

Ce mini-projet, à effectuer en binôme au sein du même groupe de PC, fera l'objet d'un rapport incluant notamment équations et graphiques obtenus par des simulations sous Python. La forme de ce rapport est laissée libre (pdf, notebook, version papier...). Plusieurs rendus intermédiaires sont attendus auprès de votre chargé de PC.

Tout un fromage

Le gouvernement hollandais souhaite maximiser les profits qu'il fait par la vente de produits dérivés du lait. Ce lait, brut, est acheté aux agriculteurs locaux à un prix fixe et est utilisé dans la fabrication de quatre produits : lait (à la consommation), beurre, gouda et edam. Ainsi, le gouvernement cherche la production optimale de ces quatre produits laitiers permettant de maximiser ses profits issus de leur vente.



1 Modélisation

1. En introduisant l'élasticité-prix de chacun des produits, écrire la relation entre les variations de prix et de quantités produites. Les fromages (gouda et edam) étant des produits "complémentaires" (qui peuvent se substituer l'un à l'autre), on introduira de plus l'élasticité-prix croisée entre ces deux produits.
2. Le lait brut possède une quantité de matière grasse totale répartie entre les quatre produits. À partir de la teneur en matière grasse de chacun des produits, écrire la contrainte correspondante.
3. De même, le lait brut a une teneur totale en lactose. Formuler la contrainte correspondante.
4. Afin de garantir la paix sociale, la moyenne des changements de prix relatifs ne doit pas être positive. Écrire la contrainte correspondant (en tenant compte du fait que la moyenne est en fait pondérée par la part de chacun des produits dans le budget).
5. Formuler le problème d'optimisation sous contraintes (au nombre de sept).

2 Étude et résolution numérique

1. Étudier le problème (convexité, conditionnement, existence et unicité d'une solution) par la méthode, analytique ou numérique, de votre choix. Proposer une méthode de résolution adaptée aux caractéristiques du problème.
2. Proposer des ordres de grandeurs pour les variables du problème encore non définies et développer un algorithme de résolution. Commenter les résultats obtenus.

3 Étude avancée

Les élasticité-prix sont des paramètres difficiles à mesurer et relativement incertains. On se propose donc ici d'évaluer comment varie la solution optimale en fonction de ce paramètre.

1. Formuler une expression analytique de la solution précédente, en fonction des contraintes actives en ce point.
2. On considère maintenant une modification infinitésimale de l'élasticité-prix. En supposant que la solution nominale précédente est non-dégénérée (voir annexe), montrer que la solution du problème perturbé présente les mêmes contraintes actives. Évaluer alors analytiquement la variation de la solution en fonction de l'élasticité-prix.
3. Vérifier la formule obtenue précédemment en simulation. Conclure sur l'effet et l'importance de l'élasticité-prix.

Annexe : solution non-dégénérée

La solution x^* d'un problème de minimisation

$$\min_{c(x) \leq 0} f(x)$$

est dite non-dégénérée si, en notant \mathcal{I} l'ensemble des indices des contraintes actives en x^* et λ^* le multiplicateur de Lagrange associé,

$$\lambda_i^* > 0, \quad i \in \mathcal{I}$$