

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Рязанский государственный радиотехнический университет
имени В.Ф. Уткина»

Кафедра ЭВМ

Отчет о лабораторной работе №3
«Характеристики простейшей СМО»
по дисциплине «Моделирование»

Выполнили:

ст. гр. 245

бригада №4

Сокол Илья

Лапин Кирилл

Проверил:

доц. каф. ЭВМ

Саблина В.А.

Рязань 2025

Цель работы: изучение и сравнение характеристик простейшей СМО:

- исследование зависимости основных характеристик СМО от коэффициента загрузки ОА;
- исследование зависимости основных характеристик СМО от степени случайности длительности обслуживания заявок и интервала между приходами заявок.

Практическая часть

1. Ознакомление с моделью простейшей СМО

Ознакомимся с моделью простейшей СМО М/М/1. Данная модель имеет следующее графическое представление (рисунок 1.1):

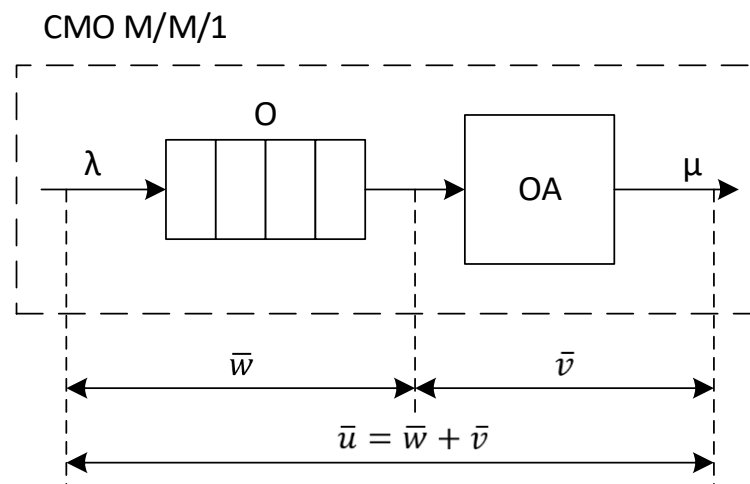


Рисунок 1.1 – Графическое представление модели простейшей СМО

В соответствии с вариантом задания среднее значение длительности обслуживания заявок $v_{cp} = \bar{v} = 100 * 4 = 400$.

2. Модель простейшей СМО М/М/1

Разработаем имитационную GPSS-модель простейшей СМО М/М/1.

Листинг полученной программы представлен ниже:

```
EXPON FUNCTION RN1,C24
    0,0/.1,.104/.2,.222/.3,.335/.4,.509/.5,.69/.6,.915/.7,1.2/.75,1.38
    .8,1.6/.84,1.85/.88,2.12/.9,2.3/.92,2.52/.94,2.81/.95,2.99/.96,3.2
    .97,3.5/.98,3.9/.99,4.6/.995,5.3/.998,6.2/.999,7/.9998,8

MOJ VARIABLE 400                                ; Мат. ожидание v_cp
TOBS VARIABLE FN$EXPON # V$MOJ                  ; v = v_cp * f_эксп

GENERATE 120,FN$EXPON                            ; T_cp = 120, lambda = 1 / T_cp
QUEUE OCH
```

```

SEIZE OAP
DEPART OCH

ADVANCE V$TOBS ; случайное время обслуживания v
в ОА
RELEASE OAP
TERMINATE 1

START 10000

```

Регулируя $\lambda = \frac{1}{T_{cp}}$, зададим коэффициент загрузки ОА $\rho = \lambda v_{cp} = 0.9$.

Таким образом:

$$\rho = 400 * \lambda = 0.9 \rightarrow \lambda = \frac{0.9}{400} = 0.00225$$

$$T_{cp} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.00225} \approx 444$$

Изменим в модели средний период между поступлениями заявок T_{cp} :

```

GENERATE 444, FN$EXPON ; T_cp = 444, lambda = 1 / T_cp

```

В результате выполнения программы получим отчет, представленный на рисунке 2.1.

START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES
0.000	4435447.041	7	1	0

NAME	VALUE
EXPON	10000.000
MOJ	10001.000
OAP	10004.000
OCH	10003.000
TOBS	10002.000

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT	COUNT	RETRY
1		GENERATE	10004		0	0
2		QUEUE	10004		3	0
3		SEIZE	10001		1	0
4		DEPART	10000		0	0
5		ADVANCE	10000		0	0
6		RELEASE	10000		0	0
7		TERMINATE	10000		0	0

FACILITY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME	AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY	DELAY
OAP	10001	0.899	398.685	1	10001	0	0	0	3

QUEUE	MAX	CONT.	ENTRY	ENTRY(0)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE.(-0)	RETRY
OCH	44	4	10004	994	6.866	3044.263	3380.112	0

CEC XN	PRI	M1	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE
10001	0	4432541.677	10001	3	4		

FEC XN	PRI	BDT	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE
10005	0	4435518.079	10005	0	1		

Рисунок 2.1 – Результат выполнения программы модели СМО М/М/1 с $\rho = 0.9$

Таким образом, согласно полученному отчету, имеют место следующие параметры СМО М/М/1:

$$w_{cp} = 3044.264$$

$$u_{cp} = w_{cp} + v_{cp} = 3044.264 + 398.685 = 3442.949$$

$$l_{cp} = 6.866$$

$$l_{max} = 44$$

$$m_{cp} = l_{cp} + \rho = 6.866 + 0.899 = 7.765$$

Рассчитаем те же параметры по аналитической модели СМО М/М/1:

$$w_{cp} = \frac{\rho v_{cp}}{1 - \rho} = \frac{0.9 * 400}{1 - 0.9} = 3600$$

$$u_{cp} = w_{cp} + v_{cp} = 3600 + 400 = 4000$$

$$l_{cp} = \lambda w_{cp} = 0.00225 * 3600 = 8.1$$

$$m_{cp} = l_{cp} + \rho = 8.1 + 0.9 = 9$$

Результаты имитационного моделирования СМО М/М/1 показывают закономерное расхождение с аналитическими расчетам. При теоретических значениях $w_{cp} = 3600$ и $u_{cp} = 4000$, имитационная модель дала значения 3044.264 и 3442.949 соответственно. Это отклонение объясняется конечным временем моделирования (10000 заявок), влиянием начального переходного процесса и небольшим отклонением фактического среднего времени обслуживания (398.685 вместо 400). Несмотря на количественные расхождения, имитационная модель подтверждает ожидаемую высокую нагрузки системы ($\rho = 0.9$) и общие тенденции поведения СМО.

Изменяя λ (T_{cp} в модели), уменьшим ρ на 10%:

$$\rho = \lambda v_{cp}$$

$$\rho_1 = \lambda_1 v_{cp}$$

$$\rho_1 = 0.9\rho \rightarrow \lambda_1 v_{cp} = 0.9 * \lambda v_{cp} \rightarrow \lambda_1 = 0.9\lambda$$

$$\lambda_1 = 0.9 * 0.00225 \approx 0.00203$$

$$T_{cp1} = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{0.00203} \approx 500$$

Изменим в модели средний период между поступлениями заявок T_{cp} :

GENERATE 500, FN\$EXPON	; T_cp = 500, lambda = 1 / T_cp
-------------------------	---------------------------------

В результате выполнения программы получим отчет, представленный на рисунке 2.2.

START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES					
0.000	4963484.533	7	1	0					
NAME	VALUE								
EXPON	10000.000								
MOJ	10001.000								
OAP	10004.000								
OCH	10003.000								
TOBS	10002.000								
LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT	COUNT	RETRY			
	1	GENERATE	10001		0	0			
	2	QUEUE	10001		0	0			
	3	SEIZE	10001		1	0			
	4	DEPART	10000		0	0			
	5	ADVANCE	10000		0	0			
	6	RELEASE	10000		0	0			
	7	TERMINATE	10000		0	0			
FACILITY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME	AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY	DELAY
OAP	10001	0.808	401.072	1	10001	0	0	0	0
QUEUE	MAX	CONT.	ENTRY	ENTRY(0)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE. (-0)	RETRY	
OCH	35	1	10001	1890	3.440	1707.194	2104.999	0	
CEC XN	PRI	M1	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE		
10001	0	4962726.879	10001	3	4				
FEC XN	PRI	BDT	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE		
10002	0	4963535.008	10002	0	1				

Рисунок 2.2 – Результат выполнения программы модели СМО М/М/1 с $\rho = 0.81$

Таким образом, согласно полученном отчету имеют место следующие параметры СМО М/М/1 с уменьшенным ρ на 10%:

$$w_{cp} = 1707.194$$

$$u_{cp} = w_{cp} + v_{cp} = 1707.194 + 401.072 = 2108.266$$

$$l_{cp} = 3.44$$

$$l_{max} = 35$$

$$m_{cp} = l_{cp} + \rho = 3.440 + 0.808 = 4.248$$

Вычислим изменения данных параметров в процентах относительно исходного $\rho = 0.9$:

$$\Delta w_{cp} = \frac{1707.194}{3044.264} * 100\% \approx 56.1\%$$

$$\Delta u_{cp} = \frac{2108.266}{3442.949} * 100\% \approx 61.2\%$$

$$\Delta l_{cp} = \frac{3.44}{6.866} * 100\% \approx 50.1\%$$

$$\Delta l_{max} = \frac{35}{44} * 100\% \approx 79.6\%$$

$$\Delta m_{cp} = \frac{4.248}{7.765} * 100\% \approx 54.8\%$$

Изменяя λ (T_{cp} в модели), добьемся $\rho = 0.5$:

$$\rho_2 = 400 * \lambda = 0.5 \rightarrow \lambda_2 = \frac{0.5}{400} = 0.00125$$

$$T_{cp2} = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{0.00125} \approx 800$$

Изменим в модели средний период между поступлениями заявок T_{cp} :

GENERATE 800, FN\$EXPON	; T_cp = 800, lambda = 1 / T_cp
-------------------------	---------------------------------

В результате выполнения программы получим отчет, представленный на рисунке 2.3.

START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES
0.000	7907114.777	7	1	0

NAME	VALUE
EXPON	10000.000
MOJ	10001.000
OAP	10004.000
OCH	10003.000
TOBS	10002.000

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT	COUNT	RETRY
	1	GENERATE	10000		0	0
	2	QUEUE	10000		0	0
	3	SEIZE	10000		0	0
	4	DEPART	10000		0	0
	5	ADVANCE	10000		0	0
	6	RELEASE	10000		0	0
	7	TERMINATE	10000		0	0

FACILITY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME	AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY	DELAY
OAP	10000	0.509	402.734	1		0	0	0	0

QUEUE	MAX CONT.	ENTRY	ENTRY(0)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE.(-0)	RETRY	
OCH	14	0	10000	4854	0.531	419.971	816.111	0

FEC XN	PRI	BDT	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE
10001	0	7908008.203	10001	0	1		

Рисунок 2.3 – Результат выполнения программы модели СМО М/М/1 с $\rho =$

0.5

Таким образом, согласно полученному отчету имеют место следующие параметры СМО М/М/1:

$$w_{cp} = 419.971$$

$$u_{cp} = w_{cp} + v_{cp} = 419.971 + 402.734 = 822.705$$

$$l_{cp} = 0.531$$

$$l_{max} = 14$$

$$m_{cp} = l_{cp} + \rho = 0.531 + 0.509 = 1.04$$

Рассчитаем те же параметры по аналитической модели СМО М/М/1:

$$w_{cp} = \frac{\rho v_{cp}}{1 - \rho} = \frac{0.5 * 400}{1 - 0.5} = 400$$

$$u_{cp} = w_{cp} + v_{cp} = 400 + 400 = 800$$

$$l_{cp} = \lambda_2 w_{cp} = 0.00125 * 400 = 0.5$$

$$m_{cp} = l_{cp} + \rho_2 = 0.5 + 0.5 = 1$$

Изменяя λ (T_{cp} в модели), уменьшим ρ на 10%:

$$\rho_2 = \lambda_2 v_{cp}$$

$$\rho_3 = \lambda_3 v_{cp}$$

$$\rho_3 = 0.9\rho_2 \rightarrow \lambda_3 v_{cp} = 0.9 * \lambda_2 v_{cp} \rightarrow \lambda_3 = 0.9\lambda_2$$

$$\lambda_3 = 0.9 * 0.00125 \approx 0.00113$$

$$T_{cp3} = \frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{0.00113} \approx 885$$

Изменим в модели средний период между поступлениями заявок T_{cp} :

GENERATE 885, FN\$EXPON	; T_cp = 885, lambda = 1 / T_cp
-------------------------	---------------------------------

В результате выполнения программы получим отчет, представленный на рисунке 2.4.

START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES
0.000	8825805.571	7	1	0

NAME	VALUE
EXPON	10000.000
MOJ	10001.000
OAP	10004.000
OCH	10003.000
TOBS	10002.000

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT COUNT	RETRY
	1	GENERATE	10000	0	0
	2	QUEUE	10000	0	0
	3	SEIZE	10000	0	0
	4	DEPART	10000	0	0
	5	ADVANCE	10000	0	0
	6	RELEASE	10000	0	0
	7	TERMINATE	10000	0	0

FACILITY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME	AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY	DELAY
OAP	10000	0.452	399.180	1	0	0	0	0	0

QUEUE	MAX CONT.	ENTRY	ENTRY(0)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE. (-0)	RETRY
OCH	11	0	10000	5377	0.369	325.366	703.799

FEC XN	PRI	BDT	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE
10001	0	8826862.614	10001	0	1		

Рисунок 2.4 – Результат выполнения программы модели СМО М/М/1 с $\rho = 0.45$

Таким образом, согласно полученному отчету, имеют место следующие параметры СМО М/М/1 с уменьшенным ρ на 10%:

$$w_{cp} = 325.366$$

$$u_{cp} = w_{cp} + v_{cp} = 325.366 + 399.180 = 724.546$$

$$l_{cp} = 0.369$$

$$l_{max} = 11$$

$$m_{cp} = l_{cp} + \rho = 0.369 + 0.452 = 0.821$$

Вычислим изменения данных параметров в процентах относительно исходного $\rho_2 = 0.5$:

$$\Delta w_{cp} = \frac{325.366}{419.971} * 100\% \approx 77.5\%$$

$$\Delta u_{cp} = \frac{724.546}{822.705} * 100\% \approx 88.1\%$$

$$\Delta l_{cp} = \frac{0.369}{0.531} * 100\% \approx 69.5\%$$

$$\Delta l_{max} = \frac{11}{14} * 100\% \approx 78.6\%$$

$$\Delta m_{cp} = \frac{0.821}{1.04} * 100\% \approx 78.9\%$$

Снижение коэффициента нагрузки ρ на 10% из разных начальных точек дает принципиально разный эффект. При уменьшении ρ с 0.9 до 0.81 параметры системы резко упали. В то же время снижение ρ с 0.5 до 0.45 вызвало гораздо меньшее изменение параметров системы.

Это наглядно демонстрирует особенность СМО М/М/1: чувствительность к изменению нагрузки резко возрастает по мере приближения ρ к единице. При высоких нагрузках даже незначительное снижение коэффициента загрузки ОА приводит к существенному улучшению характеристик системы, тогда как при умеренных нагрузках эффект от снижения ρ выражен значительно слабее.

Построим графики зависимостей параметров СМО М/М/1 от коэффициента загрузки по результатам имитационного моделирования, а также по аналитическим моделям (рисунок 2.5).

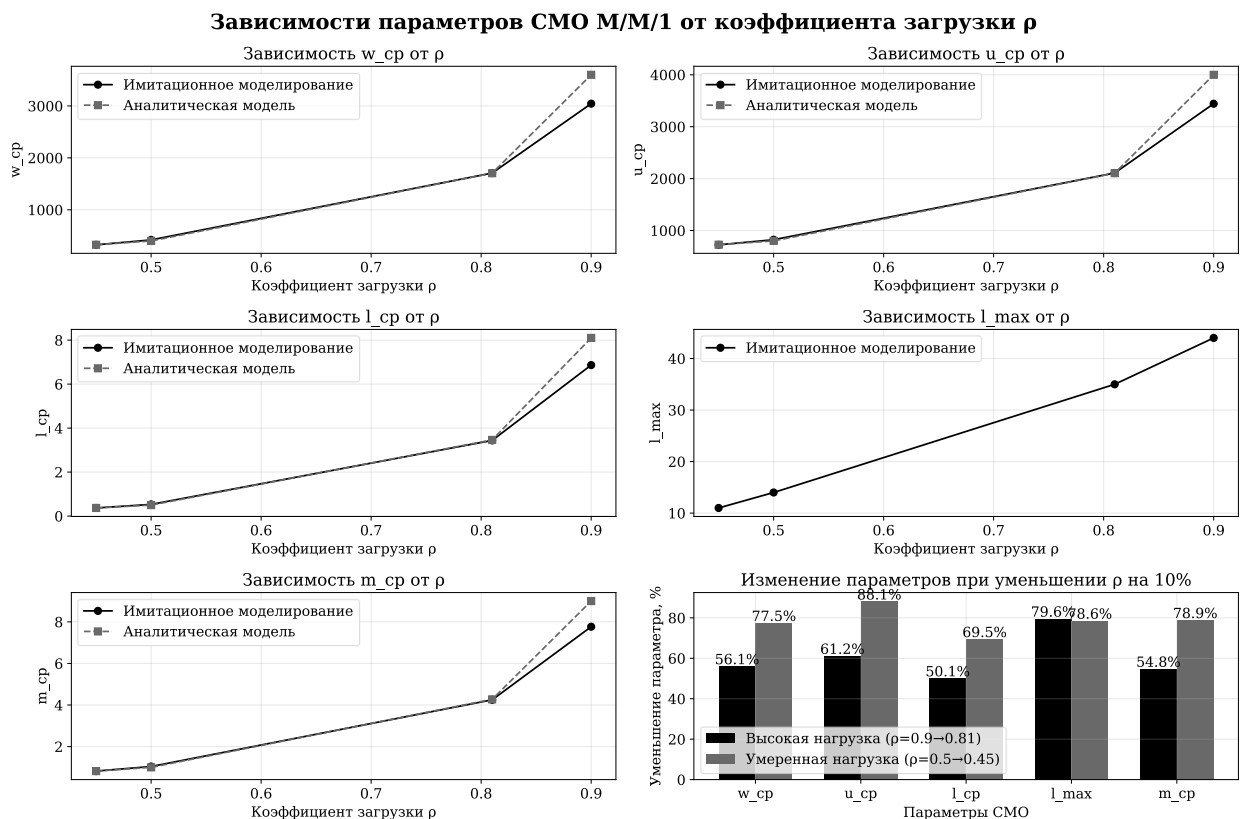


Рисунок 2.5 – График зависимостей параметров СМО М/М/1 от коэффициента загрузки

3. Модель простейшем СМО M/U/1

Разработаем имитационную GPSS-модель простейшей СМО M/U/1.

Листинг полученной программы представлен ниже:

```
EXPON FUNCTION RN1,C24
      0,0/.1,.104/.2,.222/.3,.335/.4,.509/.5,.69/.6,.915/.7,1.2/.75,1.38
      .8,1.6/.84,1.85/.88,2.12/.9,2.3/.92,2.52/.94,2.81/.95,2.99/.96,3.2
      .97,3.5/.98,3.9/.99,4.6/.995,5.3/.998,6.2/.999,7/.9998,8

MOJ VARIABLE 400                                ; Мат. ожидание v_cp

GENERATE 120,FN$EXPON                            ; T_cp = 120, lambda = 1 / T_cp
QUEUE OCH
SEIZE OAP
DEPART OCH

ADVANCE V$MOJ,V$MOJ                              ; равномерное распределение от 0
до 2 * v_cp
RELEASE OAP
TERMINATE 1

START 10000
```

Регулируя $\lambda = \frac{1}{T_{cp}}$, зададим коэффициент загрузки ОА $\rho = \lambda v_{cp} = 0.9$.

Таким образом:

$$\rho = 400\lambda = 0.9 \rightarrow \lambda = \frac{0.9}{400} = 0.00225$$

$$T_{cp} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.00225} \approx 444$$

Изменим в модели средний период между поступлениями заявок T_{cp} :

```
GENERATE 444,FN$EXPON                ; T_cp = 444, lambda = 1 / T_cp
```

В результате выполнения программы получим отчет, представленный на рисунке 3.1.

START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES
0.000	4501512.938	7	1	0

NAME	VALUE
EXPON	10000.000
MOJ	10001.000
OAP	10003.000
OCH	10002.000

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT COUNT	RETRY
	1	GENERATE	10011	0	0
	2	QUEUE	10011	10	0
	3	SEIZE	10001	1	0
	4	DEPART	10000	0	0
	5	ADVANCE	10000	0	0
	6	RELEASE	10000	0	0
	7	TERMINATE	10000	0	0

FACILITY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME	AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY	DELAY
OAP	10001	0.886	398.839	1	10001	0	0	0	10

QUEUE	MAX CONT.	ENTRY	ENTRY(0)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE.(-0)	RETRY
OCH	34	11	10011	1125	4.709	2117.229	2385.278

CEC XN	PRI	M1	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE
10001	0	4496646.570	10001	3	4		

FEC XN	PRI	BDT	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE
10012	0	4502202.466	10012	0	1		

Рисунок 3.1 – Результат выполнения программы модели СМО М/У/1 с $\rho = 0.9$

Таким образом, согласно полученном отчету, имеют место следующие параметры СМО М/У/1:

$$w_{cp} = 2117.229$$

$$u_{cp} = w_{cp} + v_{cp} = 2117.229 + 398.839 = 2516.068$$

$$l_{cp} = 4.709$$

$$l_{max} = 34$$

$$m_{cp} = l_{cp} + \rho = 4.709 + 0.886 = 5.595$$

Результаты моделирования показывают, что при одинаковой нагрузке ($\rho = 0.9$) СМО М/У/1 работает эффективнее СМО М/М/1: среднее время ожидания и средняя длина очереди в ней значительно меньше. Это объясняется тем, что экспоненциальное распределение времени обслуживания имеет высокую дисперсию, что приводит к частым длительным операциям. Равномерное распределение с меньшим разбросом значений делает работу системы более предсказуемой и устойчивой.

4. Модель простейшей СМО М/Нормальный/1

Разработаем имитационную GPSS-модель простейшей СМО М/Нормальный/1. Листинг полученной программы представлен ниже:

```
EXPON FUNCTION RN1,C24
    0,0/.1,.104/.2,.222/.3,.335/.4,.509/.5,.69/.6,.915/.7,1.2/.75,1.38
    .8,1.6/.84,1.85/.88,2.12/.9,2.3/.92,2.52/.94,2.81/.95,2.99/.96,3.2
    .97,3.5/.98,3.9/.99,4.6/.995,5.3/.998,6.2/.999,7/.9998,8

NORM FUNCTION RN1,C21
    0,-3/0.00621,-2.5/.02275,-2
    .06681,-1.5/.11507,-1.2/.15866,-1/.21186,-.8/.27425,-.6
    .34458,-.4/.42074,-.2/.5,0/.57926,.2/.65542,.4
    .72575,.6/.78814,.8/.84134,1/.88493,1.2/.93319,1.5
    .97725,2/.99379,2.5/.99865,3

MOJ VARIABLE 400 ; Мат. ожидание v_ср
SKO VARIABLE V$MOJ/3 ; СКО = v_ср/3
TOBS VARIABLE V$MOJ + FN$NORM # V$SKO ; v = v_ср + f_норм * СКО

GENERATE 120,FN$EXPON ; T_ср = 120, lambda = 1 / T_ср
QUEUE OCH
SEIZE OAP
DEPART OCH

ADVANCE V$TOBS ; случайное время обслуживания v
в ОА
RELEASE OAP
TERMINATE 1

START 10000
```

Регулируя $\lambda = \frac{1}{T_{\text{ср}}}$, зададим коэффициент загрузки ОА $\rho = \lambda v_{\text{ср}} = 0.9$.

Таким образом:

$$\rho = 400\lambda = 0.9 \rightarrow \lambda = \frac{0.9}{400} = 0.00225$$

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.00225} \approx 444$$

Изменим в модели средний период между поступлениями заявок $T_{\text{ср}}$:

```
GENERATE 444,FN$EXPON ; T_ср = 444, lambda = 1 / T_ср
```

В результате выполнения программы получим отчет, представленный на рисунке 4.1.

START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES
0.000	4438326.792	7	1	0

NAME	VALUE
EXPON	10000.000
MOJ	10002.000
NORM	10001.000
OAP	10006.000
OCH	10005.000
SKO	10003.000
TOBS	10004.000

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT	COUNT	RETRY
	1	GENERATE	10000		0	0
	2	QUEUE	10000		0	0
	3	SEIZE	10000		0	0
	4	DEPART	10000		0	0
	5	ADVANCE	10000		0	0
	6	RELEASE	10000		0	0
	7	TERMINATE	10000		0	0

FACILITY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME	AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY	DELAY
OAP	10000	0.897	397.980	1	0	0	0	0	0

QUEUE	MAX CONT.	ENTRY	ENTRY(0)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE. (-0)	RETRY
OCH	29	0	10000	1025	4.181	1855.545	2067.460

FEC XN	PRI	BDT	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE
10001	0	4438390.817	10001	0	1		

Рисунок 4.1 – Результат выполнения программы модели СМО

М/Нормальный/1 с $\rho = 0.9$

Таким образом, согласно полученному отчету, имеют место следующие параметры СМО М/Нормальный/1:

$$w_{cp} = 1855.545$$

$$u_{cp} = w_{cp} + v_{cp} = 1855.545 + 397.980 = 2253.525$$

$$l_{cp} = 4.181$$

$$l_{max} = 29$$

$$m_{cp} = l_{cp} + \rho = 4.181 + 0.897 = 5.078$$

Сравнение моделей СМО М/М/1, СМО М/У/1 и СМО М/Нормальный/1 при коэффициенте загрузки $\rho = 0.9$ показывает прямую зависимость эффективности системы от вариативности времени обслуживания. Наихудшие показатели у СМО М/М/1 с экспоненциальным распределением из-за высокой дисперсии, приводящей к длительным простоям. СМО М/У/1 с равномерным распределением демонстрирует результаты лучше, так как время обслуживания более предсказуемо. Наилучшая эффективность достигается в СМО М/Нормальный/1, где низкая дисперсия и симметричность нормального

распределения минимизируют вероятность экстремально трудоемких заявок, делая систему более стабильной.

5. Модель простейшей СМО M/D/1

Разработаем имитационную GPSS-модель простейшей СМО M/D/1.

Листинг полученной программы представлен ниже:

```

EXPON FUNCTION RN1,C24
      0,0/.1,.104/.2,.222/.3,.335/.4,.509/.5,.69/.6,.915/.7,1.2/.75,1.38
      .8,1.6/.84,1.85/.88,2.12/.9,2.3/.92,2.52/.94,2.81/.95,2.99/.96,3.2
      .97,3.5/.98,3.9/.99,4.6/.995,5.3/.998,6.2/.999,7/.9998,8

MOJ VARIABLE 400                                ; Мат. ожидание v_ср

GENERATE 120,FN$EXPON                            ; T_ср = 120, lambda = 1 / T_ср
QUEUE OCH
SEIZE OAP
DEPART OCH

ADVANCE V$MOJ                                    ; детерминированное время
обслуживания = v_ср
RELEASE OAP
TERMINATE 1

START 10000

```

Регулируя $\lambda = \frac{1}{T_{\text{ср}}}$, зададим коэффициент загрузки ОА $\rho = \lambda v_{\text{ср}} = 0.9$.

Таким образом:

$$\rho = 400\lambda = 0.9 \rightarrow \lambda = \frac{0.9}{400} = 0.00225$$

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.00225} \approx 444$$

Изменим в модели средний период между поступлениями заявок $T_{\text{ср}}$:

```

GENERATE 444,FN$EXPON                            ; T_ср = 444, lambda = 1 / T_ср

```

В результате выполнения программы получим отчет, представленный на рисунке 5.1.

START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES
0.000	4442711.923	7	1	0

NAME	VALUE
EXPON	10000.000
MOJ	10001.000
OAP	10003.000
OCH	10002.000

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT COUNT	RETRY
	1	GENERATE	10014	0	0
	2	QUEUE	10014	13	0
	3	SEIZE	10001	1	0
	4	DEPART	10000	0	0
	5	ADVANCE	10000	0	0
	6	RELEASE	10000	0	0
	7	TERMINATE	10000	0	0

FACILITY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME	AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY	DELAY
OAP	10001	0.900	399.960	1	10001	0	0	0	13

QUEUE	MAX CONT.	ENTRY	ENTRY(0)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE. (-0)	RETRY
OCH	27	14	10014	965	4.158	1844.487	2041.186

CEC XN	PRI	M1	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE
10001	0	4437255.995	10001	3	4		

FEC XN	PRI	BDT	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE
10015	0	4443436.574	10015	0	1		

Рисунок 5.1 – Результат выполнения программы модели СМО М/D/1 с $\rho = 0.9$

Таким образом, согласно полученному отчету, имеют место следующие параметры СМО М/D/1:

$$w_{cp} = 1844.487$$

$$u_{cp} = w_{cp} + v_{cp} = 1844.487 + 399.960 = 2244.447$$

$$l_{cp} = 4.158$$

$$l_{max} = 27$$

$$m_{cp} = l_{cp} + \rho = 4.158 + 0.9 = 5.058$$

Сравнение моделей СМО М/М/1, СМО М/U/1, СМО М/Нормальный/1 и СМО М/D/1 наглядно демонстрирует ключевое влияние характера распределения времени обслуживания заявки на эффективность системы. Наихудшие показатели у СМО М/М/1 с экспоненциальным распределением из-за его высокой дисперсии, приводящей к длительным обработкам. СМО М/U/1 с равномерным распределением показывает уже лучшие результаты, так как время обслуживания более сконцентрировано вокруг среднего. СМО М/Нормальный/1 с низкой дисперсией оказывается еще эффективнее.

Наилучший результат демонстрирует СМО M/D/1 с детерминированным временем обслуживания заявок, где полное отсутствие случайности делает работу системы абсолютно предсказуемой и минимизирует задержки. Таким образом, производительность системы обратно пропорциональная вариативности времени обслуживания.

6. Построение графиков зависимостей для различных СМО

По полученным результатам для различных СМО построим графики зависимостей параметров систем как функций от СКО σ длительности обслуживания заявок в ОА. СКО длительности обслуживания заявок в ОА определяется следующим образом:

- Для СМО M/M/1 $\sigma = v_{\text{ср}} = 400$
- Для СМО M/U/1 $\sigma = \frac{v_{\text{ср}}}{\sqrt{3}} \approx 230.940$
- Для СМО M/Нормальный/1 $\sigma = \frac{v_{\text{ср}}}{3} \approx 133.333$
- Для СМО M/D/1 $\sigma = 0$

Полученные графики представлены на рисунке 6.1.

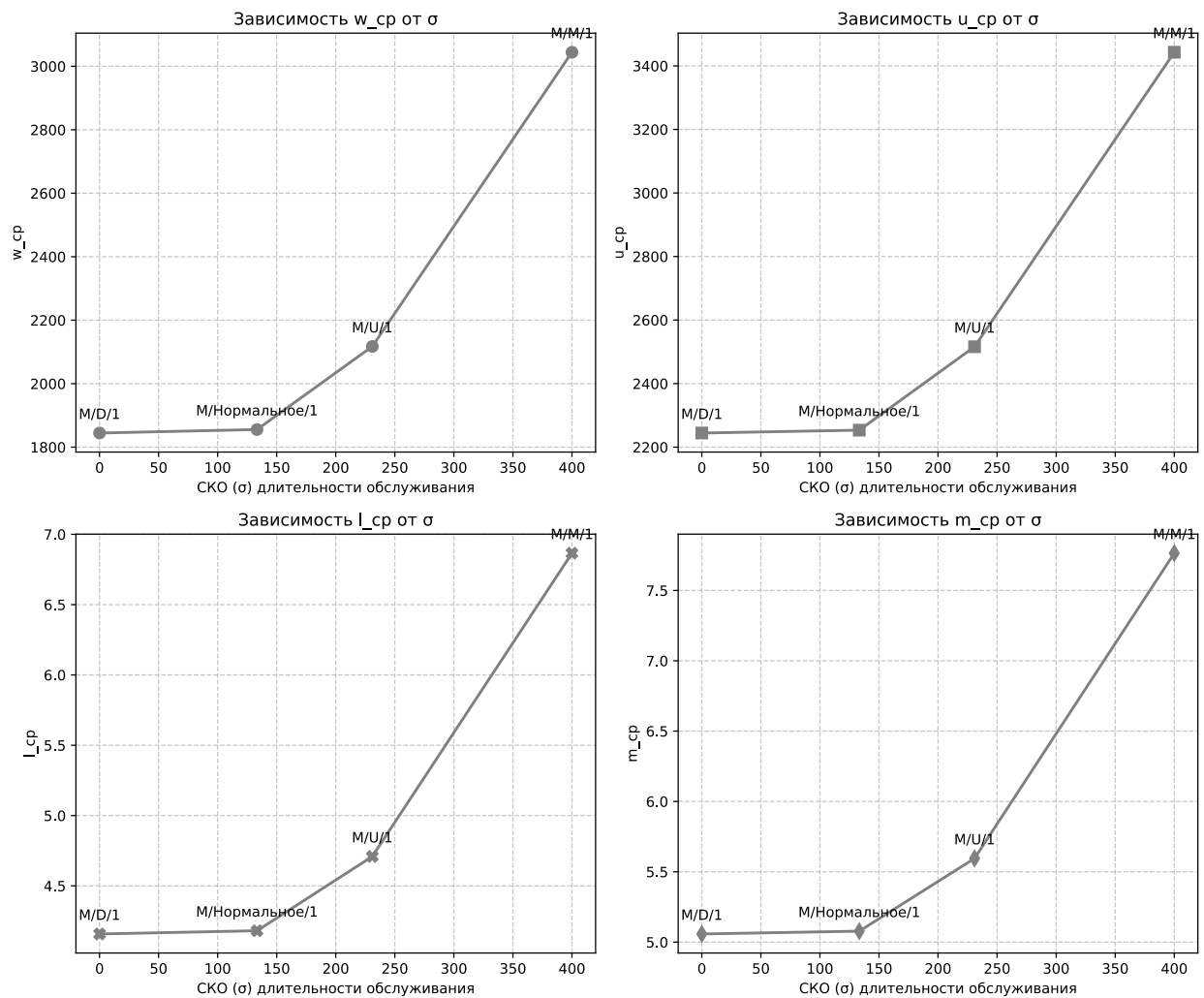


Рисунок 6.1 – Графики зависимостей параметров СМО от σ

Как известно, для общего случая – СМО M/G/1 аналитический анализ модели СМО позволяет найти время ожидания в очереди в следующем виде (формула Поллачека-Хинчина):

$$w_{cp} = \frac{\lambda v_{cp}^2 * (1 + \gamma^2)}{2 * (1 - \rho)}$$

где $\gamma = \frac{\sigma}{v_{cp}}$.

Используем данную формулу для аналитического определения параметров различных СМО. По результатам проведенных расчетов построим графики зависимостей параметров СМО от СКО σ (рисунок 6.2).

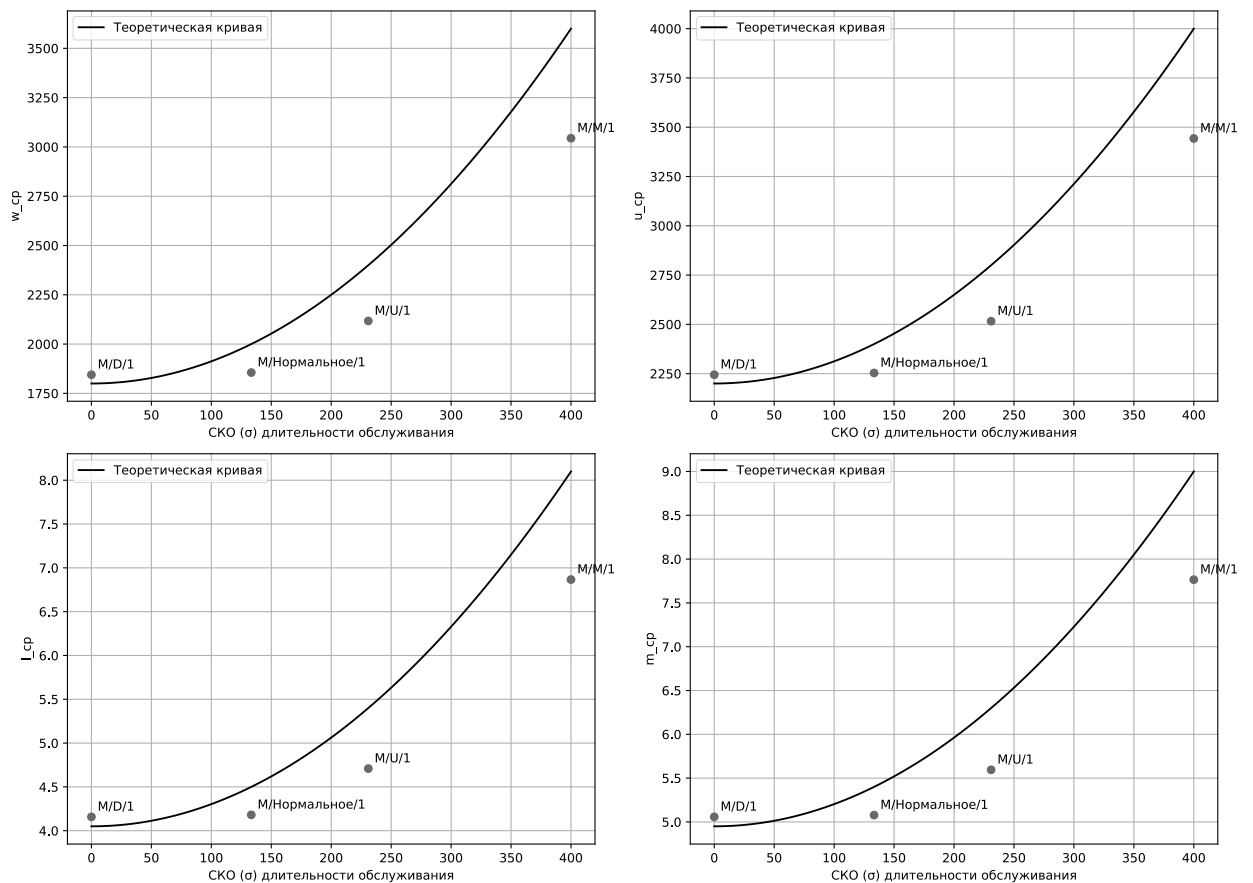


Рисунок 6.2 – Графики зависимостей параметров СМО по формуле

Поллачека-Хинчина от σ

Анализ графиков (рисунки 6.1-6.2), построенных на основе экспериментальных данных и теоретической формулы Поллачека-Хинчина, показывает общую тенденцию: все характеристики СМО монотонно возрастают с увеличением среднеквадратического отклонения σ времени обслуживания. Экспериментальные точки располагаются достаточно близко к кривым Поллачека-Хинчина, что подтверждает пригодность данной формулы для описания поведения систем M/G/1. Однако наблюдается небольшое отклонение экспериментальных данных от теоретических предсказаний для СМО M/M/1, где формула Поллачека-Хинчина дает завышенные значения по сравнению с экспериментальными данными.

7. Модель простейшей СМО D/D/1

Разработаем имитационную GPSS-модель простейшей СМО D/D/1. Листинг полученной программы представлен ниже:

```
MOJ VARIABLE 400
```

```
; Мат. ожидание v_ср
```

```

GENERATE 120 ; T_cp = 120, lambda = 1 / T_cp
QUEUE OCH
SEIZE OAP
DEPART OCH

ADVANCE V$MOJ ; детерминированное время
обслуживания = v_cp
RELEASE OAP
TERMINATE 1

START 10000

```

Регулируя $\lambda = \frac{1}{T_{cp}}$, зададим коэффициент загрузки ОА $\rho = \lambda v_{cp} = 0.9$.

Таким образом:

$$\rho = 400\lambda = 0.9 \rightarrow \lambda = \frac{0.9}{400} = 0.00225$$

$$T_{cp} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.00225} \approx 444$$

Изменим в модели средний период между поступлениями заявок T_{cp} :

```

GENERATE 444 ; T_cp = 444, lambda = 1 / T_cp

```

В результате выполнения программы получим отчет, представленный на рисунке 7.1.

START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES
0.000	4440400.000	7	1	0

NAME	VALUE
MOJ	10000.000
OAP	10002.000
OCH	10001.000

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT COUNT	RETRY
1	GENERATE	10000	0	0	
2	QUEUE	10000	0	0	
3	SEIZE	10000	0	0	
4	DEPART	10000	0	0	
5	ADVANCE	10000	0	0	
6	RELEASE	10000	0	0	
7	TERMINATE	10000	0	0	

FACILITY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME	AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY	DELAY
OAP	10000	0.901	400.000	1	0	0	0	0	0

QUEUE	MAX CONT.	ENTRY	ENTRY(0)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE. (-0)	RETRY	
OCH	1	0	10000	10000	0.000	0.000	0.000	0

FEC XN	PRI	BDT	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE
10001	0	4440444.000	10001	0	1		

Рисунок 7.1 – Результат выполнения программы модели СМО D/D/1 с $\rho =$

0.9

Таким образом, согласно полученному отчету, имеют место следующие параметры СМО D/D/1:

$$w_{cp} = 0$$

$$u_{cp} = w_{cp} + v_{cp} = 0 + 400 = 400$$

$$l_{cp} = 0$$

$$l_{max} = 1$$

$$m_{cp} = l_{cp} + \rho = 0 + 0.9 = 0.9$$

8. Анализ полученных результатов

Анализ результатов моделирования различных типов СМО при коэффициенте загрузки $\rho = 0.9$ демонстрирует фундаментальную зависимость эффективности системы от вариативности времени обслуживания заявок. Наихудшие показатели наблюдаются в СМО M/M/1 с экспоненциальным распределением ($\sigma = 400$), где высокое СКО приводит к значительным задержкам. СМО M/U/1 с равномерным распределением ($\sigma \approx 230.94$) показывает улучшение характеристик. Еще лучшие результаты у СМО M/Нормальное/1 ($\sigma \approx 133.333$). Наивысшая эффективность достигается в СМО M/D/1 с детерминированным обслуживанием ($\sigma = 0$). При этом СМО D/D/1 с детерминированными законами распределения вообще не образует очередь. Теоретические расчеты по формуле Поллачека-Хинчина достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными, подтверждая обратную зависимость производительности системы от вариативности времени обслуживания заявок. Таким образом, снижение вариативности времени обслуживания заявок позволяет значительно улучшить все ключевые показатели эффективности СМО даже при высокой нагрузке системы.

Вывод

Были изучены и произведено сравнение характеристик простейшей СМО:

- были исследованы зависимости основных характеристик СМО от коэффициента загрузки ОА;
- были исследованы зависимости основных характеристик СМО от степени случайности длительности обслуживания заявок и интервала между приходами заявок.