Дисциплина: Численные методы

Лабораторное задание №1

Отчет

Тема: решение систем линейных уравнений с разреженными матрицам специального вида

Выполнил:

студент 3 курса 62 группы

Шимкин Р.Р.

Проверила:

старший преподаватель

Медведева О.А.

1. Постановка задачи

Необходимо написать программу для решения системы m линейных уравнений с m неизвестными, представленной разреженной матрицей специального вида: три вектора вдоль главной диагонали, один вектор на k-ом столбце матрицы. На вход даются векторы a,b,c и q, задающие матрицу, вектор f свободных коэффициентов и позиция k столбца q. Выход должен представлять собой решение данного матричного уравнения, если оно может быть посчитано на данных векторах.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| b | c |  | q |  |  |  |
| a | b | c | q |  |  |  |
|  | a | b | c |  |  |  |
|  |  | a | b | c |  |  |
|  |  |  | a | b | c |  |
|  |  |  | q | a | b | c |
|  |  |  | q |  | a | b |

1. Теоретическая часть

Алгоритм основан на методе Гаусса решения систем линейных уравнений.

СЛАУ – система ур-ий, каждое из которых является линейный алгебраическим уравнением 1 степени.

Матрица системы – матрица коэффициентов СЛАУ, в которой строки соответствуют уравнения, а столбцы – неизвестным.

Решение СЛАУ ранга n – совокупность n чисел c1…cn, таких что их соответствующая подстановка вместо x1…xn в СЛАУ обращает все уравнения в тождества.

Метод Гаусса – прямой метод решения СЛАУ (даёт точное решение системы), заключающийся в преобразовании матрицы системы к треугольному виду путём вычитания строк с обнулением элементов ведущего столбца ниже диагонали и в последующем вычислении компонент вектора решения снизу вверх (в случае верхнетреугольной матрицы).

Рассматриваются квадратные матрицы.

1. Алгоритм

Алгоритм реализует обе фазы метода Гаусса: прямой и обратный ход. Фаза прямого хода разделена на 2 части: до пересечения столбца q с главной диагональю и после пересечения. В 1 части на i-ой итерации i-ая строка, умноженная на соответствующий коэффициент, вычитается из следующей строке, чтобы обнулить i-ый коэффициент под главной диагональю. Во 2 части на каждой итерации i-ая строка вычитается из всех последующих, а появившиеся снизу ненулевые коэффициенты записываются на соответствующие позиции (в конец) вектора q на место его освободившихся (обнулённых на данной итерации) элементов. Обратный ход реализован стандартным вычислением элементов вектора решения x по правой верхнетреугольной матрице снизу вверх.

часть 1:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1** | **1** |  | **3** |  |  |  |  |  | **1** |
| *2* | *3* | *3* | *9* |  |  |  |  | *1* |
|  | 3 | 8 | 8 |  |  |  |  | -1 |
|  |  | 2 | 5 | 6 |  |  |  | -4 |
|  |  |  | 2 | 5 | 1 |  |  | 1 |
|  |  |  | 8 | 12 | -3 | 1 |  | -2 |
|  |  |  | 2 |  | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  |  |  | 2 |  |  | 4 | 3 | 1 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 |  | 3 |  |  |  |  |  | 1 |
| *0* | ***1*** | ***3*** | ***3*** |  |  |  |  | ***-1*** |
|  | *3* | *8* | *8* |  |  |  |  | *-1* |
|  |  | 2 | 5 | 6 |  |  |  | -4 |
|  |  |  | 2 | 5 | 1 |  |  | 1 |
|  |  |  | 8 | 12 | -3 | 1 |  | -2 |
|  |  |  | 2 |  | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  |  |  | 2 |  |  | 4 | 3 | 1 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 |  | 3 |  |  |  |  |  | 1 |
| 0 | 1 | 3 | 3 |  |  |  |  | -1 |
|  | *0* | **-1** | **-1** |  |  |  |  | **2** |
|  |  | *2* | *5* | *6* |  |  |  | *-4* |
|  |  |  | 2 | 5 | 1 |  |  | 1 |
|  |  |  | 8 | 12 | -3 | 1 |  | -2 |
|  |  |  | 2 |  | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  |  |  | 2 |  |  | 4 | 3 | 1 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 |  | 3 |  |  |  |  |  | 1 |
| 0 | 1 | 3 | 3 |  |  |  |  | -1 |
|  | 0 | 1 | 1 |  |  |  |  | -2 |
|  |  | 0 | 3 | 6 |  |  |  | 0 |
|  |  |  | 2 | 3 | 1 |  |  | 1 |
|  |  |  | 8 | 12 | -3 | 1 |  | -2 |
|  |  |  | 2 |  | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  |  |  | 2 |  |  | 4 | 3 | 1 |

часть 2:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 |  | 3 |  |  |  |  |  | 1 |
| 0 | 1 | 3 | 3 |  |  |  |  | -1 |
|  | 0 | 1 | 1 |  |  |  |  | -2 |
|  |  | 0 | **1** | **2** |  |  |  | **0** |
|  |  |  | *2* | *5* | *1* |  |  | *1* |
|  |  |  | *8* | *12* | *-3* | *1* |  | *-2* |
|  |  |  | *2* |  | *1* | *1* | *1* | *1* |
|  |  |  | *2* |  |  | *4* | *3* | *1* |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 |  | 3 |  |  |  |  |  | 1 |
| 0 | 1 | 3 | 3 |  |  |  |  | -1 |
|  | 0 | 1 | 1 |  |  |  |  | -2 |
|  |  | 0 | 1 | 2 |  |  |  | 0 |
|  |  |  | 0 | **1!** | **1** |  |  | ***1*** |
|  |  |  | 0 | *-4!* | *-3* | *1* |  | *-2* |
|  |  |  | 0 | *-4!* | *1* | *1* | *1* | *1* |
|  |  |  | 0 | *-4!* |  | *4* | *3* | *1* |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 |  | 3 |  |  |  |  |  | 1 |
| 0 | 1 | 3 | 3 |  |  |  |  | -1 |
|  | 0 | 1 | 1 |  |  |  |  | -2 |
|  |  | 0 | 1 | 2 |  |  |  | 0 |
|  |  |  | 0 | 1! | 1 |  |  | 1 |
|  |  |  |  | 0 | **1!** | **1** |  | **2** |
|  |  |  |  | 0 | *5!* | *1* | *1* | *5* |
|  |  |  |  | 0 | *4!* | *4* | *3* | *5* |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 |  | 3 |  |  |  |  |  | 1 |
| 0 | 1 | 3 | 3 |  |  |  |  | -1 |
|  | 0 | 1 | 1 |  |  |  |  | -2 |
|  |  | 0 | 1 | 2 |  |  |  | 0 |
|  |  |  | 0 | 1! | 1 |  |  | 1 |
|  |  |  |  | 0 | 1! | 1 |  | 2 |
|  |  |  |  |  | 0 | -4! | 1 | -5 |
|  |  |  |  |  | 0 | 0! | 3 | -3 |

обратный ход:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 |  | 3 |  |  |  |  |  | 1 |
|  | 1 | 3 | 3 |  |  |  |  | -1 |
|  |  | 1 | 1 |  |  |  |  | -2 |
|  |  |  | 1 | 2 |  |  |  | 0 |
|  |  |  |  | 1 | 1 |  |  | 1 |
|  |  |  |  |  | 1 | 1 |  | 2 |
|  |  |  |  |  |  | -4 | 1 | -5 |
|  |  |  |  |  |  |  | 3 | -3 |

x8 = -3/3 = -1

x7 = (-5 + 1)/-4 = 1

x6 = 2 – 1 = 1

x5 = 1 – 1 = 0

x4 = 0

x3 = -2

x2 = -1 – 3\*0 + 3\*2 = 5

x1 = 1 – 3\*0 – 5 = -4

алг Решение систем линейных уравнений с разреженными матрицами специального вида

вход: цел n>1 (ранг), вещ векторы a[0,n-1] b[0,n-1] c[0,n-1] q[0,n-1] f[0,n-1], цел k (позиция столбца q)

выход: вещ вектор x[0,n-1]

нач

цел i=0

нц пока i < k:

если b[i] == 0:

выход

если b[i] != 1 и b[i] != 0:

div = b[i]

b[i] = 1

c[i] /= div

если i == k-1:

q[i] = c[i]

иначе:

q[i] /= div

f[i] /= div

koef = a[i+1]

a[i+1] = 0

b[i+1] -= c[i] \* koef

если i == k-1:

q[i+1] = b[i+1]

иначе:

q[i+1] -= q[i]\*koef

f[i+1] -= f[i]\*koef

если i == k-2:

c[i+1] = q[i+1]

i = i+1

кц

i = k

нц пока i<n:

если q[i] != 1:

div = q[i]

q[i] = b[i] = 1

c[i] = c[i] / div

f[i] = f[i] / div

если i+1 < n:

koef = q[i+1]

a[i+1] = 0

q[i+1] = b[i+1] = b[i+1] – c[i]\*koef

f[i+1] = f[i+1] - f[i]\*koef

если i+2 < n:

koef = q[i+2]

q[i+2] = a[i+2] = a[i+2] – c[i]\*koef

f[i+2] = f[i+2] – f[i]\*koef

если i+3 < n:

j = i+3

нц пока < n:

f[j] = f[j] – f[i]\*q[j]

q[j] = q[j] – c[i]\*q[j]

i = i+1

кц

i=n-1

prev = 0

нц пока i>k-2:

x[i] = (f[i] – c[i]\*prev) / b[i]

prev = x[i]

i = i-1

кц

xq = x[i+2]

i=k-2

нц пока i >=0:

tmp = (f[i] – c[i]\*prev – q[i]\*xq) / b[i]

кон

1. Тестирование

Формула для относительных погрешностей:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № теста | Размерность | Диапазон | Средняя погрешность |
| 1 | 10 |  | 8.88e-16 |
| 2 | 10 |  | 2e-15 |
| 3 | 10 |  | 1.7e-15 |
| 4 | 100 |  | 1.19e-15 |
| 5 | 100 |  | 5.27e-14 |
| 6 | 100 |  | 9.2e-15 |
| 7 | 100 |  | 1.96e-13 |
| 8 | 100 |  | 7.93e-12 |
| 9 | 100 |  | 1.12e-12 |

Вывод: увеличение диапазона значений коэффициентов, ведёт к снижению точности решения, так как повышается частота появления слишком малых коэффициентов при вычитании строк и слишком, что приводит к погрешностям в вычислении соответствующих компонент результирующего вектора; увеличение размерности уравнений также снижает точность, так как усиливается присущий методу Гаусса эффект последующего увеличения больших коэффициентов при вычитании строк.