1 Il calcolo delle proprietà dell'acqua

Il calcolo delle proprietà dell'acqua deve soddisfare i seguenti requisiti ⁽¹⁾:

- avere un dominio di validità il più esteso possibile,
- avere in tutto il dominio un errore accettabile rispetto alle tabelle riconosciute internazionalmente,
- rispettare le relazioni termodinamiche fra le grandezze,
- accettare come coppie di variabili indipendenti non solo pressione e temperatura ma almeno anche pressione ed entalpia o pressione ed entropia,
- richiedere occupazione di memoria e tempi di calcolo i più ridotti possibile.

I sottoprogrammi attualmente disponibile nel programma LEGO hanno un campo di validità limitato dalle isobare corrispondenti a 0.006108 bar e a 400 bar e dalle isoterme corrispondenti a 0 °C e a 800 °C.

La coppia di variabili indipendenti è costituita dalla pressione p e dall'entropia S , ma l'entropia è a sua volta calcolabile da un sottoprogramma in funzione della pressione e dell'entalpia H . In tal modo tutte le proprietà dell'acqua elencate nel par. I.7.1 sono calcolabili a partire dalle coppie di valori (p, S) o (p, H) o (p, T) ed il titolo X nel caso di miscela bifase). In funzione della pressione sono forniti i valori della temperatura di saturazione e dell'entalpia, dell'entropia e della densità delle fasi liquido e vapore in condizioni di saturazione.

Per soddisfare l'ultimo requisito si è suddiviso il piano termodinamico in regioni delimitate da isobare, ciascuna delle quali è divisa in sottoregioni delimitate da isentropiche. Per ciascuna regione e sottoregione la proprietà del fluido vengono calcolate con un metodo di interpolazione parabolica partendo da valori precalcolati. La trattazione dettagliata della metodologia di calcolo, che esula dagli scopi della presente trattazione, si trova nei documenti ^{(1), (2)} della bibliografia.

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.1.7.2 Il calcolo delle proprietà dei gas

Il metodo di calcolo utilizzato è basato sulla teoria statistica dei gas perfetti.

Le proprietà termodinamiche delle molecole di un gas perfetto possono essere calcolate con metodi statistici a partire dalle costanti molecolari e dai dati spettroscopici.

Si ricorda che una molecola contenente n atomi ha $3 \cdot n$ gradi di libertà, che si decompongono in gradi di libertà per traslazione d'insieme, per rotazione e per vibrazione. In alcune molecole poliatomiche alcuni gruppi di atomi hanno un movimento di rotazione d'insieme, cioè una rotazione interna. Alle alte temperature appaiono dei gradi di libertà supplementari, legati alle transizioni elettroniche.

L'energia totale di una mole di gas perfetto può essere espressa in funzione delle energie di traslazione, di rotazione e di vibrazione.

Ciascuno di questi contributi energetici può essere calcolato in base ai principi della meccanica quantistica: una molecola non assorbe energia in maniera continua, ma per salti discreti chiamati quanti.

Essa non può esistere che in certi stati ben definiti, i livelli. Se si cerca di fornire energia ad una mole di gas la probabilità che alcune molecole assorbano questa energia saltando da un livello a quello superiore dipende dalla differenza di energia fra questi livelli e dalla temperatura, in base alla legge di distribuzione di Maxwell-Boltzmann. Si può quindi calcolare l'energia interna E di una molecola in condizioni standard e da questa, con le consuete relazioni termodinamiche, le altre grandezze quali l'entalpia H , l'entropia S , il calore specifico a pressione costante C_p e la densità ρ . In (3) sono riportate le formule utilizzate per gas perfetti monoatomici, biamici, poliamici con molecola lineare (ad es. CO₂) e non lineare (ad es. SO₂). Nel caso di miscele di gas le grandezze suddette sono calcolate in base alle concentrazioni in massa delle molecole considerate in una mole di miscela. Si suppone che l'aria abbia la sua composizione standard a 15 °C e 1 bar con umidità relativa pari al 60%. Nel calcolo delle proprietà dell'aria la legge dei gas perfetti viene applicata anche al vapor d'acqua.

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.1.8**Equazioni di conservazione per gli efflussi monodimensionali scritte a parametri concentrati**

Le equazioni dedotte nei precedenti paragrafi sono scritte alle derivate parziali. Il loro trattamento numerico può essere a parametri distribuiti o concentrati.

Nel primo caso le derivate, sia rispetto allo spazio, sia rispetto al tempo vengono approssimate con rapporti incrementali. Nel secondo caso, tramite integrazione rispetto allo spazio su opportuni volumi di controllo, si perviene ad equazioni differenziali nel tempo.

I moduli della libreria termoidraulica del codice LEGO sono basati su modelli a parametri concentrati.

Ricordiamo che nella formulazione a parametri concentrati si assume che le variabili e le relazioni matematiche non dipendano dallo spazio ma siano costanti all'interno di celle dove sono sostituite da valori medi.

Le equazioni di bilancio possono essere scritte o direttamente riferendosi al volume di controllo (cella) o per integrazione delle equazioni precedentemente stabilite sulla lunghezza di ogni singola cella. Scegliamo quest'ultimo approccio. Nel seguito il soprassegno nel simbolo di una grandezza ne indica il valore medio sulla cella.

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.1.8.1. Equazione di conservazione della massa a parametri concentrati

Integrando sulla lunghezza L di una cella la (I.1.2.1.5) si ha :

$$\int_0^L \frac{\partial \rho \Sigma}{\partial t} dx + \int_0^L \frac{\partial \rho \Sigma V}{\partial x} dx = 0 \quad (\text{I.1.8.1.1.})$$

ricordando che $\rho \Sigma V = W$ (portata massica)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \rho \Sigma dx + W|_0^L = 0 \quad (\text{I.1.8.1.2})$$

$$\frac{dM}{dt} + W(L) - W(0) = 0 \quad (\text{I.1.8.1.3})$$

indicando con i suffissi e ed u le grandezze entranti o uscenti da una cella:

$$\boxed{\frac{dM}{dt} = W_e - W_u} \quad (\text{I.1.8.1.4})$$

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.1.8.2 Equazione di conservazione della quantità di moto a parametri concentrati

Integrando sulla lunghezza L di una cella la (I.1.2.2.9) si ha:

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \Sigma \rho V dx + \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \rho \Sigma V^2 dx + \int_0^L \Sigma \frac{\partial p}{\partial x} dx + \int_0^L \frac{C_f \rho |V|}{2} dx - \int_0^L \Sigma \rho \vec{g} \cdot \vec{i} dx = 0 \quad (\text{I.1.8.2.1})$$

$$L \frac{d \bar{W}}{dt} + \frac{W^2}{\rho \Sigma} |_0^L + \bar{\Sigma} p |_0^L + \frac{1}{2} C_f \frac{\bar{W} |\bar{W}|}{\bar{\rho} \bar{\Sigma}^2} L - \bar{\Sigma} \bar{\rho} \vec{g} \cdot \vec{i} \cdot L = 0 \quad (\text{I.1.8.2.2})$$

$$\boxed{L \frac{d \bar{W}}{dt} + \left(\frac{W_u^2}{\rho_u \Sigma_u} - \frac{W_e^2}{\rho_e \Sigma_e} \right) + \bar{\Sigma} (p_u - p_e) + \frac{1}{2} C_f \frac{\bar{W} |\bar{W}|}{\bar{\rho} \bar{\Sigma}^2} L - \bar{\Sigma} \bar{\rho} \vec{g} \cdot \vec{i} \cdot L = 0}$$

(I.1.8.2.3)

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.1.8.3 Equazione di conservazione dell'energia a parametri concentrati

Integrando sulla lunghezza L di una cella la (I.1.2.3.7) si ha:

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \left[\Sigma \rho \left(H + \frac{V^2}{2} + g z \right) \right] dx + \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \Sigma V \left(H + \frac{V^2}{2} + g z \right) \right] dx - \int_0^L \Sigma \frac{\partial p}{\partial t} dx = \int_0^L \frac{\vec{q} \cdot \vec{\omega}}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} dx \quad (\text{I.1.8.3.1})$$

$$L \frac{d}{dt} \left[\bar{\Sigma} \bar{\rho} \left(\bar{H} + \frac{\bar{V}^2}{2} + g \bar{z} \right) \right] + W_u \left(H_u + \frac{V_u^2}{2} + g z_u \right) - W_e \left(H_e + \frac{V_e^2}{2} + g z_e \right) - L \bar{\Sigma} \frac{d \bar{p}}{d t} = \int_{\Sigma_e} q d \Sigma_e \quad (\text{I.1.8.3.2})$$

l'integrale a secondo membro è fatto sulla superficie laterale della cella.

Per ottenere una conveniente formulazione in entropia dell'equazione dell'energia a parametri concentrati si parte dalla (I.1.2.3.1.10), moltiplicata ad ambo i membri per Σ , considerando che

$$\Sigma \rho T \frac{dS}{dt} = \Sigma \rho T \frac{\partial S}{\partial t} + \Sigma \rho TV \frac{\partial S}{\partial x} \quad (\text{I.1.8.3.3})$$

e che valgono le identità:

$$\Sigma \rho T \frac{\partial S}{\partial t} = T \frac{\partial \rho S \Sigma}{\partial t} + TS \frac{\partial \rho V \Sigma}{\partial x} \quad (\text{I.1.8.3.4})$$

$$\Sigma \rho TV \frac{\partial S}{\partial x} = T \frac{\partial V \rho S \Sigma}{\partial x} - TS \frac{\partial \rho V \Sigma}{\partial x} \quad (\text{I.1.8.3.5})$$

Per ricavare l'equazione (I.1.8.3.4) si è fatto anche uso dell'equazione di conservazione della massa (I.1.2.1.5).

La (I.1.2.3.1.10) diventa allora:

$$T \left(\frac{\partial \rho S \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial V \rho S \Sigma}{\partial x} \right) = \frac{\Sigma q}{r_H \vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_p} + \frac{C_f \rho |V|^2 + V |V|}{2 r_H} \Sigma \quad (\text{I.1.8.3.6})$$

Integrando sulla lunghezza L di una cella la (I.1.8.3.6) si ha:

$$\bar{T} \left(L \frac{d \bar{\rho} \bar{\Sigma} \bar{S}}{dt} + W_u S_u - W_e S_e \right) = \int_{\Sigma_e} q d\Sigma_e + \int_{\Sigma_e} \frac{C_f}{2} \rho |V|^2 + V |V| d\Sigma_e$$

(I.1.8.3.7)

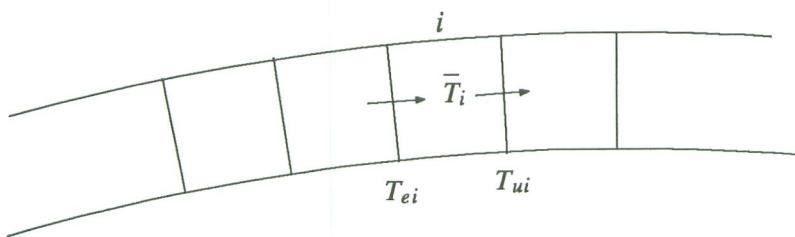
Si è fatto uso del fatto che

$$\frac{\Sigma}{r_H} = \Sigma \frac{1}{\frac{\Sigma}{\bar{\omega}}} = \bar{\omega}$$

In molti casi si può trascurare il secondo termine a secondo membro che rappresenta la dissipazione di energia per attrito (regime turbolento) piccolo a fronte del flusso di calore rappresentato dal primo termine.

I.1.8.4

Il problema della definizione delle medie nelle equazioni di conservazione a parametri concentrati.



Per ogni cella in cui una tubazione è stata suddivisa le equazioni di conservazione coinvolgono proprietà medie e proprietà di giunzione.

Per fissare le idee, prendiamo l'equazione dell'energia (I.1.8.3.7) e consideriamo il caso semplice di una fluido incomprimibile ($\rho = \text{cost}$ nel tempo e nello spazio, $W = \text{costante}$ nello spazio) contenuto in una tubazione con attrito trascurabile e senza scambio di calore. L'equazione, scritta per la cella i -esima diventa:

$$\sum \rho L \bar{T}_i \frac{d\bar{S}_i}{dt} = W (S_{e,i} - S_{u,i}) \quad (\text{I.1.8.4.1})$$

$S_{e,i}$, $S_{u,i}$ sono proprietà di giunzione mentre \bar{T}_i e \bar{S}_i sono medie definite da

$$\bar{S}_i = \frac{1}{L} \int_0^L S_i(x) dx \quad ; \quad \bar{T}_i = \frac{1}{L} \int_0^L T_i(x) dx \quad (\text{I.1.8.4.2})$$

Ricordando che

$$TdS = dH - \frac{1}{\rho} dp = C_p dT - \frac{1}{\rho} dp$$

la (I.1.8.4.1), trascurando anche la variazione di pressione nel tempo, si può riscrivere:

$$\sum \rho L \frac{d\bar{T}_i}{dt} = W (T_{e,i} - T_{u,i}) \quad (\text{I.1.8.4.3})$$

Non conoscendo l'andamento di T_i all'interno della cella bisogna ricorrere ad approssimazioni che ne esprimono la media in funzione delle proprietà di giunzione.

Si può per esempio assumere che:

$$\bar{T}_i = \alpha T_{ui} + (1 - \alpha) T_{ei} \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \quad (\text{I.1.8.4.4})$$

Per $\alpha = \frac{1}{2}$ la media è quella aritmetica.

Cerchiamo di capire le implicazioni che nascono dai vari modi di definire la media.
Passando alla trasformate di Laplace, indicando la trasformata $L(T)$ con \tilde{T} , la (I.1.8.4) diventa:

$$ds \tilde{T}_i = \frac{1}{\tau} (\tilde{T}_{ei} - \tilde{T}_{ui}) ; \quad \tau = \frac{\Sigma \rho L}{W} \quad (\text{I.1.8.4.5})$$

e per la (I.1.8.4.4)

$$\frac{\tilde{T}_{ui}}{\tilde{T}_i} = \frac{1 - (1 - \alpha) s \tau}{1 + \alpha s \tau} \quad (\text{I.1.8.4.6})$$

La risposta della temperatura \tilde{T}_{ui} in uscita alla cella rispetto ad un gradino unitario della temperatura in ingresso (di trasformata $\frac{1}{s}$) è:

$$\tilde{T}_{ui} = \frac{1 - (1 - \alpha) s \tau}{1 + \alpha s \tau} \frac{1}{s} \quad (\text{I.1.8.4.7})$$

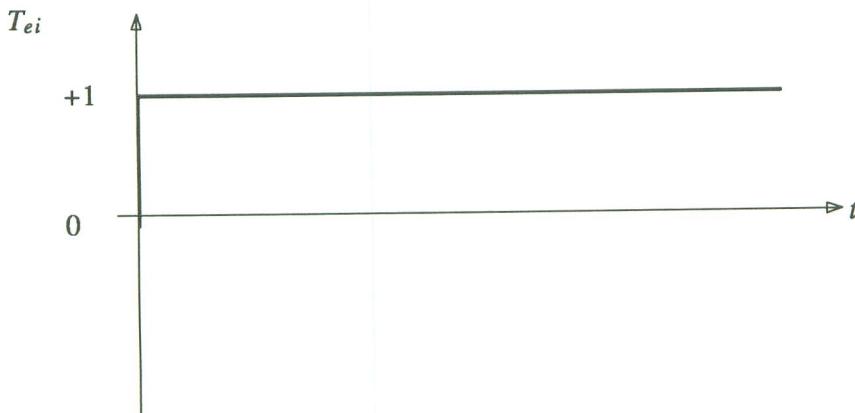
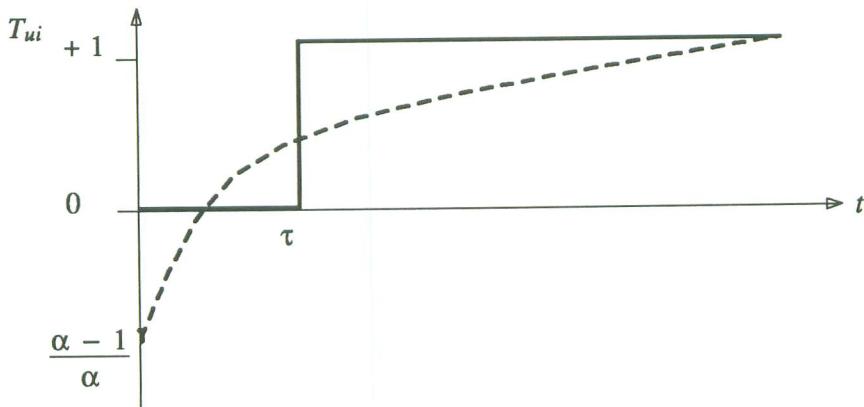
e al tempo 0^+ si ha:

$$T_{ui} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{1 - (1 - \alpha)s \tau}{1 + \alpha s \tau} \frac{1}{s} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \quad (\text{I.1.8.4.8})$$

per $t \rightarrow \infty$ si ha poi

$$T_{ui} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1 - (1 - \alpha)s \tau}{1 + \alpha s \tau} \frac{1}{s} = 1 \quad (\text{I.1.8.4.9})$$

L'andamento in funzione del tempo di T_{ui} è quello del grafico sotto riportato con linea tratteggiata.



L'andamento corretto è invece quello con linea continua che rappresenta la propagazione del gradino di temperatura dall'ingresso all'uscita della cella, trasportato alla velocità del fluido e quindi con un ritardo puro τ .

Notiamo che per $\alpha < 1$ l'andamento è fortemente non fisico perché addirittura la temperatura in uscita reagisce istantaneamente ad un gradino in ingresso con un gradino di segno opposto!

Per una singola cella la situazione migliore si ottiene per $\alpha = 1$, caso per il quale il ritardo puro viene approssimato con un filtro del primo ordine. Per la (I.1.8.4.4) ciò corrisponde ad approssimare la derivata della temperatura media di cella che compare in (I.1.8.4.3) con quella della temperatura in uscita.

I problemi riscontrati traggono origine direttamente dal considerare una cella di dimensioni finite invece che infinitesime.

Con l'aumentare del numero delle celle il problema si attenua progressivamente e già con un numero relativamente modesto di celle (ma a rigore dipendente da τ) si ottengono risultati ingegneristicamente accettabili.

Infatti, considerando che l'uscita di una cella coincide con l'ingresso della successiva, la funzione di trasferimento tra la temperatura in uscita a un tubo T_u e quella in ingresso T_e è:

$$\frac{\tilde{T}_u}{\tilde{T}_e} = \left(\frac{1 - (1 - \alpha) s \frac{\tau_0}{n}}{1 + \alpha s \frac{\tau_0}{n}} \right)^n \quad (\text{I.1.8.4.10})$$

n = numero di celle.

Per ottenere la (I.1.8.4.10) si è fatto uso iterativo della (I.1.8.4.6) e si è indicato con τ_0 il tempo di percorrenza della intera tubazione.

La (I.1.8.4.10) si può anche scrivere:

$$\frac{\tilde{T}_u}{\tilde{T}_e} = \frac{\left\{ \left[1 - (1 - \alpha) s \frac{\tau_0}{n} \right]^{- \frac{n}{(1 - \alpha) s \tau_0}} \right\}^{(1 - \alpha) s \tau_0}}{\left[1 + \alpha s \frac{\tau_0}{n} \right]^{\alpha s \tau_0}} \quad (\text{I.1.8.4.11})$$

Per $n \rightarrow \infty$ e ricordando la definizione del numero di Neper e :

$$\frac{\tilde{T}_u}{\tilde{T}_e} = \frac{e^{-(1 - \alpha) s \tau_0}}{e^{\alpha s \tau_0}} = e^{-s \tau_0} \quad (\text{I.1.8.4.12})$$

cioè si vede che la funzione di trasferimento tende alla soluzione esatta (ritardo puro) quando il numero delle celle tende all'infinito.

Anche la scelta di α , di conseguenza, diventa progressivamente meno critica all'aumentare del numero di celle.

Un altro modo di vedere le cose è quello di cercare uno sviluppo in serie che approssimi al grado voluto il ritardo puro (sviluppo in serie di Padè).

Lo sviluppo in serie di Padè consiste nell'approssimare la funzione $e^{-s \tau_0}$, che rappresenta la funzione di trasferimento del ritardo puro, con una frazione di polinomi.

Per la generica cella, ed arrestandosi al primo ordine nei polinomi, si può cioè scrivere:

$$\frac{\tilde{T}_{u_i}}{\tilde{T}_e} = e^{-s \tau} = 1 - \tau s + \frac{\tau^2}{2} s^2 + \dots \cong \frac{b_0 + b_1 s}{c_0 + c_1 s} \quad (\text{I.1.8.4.13})$$

Dovendo valere l'uguaglianza per ogni valore di s si trova che:

$$\frac{\tilde{T}_{u_i}}{\tilde{T}_e} \cong \frac{1 - \frac{\tau}{2} s}{1 + \frac{\tau}{2} s} \quad (\text{I.1.8.4.14})$$

Ritroviamo così la (I.1.8.4.6) con

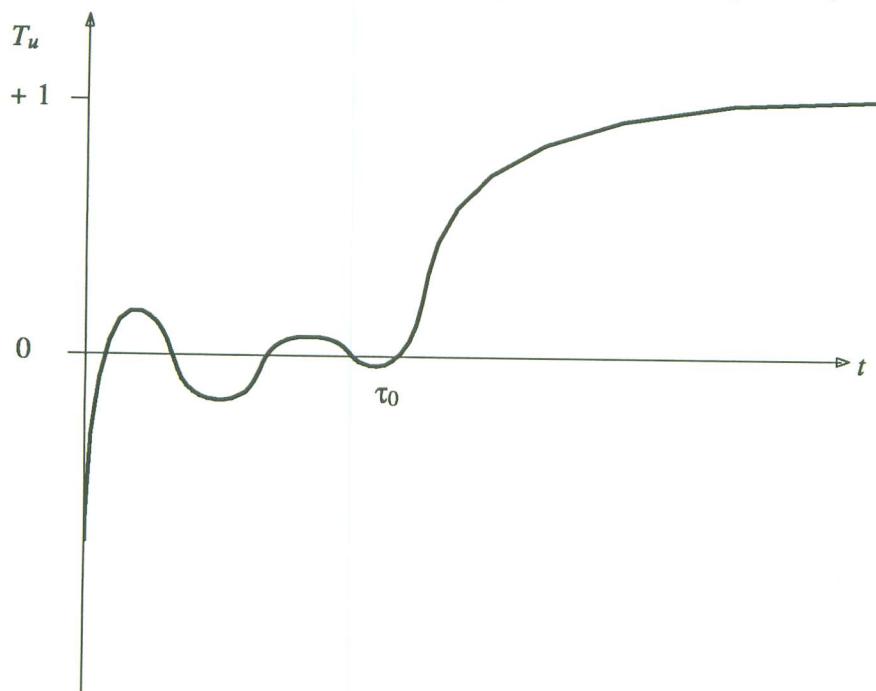
$$\alpha = \frac{1}{2}$$

il che mette in luce il fatto che assumere come definizione di media quella aritmetica fatta sui valori di giunzione equivale ad approssimare il ritardo puro nel trasporto con uno sviluppo in serie troncato al secondo ordine.

Possiamo ancora notare dalla (I.1.8.4.10) che mettere in cascata n celle con

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

dà luogo ad una risposta della T_u a fronte di un gradino di T_i del tipo in figura



Notiamo il fatto "bizzarro" che il valore iniziale di T_u può essere + 1 o - 1 a seconda che il numero delle celle sia pari o dispari, come si vede dal teorema del limite:

$$T_u(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{\tau_0}{2n}s}{1 + \frac{\tau_0}{2n}s} \right)^n = (-1)^n \quad (\text{I.1.8.4.15})$$

Il ritardo puro viene poi approssimato con una serie di oscillazioni di ampiezza tanto minore quanto più alto è il numero di celle e di frequenza che cresce con quest'ultimo.
Nella simulazione reale di una tubazione, come vedremo più avanti, non può essere trascurata l'interazione del fluido con la parete metallica del tubo.
Nel caso di una tubazione adiabatica, per esempio, il metallo funziona come volano termico nel senso che attenua le variazioni di temperatura intervenute nel fluido.

Per una diminuzione di temperatura del fluido rispetto al metallo, per esempio, quest'ultimo cede del calore che tende a limitare la riduzione di temperatura del fluido stesso.

Questa azione "filtrante" esercitata dal metallo sulle variazioni di temperatura del fluido si traduce in una risposta di T_u rispetto a un gradino di T_i che non presenta più le "bizzarrie" segnalate sopra e gli inconvenienti si riducono a qualche residua componente oscillatoria nell'approssimazione del ritardo puro se il numero delle celle è troppo scarso.

Valori di α troppo piccoli possono dar luogo ad altri inconvenienti, addirittura in condizioni di regime. Consideriamo un fluido che riceve calore dal metallo della tubazione che supponiamo a temperatura imposta. L'equazione di conservazione dell'energia a regime diventa allora:

$$W \cdot C_p \left(T_{u,i} - T_{e,i} \right) = Q \quad (\text{I.1.8.4.16})$$

con

$$Q = \gamma \left(T_m - \bar{T}_i \right) \Sigma_p$$

con T_m temperatura del metallo γ coefficiente di scambio, e Σ_p superficie della parete della cella.

Sostituendo la (I.1.8.4.4) si ha:

$$T_{u,i} = \frac{\gamma \Sigma_p}{W \cdot C_p + \gamma \alpha \Sigma_p} T_m + \frac{W \cdot C_p - \gamma (1 - \alpha) \Sigma_p}{W \cdot C_p + \gamma \alpha \Sigma_p} T_{e,i} \quad (\text{I.1.8.4.17})$$

Si ha così l'assurdo che per portate W abbastanza basse da rendere negativo il secondo termine della (I.1.8.4.17) la temperatura in uscita a una cella scaldata può scendere se si aumenta la temperatura in ingresso.

Ciò non avviene mai solo se $\alpha = 1$.

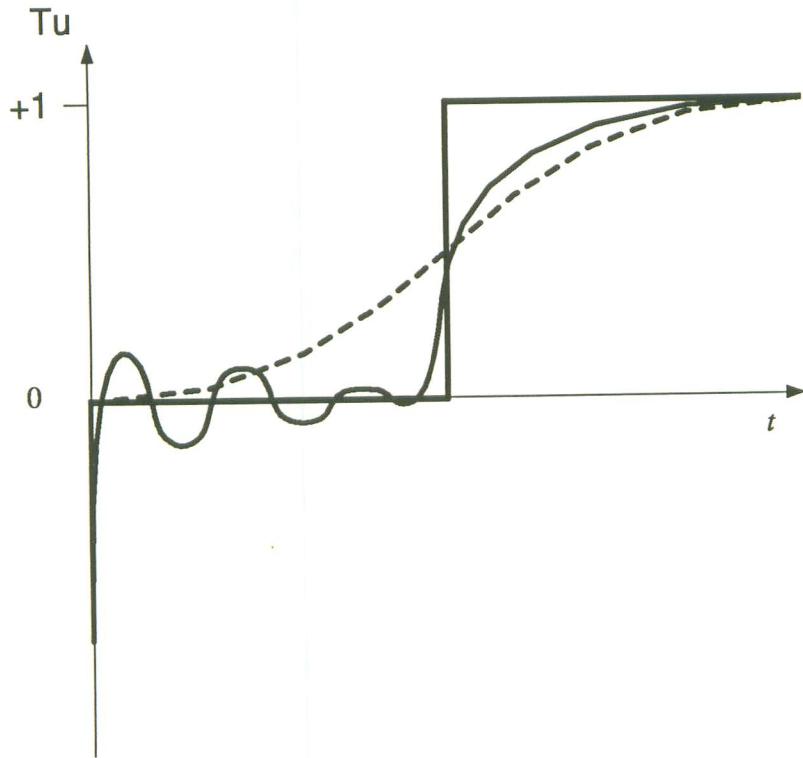
Per tubazioni con scambio ma con temperature di parete non imposte, si vede che la retroazione della temperatura del fluido su quella del metallo rende il problema meno acuto, ma il caso esposto mette in guardia contro valori di α troppo piccoli.

Comunque per $W \rightarrow 0$ il problema si presenta sempre e, qualunque sia stata la scelta di α per portate elevate, bisogna prevedere di cambiarlo in 1 per bassissime portate.

Si potrebbe concludere, comunque, che $\alpha = 1$ presenta solo vantaggi. Questo non è del tutto vero perché, a parità di numero di celle, le risposte di T_u ad un gradino di T_i con

$$\alpha = 1 \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

sono quelle della figura.



(il tratto tratteggiato è relativo ad $\alpha = 1$).

Si nota che la risposta relativa ad $\alpha = 1$ (filtro di ordine n se n è il numero di celle) può per molti versi essere considerata più vicina a quella vera (tratto in neretto) che non quella relativa ad

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

Si potrebbe anche vedere che la risposta in frequenza della funzione di trasferimento tra la temperatura in uscita e quella in ingresso ottenuta con

$$\alpha = \frac{1}{2} ,$$

approssima meglio il ritardo puro che non quella relativa ad $\alpha = 1$. Nella pratica si usa spesso, per portate non troppo basse, $\alpha = 0,75$.

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.1.9**Consistenza dei metodi numerici usati per la soluzione delle equazioni rispetto ai principi di conservazione**

Nella soluzione numerica delle equazioni di conservazione della massa, energia e quantità di moto, si passa necessariamente dalle equazioni scritte alle derivate parziali cioè riferite a volumi di controllo infinitesimi, ad equazioni in cui lo spazio è discretizzato in intervalli finiti.

Se le prime soddisfano senz'altro i principi fisici di conservazione, quelle che da esse sono derivate per la soluzione numerica sono di fatto diverse e in generale non li soddisfano più. Questo è vero sia per l'approccio a parametri concentrati, che nasce da un processo di integrazione cella per cella, sia per l'altro approccio possibile che consiste nel sostituire alle derivate rispetto allo spazio (oltre che naturalmente a quelle rispetto al tempo) il loro rapporto incrementale.

Naturalmente gli errori saranno tanto più piccoli quanto più fitta è la discretizzazione.

In generale si accetta di commettere errori in transitorio ma si scelgono schemi numerici che almeno diano risultati esatti in regime stazionario.

Quest'ultimo requisito è irrinunciabile e va sempre controllato.

In particolare per l'equazione di conservazione dell'energia a parametri concentrati si può vedere che la formulazione in entalpia (I.1.8.3.2) conserva l'energia in regime stazionario mentre quella in entropia (I.1.8.3.7) no. Prendiamo l'equazione esatta per esempio nella forma (I.1.2.3.9) in condizioni di regime e con le ipotesi semplificative di poter trascurare il termine di energia cinetica a fronte di quello entalpico e supponendo la tubazione orizzontale ($z = 0$) :

$$W \frac{dH}{dx} = \bar{\omega} q \quad (\text{I.1.9.1})$$

integrandola questa equazione tra l'ingresso e l'uscita del tubo di lunghezza L (e tenendo conto che $W(x)$ è costante in regime stazionario) e supponendo anche che il flusso di calore q sia costante lungo x , si ottiene:

$$H_u = H_e + \frac{\bar{\omega} q L}{W} \quad (\text{I.1.9.2})$$

Questa è la relazione di regime che qualunque schema numerico deve rispettare.

Nella formulazione in entalpia dell'approccio a parametri concentrati (I.1.8.3.2) essa è evidentemente rispettata, non così per quella in entropia (I.1.8.3.7).

Infatti la formulazione esatta in entropia (vedi (I.1.2.3.1.10)), tralasciando la dissipazione per attrito, darebbe:

$$S_u = S_e + \frac{\bar{\omega} q}{W} \int_0^L \frac{1}{T(x)} dx \quad (\text{I.1.9.3})$$

La (I.1.8.3.7) iterata per n celle dà invece:

$$S_u = S_e + \frac{\bar{\omega} q L}{W} \sum_i \frac{1}{T_i} \quad (\text{I.1.9.4})$$

e quest'ultima differisce da quella esatta nella misura in cui

$$\int_0^L \frac{1}{T(x)} dx \neq L \sum_i \frac{1}{T_i}$$

La violazione del principio di conservazione che si commette usando l'approccio a parametri concentrati formulato in entropia potrebbe portare alla conclusione di usare solo la formulazione in entalpia.

D'altra parte abbiamo visto in I.1.5 che l'uso della formulazione in entropia è vantaggiosa perché consente un maggior disaccoppiamento tra i fenomeni termici e quelli idraulici in pressione-portata che interessano gli efflussi monodimensionali.

Una mediazione tra questi aspetti consiste nel riformulare l'equazione alle derivate parziali in entropia (I.1.2.3.1.10) accettando un piccolo errore, ma mettendola in una forma tale che il successivo passaggio ai parametri concentrati dia una formula che rispetti la conservazione dell'energia a regime.

L'equazione di conservazione dell'energia meccanica (I.1.2.2.1.4) può essere riscritta:

$$\bar{\omega} \frac{C_f \rho V^2 + V}{2} = -\frac{\partial}{\partial t} \Sigma \rho \frac{V^2}{2} - \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \rho V \frac{V^2}{2} - \Sigma V \frac{\partial p}{\partial x} + \Sigma \rho \vec{g} \cdot \vec{i} V \quad (\text{I.1.9.5})$$

e sostituendo la (I.1.9.5) in (I.2.3.1.10) si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho T \frac{\partial S}{\partial t} + \rho V \left(T \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) &= \frac{q}{r_H} + \rho \vec{g} \cdot \vec{i} V \\ -\frac{\partial}{\partial t} \rho \frac{V^2}{2} - \frac{\partial}{\partial x} \rho V \frac{V^2}{2} \end{aligned} \quad (\text{I.1.9.6})$$

e ricordando che

$$T dS + \frac{1}{\rho} dp = dH$$

si ottiene :

$$\rho T \frac{\partial S}{\partial t} + \rho V \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{q}{r_H} + \rho \vec{g} \cdot \vec{i} V - \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho \frac{V^2}{2} + \frac{\partial}{\partial x} \rho V \frac{V^2}{2} \right] \quad (\text{I.1.9.7})$$

Il termine tra parentesi quadre rappresenta l'energia cinetica. Trascurando questo termine a fronte del flusso di calore si ottiene l'equazione

$$\rho T \frac{\partial S}{\partial t} + \rho V \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{q}{r_H} + \rho \vec{g} \cdot \vec{i}V \quad (\text{I.1.9.8})$$

Questa equazione soddisfa le nostre esigenze perché manifestamente soddisfa i bilanci termici di regime in quanto a regime coincide con la corrispondente formulazione in entalpia; d'altra parte è espressa in entropia la componente dinamica, il che facilita il disaccoppiamento tra i fenomeni termici e quelli idraulici.

I.2

EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE PER CAVITÀ CONTENENTI FLUIDO BIFASE.

I.2.1

Introduzione

Definiamo cavità un volume occupato da fluido il moto del quale non ha una direzione prevalente.

Lo studio del campo di moto richiederebbe in questo caso una trattazione tridimensionale, ma in molti casi non è necessaria la conoscenza dei valori locali delle variabili che caratterizzano lo stato del fluido, ed è sufficiente la conoscenza dei loro valori medi all'interno del volume. Tale situazione si verifica nello studio del comportamento del fluido in vari componenti d'impianto, quali :

- riscaldatori a superficie e condensatori (lato cavità)
- riscaldatori a miscela.
- corpi cilindrici, flash tank, serbatoi di espansione e in generale serbatoi contenenti due fasi.

Nel caso suddetto al fine di costruire un modello matematico del comportamento del fluido all'interno della cavità si utilizzano le equazioni di conservazione della massa e dell'energia non in forma locale, ma integrate su volumi di controllo rappresentanti o l'intera cavità o zone di essa; le condizioni del fluido contenuto in essi saranno determinate dai valori medi delle variabili che caratterizzano il fluido stesso.

Nelle cavità si ha spesso, oltre al fluido di processo, anche l'indesiderata presenza di gas incondensabili. I modelli presentati nel seguito sono però relativi ad un fluido monocomponente bifase in una cavità a pareti rigide, perciò a volume costante. Essi in generale si suddividono in due categorie:

- **Modelli di equilibrio termodinamico.** (le due fasi a contatto sono sempre all'equilibrio termodinamico).
- **Modelli di non-equilibrio.** (le due fasi a contatto possono essere transitoriamente in condizioni di non-equilibrio).

Nel par. (I.2.2) viene presentato un modello di equilibrio termodinamico; nei par. (I.2.3), (I.2.4) vengono ottenute le equazioni di conservazione della massa e dell'energia relativamente ad una delle zone nelle quali può arbitrariamente essere suddivisa una cavità e nel par. (I.2.5) viene presentato un modello di non-equilibrio basato sulle equazioni suddette.

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.2.2

Equazioni di conservazione per cavità contenenti fluido bifase in condizioni di equilibrio termodinamico.

Le equazioni di conservazione relative al modello di efflusso tridimensionale di miscela bifase descritto nel paragrafo (I.1.3.4) possono ovviamente essere utilizzate per lo studio del comportamento del fluido all'interno di una cavità contenente fluido bifase. Poichè però in tale caso, come già si è fatto notare nell'introduzione al presente capitolo, non è necessaria la conoscenza dei valori locali che caratterizzano lo stato del fluido, ma è sufficiente la conoscenza dei loro valori medi, è conveniente integrare tali equazioni su un volume di controllo coincidente con l'intera cavità.

Tenendo conto del fatto che i termini che compaiono nell'equazione di conservazione del par. (I.1.3.4) contengono già valori di velocità medi ottenuti in maniera tale da eliminare le fluttuazioni dovute alla turbolenza e che le velocità del fluido all'interno della cavità sono di solito molto basse si assumono le ipotesi seguenti:

- La velocità della miscela \vec{V}_m è ovunque nulla all'interno della cavità.
- Nelle zone della frontiera della cavità ove \vec{V}_m non è nulla le velocità delle fasi \vec{V}_l e \vec{V}_v sono uguali fra loro.

Si consideri una cavità di volume \mathcal{V} e con un confine di superficie Σ .

Integrando sul volume della cavità le equazioni (I.1.3.4.9), (I.1.3.4.10) e (I.1.3.4.13), nelle ipotesi sopra elencate e tenendo conto che il volume della cavità è costante si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho_m d\mathcal{V} + \int_{\Sigma} \rho_m \vec{V}_m \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma = 0 \quad (\text{I.2.2.1})$$

$$\int_{\Sigma} [\rho_m \vec{V}_m \otimes \vec{V}_m - \bar{\tau}_m] \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma + \int_{\Sigma} p \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma - \int_{\mathcal{V}} \vec{g} \rho_m d\mathcal{V} = 0 \quad (\text{I.2.2.2})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho_m H_m d\mathcal{V} + \int_{\Sigma} \rho_m H_m \vec{V}_m \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma + \int_{\Sigma} \vec{q}_m \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} p d\mathcal{V} \\ & + \int_{\mathcal{V}} \rho_m \frac{\partial}{\partial t} X (1-X) \frac{(\vec{V}_v - \vec{V}_l)^2}{2} d\mathcal{V} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.2.2.3})$$

L'equazione (I.2.2.2) esprime il bilancio delle forze agenti nel fluido e non viene utilizzata nel modello matematico della cavità. Ricordando le definizioni delle grandezze che caratterizzano la miscela date dalle (I.1.3.4.1) e (I.1.3.4.4), definendo la massa di fluido presente nella cavità in una certa fase come

$$M_k = \int_{\mathcal{V}} \alpha_k \rho_k d\mathcal{V} \quad (\text{I.2.2.4})$$

e tenendo presente che il secondo termine della (I.2.2.1) rappresenta la somma delle portate di fluido entranti ed uscenti dalla cavità la (I.2.2.1) assume la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} (M_l + M_v) = \sum_i W_{ii} - \sum_i W_{ui} \quad (\text{I.2.2.5})$$

dove $\sum_i W_{ii}$ e $\sum_i W_{ui}$

rappresentano le sommatorie delle portate entranti ed uscenti.

Si definisce il valore della pressione media \bar{p} del fluido nella cavità come

$$\bar{p} = \frac{1}{V} \int_V p \, dV \quad (\text{I.2.2.6})$$

Poichè nel presente modello si ipotizza l'equilibrio termodinamico fra le fasi le entalpie che compaiono nella (I.1.3.4.4) devono essere quelle di saturazione.

Se la pressione p è in ogni punto della cavità molto prossima a \bar{p} si può ipotizzare che tutta la cavità si trovi alla pressione \bar{p} ed a tale pressione vengono calcolate l'entalpia e la densità di ogni fase, cioè

$$H_l = H_{ls}(\bar{p}) \quad \text{e} \quad H_v = H_{vs}(\bar{p}) \quad (\text{I.2.2.7})$$

$$\rho_l = \rho_{ls}(\bar{p}) \quad \text{e} \quad \rho_v = \rho_{vs}(\bar{p}) \quad (\text{I.2.2.8})$$

$$\int_V \rho_m H_m \, dV = \int_V (\alpha_l \rho_l H_l + \alpha_v \rho_v H_v) \, dV = H_{ls} M_l + H_{vs} M_v \quad (\text{I.2.2.9})$$

Detta Σ_i l'area di una qualunque sezione attraverso la quale il fluido entra ed esce dalla cavità e definita l'entalpia media del fluido transitante attraverso tale sezione come

$$H_{mi} = \frac{1}{\int_{\Sigma_i} \rho_m \vec{V}_m \cdot \vec{n}_{\Sigma_i} \, d\Sigma_i} \int_{\Sigma_i} \rho_m H_m \vec{V}_m \cdot \vec{n}_{\Sigma_i} \, d\Sigma_i \quad (\text{I.2.2.10})$$

è

$$\int_{\Sigma} \rho_m H_m \vec{V}_m \cdot \vec{n}_{\Sigma} \, d\Sigma = - \sum_i W_{ii} H_{mi} + \sum_i W_{ui} H_{mi} \quad (\text{I.2.2.11})$$

Sostituendo nella (I.2.2.3) le (I.2.2.6), (I.2.2.9) e (I.2.2.11) e trascurando l'ultimo termine si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} (M_l H_{ls} + M_v H_{vs}) - V \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = \sum_i W_{ii} H_{mi} - \sum_i W_{ui} H_{mi} - \int_{\Sigma} \vec{q}_m \cdot \vec{n}_{\Sigma} \, d\Sigma \quad (\text{I.2.2.12})$$

nella quale il termine

$$\int_{\Sigma} \vec{q}_m \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma$$

tiene conto di tutti gli scambi termici fra il fluido nella cavità ed il contenitore ed altri corpi (ad esempio fasci tubieri) in essa contenuti. Poichè il volume \mathcal{V} occupato dal fluido nella cavità è costante, per la (I.2.2.8) vale la relazione

$$\frac{M_l}{\rho_{ls}} + \frac{M_v}{\rho_{vs}} = \nu \quad (\text{I.2.2.13})$$

Le equazioni (I.2.2.5), (I.2.2.12), (I.2.2.13), (I.2.2.7) e (I.2.2.8) costituiscono il modello matematico di una cavità contenente fluido bifase con equilibrio termodinamico fra le fasi.

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.2.3

Equazioni di conservazione relative alle zone nelle quali una cavità può essere considerata suddivisa.

Con riferimento a quanto detto nel paragrafo precedente riguardo al fatto che in generale nello studio del comportamento del fluido in una cavità non è necessario conoscere i valori locali delle grandezze che caratterizzano il fluido stesso, si considera la cavità suddivisa in un numero arbitrario di zone, che possono anche non essere continue, contenenti fluido monofase del quale vengono calcolate le caratteristiche medie.

Come già fatto nel paragrafo precedente, si ipotizza che la velocità del fluido sia ovunque nulla all'interno di ogni zona ma non sul confine, tranne che quando la zona confina con una parete.

Si vogliono ottenere le equazioni di conservazione della massa e dell'energia relative ad una zona a partire dalle equazioni di conservazione in forma locale per fluidi monofase riportate nel par. (I.1.1) ⁽¹⁾.

Per il teorema di Gauss è

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \int_{\Sigma} \rho \vec{V}_{\Sigma} \cdot \vec{n}_{\Sigma} \, d\Sigma \quad (\text{I.2.3.1})$$

dove \vec{V}_{Σ} è la velocità di movimento del confine della zona.

L'equazione di conservazione della massa in forma locale, quale risulta dall'equazione (I.1.1.12) è

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{V} = 0 \quad (\text{I.2.3.2})$$

* La maggior parte degli autori nel caso di fluidi polifase fa comparire un termine di sorgente nelle equazioni locali ,ad es. per l'equazione di conservazione della massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = \dot{m} \text{ termine di sorgente}$$

il quale darebbe poi origine, nelle equazioni di zona, al termine

$$\int_{\mathcal{V}} \dot{m} \, d\mathcal{V}$$

Si è qui seguita la trattazione di Hughes ⁽¹⁾, nella quale il termine di sorgente viene ritenuto incluso in

$$\int_{\Sigma} \rho (\vec{V} - \vec{V}_{\Sigma}) \cdot \vec{n}_{\Sigma} \, d\Sigma$$

cioè viene interpretato come termine di scambio con una zona, contenente una fase diversa, che ha origine all'interno della zona primitiva. Nella trattazione di Hughes tale termine viene poi messo in evidenza nelle equazioni finali.

$$(\text{ad es. } \frac{dM}{dt} = \sum_i w_{ii} - \sum_i w_{ui} + \dot{M} \text{ termine di sorgente})$$

Le stesse considerazioni si applicano all'equazione di conservazione dell'energia.

che, integrata sul volume \mathcal{V} , dà

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = - \int_{\Sigma} \rho \vec{V} \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma \quad (\text{I.2.3.3})$$

Sostituendo la (I.2.3.3) nella (I.2.3.1) si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} + \int_{\Sigma} \rho (\vec{V} - \vec{V}_{\Sigma}) \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma = 0 \quad (\text{I.2.3.4})^*$$

Si noti che il vettore

$$\vec{V} - \vec{V}_{\Sigma}$$

rappresenta la velocità relativa del fluido rispetto al confine della zona. Pertanto il secondo termine della (I.2.3.4) può essere espresso come

$$\int_{\Sigma} \rho (\vec{V} - \vec{V}_{\Sigma}) \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma = - \sum_i W_{ii} + \sum_i W_{ui} \quad (\text{I.2.3.5})$$

dove W_{ii} sono le portate di fluido entrante e W_{ui} quelle di fluido uscente dalla zona. Si deve notare che in esse vanno incluse anche le portate in ingresso o in uscita derivanti dal cambiamento di fase del fluido all'interno della zona stessa.

Definendo M la massa del fluido nella zona è

$$M = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} \quad (\text{I.2.3.6})$$

la (I.2.3.4) diventa

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \sum_i W_{ii} - \sum_i W_{ui} \quad (\text{I.2.3.7})$$

L'equazione di conservazione dell'energia in forma locale (vedasi la (I.1.1.14)); scritta in termini di energia interna U , è

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \operatorname{div} \left[\rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} + \vec{q} - \bar{\tau} \cdot \vec{V} + p \vec{V} \right] - \rho \vec{g} \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{I.2.3.8})$$

Per il teorema di Gauss è

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) d\mathcal{V} = \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) \right] d\Sigma + \int_{\Sigma} \rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V}_{\Sigma} \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma \quad (\text{I.2.3.9})$$

Integrando termine a termine la (I.2.3.8) sul volume \mathcal{V} e sostituendo la (I.2.3.9) si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) d\mathcal{V} - \int_{\Sigma} \rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V}_{\Sigma} \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma + \int_{\Sigma} \rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma \\ & + \int_{\Sigma} \vec{q} \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma - \int_{\Sigma} \bar{\tau} \cdot \vec{V} \cdot \vec{n}_{\Sigma} + \int_{\Sigma} p \vec{V} \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma - \int_{\mathcal{V}} \rho \vec{g} \cdot \vec{V} d\mathcal{V} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.2.3.10})$$

Sostituendo nella (I.2.3.10) la definizione di entalpia H

$$H = U + \frac{p}{\rho} \quad (\text{I.2.3.11})$$

e trascurando i termini cinetici, dissipativi ed il termine

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \vec{g} \cdot \vec{V} d\mathcal{V}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho H d\mathcal{V} - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} p d\mathcal{V} + \int_{\Sigma} p \vec{V}_{\Sigma} \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma + \int_{\Sigma} \rho H (\vec{V} - \vec{V}_{\Sigma}) \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma \\ + \int_{\Sigma} \vec{q} \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.2.3.12})$$

Si definiscono l'entalpia \bar{H} media di zona e la pressione \bar{p} media di zona come

$$\bar{H} = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{V}} \rho H d\mathcal{V} \quad (\text{I.2.3.13})$$

e

$$\bar{p} = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} p d\mathcal{V} \quad (\text{I.2.3.14})$$

Il termine

$$\int_{\Sigma} \rho H (\vec{V} - \vec{V}_{\Sigma}) \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma$$

esprime la somma di tutte le potenze scambiate dalla zona considerata con quelle circostanti tramite trasporto di massa e viene espressa come

$$\int_{\Sigma} \rho H (\vec{V} - \vec{V}_{\Sigma}) \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma = - \sum_i W_{ii} H_{ii} + \sum_i W_{ui} H_{ui} \quad (\text{I.2.3.15})$$

in esso sono inclusi anche i termini derivanti dal cambiamento di fase del fluido all'interno delle zone.

Il termine

$$\int_{\Sigma} \vec{q} \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma$$

tiene conto della potenza scambiata con le zone circostanti non per trasferimento di massa o con la parte della parete della cavità in contatto con la zona considerata.

Tenendo conto delle (I.2.3.13), (I.2.3.14) e (I.2.3.15) la (I.2.3.12) diventa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (M \bar{H}) - \frac{\partial}{\partial t} (\bar{p} \mathcal{V}) + \int_{\Sigma} p \vec{V}_{\Sigma} \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma = \sum_i W_{ii} H_{ii} \\ - \sum_i W_{ui} H_{ui} - \int_{\Sigma} \vec{q} \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma \end{aligned} \quad (\text{I.2.3.16})$$

Le equazioni (I.2.3.7) e (I.2.3.16) sono le equazioni di conservazione della massa e dell'energia relative a ciascuna delle zone nelle quali è stata suddivisa la cavità. Ad esse vanno aggiunte le equazioni per il calcolo delle portate e delle potenze scambiate attraverso le interfacce con le altre zone.

Poichè non è stata utilizzata l'equazione di conservazione della quantità di moto, l'insieme delle equazioni di conservazione della massa e dell'energia e delle leggi costitutive per ciascuna zona con le opportune condizioni d'interfaccia ed al contorno non è sufficiente per determinare le condizioni del fluido in ogni zona della cavità.

Normalmente si può ipotizzare che la pressione sia spazialmente costante in tutta la cavità, quindi sia la stessa in tutte le zone nelle quali la cavità è stata suddivisa. Supponendo anche di poter calcolare la densità media di zona $\bar{\rho}$ come

$$\bar{\rho} = \bar{\rho} (\bar{H}, \bar{p}) \quad (\text{I.2.3.17})$$

si aggiunge al sistema la relazione

$$\mathcal{V} = \sum_i \frac{M_i}{\bar{\rho}_i} \quad (\text{I.2.3.18})$$

esprimente il fatto che il volume totale della cavità è costante.

Nell'ipotesi di pressione spazialmente costante il terzo termine della (I.2.3.16) diviene

$$\int_{\Sigma} p \vec{V}_{\Sigma} \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma = \bar{p} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} \quad (\text{I.2.3.19})$$

e la (I.2.3.16)

$$\frac{\partial}{\partial t} (M \bar{H}) - \mathcal{V} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = \sum_i w_{ii} H_{ii} - \sum_i w_{ui} H_{ui} - \int_{\Sigma} \vec{q} \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma \quad (\text{I.2.3.20})$$

Sostituendo nella (I.2.3.20) la (I.2.3.7) si ottiene

$$M \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \mathcal{V} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = \sum_i w_{ii} (H_{ii} - \bar{H}) - \sum_i w_{ui} (H_{ui} - \bar{H}) - \int_{\Sigma} \vec{q} \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma \quad (\text{I.2.3.21})$$

Definendo i valori medi di zona dell'energia interna \bar{U} , dell'entropia \bar{S} e della temperatura \bar{T} come

$$\bar{U} = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} U d\mathcal{V} \quad (\text{I.2.3.22})$$

$$\bar{S} = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} S d\mathcal{V} \quad (\text{I.2.3.23})$$

$$\bar{T} = \left. \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{S}} \right|_{\rho = \text{cost}} \quad (\text{I.2.3.24})$$

supponendo che tra le variabili di stato medie valgano le relazioni esistenti tra quelle locali e che sia ancora

$$d\bar{U} = \bar{T} d\bar{S} - \bar{p} d\left(\frac{1}{\bar{\rho}}\right) \quad (\text{I.2.3.25})$$

l'equazione di conservazione dell'energia diviene

$$\bar{T} M \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = S_i w_{ii} (H_{ii} - \bar{H}) - S_i w_{ui} (H_{ui} - \bar{H}) - \int_{\Sigma} \vec{q} \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma \quad (\text{I.2.3.26})$$

Le equazioni di conservazione della massa (I.2.3.7) e dell'energia nelle sue varie forme (I.2.3.20), (I.2.3.21) e (I.2.3.26) relative a ciascuna zona nella quale è stata suddivisa la cavità verranno nel paragrafo (I.2.9) utilizzate per la costruzione del modello matematico del fluido bifase contenuto in una cavità con la possibilità che le fasi non siano in equilibrio termodinamico fra di loro.

I.2.4**Deduzione euristica delle equazioni di conservazione relative alle zone di una cavità.**

Analogamente a quanto fatto per la modellistica degli efflussi monodimensionali, anche per quel che riguarda le cavità, ed in particolare le zone nelle quali esse possono essere considerate suddivise, è possibile con un procedimento euristico ottenere le equazioni di conservazione direttamente dai principi primi.

Le ipotesi generali riguardanti tutta la cavità sono:

- La pressione è ovunque la stessa
- Le fasi possono non essere in equilibrio termodinamico fra di loro: il liquido può essere sottoraffreddato ed il vapore surriscaldato.

La cavità può essere suddivisa in zone, ciascuna delle quali può contenere o fluido monofase o miscela bifase.

Se una zona contiene miscela bifase all'interno della stessa le fasi devono essere in equilibrio termodinamico.

Naturalmente una zona può coincidere con l'intera cavità.

Per ciascuna zona, che è in generale a volume variabile, si vogliono ottenere le equazioni di conservazione della massa e dell'energia.

L'equazione di conservazione della massa è :

$$\frac{dM}{dt} = S_i w_{ii} - S_i w_{ui} \quad (\text{I.2.4.1})$$

L'equazione di conservazione dell'energia totale coincide in pratica con quella di conservazione dell'energia interna, poichè i termini di energia cinetica e potenziale sono trascurabili rispetto agli altri.

Per il primo principio della termodinamica la variazione di energia interna di un sistema è pari alla differenza fra l'energia immessa nel sistema ed il lavoro compiuto dallo stesso verso l'esterno. Nel caso in esame il sistema, cioè il fluido contenuto in una zona, è aperto, poichè scambia massa con l'ambiente circostante.

Di conseguenza la sua variazione di energia interna dipende anche dagli apporti energetici del fluido entrante ed uscente e dai lavori di pulsione compiuti sul sistema o dal sistema stesso per fare avvenire i suddetti scambi di massa. Tenendo conto di tutti questi contributi l'equazione di conservazione della energia assume l'aspetto seguente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (M \bar{U}) &= Q - p \frac{dV}{dt} + S_i w_{ii} U_{ii} - S_i w_{ui} U_{ui} \\ &+ S_i p_{ii} w_{ii} - S_i p_{ui} w_{ui} \quad (\text{I.2.4.2}) \end{aligned}$$

Nelle equazioni (I.2.4.2) si fa notare che il secondo termine a destra rappresenta la potenza ceduta dal sistema in conseguenza dell'aumento del suo volume; gli ultimi due termini, nei quali con w_{ii} e w_{ui} si sono indicate le portate volumetriche entranti ed uscenti, rappresentano i cosiddetti lavori di pulsione (nella forma nella quale sono presentati nella (I.2.4.2) essi sono in realtà delle potenze), cioè il lavoro nell'unità di tempo fatto dall'esterno sul fluido nel sistema comprimendolo o dal fluido del sistema espandendosi per far variare nell'unità di tempo il volume del fluido già presente nel sistema di una quantità pari a \mathcal{V} , in modo da permettere l'ingresso o l'uscita di massa a parità del volume totale \mathcal{V} . Sostituendo alle portate volumetriche w le portate massiche tramite la relazione

$$\mathcal{W} = \frac{W}{\rho} \quad (\text{I.2.4.3})$$

al volume \mathcal{V} la massa M tramite la relazione

$$\mathcal{V} = \frac{M}{\rho} \quad (\text{I.2.4.4})$$

ed introducendo l'entalpia H

$$H = U + \frac{p}{\rho} \quad (\text{I.2.4.5})$$

la (I.2.4.2) diventa

$$\frac{d}{dt} (M \bar{H} - p \mathcal{V}) = Q - p \frac{d \mathcal{V}}{dt} + \sum_i w_{ii} H_{ii} - \sum_j w_{ui} H_{ui} \quad (\text{I.2.4.6})$$

Sviluppando la derivata temporale e sostituendo la (I.2.4.1) nella (I.2.4.6) si ottiene

$$M \frac{d \bar{H}}{dt} = Q + \mathcal{V} \frac{dp}{dt} + \sum_i w_{ii} (H_{ii} - \bar{H}) - \sum_j w_{ui} (H_{ui} - \bar{H}) \quad (\text{I.2.4.7})$$

Nello scrivere le equazioni (I.2.4.2), (I.2.4.6) e (I.2.4.7), oltre all'ipotesi di pressione uniforme, si è implicitamente assunto che sia

$$\bar{U} = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{V}} U \rho d \mathcal{V} \quad (\text{I.2.4.8})$$

$$\bar{H} = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{V}} H \rho d \mathcal{V} \quad (\text{I.2.4.9})$$

$$\bar{p} = \frac{M}{\nu} \quad (\text{I.2.4.10})$$

Nel caso che la cavità venga considerata suddivisa in zone, di solito si ipotizza che l'entalpia del fluido all'interno della singola zona sia spazialmente costante. L'entalpia delle portate uscenti è allora uguale a quella media di zona, quindi l'ultimo termine della (I.2.4.7) scompare tranne nel caso che nella zona il fluido sia nello stato di miscela bifase, poichè le portate di evaporazione o di condensazione hanno l'entalpia del fluido saturo nella rispettiva fase e non quella media di zona. Qualora la cavità sia rappresentata da una sola zona l'ipotesi che l'entalpia del fluido in essa presente sia spazialmente costante è completamente irrealistica poichè le fasi sono sempre più o meno completamente separate ed ad ogni portata uscente va attribuita l'entalpia che il fluido ha nel punto dal quale ogni portata viene prelevata, entalpia a sua volta dipendente dalle modalità di separazione delle fasi.

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.2.5**Modello matematico di fluido bifase in condizioni di non-equilibrio termodinamico fra le fasi all'interno di una cavità.**

Si ipotizza che la cavità sia suddivisa in due zone, denominate zona "liquida" e zona "gassosa", nella prima delle quali il fluido si trova o nello stato di liquido sottoraffreddato o in quello di miscela bifase a basso titolo (matrice liquida contenente bolle di vapore), nella seconda si trova o nello stato di vapore surriscaldato o in quello di miscela bifase a titolo alto (matrice gassosa con presenza di gocce di liquido). Qualora in una zona sia presente miscela bifase, la zona viene suddivisa in due sottozone, una contenente tutto il fluido in fase vapore, e l'altra tutto il fluido nella fase liquida presente nella zona. Nella cavità possono essere presenti quattro sottozone⁽²⁾.

Si ammette che possa non esservi l'equilibrio termodinamico fra la zona "liquida" e la zona "gassosa", mentre le due sottozone all'interno di ciascuna zona sono sempre in equilibrio. Si ipotizza che il fluido si trovi alla stessa pressione in ogni punto della cavità.

Le equazioni di conservazione della massa e dell'energia del fluido in ciascuna delle due sottozone (fasi) nelle quali esso si trova nella zona "gassosa" sono, in base alla (I.2.3.7) e alla (I.2.3.20):

$$\frac{d M_{vv}}{dt} = \sum_i W_{vi} - \sum_i W_{vu} - W_{vl} + W_{up} + W_B + W_{lv} \quad (\text{I.2.5.1})$$

$$\frac{d M_{vl}}{dt} = W_{vl} - W_{dw} - W_{lv} \quad (\text{I.2.5.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (M_{vv} H_{vv}) &= \sum_i W_{vi} H_{vi} - \sum_i W_{vu} H_{vu} - W_{vl} H_{ls} + W_{lv} H_{vs} \\ &\quad + \nu_{vv} \frac{dp}{dt} + W_{up} H_{lv} + W_B H_{lv} - Q_{vv} \end{aligned} \quad (\text{I.2.5.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (M_{vl} H_{vl}) &= W_{vl} H_{ls} - W_{dw} H_{vl} + \nu_{vl} \frac{\partial p}{\partial t} - W_{lv} H_{vs} \\ &\quad + W_D H_D - W_D H_{vl} - Q_{vl} \end{aligned} \quad (\text{I.2.5.4})$$

Sommando le equazioni (I.2.5.1) e (I.2.5.2) di conservazione della massa relative alle due fasi si ottiene l'equazione di conservazione della massa relativa a tutto il fluido nella zona "gassosa"

$$\frac{\partial}{\partial t} (M_{vv} + M_{vl}) = \sum_i W_{vi} - \sum_i W_{vu} - W_{dw} + W_{up} + W_B \quad (\text{I.2.5.5})$$

Analogamente sommando le due equazioni (I.2.5.3) e (I.2.5.4.) si ottiene l'equazione di conservazione dell'energia relativa a tutto il fluido contenuto nella zona "gassosa".

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(M_{vv} H_{vv} + M_{vl} H_{vl} \right) - \left(\mathcal{V}_{vv} + \mathcal{V}_{vl} \right) \frac{dp}{dt} \\ & = S_i W_{vi} H_{vi} - S_i W_{vu} H_{vu} - W_{dw} H_{vl} + W_D \left(H_D - H_{vl} \right) \\ & + W_{up} H_{lv} + W_B H_{lv} - Q_{vv} - Q_{vl} \end{aligned} \quad (\text{I.2.5.6})$$

Poichè per definizione valgono le relazioni

$$M_v = M_{vv} + M_{vl} \quad (\text{I.2.5.7})$$

$$M_v H_v = M_{vv} H_{vv} + M_{vl} H_{vl} \quad (\text{I.2.5.8})$$

$$Q_v = Q_{vv} + Q_{vl} \quad (\text{I.2.5.9})$$

$$\mathcal{V}_v = \mathcal{V}_{vv} + \mathcal{V}_{vl} \quad (\text{I.2.5.10})$$

e ipotizzando che sia

$$H_{vv} = H_v \quad \text{se} \quad H_v \geq H_{vs} \quad (\text{I.2.5.11})$$

$$H_{vv} = H_{vs} \quad \text{se} \quad H_v \leq H_{vs} \quad (\text{I.2.5.12})$$

$$H_{vl} = H_{ls} \quad (\text{I.2.5.13})$$

$$H_{lv} = H_{vs} \quad (\text{I.2.5.14})$$

le equazioni (I.2.5.5) e (I.2.5.6) diventano

$$\frac{d}{dt} M_v = S_i W_{vi} - S_i W_{vu} - W_{dw} + W_{up} + W_B \quad (\text{I.2.5.15})$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(M_v H_v \right) - \mathcal{V}_v \frac{dp}{dt} = S_i W_{vi} H_{vi} - S_i W_{vu} H_{vu} \\ & - W_{dw} H_{ls} + W_{up} H_{vs} + W_D \left(H_D - H_{ls} \right) \\ & - Q_v + W_B H_{vs} \end{aligned} \quad (\text{I.2.5.16})$$

Se

$$H_v \geq H_{vs}$$

per le (I.2.5.7), (I.2.5.8), (I.2.5.11) e (I.2.5.13) bisogna che la massa di liquido nella zona "gassosa" M_{vl} sia nulla e di conseguenza deve essere nulla anche W_{dw} .

Se

$$H_v < H_{vs}$$

c'è una massa di liquido sotto forma di goccioline distribuite nella zona gassosa, che per le (I.2.5.7), (I.2.5.8), (I.2.5.12) e (I.2.5.13) deve valere

$$M_{vl} = M_v \frac{H_{vs} - H_v}{H_{vs} - H_{ls}} \quad (\text{I.2.5.17})$$

Alla portata W_{dw} di liquido che sotto forma di goccioline passa dalla zona "gassosa" alla zona "liquida" si può attribuire una espressione data dal prodotto di tre fattori.

- Velocità media di caduta delle goccioline V_{dw}
- Sezione media orizzontale della zona "gassosa" \bar{A}_v
- Densità media del liquido nella zona "gassosa", definita come il rapporto M_{vl} / V_v

È quindi

$$W_{dw} = V_{dw} \bar{A}_v \frac{M_{vl}}{V_v} = \frac{M_{vl}}{\tau_{dv}} \quad (\text{I.2.5.18})$$

dove

$$\tau_{dv} = \frac{V_v}{\bar{A}_v V_{dw}} \quad (\text{I.2.5.19})$$

esprime il tempo medio di caduta delle goccioline di liquido dalla zona "gassosa" alla zona "liquida".

Seguendo un procedimento perfettamente analogo a quello utilizzato per determinare le equazioni di conservazione della massa e dell'energia per il fluido nella zona "gassosa" si possono ottenere le stesse equazioni per la zona "liquida".

$$\frac{d}{dt} (M_{ll} + M_{lv}) = S_i W_{li} - S_i W_{lu} + W_{dw} - W_{up} + W_D \quad (\text{I.2.5.20})$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (M_{ll} H_{ll} + M_{lv} H_{lv}) - (V_{ll} + V_{lv}) \frac{dp}{dt} \\ &= S_i W_{li} H_{li} - S_i W_{lu} H_{lu} - W_{up} H_{lv} + W_{dw} H_{vl} + W_D H_{vl} + W_B (H_B - H_{lv}) - Q_{ll} - Q_{lv} \end{aligned} \quad (\text{I.2.5.21})$$

Poichè per definizione è

$$M_l = M_{ll} + M_{lv} \quad (\text{I.2.5.22})$$

$$M_l H_l = M_{ll} H_{ll} + M_{lv} H_{lv} \quad (\text{I.2.5.23})$$

$$Q_l = Q_{ll} + Q_{lv} \quad (\text{I.2.5.24})$$

$$\mathcal{V}_l = \mathcal{V}_{ll} + V_{lv} \quad (\text{I.2.5.25})$$

e oltre alle (I.2.5.13) e (I.2.5.14), si impone che sia

$$H_{ll} = H_l \quad \text{se} \quad H_l < H_{ls} \quad (\text{I.2.5.26})$$

$$H_{ll} = H_{ls} \quad \text{se} \quad H_l \geq H_{ls} \quad (\text{I.2.5.27})$$

le equazioni (I.2.5.20) e (I.2.5.21) diventano

$$\frac{d}{dt} M_l = \sum_i W_{li} - \sum_i W_{lu} + W_{dw} - W_{up} + W_D \quad (\text{I.2.5.28})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (M_l H_l) - \mathcal{V}_l \frac{dp}{dt} &= \sum_i W_{li} H_{li} - \sum_i W_{lu} H_{ll} \\ &\quad - W_{up} H_{vs} + W_{dw} H_{ls} + W_D H_{ls} \\ &\quad + W_B (H_B - H_{vs}) - Q_l \end{aligned} \quad (\text{I.2.5.29})$$

Se

$$H_l \leq H_{ls}$$

per le (I.2.5.22), (I.2.5.23) e (I.2.5.26) la massa di vapore M_{lv} nella zona liquida deve essere nulla, quindi è

$$W_{up} = 0$$

Se

$$H_l > H_{ls}$$

nella zona "liquida" si ha una massa di vapore sotto forma di bolle, che per le (I.2.5.22), (I.2.5.23) e (I.2.5.27) ed essendo

$$H_{lv} = H_{vs}$$

vale

$$M_{lv} = M_l \frac{H_l - H_{ls}}{H_{vs} - H_{ls}} \quad (\text{I.2.5.30})$$

Alla portata di vaporre W_{up} che sotto forma di bolle passa dalla zona "liquida" alla zona "gassosa" si può attribuire una espressione costituita dal prodotto di tre fattori:

- Velocità media di risalita delle bolle di vapore V_{up}
- Sezione media orizzontale della zona "liquida" \bar{A}_l

Densità media del vapore nella zona "liquida", definita come rapporto M_{lv} / \mathcal{V}_l

È quindi

$$W_{up} = V_{up} \bar{A}_l \frac{M_{lv}}{\mathcal{V}_l} = \frac{M_{lv}}{\tau_{up}} S \quad (\text{I.2.5.31})$$

dove

$$\tau_{up} = \frac{\mathcal{V}_l}{\bar{A}_l V_{up}} \quad (\text{I.2.5.32})$$

esprime il tempo medio di risalita delle bolle di vapore dalla zona "liquida".

Le equazioni di conservazione dell'energia (I.2.5.16), relativa alla zona "gassosa", e (I.2.5.29), relativa alla zona "liquida", possono essere poste in altre forme, in base alle (I.2.3.20), (I.2.3.21) (I.2.3.26), mettendo in evidenza l'entropia della zona "gassosa" e notando che per quanto detto alla fine del par. I.2.4 è $H_{lu} = H_l$ e $H_{vu} = H_v$.

$$\begin{aligned} T_v M_v \frac{dS_v}{dt} &= S_i W_{vi} (H_{vi} - H_v) \\ &\quad - W_{dw} (H_{ls} - H_v) + W_{up} (H_{vs} - H_v) + W_B (H_{vs} - H_v) \quad (\text{I.2.5.33}) \\ &\quad + W_D (H_D - H_{ls}) - Q_v \end{aligned}$$

e quella della zona "liquida"

$$\begin{aligned} T_l M_l \frac{dS_l}{dt} &= S_i W_{li} (H_{li} - H_l) \\ &\quad + W_{dw} (H_{ls} - H_l) - W_{up} (H_{vs} - H_l) + W_B (H_B - H_{vs}) \quad (\text{I.2.5.34}) \\ &\quad + W_D (H_{ls} - H_l) - Q_l \end{aligned}$$

Fra le portate di fluido che compaiono nel modello sono state considerate anche una portata di liquido W_D iniettata nella zona "gassosa" ed una portata di vapore W_B iniettata nella zona "liquida". Si ipotizza che tali portate attraversino la zona nella quale sono state iniettate senza cambiare fase e che la loro superficie di scambio termico con il fluido della zona sia infinita; durante il transito nella zona di iniezione esse raggiungono quindi la temperatura di saturazione della loro fase.

Tali portate sono state prese in considerazione per poter utilizzare lo stesso modello matematico per la simulazione di componenti d'impianto diversi.

Ad esempio in un pressurizzatore W_D rappresenta la portata di "spray", in un degasatore quella che tracima dai piatti, cioè l'intera portata di alimento, mentre in un corpo cilindrico W_B rappresenta la portata in fase vapore proveniente dai "riser".

I termini Q_v e Q_l rappresentano gli scambi di potenza fra il fluido rispettivamente nella zona "gassosa" e "liquida" e ciò che confina con la zona stessa.

Essi devono quindi essere ulteriormente specificati nel modello di ciascun componente; in generale essi comprenderanno sempre la potenza scambiata con la parte delle pareti del contenitore confinante con la zona stessa e la potenza scambiata fra la zona "gassosa" e "liquida" nel caso in cui esse si trovino a differenti temperature. In particolare ad esempio nel modello del condensatore in Q_v sarà inclusa la potenza scambiata dal fluido nella cavità con le pareti del fascio tubiero, in quello del pressurizzatore Q_l comprenderà la potenza delle serpentine di riscaldamento ecc.

Vi sono alcuni tipi di cavità per le quali l'ipotesi che la pressione sia la stessa in tutta la cavità è assai poco realistica. Tale ipotesi infatti può essere sempre ritenuta valida per le zone occupate da vapore, mentre per le zone occupate da liquido essa lo è solo quando le differenze di pressione all'interno della zona dovute al battente del liquido sono piccole rispetto al valore della pressione media nella cavità.

Un esempio tipico del caso nel quale l'ipotesi dell'uniformità della pressione cade in difetto è costituito dal condensatore, nel quale la pressione sul fondo può avere un valore anche doppio di quello della pressione nella zona occupata dal vapore.

In un caso quale quello sopra citato l'ipotizzare la pressione uniforme nella cavità comporterebbe grossi errori soprattutto nel calcolo della quantità di vapore generata per "flash" nel caso di una depressurizzazione.

Per tener conto, sia pur in maniera approssimata, della disuniformità della pressione nella zona "liquida", il modello matematico presentato in questo paragrafo può essere modificato come segue.

Le ipotesi riguardanti l'uniformità della pressione in tutta la cavità e dell'entalpia in ognuna delle due zone sono ancora ritenute valide, però per il calcolo della densità della zona liquida si fa riferimento alla pressione locale, calcolata tenendo conto del battente di liquido secondo l'espressione

$$p(z) = \bar{p} + \int_z^y g \rho(z') dz' \quad (\text{I.2.5.35})$$

dove z' è la variabile corrente, y è il livello del liquido nella cavità, definito come quota, rispetto al fondo della cavità, della superficie d'interfaccia fra la zona "liquida" e la zona "gassosa", z è la quota alla quale la pressione p viene calcolata e \bar{p} è la pressione media nella cavità, identificata con la pressione nella zona "gassosa".

Poichè è

$$\rho(z) = \rho(H_l, p(z)) \quad (\text{I.2.5.36})$$

dove H_l è l'entalpia della zona "liquida", il legame fra la pressione e la quota fornito dalla (I.2.5.35) è implicito. Ovviamente la dipendenza della densità dalla pressione è trascurabile ove si ha la presenza di fluido monofase allo stato liquido, mentre è molto forte dove è presente fluido bifase, per il quale è

$$\rho = \frac{1}{(1 - X) \frac{1}{\rho_{ls}(p)} + \frac{X}{\rho_{vs}(p)}} \quad (\text{I.2.5.37})$$

ed il titolo X è

$$X = \frac{H_l - H_{ls}(p)}{H_{vs}(p) - H_{ls}(p)} \quad (\text{I.2.5.38})$$

Noto X è possibile calcolare la massa di bolle di vapore contenute nella zona liquida M_{lv} , che compare nella equazione (I.2.5.31), la quale vale

$$M_{lv} = \int_0^y X \rho A(z) dz \quad (\text{I.2.5.39})$$

dove $A(z)$ è l'area della sezione orizzontale della cavità alla quota z .

Nella pratica il sistema costituito dalle equazioni (I.2.5.35), (I.2.5.37) e (I.2.5.38) viene risolto suddividendo la zona "liquida" in più zone sovrapposte di piccolo spessore, a ciascuna delle quali viene attribuita la pressione corrispondente alla quota dell'interfaccia con la zona sovrastante.

La densità ρ viene calcolata ponendo

$$\rho \approx \rho_{ls} \quad (\text{I.2.5.40})$$

approssimazione lecita per titoli molto piccoli.

In tale maniera è possibile calcolare in sequenza la pressione ed il titolo di ogni zona, quindi la massa totale di vapore nella zona "liquida".

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.2.6

Scambi termici caratteristici della cavità.

Per il calcolo delle potenze scambiate fra il fluido nella cavità e le zone circostanti non possono in generale essere utilizzate le correlazioni di scambio termico illustrate nel par. (I.1.6.2), che si riferiscono a situazioni tipiche del moto del fluido in un condotto, mentre nel caso della cavità si è in presenza di fluido quasi fermo.

Una situazione tipica di scambio termico all'interno di una cavità è quella dello scambio termico fra un vapore che sta condensando e le pareti di un fascio tubiero percorso dal fluido di raffreddamento.

Normalmente in tale situazione si forma un film continuo di condensato sulla superficie raffreddata; il vapore si condensa su tale film e la resistenza termica di quest'ultimo è quella che determina l'entità dello scambio termico.

Nusselt ha studiato tale fenomeno sia per condensazione su superfici verticali che orizzontali (3),(4). In particolare per un insieme di N_f tubi orizzontali di lunghezza l vale la relazione

$$\frac{h_c D_e}{k_f} = 0.725 \left[\frac{\bar{H}'_{vl} \rho_{ls}^2 g}{N_f k_f \mu_f \Delta T_l} \right]^{0.25} l D_e^{0.75} \quad (\text{I.2.6.1})$$

nella quale ΔT_l è la differenza di temperatura media sul tratto di lunghezza l fra il fluido condensante e la parete del fascio tubiero, D_e è il diametro esterno equivalente del fascio tubiero, k_f e μ_f sono la conducibilità termica e la viscosità del film liquido, h_c è il coefficiente di scambio termico medio e \bar{H}'_{vl} è il calore latente di evaporazione corretto secondo la seguente espressione

$$\bar{H}'_{vl} = \bar{H}_{vl} \left[1 + 0.68 \frac{C_{pl} \Delta T_l}{\bar{H}_{vl}} \right] \quad (\text{I.2.6.2})$$

dovuta a Rohsenow.

Quando, come sempre accade in cavità contenenti una miscela bifase, si ha una superficie d'interfaccia fra un liquido ed il suo vapore avvengono in corrispondenza di tale superficie scambi di massa fra le due fasi. Il bilancio di tale scambio è globalmente nullo in condizioni di equilibrio, mentre in transitorio il risultato è un trasferimento di energia attraverso l'interfaccia.

Il più semplice approccio a tale problema è basato sulla teoria cinetica dei gas, che porta alle seguenti formulazioni per il coefficiente di scambio termico d'interfaccia h_{int}

$$h_{int} = \bar{H}_{vl} \left(\frac{M_m}{2 \pi R_g} \right)^{1/2} \left(\frac{p_v}{T_v^{1/2}} - \frac{p_l}{T_l^{1/2}} \right) \quad (\text{I.2.6.3})$$

dove M_m è il peso molecolare ed R_g la costante universale dei gas. Quando le condizioni del fluido non sono quelle di equilibrio, non è corretto introdurre nella (I.2.6.3) le condizioni del fluido medie della relativa fase invece di quelle effettive di ciascuna fase all'interfaccia. Nonostante ciò la (I.2.6.3) viene utilizzata in tale modo facendo ricorso a un fattore correttivo. Ad esempio la (I.2.6.3) viene moltiplicata da Silver per un fattore f , denominato

"frazione di condensazione per scambio molecolare", che per l'acqua nelle condizioni tipiche di funzionamento di un condensatore vale 0.036; in tal modo si ottengono i seguenti valori del coefficiente di scambio termico interfacciale h_{int}

Coefficiente di scambio termico interfacciale (Silver)

Temperatura del condensatore	°F °C	80 26.7	82 27.8	84 28.9	86 30	88 31.1
Pressione del condensatore	psia k Pa	0.5069 3.49	0.5410 3.73	0.5771 3.97	0.6152 4.24	0.6556 4.51
Coefficiente di scambio termico	Btu/h.ft ² °F kW/m ² °C	3420 19.4	3600 20.4	3800 21.6	4000 22.7	4220 24.0

Temperatura del condensatore	°F °C	90 32.2	92 33.3	94 34.4	96 35.5
Pressione del condensatore	psia k Pa	0.6982 4.81	0.7432 5.12	0.7906 5.44	0.8407 5.79
Coefficiente di scambio termico	Btu/h.ft ² °F kW/m ² °C	4450 25.3	4680 26.6	4920 27.9	5180 29.4

I.2.7

Calcolo del livello del liquido in una cavità occupata da fluido bifase.

Quando una cavità è occupata da fluido bifase normalmente la fase gassosa e quella liquida si separano per effetto della differenza di densità. Di conseguenza la zona "gassosa" e "liquida" alle quali si è fatto riferimento sono di solito sovrapposte ed il livello viene definito come la quota della superficie di separazione fra le zone stesse.

In realtà la misura del livello di solito viene effettuata tramite una misura di pressione differenziale. L'apparecchiatura di misura è costituita in linea di principio da una tubazione verticale, piena d'acqua ad una temperatura costante nota, la quale comunica superiormente con la cavità ed inferiormente con un misuratore di pressione differenziale, il cui altro ingresso risente della pressione nella cavità alla stessa quota dell'estremità inferiore della tubazione verticale. Poiché all'estremità superiore della colonna del liquido di riferimento la pressione è quella nella cavità alla stessa quota, la differenza di pressione Δp_m rilevata dal misuratore è

$$\Delta p_m = g \left[(z_s - z_i) \rho_{rif} - \int_{z_i}^{z_s} \rho_m dz \right] \quad (\text{I.2.7.1})$$

dove i simboli hanno il significato

z_s quota dell'estremità superiore della colonna.

z_i quota dell'estremità inferiore della colonna

ρ_{rif} densità dell'acqua nella colonna

ρ_m densità del fluido nella cavità alla quota z definita, secondo la (I.1.3.8.4), come

$$\rho_m = (1 - \alpha) \rho_l + \alpha \rho_v$$

Se si ipotizza che le fasi siano completamente separate da una superficie di interfaccia che si trova alla quota y_m * e si suppone che fra le quote z_s e z_i le densità di ciascuna fase non varino con la quota la (I.2.7.1) diventa

$$\Delta p = g \left[(z_s - z_i) \rho_{rif} - (z_s - y_m) \rho_v - (y_m - z_i) \rho_l \right] \quad (\text{I.2.7.2})$$

la quale stabilisce un legame fra y_m , che può essere definito come livello misurato, ed il valore della pressione differenziale

$$y_m = \left[z_i \rho_l - z_s \rho_v + (z_s - z_i) \rho_{rif} - \frac{\Delta p}{g} \right] \frac{1}{\rho_l - \rho_v} \quad (\text{I.2.7.3})$$

* Che equivale a porre $\alpha(z) = 0$ per $z_i \leq z \leq y_m$

e $\alpha(z) = 1$ per $y_m < z \leq z_s$

Nella realtà le fasi spesso non sono completamente separate. Nel condensatore di vapore, ad esempio, nella zona gassosa si ha normalmente la presenza delle gocce dovute alla condensazione del vapore, e nella zona liquida, che è quella di interesse nella presente trattazione, in transitorio si può avere la presenza di bolle di vapore per "flash". La metodologia di misura del livello sopra descritta fornisce comunque un valore di livello misurato y_m , che è quello che si avrebbe se le fasi fossero completamente separate, e che è sempre lo stesso, indipendentemente dalla reale distribuzione del grado di vuoto α in funzione della quota z per tutte le situazioni nelle quali il termine

$$\int_{z_i}^{z_s} \rho_m \, dz$$

assume lo stesso valore, quindi, nell'ipotesi che nel campo di misura ρ_v e ρ_l siano costanti con z , per tutte le distribuzioni delle fasi che forniscono lo stesso valore di

$$\int_{z_i}^{z_s} \alpha(z) \, dz$$

Nella trattazione della cavità si devono quindi tenere in considerazione due livelli, il livello y definito come la quota della superficie d'interfaccia fra le zone "liquida" e "gassosa", che determina la composizione fisica delle portate di fluido uscente dalla cavità, ed è ovviamente tale che sia

$$M_l = \int_0^y \rho A \, dz \quad (\text{I.2.7.4})$$

ed il livello misurato y_m , il cui valore è quello rilevato dalla strumentazione ed inviato alle catene di regolazione.

I.3**LA TRASMISSIONE DEL CALORE NELLE PARETI DELLE TUBAZIONI****I.3.1****Equazione di conservazione dell'energia per le pareti metalliche di una tubazione contenente fluido**

Gli scambi di calore tra corpi o parti di uno stesso corpo possono avvenire per conduzione, convezione o irraggiamento.

Gli scambi per conduzione si producono in corpi a temperatura non uniforme senza movimento relativo delle parti interessate.

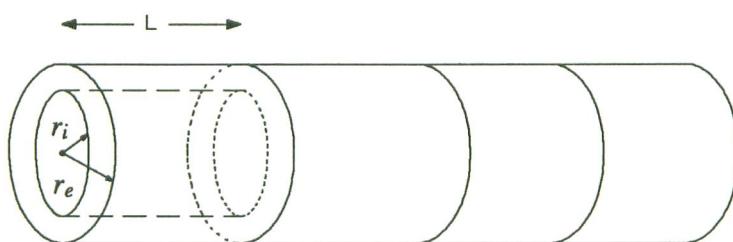
Negli scambi per convezione, per esempio tra un liquido e un solido, interviene il moto relativo delle diverse parti in questione.

Infine negli scambi per irraggiamento c'è trasformazione dell'energia interna dei corpi in energia radiante il cui trasporto non necessita di supporto materiale, e successivamente conversione dell'energia trasportata in energia interna dei corpi riceventi.

Qui ci occupiamo dello scambio per conduzione applicato al caso particolare delle pareti delle tubazioni contenenti un fluido.

La legge base è quella di Fourier secondo la quale il flusso di calore \vec{q} per unità di superficie in un punto di un corpo a temperatura non uniforme T_m è proporzionale al gradiente di temperatura in quel punto.

Per una tubazione contenente fluido, si usa spesso assumere celle longitudinali di metallo di lunghezza L pari a quelle usate per il fluido



Si suppone normalmente che i flussi di calore nel metallo in direzione radiale, cioè da o verso il fluido, siano talmente preponderanti rispetto ai flussi longitudinali da poter trascurare questi ultimi.

In tal caso, per ogni cella longitudinale, la temperatura del metallo, supposto anche omogeneo e isotropo, varia solo radialmente e si può assumere una sola temperatura longitudinale rappresentativa. Ciò significa che, nonostante ogni cella possa avere una temperatura diversa, si ammette che il flusso tra una cella e l'altra sia trascurabile.

Deduciamo l'equazione a cui soddisfa la temperatura del metallo di ogni cella $T_m(t, r)$. Tenendo anche conto che, per il secondo principio della termodinamica, il calore fluisce nel senso delle temperature decrescenti, la legge di Fourier si scrive:

$$\vec{q} = -\lambda_m \operatorname{grad} T_m \quad (\text{I.3.1.1})$$

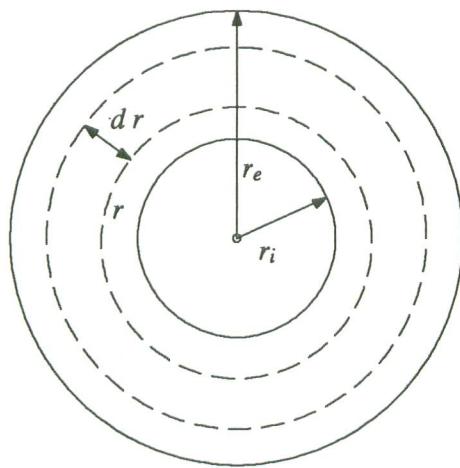
Il parametro λ_m è chiamato conducibilità termica (in W/mK).

Per i gas, la conducibilità cresce con la temperatura ed è indipendente dalla pressione per intervalli abbastanza larghi.

Per i liquidi decresce all'aumentare della temperatura ed è indipendente dalla pressione.

Per i metalli diminuisce lentamente all'aumentare della temperatura e non dipende dalla pressione.

Per una cella di tubazione cilindrica a sezione circolare, consideriamo allora un elemento di metallo costituito da un cilindro di altezza L , di raggio r e spessore dr .



il calore totale che entra dalla faccia interna dell'elemento nell'unità di tempo è

$$Q(r) = 2\pi r L q(r) \quad (\text{I.3.1.2})$$

quello che esce dalla faccia esterna è:

$$Q(r + dr) = 2\pi (r + dr) L q(r + dr) \quad (\text{I.3.1.3})$$

Se C_m è il calore specifico del metallo e ρ_m la sua densità, la variazione d'energia interna E nell'unità di tempo all'interno dell'elemento di metallo è:

$$\frac{dE}{dt} = 2\pi r dr L \frac{\partial \rho_m C_m T_m}{\partial t} \quad (\text{I.3.1.4})$$

e per il principio di conservazione dell'energia

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.3.2 Equazione di conservazione dell'energia per le pareti metalliche di una tubazione in regime stazionario.

Risolviamo ora l'equazione (I.3.1.9) con le condizioni al contorno (I.3.1.10) in regime stazionario:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\lambda_m r \frac{dT_m}{dr} \right) = 0 \quad (\text{I.3.2.1})$$

da cui

$$\lambda_m r \frac{dT_m}{dr} = C_1 \quad (C_1 = \text{cost}) \quad (\text{I.3.2.2})$$

Dette Q_E e Q_i le potenze scambiate attraverso le pareti esterna e interna del tubo, a regime esse sono uguali, e denotiamo con \bar{Q} il loro valore

$$Q_E = Q_i = \bar{Q} \quad (\text{I.3.2.3})$$

Le (I.3.1.10) allora danno

$$-\frac{1}{r_e} C_1 = -\frac{\bar{Q}}{2\pi r_e L} \quad (\text{I.3.2.4})$$

Si è assunto come positivo il flusso che entra dalla superficie esterna del metallo.

Da cui

$$C_1 = \frac{\bar{Q}}{2\pi L} \quad (\text{I.3.2.5})$$

Dalla (I.3.2.2) e usando la (I.3.2.5)

$$T_m(r) = \frac{\bar{Q}}{2\pi \lambda_m L} \log r + C_2 \quad (C_2 = \text{cost}) \quad (\text{I.3.2.6})$$

Dette T_{me}/T_{mi} le temperature della superficie esterna/interna del tubo:

$$T_m(r_e) = T_{me} = \frac{\bar{Q}}{2\pi \lambda_m L} \log r_e + C_2 \quad (\text{I.3.2.7})$$

ricavando C_2 dalla (I.3.2.7) e risolvendo la (I.3.2.6) per $r = r_i$ si perviene all'espressione della potenza termica attraverso il metallo in regime stazionario in funzione del salto di temperatura tra la superficie interna ed esterna dello stesso

$$\boxed{\bar{Q} = Q_E = Q_i = \frac{1}{R_m} (T_{me} - T_{mi}) \quad R_m = \frac{\log \frac{r_e}{r_i}}{2\pi L \lambda_m}}$$

(I.3.2.8)

essendo R_m la resistenza termica del metallo, mentre per il generico r :

$$T_m(r) = T_{mi} + \frac{\bar{Q}}{2\pi \lambda_m L} \log \frac{r}{r_i} \quad (I.3.2.9)$$

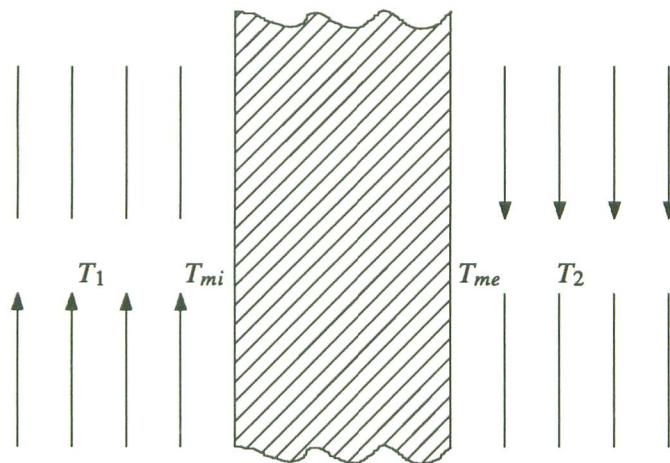
e sostituendo il valore di \bar{Q} dato dalla (I.3.2.8):

$$\boxed{T_m(r) = T_{mi} + \frac{T_{me} - T_{mi}}{\log \frac{r_e}{r_i}} \log \frac{r}{r_i}} \quad (I.3.2.10)$$

I.3.3.

Trasferimento di calore tra due fluidi attraverso una parete in regime stazionario

Questo è il caso di uno scambiatore di calore dove lo scambio comporta un trasferimento di calore per conduzione attraverso la parete e due trasferimenti per convezione.



Se T_2 e T_1 sono le temperature dei due fluidi con $T_2 > T_1$, allora, per la cella di lunghezza L :

$$Q_E = \bar{Q} = \frac{1}{R_2} (T_2 - T_{me}) \quad (\text{I.3.3.1})$$

$$Q_i = \bar{Q} = \frac{1}{R_1} (T_{mi} - T_1) \quad (\text{I.3.3.2})$$

con

$$R_1 = 1/2 \pi r_i L \gamma_i \quad \text{e} \quad R_2 = 1/2 \pi r_e L \gamma_2 \quad (\text{I.3.3.3})$$

deve γ_1/γ_2 sono i coefficienti di scambio metallo-fluido 1/ metallo-fluido 2 (in $\text{W} / \text{m}^2 / \text{K}$). Eliminando T_{me} e T_{mi} tra le (I.3.2.8), (I.3.3.1) e (I.3.3.2) si ottiene:

$$\bar{Q} = \frac{1}{R_1 + R_2 + R_m} (T_2 - T_1) \quad (\text{I.3.3.4})$$

Se si vedono R_1, R_2, R_m come resistenze al passaggio di calore tra metallo e fluido 1, metallo e fluido 2 e internamente al metallo rispettivamente, la (I.3.3.4) esprime il fatto che la resistenza totale al passaggio di calore tra il fluido 1 e 2 è la somma delle resistenze. Se poi lo spessore ε del metallo è piccolo a fronte del raggio interno del tubo in modo tale che si possa arrestare al primo ordine lo sviluppo in serie di:

$$\log \frac{r_e}{r_i} = \log \left(1 + \frac{\varepsilon}{r_i} \right) \approx \frac{\varepsilon}{r_i} \quad (I.3.3.5)$$

la (I.3.3.4) si approssima con:

$$\boxed{\bar{Q} = S \frac{1}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda_m}} (T_2 - T_1)} \quad (I.3.3.6)$$

dove

$$S = 2 \pi r_i L \approx 2 \pi r_e L$$

è la superficie laterale della cella.

I.3.4

Modello dinamico semplificato di parete metallica di una tubazione cilindrica

Per ogni cella, e nell'approssimazione di trascurare la conduzione longitudinale del calore, il modello esatto di parete metallica di una tubazione cilindrica è quello costituito dall'equazione (I.3.1.9) con le sue condizioni al contorno (I.3.1.10).

Per la sua soluzione corretta occorrerebbe dividere il metallo in un certo numero n_r di celle radiali, cioè dividere lo spessore del metallo in n_r corone circolari.

Per tubazioni costituite da metallo di spessore relativamente sottile, un modello semplificato accettabile è costituito dall'assumere un'unica cella di spessore pari a quello del tubo.

In questo caso si può scegliere come definizione di temperatura media radiale \bar{T}_m in regime transitorio quella stessa che fa riferimento al profilo di temperatura nello spessore del metallo valido a regime e dato dalla (I.3.2.10) cioè:

$$\bar{T}_m = \frac{1}{\pi \left(r_e^2 - r_i^2 \right)} \int_{r_i}^{r_e} \left[T_{mi} + \frac{T_{me} - T_{mi}}{\log \frac{r_e}{r_i}} \log \frac{r}{r_i} \right] 2\pi r dr \quad (\text{I.3.4.1})$$

eseguendo l'integrale (usando l'integrazione per parti) si ottiene:

$$\bar{T}_m = (1 - \beta) T_{mi} + \beta T_{me} \quad (\text{I.3.4.2})$$

con

$$\beta = \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} - \frac{1}{2 \log \frac{r_e}{r_i}} ;$$

per tubazioni usuali $\beta \approx 0.5$, cioè la media si avvicina a quella aritmetica.

Per trovare il raggio della circonferenza sulla quale si può pensare localizzata \bar{T}_m basta cercare il valore di r , denotato \bar{r} , per il quale la T_m data dalla (I.3.4.2) coincide con $T_m(\bar{r})$ data dalla (I.3.2.10). Si trova che:

$$\log \frac{\bar{r}}{r_i} = \beta \log \frac{r_e}{r_i} \quad (\text{I.3.4.3})$$

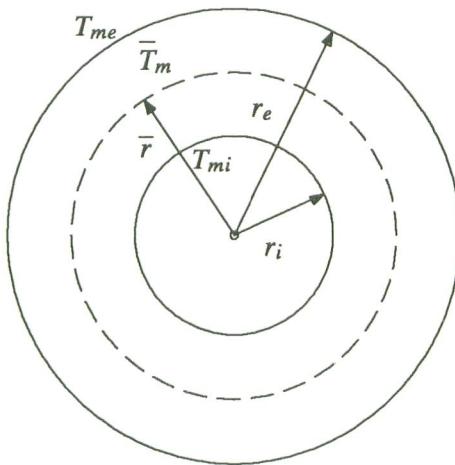
da cui anche

$$\log \frac{r_e}{\bar{r}} = (1 - \beta) \log \frac{r_e}{r_i} \quad (\text{I.3.4.4})$$

Applicando il principio di conservazione dell'energia nella forma (I.3.1.5) all'unica cella radiale si ha:

$$\pi (r_e^2 - r_i^2) L \rho_m C_m \frac{d \bar{T}_m}{d t} = Q_E - Q_i \quad (\text{I.3.4.5})$$

e dividendo la sezione del metallo in due corone individuate dal raggio \bar{r}



applicando per ciascuna semicella la formula (I.3.2.8) estendendone la validità anche in transitorio e utilizzando le (I.3.4.3) e (I.3.4.4) si ha:

$$Q_E = \frac{2 \pi L \lambda_m}{(1 - \beta) \log \frac{r_e}{r_i}} (T_{me} - \bar{T}_m) \quad (\text{I.3.4.6})$$

$$Q_i = \frac{2 \pi L \lambda_m}{\beta \log \frac{r_e}{r_i}} (\bar{T}_m - T_{mi}) \quad (\text{I.3.4.7})$$

Notiamo che \bar{T}_m , T_{me} e T_{mi} che compaiono in queste due formule non sono più legate dalla relazione di regime (I.3.4.2) ma T_{me} e T_{mi} sono determinate dagli scambi tra metallo e fluidi. Precisamente, nel caso di uno scambiatore si ha (usando le notazioni del par. I.3.3):

$$\frac{Q_E}{2 \pi r_e L} = \gamma_2 (T_2 - T_{me}) \quad (\text{I.3.4.8})$$

$$\frac{Q_i}{2 \pi r_i L} = \gamma_1 (T_{m,i} - T_1) \quad (\text{I.3.4.9})$$

Accoppiando, per ogni cella, le equazioni di conservazione dei fluidi 1 e 2 alle equazioni del metallo (I.3.4.5) fino alla (I.3.4.9) il sistema risultante è quadrato e si può risolvere.

Concettualmente si può anche pensare di esprimere Q_E e Q_i in funzione di T_m , T_1 e T_2 sfruttando le (I.3.4.6) fino alla (I.3.4.9) e sostituendo le espressioni ottenute in (I.3.4.5) si ottiene una equazione differenziale in T_m avente come ingressi le temperature dei fluidi T_1 e T_2 .

Notiamo infine che ρ_m , C_m , λ_m dipendono in generale dalla temperatura T_m , ma nella pratica corrente, dopo aver eseguito la discretizzazione rispetto al tempo, questi parametri vengono aggiornati con un passo di tempo di ritardo rispetto a T_m , cioè usando il valore T_m del passo di tempo precedente.

Questo è lecito nella misura in cui la dipendenza dei parametri suddetti dalla temperatura è relativamente blanda.

Pagina lasciata intenzionalmente bianca

I.4

I METODI NUMERICI USATI NEL CODICE LEGO

I.4.1

Generalità

In generale il modello matematico di un impianto termico è descritto da un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che ne traducono la dinamica. Esse vengono discretizzate spazialmente dando origine ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie. È necessario verificare che le equazioni discretizzate siano consistenti con le equazioni di partenza, cioè che queste ultime possano essere ottenute dalle equazioni discretizzate facendo tendere a zero l'intervallo di discretizzazione spaziale.

Nella grande maggioranza dei casi il sistema di equazioni differenziali ordinari ottenuto con la discretizzazione spaziale può essere rimpiazzato, eventualmente ricorrendo a variabili aggiuntive, da un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine che, in forma normale, risulta essere:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \quad (I.4.1.1)$$

con

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Definito "Stato" di un sistema dinamico un qualunque insieme completo indipendente di variabili del modello del sistema la conoscenza delle quali permette di prevedere completamente il futuro comportamento del sistema, il vettore x rappresenta gli stati del sistema e le sue componenti prendono il nome di variabili di stato. Le variabili u_1, \dots, u_r sono gli ingressi del sistema.

Qualora alcune equazioni del sistema (I.4.1.1) descrivano fenomeni caratterizzati da costanti di tempo così piccole che la loro dinamica risulta di interesse trascurabile, la parte destra delle suddette equazioni viene egualata a zero, dando origine ed equazioni algebriche. Ovviamente le variabili che non compaiono mai sotto il segno di derivata non sono più variabili di stato e potrebbero essere eliminate dal sistema per sostituzione. Può però esser utile conoscerne il valore, ad esempio perchè esse corrispondono a grandezze fisicamente osservabili. In tal caso esse vengono indicate con il simbolo v , e sono denominate variabili intermedie o di uscita.

In definitiva quindi il modello del sistema dinamico è costituito da un sistema di equazioni algebriche-differenziali della forma

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; v_1, v_2, \dots, v_m; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \quad i = 1, \dots, n \quad (I.4.1.2)$$

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n; v_1, v_2, \dots, v_m; u_1, u_2, \dots, u_r, t) = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{I.4.1.3})$$

Nel paragrafo I.4.2 verranno date alcune informazioni relative ai metodi di soluzione numerica di sistemi di equazioni differenziali ordinarie, nel paragrafo I.4.3 si descriverà il metodo utilizzato nel codice LEGO per la soluzione del sistema di equazioni algebrico-differenziali costituenti il modello matematico d'impianto. Infine nel paragrafo I.4.4 verrà descritta una tecnica che permette una sensibile riduzione dei tempi di calcolo.

I.4.2

Richiami di alcune nozioni di calcolo numerico per la risoluzione di equazioni differenziali.

Nel presente paragrafo vengono date alcune definizioni di grandezze utilizzate nel campo dell'analisi numerica e vengono ricordate alcune proprietà che un metodo per la soluzione numerica di sistemi di equazioni differenziali deve avere, con particolare riguardo al metodo risolutivo utilizzato nel codice LEGO.

Anche se in realtà si dovrà sempre risolvere un sistema di equazioni differenziali, per gli scopi della presente trattazione si è ritenuto sufficiente affrontare il problema della soluzione numerica di una sola equazione differenziale del primo ordine, tenendo presente che i risultati così ottenuti si estendono molto facilmente al caso di un sistema di più equazioni. Il problema affrontato è quindi quello della soluzione dell'equazione.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x) \quad (\text{I.4.2.1})$$

con la condizione iniziale $x(0) = x_0$

Si consideri lo schema di integrazione numerico consistente nell'approssimare, nell'intervallo di tempo Δt fra t_n e t_{n+1} , il valore della derivata con quello del suo rapporto incrementale ed il valore della funzione con una opportuna combinazione lineare tra i suoi valori in t_n ed in t_{n+1} , indicati rispettivamente con x_n e x_{n+1}

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = (1 - \varepsilon) f(x_n) + \varepsilon f(x_{n+1}) \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1 \quad (\text{I.4.2.2})$$

Tale schema di integrazione consente di ricavare per ogni intervallo di tempo Δt il valore x_{n+1} , noti x_n ed $f(x_n)$.

Uno schema di tale genere prende il nome di schema esplicito quando richiede la valutazione della funzione integranda solo all'istante iniziale dell'intervallo di integrazione, quindi a partire da valori già noti, di schema implicito quando la funzione integranda deve essere valutata anche alla fine del passo.

Si ha quindi

per $\varepsilon = 0$ schema esplicito

per $\varepsilon > 0$ schema implicito

Il metodo (I.4.2.2) è un caso particolare del metodo più generale.

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j x_{n-(k-1)+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k b_j f_{n-(k-1)+j} \quad a_k \neq 0 \quad (\text{I.4.2.3})$$

Si noti che il metodo (I.4.2.3) è implicito se $b_k \neq 0$.

Il metodo (I.4.2.3) è denominato "metodo k-step"; in particolare se è $k = 1$ tali metodi vengono chiamati "metodi one-step", se è $k > 1$ "metodi multi-step".

I metodi "multi-step" presentano l'inconveniente di non poter essere utilizzati nei primi $k - 1$ passi d'integrazione se non ricorrendo ad una stima di valori di x_{-1}, \dots, x_{-k+1} o all'utilizzo, nei primi passi, di un metodo che non richieda la conoscenza di tali valori, in altre parole essi non sono "self starting" e ciò costituisce un limite al loro utilizzo.

Le considerazioni fatte nel seguito, anche se sono quasi sempre di validità generale, sono in particolare riferite a metodi "one-step".

Un requisito che un metodo di integrazione deve possedere è quello di essere convergente alla soluzione esatta dell'equazione differenziale da risolvere, cioè per ogni istante $t_n = n \Delta t$ deve essere

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} x_n = x(t_n) \quad (\text{I.4.2.4})$$

Nell'esempio che segue ci si limiterà a verificare se ed a quali condizioni il metodo (I.4.2.2) garantisce almeno la convergenza asintotica.

Si consideri l'equazione differenziale

$$\dot{x} = -\alpha x \quad \alpha > 0 \quad (\text{I.4.2.5})$$

con

$$x(0) = x_0$$

la cui soluzione analitica è

$$x = x_0 e^{-\alpha t} \quad (\text{I.4.2.6})$$

Dopo la discretizzazione la (I.4.2.5) diventa

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = -\alpha \left[(1 - \varepsilon) x_n + \varepsilon x_{n+1} \right] \quad (\text{I.4.2.7})$$

dalla quale si ricava

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{\alpha \Delta t}{1 + \alpha \varepsilon \Delta t} \right) x_n \quad (\text{I.4.2.8})$$

quindi

$$x_n = \left(1 - \frac{\alpha \Delta t}{1 + \alpha \varepsilon \Delta t} \right)^n x_0 \quad (\text{I.4.2.9})$$

Affinchè la soluzione data da (I.4.2.9) converga, almeno asintoticamente, a quella esatta (I.4.2.6) (metodo stabile), cioè che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{t \rightarrow \infty} x = 0 \quad (\text{I.4.2.10})$$

la condizione di convergenza è che

$$-1 < 1 - \frac{\alpha \Delta t}{1 + \alpha \varepsilon \Delta t} < 1 \quad (\text{I.4.2.11})$$

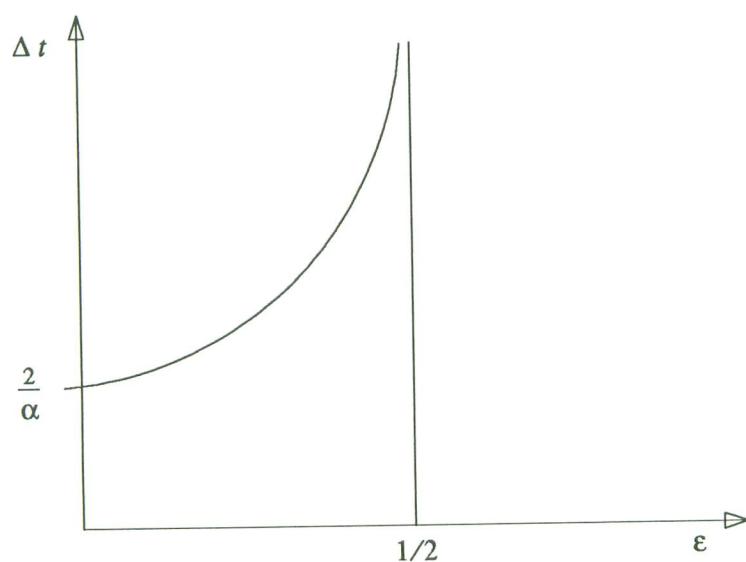
La diseguaglianza di destra è sempre verificata, quella di sinistra per :

$$\alpha \Delta t (1 - 2\varepsilon) < 2 \quad (\text{I.4.2.12})$$

Da qui si vede che se $\varepsilon \geq 1/2$ (primo membro negativo) il metodo converge per qualunque valore del passo di integrazione Δt (metodo assolutamente stabile o A-stabile), mentre converge solo a condizione di usare un passo di integrazione sufficientemente piccolo:

$$\Delta t < \frac{2}{\alpha (1 - 2\varepsilon)} \quad \text{se } \varepsilon < 1/2 \quad (\text{I.4.2.13})$$

Il diagramma di Δt in funzione di ε dato dalla (I.4.2.13) chiarisce ulteriormente quest'ultimo punto.



Dall'analisi del diagramma e riassumendo quanto detto precedentemente si arriva alle seguenti conclusioni: la soluzione numerica data dalla (I.4.2.9) converge asintoticamente a quella esatta (I.4.2.6) a patto di scegliere un passo di integrazione Δt sufficientemente piccolo se $\epsilon < 1/2$; il valore massimo ammesso per Δt cresce rapidamente man mano che ϵ tende a $1/2$. A partire da $\epsilon = 1/2$ (metodo del trapezio) fino a $\epsilon = 1$, è garantita la convergenza per qualunque passo di integrazione scelto. Nel suddetto intervallo di ϵ , è evidente che tanto più grande è il passo di integrazione Δt , tanto maggiore sarà l'errore (errore locale di troncamento) dovuto al metodo numerico di soluzione, ma almeno c'è la garanzia della convergenza asintotica.

L'analisi di stabilità del metodo numerico di soluzione applicato ad una generica equazione differenziale del tipo (I.4.2.1) è quasi sempre difficile o impossibile a causa delle non linearità della funzione $f(x)$.

L'esperienza di simulazione numerica porta però a persuadersi che gli argomenti svolti nel caso delle equazioni lineari tipo la (I.4.2.5) possano essere in qualche modo estesi anche alle equazioni non lineari.

In particolare è bene evitare metodi esplicativi per non incorrere in severe limitazioni sul Δt massimo ammissibile, il non rispetto delle quali può dar luogo a oscillazioni divergenti della soluzione numerica che ne vanificano completamente il significato.

Evitare il metodo esplicito, d'altra parte, aumenta immediatamente le difficoltà computazionali in quanto l'incognita x_{n+1} che deve essere ricavata dalla (I.4.2.2), in funzione del suo valore x_n del passo di tempo precedente, compare in modo implicito nell'equazione.

Ciò richiede una risoluzione iterativa della stessa con conseguente aumento del costo computazionale.

Con il metodo esplicito la (I.4.2.2) diventa invece

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = f(x_n) \quad (\text{I.4.2.14})$$

che rende banale il calcolo di x_{n+1} .

Tuttavia la necessità di assumere un passo di tempo molto più piccolo di quello di un metodo隐式的, a causa dei problemi di stabilità, fa aumentare per altra via il costo computazionale, sicché i metodi impliciti sono in generale considerati preferibili, sia come stabilità, sia come costo. La discussione precedente dà solo indicazioni sulla convergenza asintotica di un metodo numerico scelto, ma non sugli errori locali associati.

Per valutarli, si confronta il valore della soluzione ottenuta numericamente al tempo t_{n+1} a partire da quella al tempo t_n con la corrispondente ottenuta per sviluppo in serie di Taylor intorno al valore che la soluzione assume in t_n .

Quello così stimato si chiama errore locale di troncamento.

Si sostituisce nell'equazione (I.4.2.2):

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n) \Delta t + \frac{f''(x_n)}{2} \Delta t^2 + \dots \quad (\text{I.4.2.15})$$

per la (I.4.2.1):

$$\begin{aligned}
 f(x_n) &= \dot{x}_n \\
 f'(x_n) &= \ddot{x}_n \\
 \dots & \\
 \dots &
 \end{aligned} \tag{I.4.2.16}$$

per le (I.4.2.16) e sostituendo la (I.4.2.15) nella (I.4.2.2) si ha

$$x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n \Delta t + \varepsilon \frac{\ddot{x}_n}{2} \Delta t^2 + \dots \tag{I.4.2.17}$$

D'altra parte, sviluppando in serie la funzione $x(t)$ intorno al valore x_n , si ha

$$x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n \Delta t + \frac{\ddot{x}_n}{2} \Delta t^2 + \frac{\dddot{x}}{6} \Delta t^3 + \dots \tag{I.4.2.18}$$

Confrontando con la (I.4.2.17) si trova che, l'errore e che si commette nel tempo Δt vale:

$$e = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \ddot{x} \Delta t^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \dddot{x} \Delta t^3 + \dots \tag{I.4.2.19}$$

Si trova così che il metodo del trapezio ($\varepsilon = 1/2$) è quello che minimizza l'errore locale di troncamento ($e = o(\Delta t^3)$ invece che $e = o(\Delta t^2)$)

In generale per i metodi lineari multistep (I.4.2.3) è possibile definire un operatore lineare $L(x, \Delta t)$ che descrive l'errore di troncamento locale come

$$L(x, \Delta t) = C_0 x + C_1 \Delta t \dot{x} + C_2 \Delta t^2 \ddot{x} + \dots + C_p \Delta t^p x^{(p)} + \dots \tag{I.4.2.20}$$

dove

$$C_0, C_1, \dots, C_p$$

sono costanti che dipendono da

$$a_j, b_j \text{ e } \Delta t.$$

Un metodo d'integrazione si definisce di ordine p

se

$$C_0 = C_2 = \dots = C_p = 0 \quad \text{e} \quad C_{p+1} \neq 0$$

Dalla (I.4.2.19) risulta quindi che il metodo (I.4.2.2) è di ordine 1 tranne che quando è

$$\varepsilon = \frac{1}{2}$$

(metodo del trapezio), nel qual caso è di ordine 2.

La stabilità di un metodo, garantendo l'asintotica convergenza, assicura poi che gli errori locali di troncamento non si accumulino durante le iterazioni del procedimento numerico. Per le sue proprietà ottimali il metodo del trapezio è tra i più usati.

I.4.3 Metodo per l'integrazione numerica del sistema algebrico differenziale utilizzato nel codice LEGO

I.4.3.1 La formula di soluzione e la soluzione del sistema algebrico

Come già detto nel par. I.4.1 il sistema algebrico differenziale da risolvere è il tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, v, u) \\ g(x, v, u) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.4.3.1.1})$$

dove:
 x è il vettore delle variabili di stato
 v è il vettore delle variabili intermedie e di uscita
 u è il vettore delle variabili di ingresso
 f, g sono funzioni vettoriali

e nel quale non si è più evidenziato la variabile t , che non compare quasi mai direttamente nel termine a destra delle equazioni.

Si suppone noto un regime iniziale di equilibrio con

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0 \quad \text{e} \quad u(0) = u_0$$

tale che sia

$$\dot{x}(0) = f(x_0, v_0, u_0) = 0 .$$

Per la soluzione del sistema (I.4.3.1.1) al variare del vettore u nel tempo, si è adottata la formula del trapezio (formula implicita, del secondo ordine, "one step"). Discretizzando nell'intervallo di tempo $P \Delta t$ le variabili di ingresso, le variabili di stato, le variabili intermedie e di uscita e applicando la formula del trapezio, il sistema ⁽¹⁾ assume la forma:

$$x_{n+1} - \frac{\Delta t}{2} f(x_{n+1}, v_{n+1}, u_{n+1}) - T_n = 0 \quad (\text{I.4.3.1.2})$$

$$g(x_{n+1}, v_{n+1}, u_{n+1}) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots, P-1)$$

con

$$T_n = x_n + \frac{\Delta t}{2} f(x_n, v_n, u_n)$$

Nel sistema algebrico (I.4.3.1.2) si suppongono noti i vettori T_n (quindi x_n, v_n, u_n) e u_{n+1} (variabile indipendente).

La soluzione di (I.4.3.1.2) rispetto ai vettori x_{n+1}, v_{n+1} permette di conoscere le risposte del sistema per un assegnato valore del vettore u_{n+1} e per assegnate condizioni degli stati e degli ingressi nel punto n di cui si tiene conto nel vettore T_n .

La soluzione di (I.4.3.1.2) ad ogni passo di integrazione, per l'intervallo di discretizzazione scelto, consente di ottenere l'andamento nel tempo delle variabili di stato x e delle variabili intermedie e di uscita v e quindi di risolvere il sistema (I.4.3.1.2).

Il sistema algebrico (I.4.3.1.2) è in generale non lineare e quindi l'algoritmo di risoluzione deve essere di tipo iterativo; per l'esperienza acquisita su questo tipo di problema è stato scelto l'algoritmo di Newton-Raphson "smorzato" che offre maggiori garanzie di convergenza rispetto a quello classico.

Si ricorda che il metodo di Newton-Raphson permette di determinare le radici di una equazione $h(z) = 0$.

Supponiamo per semplicità che $h(z)$ sia una funzione monodimensionale, e che \bar{z} e z_0 siano rispettivamente una radice di h (quindi $h(\bar{z}) = 0$) e un valore della variabile indipendente, prossimo alla radice \bar{z} .

Sviluppando la funzione $h(z)$ secondo Taylor, nel punto z_0 sarà:

$$h(\bar{z}) = 0 = h(z_0) + \left[\frac{dh}{dz} \right]_{z=z_0} \Delta z + \left[\frac{d^2 h}{dz^2} \right]_{z=z_0} (\Delta z)^2 + \dots$$

Fermandoci al primo ordine e risolvendo rispetto a Δz si ha:

$$\Delta z = \frac{-h(z_0)}{\left[\frac{dh}{dz} \right]_{z=z_0}}$$

Quindi

$$z_1 = z_0 + \Delta z = z_0 - h(z_0) / \left[\frac{dh}{dz} \right]_{z=z_0}$$

In generale, alla generica iterazione ($k + 1$) relativa all'intervallo di tempo $n + 1$:

$$z_{n+1}^{(k+1)} = z_{n+1}^{(k)} - \frac{h(z_{n+1}^{(k)})}{\left. \frac{dh}{dz} \right|_{n+1}^{(k)}} \quad (\text{I.4.3.1.3})$$

Ovviamente durante il succedersi delle iterazioni quello che si vuole è che la convergenza sia continuamente soddisfatta, cioè:

$$\left| h(z_{n+1}^{(k+1)}) \right| < \left| h(z_{n+1}^{(k)}) \right| \quad (\text{I.4.3.1.4})$$

dove $\left| \bullet \right|$ rappresenta il simbolo di norma.

Se ciò non si verifica si hanno due possibilità di intervento: se lo jacobiano non è stato calcolato subito prima, si procede a ricalcolarlo; se lo jacobiano è invece "recente", la soluzione all'iterazione $(k + 1)$ viene calcolata con una fattore smorzante α , che prende successivamente i valori $1/2, 1/4, 1/8, \dots, (1/2)^n$, sino a che non venga soddisfatta la condizione di convergenza (I.4.3.1.4):

$$z_{n+1}^{(k+1)} = z_{n+1}^{(k)} + \alpha \Delta z .$$

È opportuno riscrivere la (I.4.3.1.2), evidenziando le incognite x_{n+1} e v_{n+1} , in modo da poter esprimere in modo più compatto la formula iterativa di Newton-Raphson:
Quindi:

$$\begin{cases} F(x_{n+1}, v_{n+1}) = 0 \\ g(x_{n+1}, v_{n+1}) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.4.3.1.5})$$

Così generalizzando l'espressione monodimensionale (I.4.3.1.3)

$$\frac{dh(z_{n+1}^{(k)})}{dz} \left(z_{n+1}^{(k+1)} - z_{n+1}^{(k)} \right) = -h(z_{n+1}^{(k)})$$

alle equazioni (I.4.3.1.5) si ha:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{n+1}^{(k-1)} & \Delta x_{n+1}^{(k)} + \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right)_{n+1}^{(k-1)} \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{n+1}^{(k-1)} & \Delta x_{n+1}^{(k)} + \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right)_{n+1}^{(k-1)} \end{cases} \quad \begin{aligned} \Delta v_{n+1}^{(k)} &= -F(x, v)_{n+1}^{(k-1)} \\ \Delta v_{n+1}^{(k)} &= -g(x, v)_{n+1}^{(k-1)} \end{aligned} \quad (I.4.3.1.6)$$

ove k rappresenta l'indice di iterazione ed $n+1$ quello distintivo del passo di tempo a cui si opera.

Il sistema (I.4.3.1.6) viene risolto rispetto ai vettori differenza $\Delta x_{n+1}^{(k)}$ e $\Delta v_{n+1}^{(k)}$.

Conoscendo i vettori delle variabili di stato e delle variabili intermedie all'iterazione precedente $x_{n+1}^{(k-1)}$ e $v_{n+1}^{(k-1)}$ è possibile ricavare gli stessi vettori all'iterazione k :

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(k)} = x_{n+1}^{(k-1)} + \Delta x_{n+1}^{(k)} \\ v_{n+1}^{(k)} = v_{n+1}^{(k-1)} + \Delta v_{n+1}^{(k)} \end{cases} \quad (I.4.3.1.7)$$

I valori di partenza (all'iterazione 0) sono fissati imponendoli uguali ai valori trovati al passo di tempo n precedente

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(0)} = x_n \\ v_{n+1}^{(0)} = v_n \end{cases} \quad (I.4.3.1.8)$$

Determinati i vettori $x_{n+1}^{(k)}$ e $v_{n+1}^{(k)}$ si procede al calcolo di $-F(x, v)_{n+1}^{(k)}$ e $-g(x, v)_{n+1}^{(k)}$.

Su ogni componente di questi vettori, detti "residui", si esegue poi il seguente test di convergenza:

$$\left| -F_i(x, v)_{n+1}^{(k)} \right| \leq \varepsilon_{F_i} \quad (i = 1, \dots, n^{\circ} \text{ di equazioni differenziali}) \quad (I.4.3.1.9)$$

$$\left| -g_j(x, v)_{n+1}^{(k)} \right| \leq \varepsilon_{g_j} \quad (j = 1, \dots, n^{\circ} \text{ equazioni algebriche})$$

dove ε_F , ε_g sono due vettori che rappresentano le tolleranze accettabili nella soluzione del

sistema algebrico differenziale ad ogni passo di integrazione.

Nell'ipotesi che all'iterazione m siano soddisfatte le (I.4.3.1.8) si può dire:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n+1}^{(m)} \\ v_{n+1} &= v_{n+1}^{(m)} \end{aligned} \quad (\text{I.4.3.1.10})$$

e ricordando che

$$- F(x, v)_{n+1}^{(m)} = - x_{n+1}^{(m)} + \frac{\Delta t}{2} f\left(x_{n+1}^{(m)}, v_{n+1}^{(m)}, u_{n+1}\right) + T_n \quad (\text{I.4.3.1.11})$$

si può inoltre calcolare

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n+1} &= f\left(x_{n+1}, v_{n+1}, u_{n+1}\right) = \\ &= f\left(x_{n+1}^{(m)}, v_{n+1}^{(m)}, u_{n+1}\right) = \frac{2}{\Delta t} \left[x_{n+1}^{(m)} - T_n - F(x, v)_{n+1}^{(m)} \right] \end{aligned} \quad (\text{I.4.3.1.12})$$

Con la valutazione di \dot{x}_{n+1} di x_{n+1} e v_{n+1} si può affrontare il successivo passo di integrazione e quindi, estendendo tale procedura a tutto l'intervallo di discretizzazione, risolvere (I.4.3.1.1).

Un ulteriore controllo sulla convergenza viene effettuato per garantire che questa avvenga con una velocità adeguata.

Infatti se il test (I.4.3.1.9) non è soddisfatto entro 7 iterazioni, prima di procedere oltre si ricalcola lo jacobiano.

Nell'ipotesi di non riuscire a soddisfare la tolleranza richiesta per la soluzione del sistema algebrico si garantisce comunque una soluzione approssimata di questo e una norma del vettore residui corrispondente può essere considerata come indice dell'approssimazione.

Nella procedura sopra descritta viene richiesto ad ogni iterazione:

- il calcolo del VETTORE RESIDUI $\vec{F}(\vec{x}, \vec{v})$ (quindi tenendo conto della (I.4.3.1.2))
il calcolo delle derivate $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{v}, \vec{u})$ nel punto $\vec{x}_{n+1}^{(k-1)}, \vec{v}_{n+1}^{(k-1)}, \vec{u}_{n+1}$)
- il calcolo del VETTORE RESIDUI delle equazioni algebriche $\vec{g}(\vec{x}, \vec{v})$
- il calcolo dello JACOBIANO J , cioè delle derivate parziali di F_i e g_j rispetto alle variabili x_i e v_j .

Tale matrice jacobiana viene dalla differenziazione del sistema (I.4.3.1.5)

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}_{n+1}} & \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{v}_{n+1}} \\ \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{x}_{n+1}} & \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{v}_{n+1}} \end{pmatrix} = \mathcal{J} = \\
 & = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_{n+1}} \left(\vec{x}_{n+1} - \frac{\Delta t}{t} \vec{f}(\vec{x}_{n+1}, \vec{v}_{n+1}, \vec{u}_{n+1}) \right) & \frac{\partial}{\partial \vec{v}_{n+1}} \left(\vec{x}_{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \vec{f}(\vec{x}_{n+1}, \vec{v}_{n+1}, \vec{u}_{n+1}) \right) \\ \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{x}_{n+1}} & \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{v}_{n+1}} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Quindi, nell'ipotesi di n variabili di stato e m variabili di uscita:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right) & | & - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}} \right) \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{x}} & | & \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{v}} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \uparrow \\ n \\ \downarrow \\ \uparrow \\ m \\ \downarrow \end{array} \quad (\text{I.4.3.1.13})$$

$\longleftrightarrow n \quad \longrightarrow m$

o, in modo più esteso (con $a_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{se } r = s \\ 0 & \text{se } r \neq s \end{cases}$):

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \left(a_{11} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right) & \dots & \left(a_{1n} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right) & \left(-\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial f_1}{\partial v_1} \right) & \dots & \left(-\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial f_1}{\partial v_m} \right) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \left(a_{n1} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right) & \dots & \left(a_{nn} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right) & \left(-\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial f_n}{\partial v_1} \right) & \dots & \left(-\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial f_n}{\partial v_m} \right) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \ddots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \frac{\partial g_1}{\partial v_1} & \ddots & \frac{\partial g_1}{\partial v_m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \ddots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} & \frac{\partial g_m}{\partial v_1} & \ddots & \frac{\partial g_m}{\partial v_m} \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema (I.4.3.1.6), cioè la determinazione dei vettori $\Delta \vec{x}_{n+1}^{(k)}$ e $\Delta \vec{v}_{n+1}^{(k)}$, ad ogni passo di iterazione, si presenta formalmente in questo modo:

$$(\mathcal{J})_{n+1}^{(k-1)} \begin{pmatrix} \Delta \vec{x}^{(k)} \\ \Delta \vec{v}^{(k)} \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} -\vec{F}(\vec{x}, \vec{v})_{n+1}^{(k-1)} \\ -\vec{g}(\vec{x}, \vec{v})_{n+1}^{(k-1)} \end{pmatrix} \quad (\text{I.4.3.1.14})$$

In realtà è possibile mantenere \mathcal{J} costante per più iterazioni e più passi di calcolo se la convergenza è buona (poche iterazioni per passo di tempo) e se è garantita la convergenza nella ricerca della soluzione: ciò comporta una grossa riduzione nei tempi di calcolo dei transitori.

Infatti finché \mathcal{J} è costante la risoluzione ad ogni iterazione si trova mediante il prodotto:

$$\begin{pmatrix} \Delta \vec{x}^{(k)} \\ \Delta \vec{v}^{(k)} \end{pmatrix}_{n+1} = (\mathcal{J})_{COST}^{-1} \begin{pmatrix} -F(\vec{x}, \vec{v})_{n+1}^{(k-1)} \\ -g(\vec{x}, \vec{v})_{n+1}^{(k-1)} \end{pmatrix} \quad (\text{I.4.3.1.15})$$

Quindi ricapitolando, per ogni passo di tempo $n+1$:

- si determina $\Delta \vec{x}_{n+1}^{(1)}$, $\Delta \vec{v}_{n+1}^{(1)}$
- si ricava $\vec{x}_{n+1}^{(1)}$, $\vec{v}_{n+1}^{(1)}$

- con essi si determinano $\vec{f}(\vec{x}, \vec{v})_{n+1}^{(1)}$, $\vec{g}(\vec{x}, \vec{v})_{n+1}^{(1)}$
- si costruisce $\vec{F}(\vec{x}, \vec{v})_{n+1}^{(1)} = \vec{x}_{n+1}^{(1)} - \frac{\Delta t}{2} \vec{f}(\vec{x}, \vec{v})_{n+1}^{(1)} \vec{T}_n$
- tramite la (I.4.3.1.15) si trova $\Delta \vec{x}_{n+1}^{(2)}$, $\Delta \vec{v}_{n+1}^{(2)}$ e di qui si può ricominciare finché non viene soddisfatto il test di convergenza (I.4.3.1.9).

Si nota infine che la soluzione di (I.4.3.1.5) non cambia se \int è calcolata in modo approssimato: le approssimazioni influenzano solo la velocità di convergenza.

I.4.3.2 Significato della tolleranza nella soluzione del sistema algebrico in rapporto allo schema di integrazione

In generale i vettori di tolleranza $\varepsilon_F, \varepsilon_g$ determinano la bontà nelle soluzioni x, v trovate ad ogni passo di integrazione; è intuitivo che l'accuratezza nella soluzione del problema ad ogni passo di integrazione influenza l'accuratezza dell'integrazione numerica stessa. Quindi i ragionamenti sulla bontà dei risultati ottenuti col metodo del trapezio applicato al problema (I.4.3.1.1) dovranno tener conto anche delle tolleranze $\varepsilon_F, \varepsilon_g$, oltre che del passo di integrazione Δt , responsabile, a parità di problema, dell'errore locale di troncamento. Indaghiamo ora il significato di $\varepsilon_F, \varepsilon_g$ e per questo si riscriva la funzione residui

$$\begin{aligned}
 -F(x, v)_{n+1}^{(0)} & \quad \text{e} \quad -g(x, v)_{n+1}^{(0)} ; \\
 -F(x, v)_{n+1}^{(0)} & = -x_{n+1}^{(0)} + \frac{\Delta t}{2} f\left(x_{n+1}^{(0)}, v_{n+1}^{(0)}, u_{n+1}\right) + x_n + \frac{\Delta t}{2} f\left(x_n, v_n, u_n\right) \\
 -g(x, v)_{n+1}^{(0)} & = -g\left(x_{n+1}^{(0)}, v_{n+1}^{(0)}, u_{n+1}\right) \tag{I.4.3.2.1}
 \end{aligned}$$

e ricordando la (I.4.3.1.8)

$$\begin{aligned}
 -F(x, v)_{n+1}^{(0)} & = -x_n \frac{\Delta t}{2} f\left(x_n, v_n, u_{n+1}\right) + x_n + \frac{\Delta t}{2} f\left(x_n, v_n, u_n\right) \\
 -g(x, v)_{n+1}^{(0)} & = -g\left(x_n, v_n, u_{n+1}\right) . \tag{I.4.3.2.2}
 \end{aligned}$$

Consideriamo il caso particolare in cui $u_{n+1} = u_n$ e a maggior ragione quello in cui tutti gli u da $n+1$ a P siano uguali a u_n allora:

$$\begin{aligned}
 -F(x, v)_{n+1}^{(0)} & = \Delta t f\left(x_n, v_n, u_n\right) \\
 -g(x, v)_{n+1}^{(0)} & = -g\left(x_n, v_n, u_n\right) \tag{I.4.3.2.3}
 \end{aligned}$$

Poichè al passo n il sistema è stato risolto, sarà :

$$\begin{cases} \left| -F_i(\vec{x}, \vec{v})_n \right| \leq \epsilon_{F_i} \\ \left| -g_j(\vec{x}, \vec{v})_n \right| \leq \epsilon_{g_j} \end{cases} \quad (\text{I.4.3.2.4})$$

Siccome $\vec{g}_{n+1}^{(0)} = \vec{g}_n$, il secondo set di diseguaglianze è automaticamente soddisfatto. Se lo è anche il primo, allora sarebbe possibile porre:

$$\begin{cases} \vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n \\ \vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n \end{cases}$$

e, siccome $\dot{x} = f(x, v, u)$, si può accettare

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n$$

Da quanto detto sembrerebbe risultare che $x_{n+1} = x_n$ anche se $\dot{x}_n \neq 0$: siamo cioè nella situazione in cui la derivata è così piccola che, nell'intervallo Δt , l'incremento del vettore di stato è inferiore al valore di tolleranza numerica, quindi al "potere risolutivo" del processo. D'altra parte questo significa che se il sistema sta evolvendo verso un regime in cui le derivate prime sono nulle, si può aumentare progressivamente il passo di integrazione Δt . A questo punto si profilano due possibilità:

1°) Si lavora a passo di integrazione fisso

In questo caso, si accetta come vettore derivata al passo $n+1$, il vettore derivata al passo n :

$$\dot{\vec{x}}_{n+1} = f(\vec{x}_{n+1}, \vec{v}_{n+1}) = f(\vec{x}_n, \vec{v}_n) = \dot{\vec{x}}_n$$

Con tale vettore si integrano le equazioni differenziali e si ottiene il VERO vettore di stato al passo $n+1$:

$$\begin{aligned} \vec{x}_{n+1}^{VERO} &= \vec{x}_n + \frac{\Delta t}{2} (\dot{\vec{x}}_{n+1} + \dot{\vec{x}}_n) = \\ &= \vec{x}_n + \Delta t \dot{\vec{x}}_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{I.4.3.2.5})$$

2°) Si lavora a passo di integrazione variabile

In questo caso si accetta ancora il vettore derivata

$$\dot{\vec{x}}_{n+1} = \dot{\vec{x}}_n$$

Si blocca l'esecuzione e si calcola il passo di tempo più grande Δt^* che non comporta una violazione del vettore tolleranza:

$$\begin{aligned} \left| -F_i(\vec{x}, \vec{v})_{n+1} \right| &= \Delta t \left| f_i(\vec{x}_{n+1}, \vec{v}_{n+1}, u_{n+1}) \right| = \\ &= \Delta t \left| f_i(\vec{x}_n, \vec{v}_n, \vec{u}_n) \right| = \Delta t \left| \dot{\vec{x}}_n \right|_i \leq \epsilon_{F_i} \end{aligned}$$

Quindi

$$\Delta t^* = \min \left\{ \frac{\epsilon_{F_i}}{\left| f_i(\vec{x}_n, \vec{v}_n, \vec{u}_n) \right|} \right\} \quad (\text{I.4.3.2.6})$$

Da questo momento in avanti l'esecuzione del calcolo riprende con tale passo di tempo aumentato.

Questo è un criterio che può essere utilizzato per risparmiare tempo di calcolo, quando il sistema è in condizioni tali da consentirlo, senza introdurre grosse approssimazioni ulteriori.

Va detto che questa tecnica di ALLUNGAMENTO DEL PASSO DI INTEGRAZIONE, non risulta praticabile nella costruzione di simulatori, dove tale parametro è gestito (in modo fisso) dallo scheduler.

Inoltre, quando pure si decida di lavorare a passo variabile supponendo, per esempio, di porre $\Delta t_{NEW} = 5 \Delta t$, prima di effettuare il calcolo si controlla, dalla routine che gestisce le perturbazioni sugli ingressi, che essi siano costanti nei $5 \Delta t$ successivi.

Se per esempio vi è una variazione dopo $3 \Delta t$, il nuovo passo sarà $\Delta t_{NEW} = 3 \Delta t$.

In generale sarà pertanto:

$$\Delta t_{NEW} = \min \{ \Delta t^*, y \Delta t \}$$

dove y è il n° di passi dopo il quale si verifica una variazione negli ingressi \vec{u}_y .

I.4.3.3 Caratteristiche generali del metodo di integrazione

Nei precedenti paragrafi è stato messo in evidenza come la soluzione di (I.4.3.1.1) si possa ricondurre alla soluzione di tanti problemi tipo (I.4.3.1.2) quanti sono i punti che discretizzano l'intervallo di tempo scelto.

Si ritiene utile, a questo punto, definire le qualità della procedura di integrazione per fornire dei riferimenti necessari se la si vuole confrontare con altri schemi di integrazione.

- 1) La formula di integrazione è quella del trapezio, formula implicita, "one step", del secondo ordine; il metodo è definito A-stabile ed il suo errore locale di troncamento dipende dal passo di integrazione e dalla derivata terza.
- 2) La soluzione del problema algebrico differenziale si attua risolvendo, ad ogni passo di integrazione, un sistema di equazioni algebriche non lineari in cui le equazioni differenziali sono state discretizzate con la formula del trapezio.
- 3) Il metodo di soluzione del sistema algebrico non lineare è quello di Newton-Raphson "smorzato", quindi è iterativo, si serve di un punto iniziale di innesco e si arresta quando è soddisfatta una tolleranza assegnata.
- 4) Per una soluzione del sistema algebrico e quindi del problema (I.4.3.1.1) sono necessari i valori delle derivate e dei residui ad ogni iterazione e, quando la difficoltà di convergenza dell'algoritmo lo richiede, la valutazione della matrice Jacobiana del sistema (I.4.3.1.2).
- 5) Il passo di integrazione Δt viene mantenuto sempre costante; non viene attuato, quindi, quel controllo sull'errore locale di troncamento in base al quale definire il passo di integrazione.
Tuttavia, nel caso in cui si studiano transitori che tendono ad un regime è possibile aumentare Δt , senza alterare la bontà dell'integrazione, sfruttando il significato intrinseco che ha la tolleranza nella soluzione del sistema algebrico.
- 6) Nella determinazione del punto di innesco dell'algoritmo di Newton per eseguire un passo di integrazione, non vengono utilizzati metodi di stima delle variabili x e v con formule esplicite di predizione, ma ci si serve delle soluzioni del problema algebrico differenziale ottenute al passo precedente.
- 7) Il tempo di calcolo impiegato per ogni passo di integrazione non è costante, ma dipende dalle difficoltà del problema (I.4.3.1.2). In generale si può affermare che tale tempo è più grande nei primi istanti di un transitorio e più piccolo quando il transitorio tende ad un regime.

- 8) La matrice Jacobiana necessaria per l'integrazione costituisce la base di partenza per ottenere una linearizzazione del sistema differenziale ed infatti nel programma LEGO questo calcolo si può ottenere da una procedura automatica. Gli autovalori del sistema linearizzato forniscono indicazioni molto utili per capire le qualità dinamiche del problema ed in funzione di queste scegliere un adeguato passo di integrazione.
- 9) La formula del trapezio è particolarmente adatta al trattamento di problemi "stiff"; in questo caso il passo di integrazione Δt , nell'ipotesi di aver garantito con una stretta tolleranza le qualità di stabilità del metodo, deve essere scelto in base alle costanti di tempo più grandi.
- 10) Poichè la matrice Jacobiana del sistema (I.4.3.1.2) è caratterizzata da un limitato numero di termini in rapporto all'ordine (coefficiente di riempimento < 20%) e al fine di ridurre il tempo di calcolo o di contenerlo entro limiti ragionevoli quando il problema ha un numero elevato di equazioni , si è utilizzato un algoritmo, per la soluzione del sistema linearizzato, basato sul trattamento di matrici sparse (1).

I.4.3.4 Integrazione separata dell'equazione di conservazione dell'energia.

Come si è detto al punto 7 del par. 1.4.3.3, il tempo di calcolo richiesto dall'algoritmo risolutivo del codice LEGO non è lo stesso per ogni passo d'integrazione. Ciò dipende dal fatto che la soluzione del sistema algebrico non lineare, al quale si perviene discretizzando ad ogni passo con il metodo del trapezio le equazioni differenziali del sistema algebrico differenziale, utilizza un metodo iterativo. L'iterazione avviene comunque su tutte le equazioni del sistema, anche nel caso che le difficoltà di convergenza della soluzione riguardino solo poche equazioni.

Se si considerano le tre equazioni di conservazione della fluidodinamica, si nota che in generale l'equazione di conservazione dell'energia dovrebbe presentare difficoltà di convergenza assai minore di quelle delle equazioni di conservazione della massa e della quantità di moto.

Difatti le perturbazioni di entropia si propagano con la velocità del fluido, mentre quelle di velocità (o di portata) e di pressione si propagano con velocità circa pari a quella del suono nel fluido, come si è visto nel par. I.1.4. Dei termini forzanti delle equazioni (I.1.2.3.1.10) il primo, che è quello di gran lunga prevalente, dipende dalla potenza scambiata fra il fluido e la parete metallica che, tranne nel caso di cambiamento di regime di scambio termico, varia lentamente in quanto influenzata dalla costante di tempo della parete metallica.

In base alle suddette considerazioni si può ritenere che nella maggior parte dei casi la convergenza venga raggiunta in pochissime iterazioni per l'equazione di conservazione dell'energia, che tra l'altro è debolmente accoppiata (vedasi al par. I.1.5) con le altre due equazioni di conservazione, mentre poi il procedimento iterativo continua per raggiungere la convergenza anche per le altre equazioni, modificando assai poco i valori di entropia. D'altra parte il coinvolgimento dell'equazione di conservazione dell'energia nel procedimento iterativo è molto costoso in termini di tempo di calcolo, e soprattutto è oneroso il richiamo dei sottoprogrammi per il calcolo delle caratteristiche fisiche del fluido, le quali variano assai poco nelle iterazioni successive alla prima.

Al fine di economizzare tempo di calcolo in alcuni moduli, scelti soprattutto fra quelli destinati all'utilizzo nei simulatori in tempo reale, si è adottata la tecnica descritta nel seguito.

L'equazione di conservazione dell'energia viene scorporata dal sistema di equazioni risolto con il metodo di soluzione generale LEGO e risolta, all'inizio di ogni passo temporale, con un metodo esplicito^{(2),(3)}. Il valore dell'entropia denominato

$$S^* = S_{t+\Delta t}^{(o)}$$

calcolato all'istante $t + \Delta t$ prima dell'inizio del procedimento iterativo per la soluzione del sistema algebrico, viene memorizzato (normalmente, ma non obbligatoriamente, nel vettore nel quale sono memorizzati i dati geometrici relativi al modulo in esame). Ovviamente si ottiene il massimo vantaggio in termini di risparmio di tempo di calcolo memorizzando non

solo S ma anche tutte le grandezze, in particolare le caratteristiche fisiche del fluido, che da essa dipendono esclusivamente o quasi.

Se S non è una variabile interna al modulo, ma deve essere una variabile di uscita, e ciò accade normalmente per l'entropia dell'ultima cella nei moduli che prevedono suddivisioni in celle delle tubazioni da essi simulate, nel sistema (I.4.3.1.2) l'equazione di conservazione dell'energia relativa a tale variabile viene sostituita dall'equazione algebrica

$$S - S^* = 0 \quad (\text{I.4.3.4.1})$$

la quale partecipa al procedimento iterativo, ma dalla prima iterazione in poi soddisfa sempre il criterio di convergenza.

Si deve notare che con l'adozione di tale tecnica per il codice LEGO l'entropia non è più una variabile di stato.

Il calcolo del regime permanente richiede che a S^* venga assegnato il corretto valore iniziale o come dato o con un calcolo preliminare da effettuarsi all'interno del modulo stesso, poiché la procedura standard LEGO per il calcolo del regime permanente pone solamente

$$S = S^*$$

ma non è in grado di modificare il valore di S^* per far sì che esso assuma il corretto valore di regime.

BIBLIOGRAFIA della GUIDA ALLA LETTURA

- 1) LEGOCAD - Struttura informatica
ENEL DSR/CRA
- 2) LEGOCAD - Guida all'utilizzo del CAD di simulazione e controllo
ENEL DSR/CRA
- 3) LEGOCAD - Libreria modellistica di LEGOCAD per la simulazione di impianti per la generazione di potenza - Teoria - Principi generali
ENEL DSR/CRA
- 4) LEGOCAD - Libreria modellistica di LEGOCAD per la simulazione di impianti per la generazione di potenza - Teoria - Descrizione moduli (volumi 1, 2, 3)
ENEL DSR/CRA
- 5) LEGOCAD - Libreria modellistica di LEGOCAD per la simulazione di impianti per la generazione di Potenza - Manuale d'uso
ENEL DSR/CRA
- 6) LEGOCAD - Libreria modellistica di LEGOCAD per la simulazione di impianti per la generazione di potenza - Esempi di utilizzo dei moduli.
ENEL DSR/CRA
- 7) LEGOCAD - Libreria per la simulazione di sistemi di controllo logichee protezioni.
ENEL DSR/CRA
- 8) Marcocci L., Spelta S. :"Computer aided modelling of complex processes, a program package"
Proceedings IMACS, Nantes, France 1983
- 9) Maffezzoni C., Magnani G., Marcocci L. : "Computer aided modelling of large power plants"
Proceedings IFAC, Workshop on "Modelling and Control of Electric Power Plants", Como, Italy 1983
- 10) Cori R., Spelta S. : "Il sistema LEGO dedicato alla modellistica assistita da calcolatore per la simulazione dei processi complessi"
Convegno annuale ANIPLA, Bari 1988
- 11) Cori R., De Marco A., Spelta S., Pretolani F. : "Analisi dinamica degli impianti termoelettrici: 25 anni di studi ed esperienze all' ENEL"
Convegno : Dinamica e regolazione delle centrali termoelettriche. Genova, Maggio 1989

- 12) Cori R., Spelta S., Guagliardi G., Pretolani F., Maltagliati P., Persico F., Sommani M. : "La work-station LEGO per lo sviluppo di modelli di impianti per la produzione di energia"
XC Riunione Annuale AEI, Lecce 1989
- 13) Maffezzoni C., Prandoni W. : "Modelling and simulation of a pilot power plant fired with oil and coal-water fuel"
IFAC Symposium on Power Systems and Power Plant Control. Beijing, China 1986
- 14) Corno D., Quatela S., Zizzo A. : "Dynamic analysis of the air gas path of fuel power plants"
Proceedings IFAC, Workshop on "Modelling and Control of Electric Power Plants", Como, Italy 1983
- 15) Bagnasco S., Rossi A. : "Simulatore di centrali termoelettriche per addestramento operatori con caratteristiche di elevata modularità"
Convegno : Dinamica e regolazione delle centrali termoelettriche. Genova, Maggio 1989
- 16) Santinelli A., Marsiletti M. : "Applicazione di strumenti di analisi dinamica per il progetto della centrale Ansaldi a ciclo combinato"
Convegno : Dinamica e regolazione delle centrali termoelettriche. Genova, Maggio 1989
- 17) Spelta S. : "An application of the LEGO package to PWR power plant modelling"
Proceedings of the Fifth International Conference on Mathematical Modelling. Berkeley, California 1985
- 18) Cori R., Garbossa G.B., Spelta S., Cento P., Mosca R. : "A model of Alto Lazio boiling water reactor using the LEGO code. Nuclear Steam Supply System simulation"
7th Power Plant Dynamics, Control and Testing Symposium. Knoxville, Tennessee, May 1989
- 19) Spelta S., Garbossa G.B., Cento P., Ferrari L. : "A model of Alto Lazio boiling water reactor using the LEGO code. Balance of plant simulation"
7th Power Plant Dynamics, Control and Testing Symposium. Knoxville, Tennessee, May 1989
- 20) Cori R., Pretolani F. : "Validation of the model STRIP. Comparison of a simulated load rejection transient with an experimental trial on the pressurized water reactor of Fessenheim"
Proceedings IFAC, Workshop on "Modelling and Control of Electric Power Plants", Como, Italy 1983

- 21) Cori R., Pretolani F., Radice A., Bianchi S., Calderini M. : "STRIP3 : A reference three loops and BOP mathematical model for Westinghouse 312 PWR" 12th IMACS World Congress on Scientific Computation. Paris, July 18-22 1988
- 22) Magnani G., Bologna P., Rizzi G., Lorati G. : "Modelling and simulation of an industrial robot" IEEE Conference on Robotics and Automation. Philadelphia PA 1988
- 23) Spelta S. : "Il manuale per la scrittura di un modulo LEGO" ENEL Relazione interna 340.112-3 Rapp. 340.82, 1982

Bibliografia del Cap. I.1

Par. I.1.1

- (1) Bird, R. B., Stewart, W.E. and Lightfoot, E.N., *Transport Phenomena*, John Wiley, 1960.
- (2) Brenkert, K. Jr., *Elementary Theoretical Fluid Mechanics*, John Wiley, 1960.
- (3) Hughes, W.F. and Gaylord, E. W., *Basic Equations of Engineering Science*, Schaum Publishing Co., 1964.
- (4) Landau, L.D., and Lifshitz, E. M., *Fluid Mechanics*, Addison- Wesley, 1959.
- (5) Pai, S.I., *Viscous Flow Theory*, Vols. I and II, Van Nostrand, 1956.
- (6) Sabersky, R.H., and Acosta, A.J., *Fluid Flow*, Macmillan Co., 1964.
- (7) Shames, I.H., *Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill, 1962.
- (8) Hinze, J.O., *Turbulence*, McGraw-Hill, 1959.
- (9) Schubauer, G.B. and Tchen, C.M., *Turbulent Flow*, Princeton University Press, 1961.

Parr. I.1.3.1, ... , I.1.3.7

- (1) Ishii M., *Thermo -fluid dynamic theory of two phase flow*, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France - EYROLLES Paris 1975.
- (2) Delhaye J.M., *Equations fondamentales des écoulements diphasiques*.
1ère partie: équations générales de conservation
2ème partie: compléments et remarques
Rapport C.E.A. - R. 3429 - 1968.
- (3) Perrin M., *Equations des écoulements diphasiques*. Généralités. Modèles tridimensionnels, Note EDF Etudes et Recherches SIMA/TIEM n°HI 2281/02 - 1976.

- (4) Maxant M. - Perrin M., *Equations des écoulements diphasiques*. Modèles unidimensionnels et bidimensionnels, Note EDF Etudes et Recherches SIMA/TIEM n°HI 2364/02 - 1977.
- (5) Boure J., *Mathematical modeling and the two-phase constitutive equations*, European Two-Phase Flow Group Meeting - Juin 1975.
- (6) Aris R., Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, n. 5, 1942

Par. I.1.3.8

- (1) MEYER J.E., *Conservation laws in one-dimensional hydrodynamics*, Bettis Tech. Rev. WAPD-BT-20 , 1960.

Par. I.1.3.9

- (1) Augello L., Cattadori G., Cavanna G.L., Mazzocchi L., Ravetta R., *Termoidraulica con esercitazioni* - Corso nucleare di base, Disp. 7, CISE 1983.
- (2) Frenquellucci F., Granzini R., Masini G., *Analisi di alcune correlazioni di densità per miscele acqua-vapore in regime saturo*, CISE NT. 79.004, 1979.
- (3) Lockhart R.W., Martinelli R.C., *Proposed correlation of data for isothermal two-phase, two component flow in pipes*, Chem. Engng. Prog. 45,39, 1949.
- (4) Bankoff S.G., *A variable density single-fluid model for two-phase flow with particular reference to steam-water flow*, Journal of Heat Transfer 82, 1960.
- (5) Armand A.N., Treschev G.G., *Investigation of the resistance during the movement of vapor-water mixtures in heated pipes at high pressure*, AERE Lib/Trans. rep. n° 816, 1959.
- (6) Thom J.R.S., *Prediction of pressure drop during forced circulation boiling of water*, Int. J. Heat mass Transfer 7, 1964.
- (7) Osmachkin V.S., Borison U.P., *Pressure drop and heat transfer for flow of boiling water in vertical rod bundle*, 4th International Heat Transfer Conference-Versailles.

- (8) Zuber N., Findlay J.K., *Average volumetric concentration in two-phase flow systems*, Transaction of ASME, J. Heat Transfer, 1965.
- (9) Lahey R.T., *Two-phase flow in boiling water nuclear reactors*, NEDO - 13388, G.E. Co.
- (10) Rouhani S.Z., *Modified correlations for void and two-phase pressure drop*, AE - RTV - 841.
- (11) Premoli A., Di Francesco S., Prina A., *Una correlazione adimensionale per la determinazione della densità di miscele bifasiche*, La Termotecnica, XXV, 17, 1971.

Par. I.1.4

- (1) Martini R., Pierini G., Sandri C., : "Ratt-1: un programma di calcolo per l'analisi di transitori termoidraulici di condotti percorsi da fluido mono e bifase. Parte 1 °: Modelli matematici", CISE-NT 80.112 Ottobre 1980.
- (2) Tentner A., Weisman J.,: "The use of the method of characteristics for examination of two-phase flow behaviour.", Nuclear Technology Vol. 37, Jan. 1978.
- (3) Richtmayer R.D., Morton K.W.: "Difference methods for initial value problems.", Interscience Publishers, New York 1967.
- (4) Stewart H.B.: "Stability of two phase flow calculation using two fluid models.", Journal of computational physics, Vol. 33, 1979.

Par. I.1.6

- (1) Augello L., Cattadori G., Cavanna G.L., Mazzocchi L., Ravetta R., *Termoidraulica con esercitazioni - Corso Nucleare di base*, Disp. 7, 1983.
- (2) IDEL'CHIK I.E., *Handbook of hydraulic resistance*, IPST, 1966.
- (3) Martinelli R.C. , Nelson D.B., *Prediction of pressure drop during forced-circulation boiling of water*, Trans. Am. Soc. Mech. Engnr. 70, 1948.

- (4) Baroczy C.J., *A systematic correlation for two-phase pressure drop*, Chem. Engr. Prog. Symp. Ser. No.64, 1968.
- (5) Chisholm D., *Pressure gradients due to friction during the flow of evaporating two-phase mixtures in smooth tubes and channels*, Int. J. Heat Mass Transfer 16, 1973.
- (6) Becker K.M., Hernborg G., Bode M., *An experimental study of pressure gradients for flow of boiling water in vertical round ducts*, AE - 86, 1962.
- (7) Jones A.B., *Hydrodynamic stability of a boiling channel*, DAPL- 2170, 1961.
- (8) Loubriat Ph, *Tuyauteries: - pertes de charge par frottement, - pertes de charge localisees, - choix du diametre*, EDF - Memento technique de l'équipement - Fiche No. 068 , Rev. 3, Oct. 81.
- (9) Missaglia M., *Revisione e potenziamento della subroutine GAMO1 del codice LEGO, per la trattazione dello scambio termico convettivo fluido/parete*. CISE R.F. N. 4716, 1989

Par. I.1.7

- 1) Perrin M., *Programmes numeriques a usage scientifique de calcul des proprietes de l'eau et de la vapeur d'eau*.
EDF Direction des Etudes et Recherches HI 1992/02, 1975
- 2) Levetti, Perrin M., *Logiciel de fonction thermodinamiques des fluides diphasiques - Utilisation*
EDF Direction des Etudes et Recherches HI 4449/02 , 1983
- 3) Maxant M. , Perrin M. , *Fonction thermodinamiques des fluides monophasiques*
EDF Direction des Etudes de Recherches HI 3431/02, 1980

Bibliografia del Cap. I.2

- (1) Hughes E.D., *Macroscopic balance equations for two-phase flow models*, Nuclear Engineering and Design Vol. 54, 1979.
- (2) De Marco A. , Spelta S. , *Modelli matematici di cavità con fluido bifase*, ENEL - DSR/CRA N. 341.240-6 Rapp.049/90
- (3) Collier J.G., *Convective boiling and condensation*, Mc Graw Hill, 1981.
- (4) Kling R., *Thermocinetique*, Ecole Supérieure d'Electricité, n° 2035, 1966.

Bibliografia del Cap. I.4

- (1) United Kingdom Atomic Energy Authority HARWELL - AERE - R8730 (1979 revision) MA28 - A set of Fortran subroutines for sparse unsymmetric linear equations.
- (2) Busi T., Colombo P., De Marco A. , On efficient modelling technique for power plant training simulators: the FAST method .
ENEL - DSR /CRA N. 340.026-4 Rapp. 624.86
- (3) Beato A. , Busi T. , Colombo P, De Marco A. , Simulatore R.T. di processi termoidraulici. Algoritmo di integrazione delle equazioni termiche in elementi lunghi.
ENEL - DSR/CRA N. 341.260-1 Rapp. 001/89