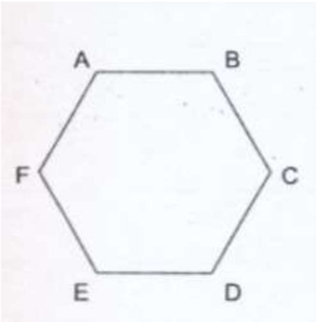
Resoluções Área de Polígonos – Ruan Soares

01. (UEL) O hexágono ABCDEF da figura ao lado é equilátero com lados de 5cm e seus ângulos internos de vértice A, B, D, E medem 135° cada um. A área desse hexágono, em centímetros quadrados, é igual a:



$\boldsymbol{a})\ \dfrac{25(\sqrt{2+1})}{2}$ $\boldsymbol{b})\dfrac{75}{2}$ $\boldsymbol{c})50$ $\boldsymbol{d})50\sqrt{2}$ $\boldsymbol{e})25(\sqrt{2}+1)$

$Sabemos\ que\ a\ soma\ dos$ â$ngulos\ internos\ de\ um\ polígono$ é $dada\ da\ seguinte\ forma$:

$S_i = (n-2)\cdot 180°$ $\quad onde\ \boldsymbol{n}$ é $o\ número\ de\ lados\ do\ polígono.\ Logo$:

$$S_i = (6-2)\cdot 180°$$

$$S_i = 4\cdot 180°$$

$$S_i = 720° \quad \therefore \quad A\ soma\ dos\ \text{â}ngulos\ internos\ do\ hexágono\ \text{é}\ 720°.$$

$Considerando\ que\ os$ â$ngulos\ \hat{A},\ \widehat{B}, \widehat{D}\ e\ \hat{E}\ medem\ 135°\ cada, temos$:

$$\hat{A} + \widehat{B} + \widehat{D} + \hat{E} + \hat{C} + \hat{F} = 720°$$

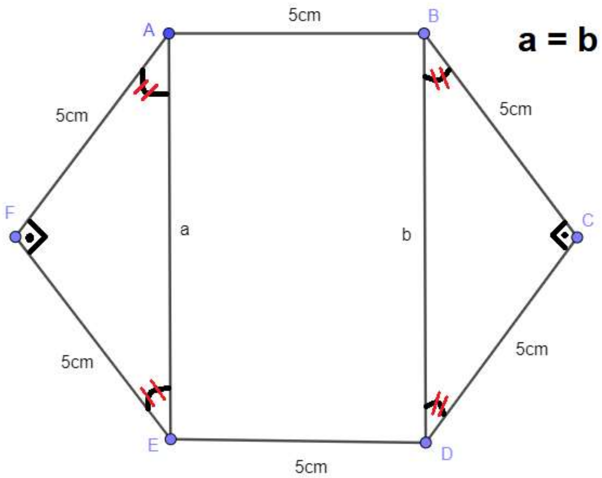
$$135° + 135° + 135° + 135° + \hat{C} + \hat{F} = 720°$$

$$540° + \hat{C} + \hat{F} = 720°$$

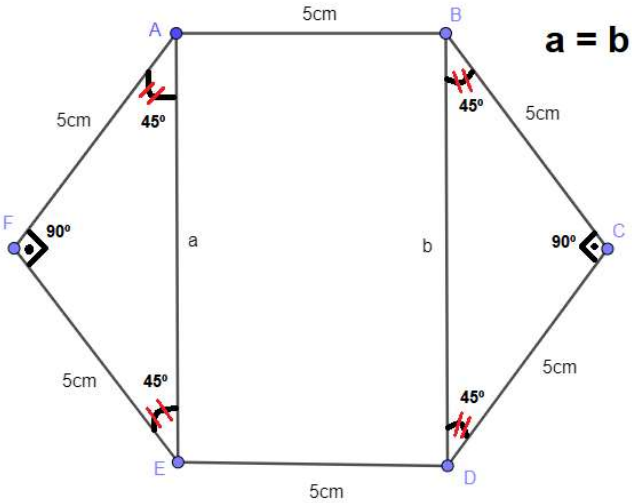
$$\hat{C} + \hat{F} = 720° - 540°$$

$$\hat{C} + \hat{F} = 180°$$

$A\ partir\ de\ então, podemos\ desenvovler\ a\ figura\ da\ seguinte\ forma$:



$Ao\ traçar\ os\ segmentos\ \boldsymbol{a}\ e\ \boldsymbol{b}, que\ são\ paralelos\ e\ congruentes, teremos\ que\ os\ triângulos\ FAE\ e\ CBD, além\ de\ isósceles, serão\ congruentes, pois\ seus\ 3\ lados\ correspondentes\ tem\ a\ mesma\ medida. Logo, os\ ângulos\ \hat{C}\ e\ \hat{F}, também\ serão\ congruentes, assim\ como\ os\ outros\ ângulos\ internos\ dos\ dois\ triângulos:$



$$\hat{C} = \hat{F} = x \quad \rightarrow \quad \hat{C} + \hat{F} = 180° \quad \therefore \quad 2x = 180° \quad \rightarrow \quad x = \frac{180°}{2} \quad \rightarrow \quad x = 90°$$

$Após\ isso, vamos\ encontrar\ a\ medida\ dos\ segmentos\ \boldsymbol{a}\ e\ \boldsymbol{b}, congruentes, através\ do\ Teorema\ de\ Pitágoras:$

$$a^2 = 5^2 + 5^2$$

$$a^2 = 50$$

$$a = \sqrt{50}$$

$$\boldsymbol{a = 5\sqrt{2}}$$

$$a = 5\sqrt{2} \quad \therefore \quad b = 5\sqrt{2} \qquad pois\ b = a$$

Para descobrir a área do hexágono, vamos calcular a área dos dois triângulos retângulos congruentes FAE e CDB:

$$S_{FAE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{FA} \cdot sen\alpha$$

$$S_{FAE} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{FAE} = \frac{1}{2} \cdot 25\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{FAE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$S_{FAE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}}$$

$$S_{FAE} = \frac{1}{2} \cdot 25$$

$$\boldsymbol{S_{FAE} = \frac{25}{2}} \qquad logo, \quad \boldsymbol{S_{CDB} = \frac{25}{2}}$$

Por fim, vamos calcular a área do retângulo ABDE:

$$S_{ABDE} = 5 \cdot 5\sqrt{2}$$

$$\boldsymbol{S_{ABDE} = 25\sqrt{2}}$$

Basta somar as três áreas:

$$S_{Exágono} = S_{FAE} + S_{CDB} + S_{ABDE}$$

$$S_{Exágono} = \frac{25}{2} + \frac{25}{2} + 25\sqrt{2}$$

$$S_{Exágono} = 25 + 25\sqrt{2}$$

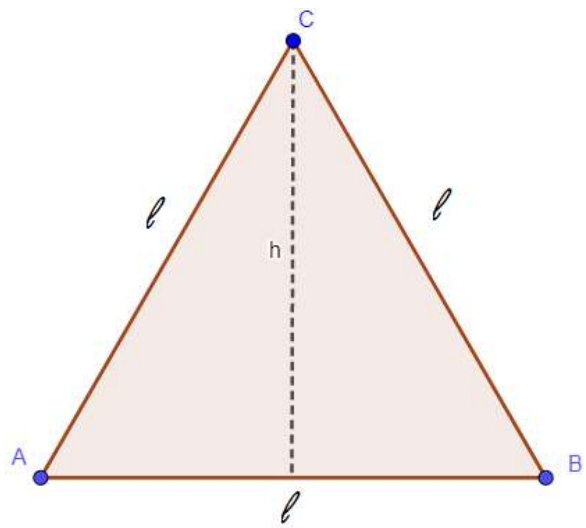
$$S_{Exágono} = 25(\sqrt{2} + 1)$$

$$\boldsymbol{R: e)\ 25(\sqrt{2} + 1)}$$

02. (FATEC) A altura de um triângulo equilátero e a diagonal de um quadrado tem medidas iguais. Se a área do triângulo equilátero é $16\sqrt{3}\,m^2$, então a área do quadrado, em metros quadrados é:

$$\boldsymbol{a})\ 6 \qquad \boldsymbol{b})24 \qquad \boldsymbol{c})54 \qquad \boldsymbol{d})96 \qquad \boldsymbol{e})150$$

$$Vamos\ econtrar\ a\ medida\ da\ altura\ do\ triângulo\ equilátero:$$



$Para\ encontrar\ a\ medida\ de\ sua\ altura, vamos\ utilizar\ a\ fórmula\ de\ área\ do\ triângulo$

$equilátero, com\ o\ objetivo\ de\ encontrar, primeiramente, a\ medida\ de\ seus\ lados:$

$$\boldsymbol{S}_\Delta = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \rightarrow \quad \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \rightarrow l^2\sqrt{3} = 4 \cdot 16\sqrt{3}$$

$$l^2\cancel{\sqrt{3}} = 4 \cdot 16\cancel{\sqrt{3}} \rightarrow l^2 = 4 \cdot 16 \rightarrow l^2 = 64 \rightarrow \boldsymbol{l = 8}$$

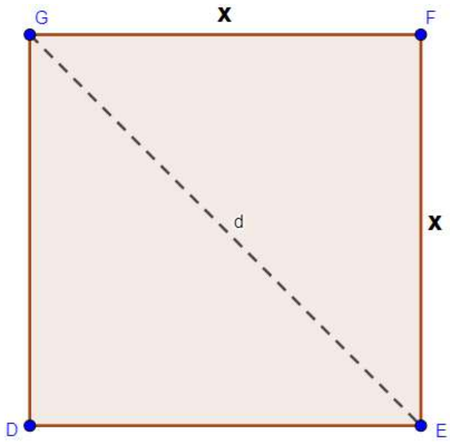
$Com\ a\ medida\ do\ lado\ do\ triângulo\ equilátero,$ é $possível\ encontrar\ sua\ altura:$

$$h_\Delta = \frac{l\sqrt{3}}{2} \rightarrow \quad h_\Delta = \frac{8\sqrt{3}}{2} \rightarrow \boldsymbol{h_\Delta = 4\sqrt{3}}$$

$$Lembramos\ que\ de\ acordo\ com\ o\ enunciado, a\ altura\ do\ triângulo\ equilátero$$

$$é\ igual\ a\ medida\ da\ diagonal\ do\ quadrado:$$

$$\boldsymbol{h = d}$$



$$Com\ isso, podemos\ descobrir\ a\ medida\ x\ dos\ lados\ do\ quadrado:$$

$$d = x\sqrt{2} = 4\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad x\sqrt{2} = 4\sqrt{3} \rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{4\sqrt{3}}}{\mathbf{\sqrt{2}}}$$

$$Racionalizando, temos:$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad = \frac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6} \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{x} = \mathbf{2\sqrt{6}}$$

$$Por\ fim, com\ o\ a\ medida\ do\ lado\ x, podemos\ encontrar\ a\ área\ do\ quadrado:$$

$$S_Q = x^2$$

$$S_Q = (2\sqrt{6})^2$$

$$S_Q = 4 \cdot 6$$

$$\boldsymbol{S_Q} = \mathbf{24}$$

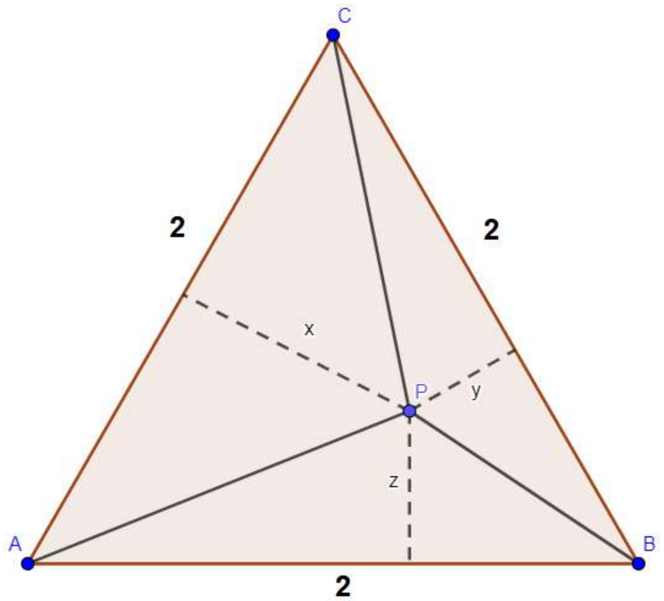
$$\boldsymbol{R}: \boldsymbol{b})\mathbf{24}$$

03. (UFSCAR) Seja um triângulo ABC equilátero de lado 2. No interior desse triângulo, cuja área é $\sqrt{3}$, foi escolhido arbitrariamente um ponto P. A soma das distâncias de P a cada um dos lados do triângulo vale:

$\boldsymbol{a})\ \sqrt{2} \quad \boldsymbol{b})\sqrt{3} \quad \boldsymbol{c})2 \quad \boldsymbol{d})3 \quad \boldsymbol{e})2\sqrt{3}$

Podemos representar esse triângulo, e o ponto P, na figura abaixo.

Vale lembrar que ela é apenas ilustrativa, e o ponto P pode ser arbitrário:



Os segmentos x, y e z são as ditâncias desse ponto P, qualquer, até os lados do triângulo. Os segmentos $\overline{PC}$, $\overline{PB}$ *e* $\overline{PA}$ *traçados são as distâncias desse mesmo ponto até cada um dos vértices do triângulo.*

Independente da posição do ponto P, e da medida dos segmentos $\overline{PC}$, $\overline{PB}$ *e* $\overline{PA}$, *podemos encontrar a soma das medidas de x, y e z utilizando a fórmula de área do triângulo:*

$$S_{\Delta} = S_{APC} + S_{BPC} + S_{APB}$$

$$S_{\Delta} = \frac{2x}{2} + \frac{2y}{2} + \frac{2z}{2}$$

$$S_{\Delta} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}z}{\cancel{2}}$$

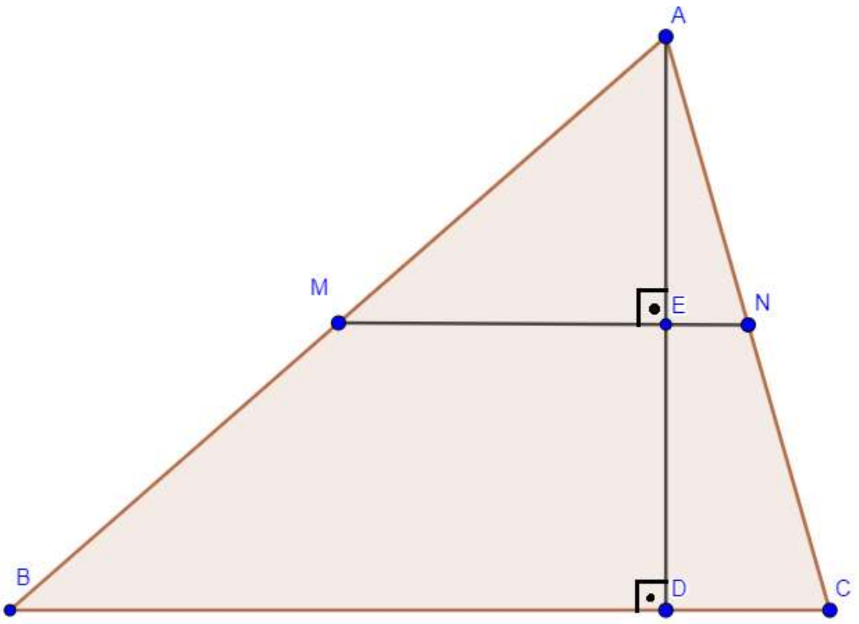
$$S_{\Delta} = x + y + z$$

Sabendo que $S_{\Delta} = \sqrt{3}$, *concluímos que:*

$$x + y + z = \sqrt{3}$$

$$\boldsymbol{R: b)\ \sqrt{3}}$$

04. (UNICAMP) Um triângulo escaleno ABC tem área igual a $96m^2$. Sejam M e N os pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente, faça uma figura e calcule a área do quadrilátero BMNC.



$$De\ acordo\ com\ o\ enunciado, os\ pontos\ M\ e\ N\ são\ pontos\ médios\ dos\ segmentos$$

$$\overline{AB}\ e\ \overline{AC}, e\ portanto, dividem\ eles\ pela\ metade. Sendo\ assim, podemos\ estabelecer$$

$$uma\ proporção\ entre\ os\ segmentos\ do\ triângulo\ ABC\ e\ AMN\ na\ razão\ \frac{2}{1}.$$

$$A\ partir\ de\ então, podemos\ traçar\ a\ altura\ do\ triângulo\ ABC, representada\ na$$

$$figura\ pelo\ segmento\ \overline{AD}, de\ forma\ que:$$

$$AD\ = \frac{2}{1}AE \qquad e \qquad BC = \frac{2}{1}MN$$

$$Sendo\ assim, temos\ que\ a\ área\ do\ triângulo\ ABC\ pode\ ser\ representada\ por:$$

$$S_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2} \quad \rightarrow \quad 96 = \frac{BC \cdot AD}{2} \quad \rightarrow \quad 96 = \frac{2MN \cdot 2AE}{2}$$

$$Desenvolvendo\ a\ equação:$$

$$2 \cdot 96 = 2MN \cdot 2AE \quad \rightarrow \quad 192 = 4(MN \cdot AE) \quad \rightarrow \quad \frac{192}{4} = \cancel{\frac{4(MN \cdot AE)}{4}}$$

$$MN \cdot AE = 48$$

$$Se\ a\ área\ do\ quadrilátero\ BMNC, em\ m^2, é\ igual\ a\ área\ do\ triângulo\ ABC\ menos$$

$$a\ área\ do\ triângulo\ AMN, temos:$$

$$S_{BMNC} = S_{ABC} - S_{AMN}$$

$$S_{BMNC} = 96 - \frac{MN \cdot AD}{2}$$

$$S_{BMNC} = 96 - \frac{48}{2}$$

$$S_{BMNC} = 96 - 24$$

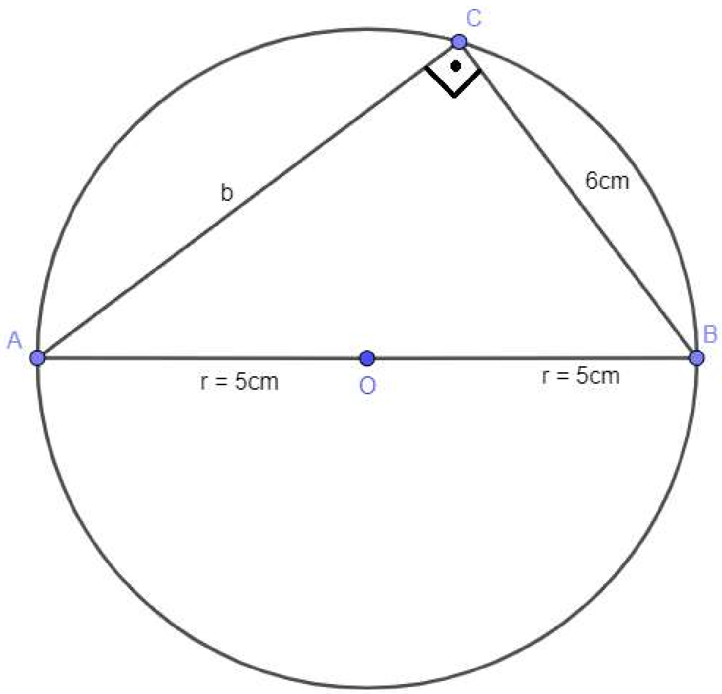
$$S_{BMNC} = 72$$

$$\boldsymbol{R: 72m^2}$$

05. (FUVEST) O triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 5 cm. Sabe-se que A e B são extremidades de um diâmetro e que a corda BC mede 6 cm. Então a área do triângulo ABC, em cm^2, vale:

$\boldsymbol{a})\ 24 \qquad \boldsymbol{b})12 \qquad \boldsymbol{c})\frac{5\sqrt{3}}{2} \qquad \boldsymbol{d})6\sqrt{2} \qquad \boldsymbol{e})2\sqrt{3}$

$$Podemos\ representar\ a\ figura\ da\ seguinte\ forma:$$



$$Sabendo\ que\ o\ segmento\ \overline{AB}\ será\ o\ diâmetro\ da\ circunferência, teremos\ um$$

$$triângulo\ inscrito\ em\ uma\ semicircunferência, logo, será\ um\ triângulo\ retângulo.$$

$$Com\ isso, podemos\ descobrir\ a\ medida\ do\ segmento\ \overline{AC}, em\ cm, com\ a\ ajuda$$

$$do\ Teorema\ de\ Pitágoras:$$

$$b^2 + 6^2 = (5 + 5)^2$$

$$b^2 + 36 = 100$$

$$b^2 = 100 - 36$$

$$b^2 = 64$$

$$\boldsymbol{b = 8}$$

$$Podemos, então, encontrar\ a\ área\ do\ triângulo\ ABC, em\ função\ do\ raio\ da$$

$$circunferência\ circunscrita\ (em\ cm^2):$$

$$S_{abc} = \frac{abc}{4R}$$

$$S_{abc} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{4 \cdot 5}$$

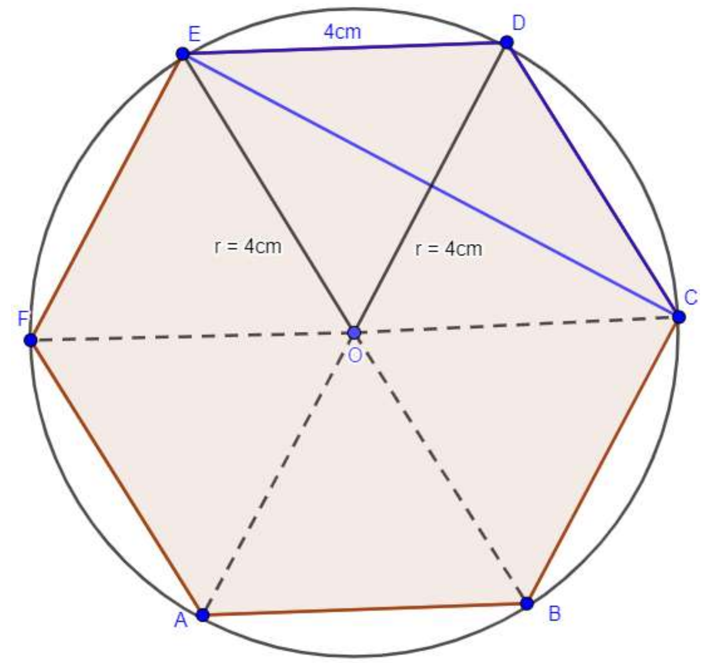
$$S_{abc} = \frac{480}{20}$$

$$S_{abc} = 24$$

$$\boldsymbol{R: a)\ 24}$$

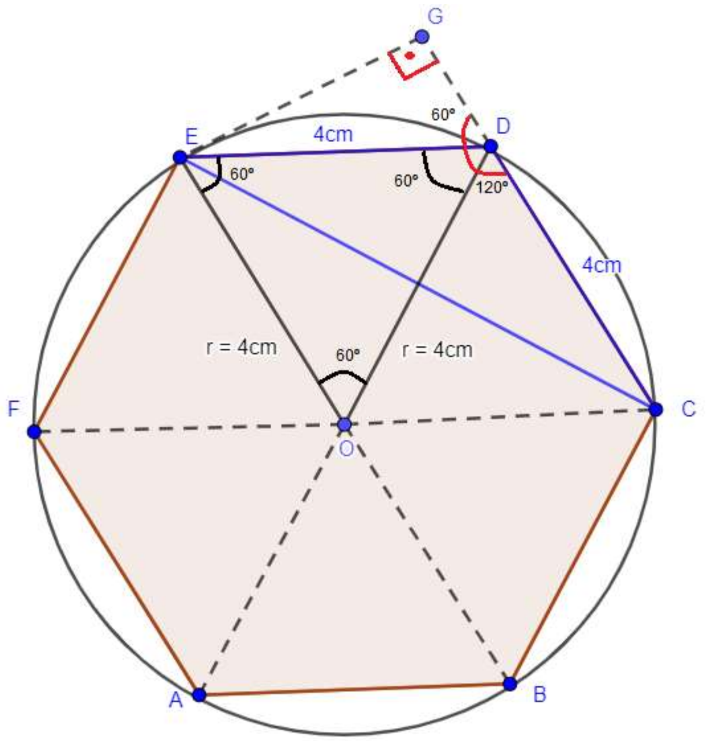
06. (UFMS) Considere um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio 4cm. Calcular o quadrado da área de um dos triângulos determinados por três vértices consecutivos do hexágono.

Podemos representar a figura, de acordo com o enunciado, da seguinte forma:



Por ser um hexágono regular, sua área total pode ser dividida em ***6 triângulos equiláteros****, sendo o triângulo* ΔEOD *um deles . Com isso, descobrimos que os lados do hexágono medem 4cm, assim como o raio. Também percebemos que o triângulo*

ΔECD *terá sua área total igual a área do triângulo equilátero:*



$$S_{EOD} = \frac{4\sqrt{3}}{4} \quad e \quad S_{ECD} = \frac{4\sqrt{3}}{4}$$

$$2p = 24 \quad e \quad p = 12$$

$$Logo, a\ medida\ da\ área\ do\ triângulo\ ECD\ será\ igual\ a\ \frac{1}{6}\ da\ medida\ da\ área\ total$$

$$do\ hexágono\ regular:$$

$$A_{hexagono} = p \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad S_{ECD} = \frac{1}{6} \cdot p \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{ECD} = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{ECD} = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{3}$$

$$S_{ECD} = \frac{1}{6} \cdot 24\sqrt{3}$$

$$S_{ECD} = 4\sqrt{3}$$

$$O\ quadrado\ da\ área\ desse\ triângulo\ será:$$

$$(4\sqrt{3})^2$$

$$16 \cdot 3$$

$$\mathbf{48}$$

$$\boldsymbol{R: 48}$$