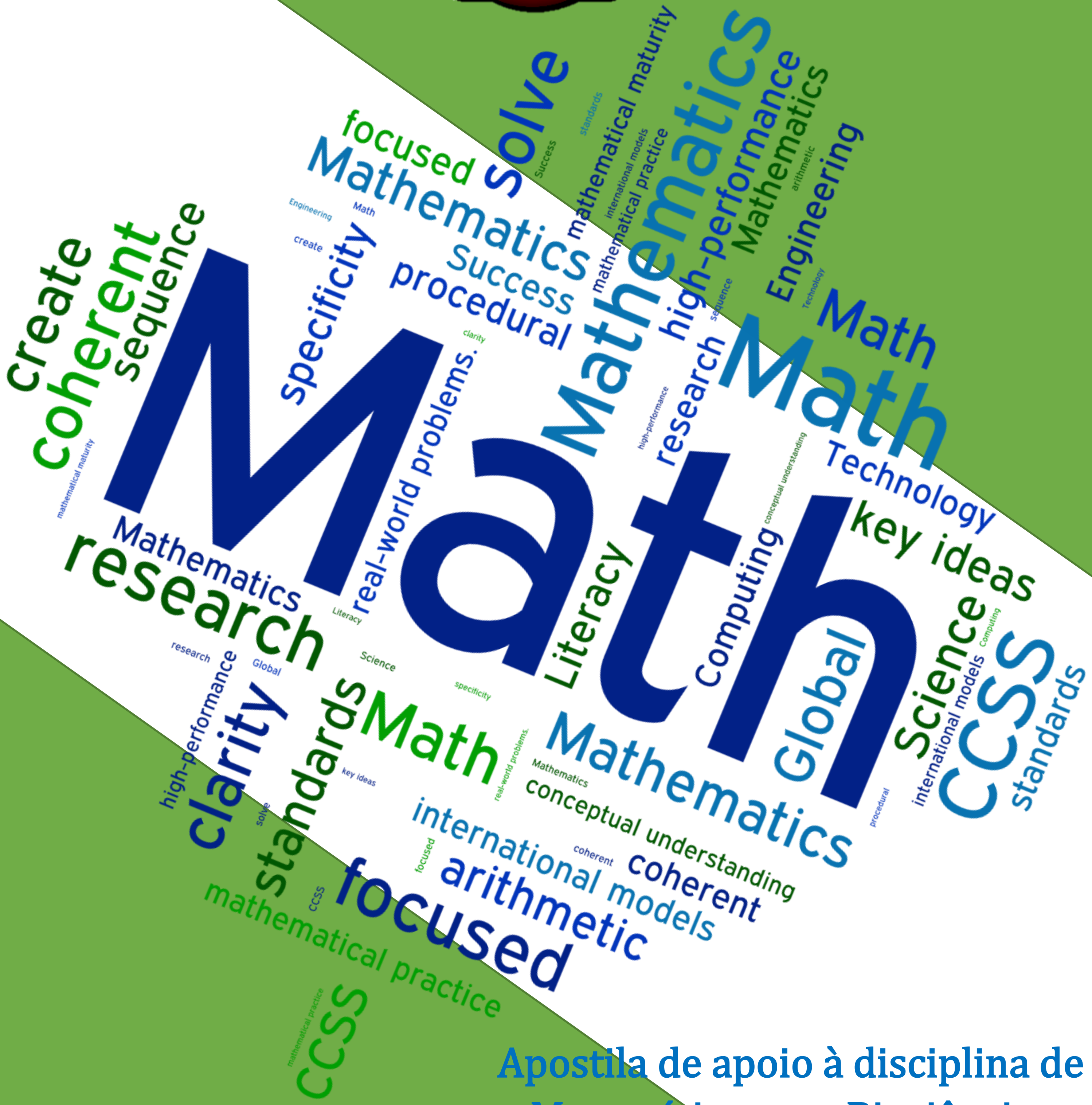


Apostila de apoio à disciplina de Matemática para Biociências

Grupo PET Zootecnia FZEA USP
Laura Barbosa Ferreira
Matheus Napolitano Gonçalves
Marcelo Machado De Luca de Oliveira Ribeiro
Sérgio Paulo Amaral Souto

Edição e Artes Finais: Sophia Silva Carrijo

Apostila de apoio à disciplina de Matemática para Biociências

Grupo PET – Zootecnia
FZEA USP

Laura Barbosa Ferreira
Discente da turma XXXVIII de Zootecnia – FZEA - USP
Matheus Napolitano Gonçalves
Discente da turma XXXVII de Zootecnia – FZEA - USP
Marcelo Machado De Luca de Oliveira Ribeiro
Departamento de Engenharia de Biossistemas – FZEA - USP
Sérgio Paulo Amaral Souto
Departamento de Ciências Básicas – FZEA - USP

Edição final:
Sophia Silva Carrijo
Discente da turma XXXVIII de Zootecnia – FZEA - USP

Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos

Universidade de São Paulo

Pirassununga - 2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos
da Universidade de São Paulo

G892a

Grupo PET Zootecnia
Apostila de apoio à disciplina de Matemática para Biociências / Grupo PET Zootecnia (Org).-- Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020.
44 p.

1. Matemática 2. Biociências. I. Ferreira, Laura Barbosa. II. Gonçalves, Matheus Napolitano. III. Ribeiro, Marcelo Machado de Luca de Oliveira. IV. Souto, Sérgio Paulo Amaral. V. Carrijo, Sophia Silva.

Você, estudante de Zootecnia deve estar se questionando:

Porque estou estudando MATEMÁTICA?

Primeiramente, se você deseja ser um profissional diferenciado, logo, você deve possuir conhecimentos diferenciados! Daqui a alguns anos, você, provavelmente, se tornará um Zootecnista graduado pela Universidade de São Paulo. No exercício de sua função profissional, muitas **(leia-se: em quase todas)** das vezes você utilizará a matemática para solução de problemas rotineiros, tomar decisões, aplicar técnicas, metodologias e elaborar estratégias dentro da propriedade ou da empresa às quais estará atuando. Assim sendo, os recursos matemáticos, tais como a derivada, serão fundamentais para a sua eficiência profissional.

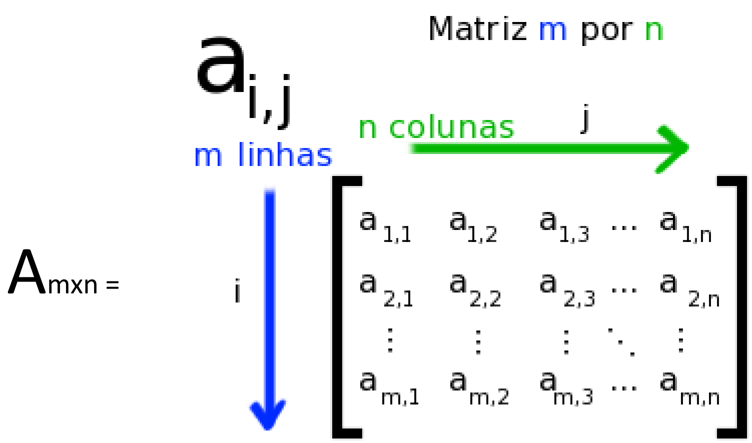
Saber utilizar os recursos matemáticos é **essencial** para a atuação do Zootecnista. Saber utilizar **bem,** tais recursos, pode ser o seu fator de **diferenciação** no mercado.

#ficaadica

Bons estudos!

Matrizes

Uma matriz é um arranjo retangular de números em linhas e colunas ou em outras palavras é um conjunto de vetores ordenados, geralmente utilizado quando temos uma grande quantidade de dados. Cada elemento da matriz é indicado por a_{ij} (i indica a posição do elemento referente à linha, e j**,** a posição em relação à coluna). A matriz é representada por uma letra maiúscula, por exemplo A_{mxn}, onde m é o número total de linhas e n é o número total de colunas.



Vetores são grandezas matemáticas que indicam módulo, direção e sentido.

Sempre utilizamos letras **minúsculas** para indicar o elemento **dentro** da matriz e letras **MAIÚSCULAS** para indicar o **nome** da matriz.

Duas matrizes são iguais, quando têm o mesmo número de colunas, linhas e todos os elementos são iguais em suas respectivas posições.

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Dimensões

As matrizes podem ter diversos tamanhos, podendo o número de colunas, ser igual ou não ao número de linhas; vamos observar alguns exemplos:

Matriz quadrada: é toda a matriz que possui o número linhas (**m**) **igual** ao número de colunas (**n**).

$$M_{2\times2} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \qquad M_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

Matriz retangular: é toda a matriz que o número de colunas (**n**) **difere** do número de linhas (**m**).

$$A_{3x2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B_{3x4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Igualdade: Para duas matrizes serem iguais precisam ter nas mesmas dimensões, o número de colunas (n) e o número de linhas (m).

$$A_{nxm} = B_{kxl}$$

Sendo n = k e m = l

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}_{2x2} \qquad B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}_{2x2}$$

Exemplo de aplicação: sendo as duas matrizes iguais, encontre os valores de x e y

$$\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 2y \\ 3 & y+4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x = x + 1 \\ 3y = 2y \\ 4 = y + 4 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - x = 1 \\ 3y - 2y = 0 \\ 4 - 4 = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{x = 1 \; e \; y = 0}$$

Operação entre matrizes

1. Soma entre matrizes: para realizar essa operação as matrizes precisam ter a mesma dimensão, ou seja, o mesmo número de linhas (m) e colunas (n), e, deve-se **somar os elementos de mesma posição**.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz A}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz B}} = \begin{bmatrix} 3+1 & 2+2 & 6-4 \\ 3+3 & 3-3 & 8-2 \\ 1+0 & 2-5 & 5+0 \end{bmatrix}$$

Realizando as operações temos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 6 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz C}}$$

Lembrando que a ordem das matrizes não altera o resultado.

$$A + B = B + A$$

2. Transposição: na transposição **você transforma as linhas** de uma matriz **em colunas** ou vice-versa. Por exemplo:

$$\text{a)}\quad M=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ 2 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow M^{T}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 8 & 5\end{pmatrix}$$

$$\text{b)}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 7 & 12\\ 4 & -4 & 6\\ 9 & 0 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow B^{T}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 9\\ 7 & -4 & 0\\ 12 & 6 & 5\end{pmatrix}$$

$$\text{c)}\quad C=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 2\\ -1 & 0 & 7\end{pmatrix}\Rightarrow C^{T}=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 6 & 0\\ 2 & 7\end{pmatrix}$$

3. Produto de matrizes: para realizar essa operação você multiplica a primeira linha da primeira matriz pela primeira coluna da segunda matriz e assim por diante. Por exemplo:

Matriz A **Matriz B**

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\ 3 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}3 & 2 & 6\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}(3x3)+(2x1) & (3x2)+(2x2) & (3x6)+(2x5)\\ (3x3)+(3x1) & (3x2)+(3x2) & (3x6)+(3x5)\\ (1x3)+(2x1) & (1x2)+(2x2) & (1x6)+(2x5)\end{bmatrix}$$

Realizando as operações de multiplicação e adição temos a Matriz C

$$\begin{bmatrix}11 & 10 & 28\\ 12 & 12 & 33\\ 5 & 6 & 16\end{bmatrix}$$

O número de colunas da primeira matriz deve ser **igual** ao número de linhas da segunda matriz. Por exemplo:

$$A_{nxm}\times B_{kxl}=C_{nxl}$$

Sendo que **m** tem que ser igual a **k**

$$A_{2x6} \times B_{6x4} = C_{2x4} \text{ (é } possível\ efetuar)$$

$$A_{3x4} \times B_{5x2} \text{ (}não \text{ é } possível\ efetuar)$$

Observe que o produto de matrizes não é comutativo, A·B ≠ B·A.

4. Potência: para realizar essa operação você precisa multiplicar a matriz por ela mesma pelo valor do expoente. Por exemplo:

$$A^n = A.A.A.A \ldots A\ n\ vezes$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$$

Variedades de matrizes

Nula: todos os elementos de uma matriz de qualquer dimensão são zeros.

$$M_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Identidade: é uma matriz neutra da multiplicação, é uma matriz quadrada na qual os elementos da diagonal principal são 1 e os restantes são 0. Nos elementos da diagonal principal a posição da linha é igual a posição da coluna, elemento a_{ii}.

$$I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonal: é uma matriz quadrada na qual os números fora da diagonal principal são zeros.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 56 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diagonal principal

Oposta: consiste em uma matriz com os sinais invertidos, por exemplo -B é a matriz oposta de B, então:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0,5 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } -\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -0,5 & -5 \end{bmatrix}$$

Simétrica: é uma matriz quadrada na qual os elementos da diagonal principal formam “um espelho”, por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \text{ matriz simétrica } A = A^T$$

Antissimétrica: é uma matriz quadrada na qual os elementos da diagonal principal são zeros e os elementos espelhados tem sinais trocados, como por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$No\ caso\ temos\ B^T = -B$$

Coluna: é uma matriz composta por uma única coluna.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Linha: é uma matriz composta por uma única linha.

$$\mathbf{B} = [\,2\ 4\ 6\,]$$

Inversa: é uma matriz quadrada que multiplicada por uma matriz dada A, resulta na matriz identidade, por exemplo:

$$\mathbf{A^{-1}} \,.\, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Singular: é uma matriz que não possui inversa. Nesse caso seu **determinante é igual a 0**.

Equação Matricial

Analogia com números reais onde iremos "isolar" o termo X:

$$\left\{\begin{aligned} &3X + 6 = 3 \\ &3X = 3 - 6 \\ &X = -3/3 \\ &X = -1 \end{aligned}\right.$$

X é um número desconhecido.

Lembrando que não há divisão entre matrizes.

Para uma matriz:

$$A.X.B + C = D$$
$$A.X.B + C - C = D - C$$
$$A.X.B + 0 = D - C$$
$$A^{-1}.A.X.B = A^{-1}.(D - C)$$
$$I.X.B = A^{-1}.(D - C)$$
$$X.B = A^{-1}.(D - C)$$
$$X.B.B^{-1} = A^{-1}.(D - C).B^{-1}$$
$$X.I = A^{-1}.(D - C).B^{-1}$$
$$X = A^{-1}.(D - C).B^{-1}$$

Observação: a ordem das matrizes inversas é fundamental, visto que o produto de matrizes não é comutativo. Você só pode "eliminar" uma matriz se a sua inversa estiver imediatamente ao lado da sua matriz.

Determinante

O determinante resulta em um valor escalar para uma matriz quadrada, indicando o grau de independência das colunas (ou linhas) da matriz. O determinante igual a zero indica que uma coluna (linha) pode ser escrita como uma combinação linear (mistura) das outras colunas (linhas).

Sistemas Lineares

É um conjunto de equações que se “conversam”.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Onde *m* é o número de equações e *n* o número de variáveis.

A_{ij} = coeficiente numérico, x_i= variável e b_i = termos independentes

Podemos transformar o sistema linear em equações de matrizes separando os **coeficientes** das **variáveis** e dos termos **independentes**.

$$\left.\begin{matrix} 4x-7y=3 \\ 5x+2y=1 \end{matrix}\right\} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matriz aumentada é aquela que junta os coeficientes com os termos independentes.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Aqui, temos os termos descritos por *a* que seriam seguidos pelas variáveis e os termos descritos por *b* os termos independentes.

Podemos classificar os sistemas lineares de acordo com o **tipo de solução**.

Sistema Possível e Determinado (SPD): quando o resolvemos, encontramos uma única solução, ou seja, cada incógnita tem um valor único.

Sistema Possível e Indeterminado (SPI): esse tipo de sistema possui infinitas soluções, os valores das incógnitas apresentam inúmeras possibilidades de valores.

Sistema Impossível (SI): ao ser resolvido, não encontraremos soluções para as incógnitas.

Para resolver um sistema linear baseado em matriz, você só precisa seguir passos simples:

1. Transformar as equações lineares em uma matriz aumentada.

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 6 \\ 2x - 2y + z &= 1 \\ 3x + y + 3z &= 7 \end{aligned} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

2. Selecionar a linha. Devemos isolar a linha quando nesta houver um pivô.

$$\begin{array}{cccc} \boxed{1 \quad 3 \quad 2 \quad 6} \\ 2 \quad -2 \quad 1 \quad 1 \\ 3 \quad 1 \quad 3 \quad 7 \end{array}$$

3. Selecionar de cima para baixo o primeiro elemento não nulo que será o pivô. Caso não houver, passe para a próxima coluna.

$$\begin{matrix} \boxed{1} & 3 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{matrix}$$

4. Permutar a linha do pivô com a primeira linha não isolada, caso não for a primeira.

5. Dividir os elementos da linha do pivô pelo valor do pivô, pois este deve se tornar 1.

$$\begin{matrix} \boxed{1/1} & 3/1 & 2/1 & 6/1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{matrix} = \begin{matrix} \boxed{1} & 3 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{matrix}$$

6. Acrescentar as linhas isoladas.

7. Zerar todos os elementos da coluna acima e abaixo da coluna do pivô.

$$\begin{matrix} \boxed{1} & 3 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{matrix}$$

Você multiplica os valores da linha do pivô pelo oposto do valor do elemento que você deseja zerar.

$$+\quad\begin{array}{cccc} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & -4 & -12 \\ \hline 0 & -8 & -3 & -11 \end{array} \quad \rightarrow \quad -2x1^{\underline{a}}l$$

$$+\quad\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 3 & 7 \\ -3 & -9 & -6 & -18 \\ \hline 0 & -8 & -3 & -11 \end{array} \quad \rightarrow \quad -3x1^{\underline{a}}l$$

Gerando a seguinte matriz:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -8 & -3 & -11 \\ 0 & -8 & -3 & -11 \end{array}$$

8. Após isso devemos isolar as linhas com o pivô.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 6 \\ \hdashline 0 & -8 & -3 & -11 \\ \hline 0 & -8 & -3 & -11 \end{array}$$

9. Devemos escolher o elemento da segunda coluna, segunda linha para ser o novo pivô. Caso ele seja nulo, devemos **permutar**.

Permutar é quando trocamos as linhas subsequentes de lugar.

Exemplo:

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}$$

Neste exemplo, as linhas **azul** e **laranja** foram permutadas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & \boxed{-8} & -3 & -11 \\ 0 & -8 & -3 & -11 \end{pmatrix}$$

O -8 será o nosso novo pivô.

10. Devemos reiniciar o processo descrito a partir do item 03.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -8/-8 & -3/-8 & -11/-8 \\ 0 & -8 & -3 & -11 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3/8 & 11/8 \\ 0 & -8 & -3 & -11 \end{array}$$

Vamos realizar a soma com a primeira linha:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & -9/8 & -33/8 \\ \hline 0 & 0 & 7/8 & 15/8 \end{array} \longrightarrow \quad -3x2^{a}l$$

Agora com a terceira linha:

$$\begin{array}{cccc} 0 & -8 & -3 & -11 \\ 0 & +8 & +3 & +11 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \longrightarrow \quad +8x2^{a}l$$

Com isso obtemos a matriz:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 7/8 & 15/8 \\ 0 & 1 & 3/8 & 11/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Caso a última linha não fosse zerada, nós iriamos isolar as linhas que já possuíram um pivô e escolher o terceiro elemento da próxima linha para realizar todos os procedimentos descritos a partir do item 03.

Como não há mais pivô nas linhas não isoladas do nosso exemplo, vamos remontar o sistema linear:

$$\begin{cases} 1x + 0y + 7/8z = 15/8 \\ 0x + 1y + 3/8z = 11/8 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Temos então que z é um termo qualquer pois sua coluna não contêm um pivô, e o **sistema possui infinitas soluções**, uma vez que a variável *z* não possui um valor definido. Então z é uma variável livre e pode assumir qualquer valor.

$$\begin{cases} y + 3/8z = 11/8 \\ y = (11/8) - (3/8z) \\ y = (11 - 3z)/8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 7/8z = 15/8 \\ x = (15/8) - (7/8z) \\ x = (15 - 7z)/8 \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{cases} x = (15 - 7z)/8 \\ y = (11 - 3z)/18 \\ z = qualquer \end{cases}$$

Matriz Inversa

A matriz inversa é definida a partir de uma matriz quadrada dada (A), como sendo a matriz denotada por A^{-1} (inversa de A), de mesma ordem, que multiplicada pela matriz A resulta na matriz identidade (I), $A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$. Usamos a notação de A^{-1} para esse tipo de matriz (a notação de A pode mudar de acordo com a matriz, só a notação $^{-1}$ que permanece).

Para invertermos uma matriz, precisamos juntá-la com a identidade, assim como fizemos a matriz aumentada no capítulo anterior.

Usaremos como exemplo a matriz A:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{matrix}$$

1. Primeiro vamos juntar a matriz com a matriz identidade de mesma ordem.

$$\begin{array}{c|c} A & I \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{array}$$

Com isso, tornamos essas duas matrizes uma só:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

2. A partir disso iremos realizar os mesmos procedimentos descritos para os sistemas lineares.

Já esqueceu? Revise as páginas 11 a 14 para relembrar!

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

O número 1, situado na primeira linha da primeira coluna será o nosso pivô.

$$
\begin{array}{cccccccc|l}
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \rightarrow 2^{a} l \\
-3 & 0 & -3 & -6 & -3 & 0 & 0 & 0 & \rightarrow -3x1^{a} l \\
\hline
0 & 1 & -3 & -6 & -3 & 1 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc|l}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \rightarrow 3^{a} l \\
-1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \rightarrow -1^{a} l \\
\hline
0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc|l}
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \rightarrow 4^{a} l \\
1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \rightarrow +1^{a} l \\
\hline
0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

Com isso, obtemos a matriz:

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -3 & -6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

O número 1 da segunda linha será o nosso novo pivô.

Então teremos:

$$
\begin{array}{cccccccc|l}
0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & \rightarrow 3^{\text{a}}l \\
0 & -1 & 3 & 6 & 3 & -1 & 0 & 0 & \rightarrow -2^{\text{a}}l \\
\hline
0 & 0 & 3 & 5 & 2 & -1 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc|l}
0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & \rightarrow 4^{\text{a}}l \\
0 & -2 & 6 & 12 & 6 & -2 & 0 & 0 & \rightarrow -2x2^{\text{a}}l \\
\hline
0 & 0 & 6 & 14 & 7 & -2 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

Temos a formação da matriz:

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -3 & -6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 5 & 2 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 6 & 14 & 7 & -2 & 0 & 1
\end{array}
$$

O número 3 da terceira linha será o nosso pivô. Então teremos:

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -3 & -6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3/3 & 5/3 & 2/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\
0 & 0 & 6 & 14 & 7 & -2 & 0 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -3 & -6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\
0 & 0 & 6 & 14 & 7 & -2 & 0 & 1
\end{array}
$$

Agora sim podemos realizar as operações:

$$
\begin{array}{cccccccc|l}
1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \rightarrow \quad 1^{\text{a}}l \\
0 & 0 & -1 & -5/3 & -2/3 & 1/3 & -1/3 & 0 & \rightarrow \quad -3^{\text{a}}l \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & -1/3 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc|l}
0 & 1 & -3 & -6 & -3 & 1 & 0 & 0 & \rightarrow \quad 2^{\text{a}}l \\
0 & 0 & 3 & 5 & 2 & -1 & 1 & 0 & \rightarrow \quad 3x3^{\text{a}}l \\
\hline
0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc|l}
0 & 0 & 6 & 14 & 7 & -2 & 0 & 1 & \rightarrow \quad 4^{\text{a}}l \\
0 & 0 & -6 & -10 & -4 & 2 & -2 & 0 & \rightarrow \quad -6x3^{\text{a}}l \\
\hline
0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & -2 & 1 &
\end{array}
$$

Com isso, temos a formação da matriz:

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & -1/3 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & -2 & 1
\end{array}
$$

O número 4 da quarta linha será o nosso pivô. Então teremos:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & -1/3 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4/4 & 3/4 & 0 & -2/4 & 1/4
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & -1/3 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 & 0 & -1/2 & 1/4
\end{array}$$

Agora sim podemos realizar as operações:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & -1/3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1/3 & -1/4 & 0 & -3/8 & -1/12 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 & 1/3 & -1/6 & -1/12
\end{array}
\begin{array}{l}
\rightarrow 1^{a}l \\
\rightarrow -1/3x\ 4^{a}l \\

\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 & 0 & -1/2 & 1/4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 0 & 1/2 & 1/4
\end{array}
\begin{array}{l}
\rightarrow 2^{a}l \\
\rightarrow +1^{a}l \\

\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -5/3 & -5/4 & 0 & 5/6 & -5/12 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & -7/12 & -1/3 & 7/6 & -5/12
\end{array}
\begin{array}{l}
\rightarrow 3^{a}l \\
\rightarrow -5/3x\ 4^{a}l \\

\end{array}$$

Com isso, temos a matriz final:

1	0	0	0	1/12	1/3	-1/6	-1/12
0	1	0	0	-1/4	0	1/2	1/4
0	0	1	0	-7/12	-1/3	7/6	-5/12
0	0	0	1	3/4	0	-1/2	1/4

I				A^{-1}			
1	0	0	0	1/12	1/3	-1/6	-1/12
0	1	0	0	-1/4	0	1/2	¼
0	0	1	0	-7/12	-1/3	7/6	-5/12
0	0	0	1	3/4	0	-1/2	1/4

A matriz inversa da matriz A é:

$$A^{-1}=\begin{matrix} 1/12 & 1/3 & -1/6 & -1/12 \\ -1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ -7/12 & -1/3 & 7/6 & -5/12 \\ ¾ & 0 & -1/2 & 1/4 \end{matrix}$$

Há casos nos quais uma matriz não possui matriz inversa. Isso se dá porque não existe uma matriz que multiplicada pela matriz A (escolhida anteriormente) resulte na identidade.

Funções

"Faço uma ação e vejo qual será a resposta do sistema."

A **função** determina uma relação entre os elementos de dois conjuntos. Sendo *A* e *B* dois conjuntos, a relação *a→b* associa a cada elemento de *A (a)* um *único* de *B (b)*. Pode ser definida utilizando uma lei de formação, em que, para cada valor de *a*, temos um valor de f(*a*). Chamamos A de domínio, B contradomínio e Imagem ao subconjunto de todos f(a).

Potência

Toda função do tipo $y(x) = x^n$, onde "x" é a base e "n" é o expoente, é chamada **Função Potência**.

São exemplos de funções potências:

$$dois\ números\ \rightarrow base\ +\ expoente$$

$$x^n = x.x.x. \ldots x$$

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2$$

Propriedades da função potência

$$soma\ (subtração) \rightarrow base\ e\ expoente\ iguais$$

$$a^b + a^b = 2 \times a^b$$

$$K \times a^b + M \times a^b = (K + M) \times a^b$$

$$K = 3;\ M = 4;\ a = 2;\ b = 3$$

$$3 \times 2^3 + 4 \times 2^3 = 7 \times 2^3$$

$$2^3 + 2^4 = 2^3 + 2 \times 2^3 = 3 \times 2^3$$

$$3^2 + 2^2 \neq (3+2)^2$$

$$produto \rightarrow base\ igual$$

$$a^b \text{x}\ a^c = a^{b+c} \qquad a = 2; b = 3; c = 4$$

$$2^3 \text{x}\ 2^4 = 2^7$$

$$produto \rightarrow expoente\ igual$$

$$b^m \times c^m = (b \times c)^m \qquad b = 3; c = 4; m = 2$$

$$3^2 \times 4^2 = (3 \times 4)^2 = 12^2 \rightarrow 144$$

Divisão

$$expoente\ negativo:$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b} \qquad \rightarrow \qquad 2^{-1} = \frac{1}{2^1}$$

$$divisão \rightarrow base\ comum$$

$$divisão: \qquad \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$$

$$divisão \rightarrow expoente\ comum$$

$$\frac{b^m}{c^m} = \left(\frac{b}{c}\right)^m$$

$potência\ de\ potência$: $\left(a^b\right)^c = a^{b\times c}$

$$(2^3)^4 = 2^{12}$$

$expoente\ fracinário$: $a^{b/c} = \sqrt[c]{a^b}$

$$5^{3/8} = \sqrt[8]{5^3}$$

Exponencial

São aquelas nas quais a variável se encontra no expoente e possuem a base sempre maior que zero e diferente de 1.

Essa limitação é importante porque 1 elevado a qualquer número resulta em 1. Assim, em vez de exponencial, estaríamos diante de uma função constante.

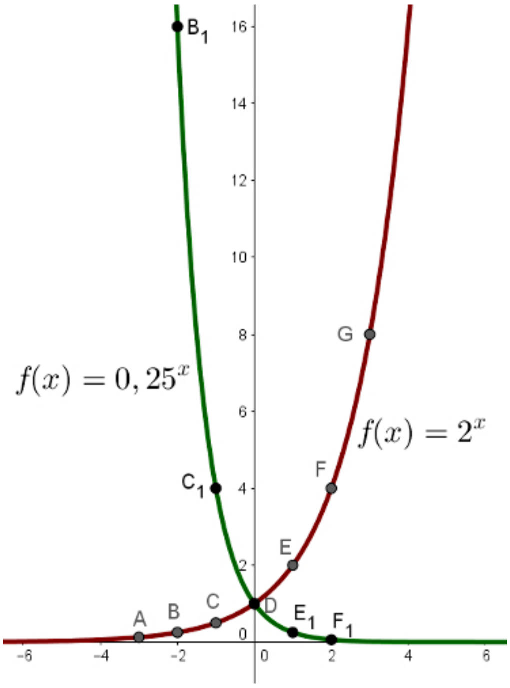
Outra limitação é: a base não pode ser negativa, nem igual a zero, pois para alguns expoentes a função não estaria definida.

Propriedades das operações

Temos aqui dois exemplos de gráficos: em verde temos uma função decrescente e, em vermelho uma função crescente.

Mas como saber?

- as funções cujas bases são valores maiores que zero e menores que 1, são decrescentes.
- as funções cujas bases são valores maiores que 1, são crescentes.



$$Sempre\ que\ a^{x1} = a^{x2},\ teremos\ x_1 = x_2.$$
$$Isso\ acontece\ para\ todo\ valor\ de\ x, desde\ que\ a \neq 1\ e\ a > 1.$$

Por exemplo na função $f(x) = 5^x$. Se $f(x_1) = 25$ e $f(x_2) = 25$, temos:

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$a^{x1} = a^{x2}$$
$$5^{x1} = 5^{x2}$$

Então,

$$x_1 = x_2 = 2$$

O gráfico da função exponencial sempre estará localizado acima do eixo x. Isso se dá porque “a” sempre será maior que zero em toda função exponencial**.**

Logarítmica

Logaritmo é definido como o expoente que se deve elevar a base **a** para obter o número **x,** ou seja: $y = log_a x \leftrightarrow a^y = x$.

A função logarítmica é a inversa da exponencial. Podemos defini-la em: $f(x) = log_a x$ na qual **a** real positivo e **a ≠ 1**.

Propriedades da função logarítmica

O logaritmo cujo o logaritmando é igual a 1 e a base é qualquer, é igual a zero: $log_a 1 = 0, pois\ a^0 = 1$

1. O logaritmo cujo a base e o logaritmando são iguais é igual a um:

$$log_a a = 1, pois\ a^1 = a$$

2. A potência de base "a" e expoente $log_a b$ é igual a b:

$$a^{\log_a b} = b$$

3. Dois logaritmos são iguais, numa mesma base, se os logaritmandos são iguais:

$$log_a b = log_a c \leftrightarrow b = c$$

Logaritmo do produto

O logaritmo produto de dois elementos é igual à soma dos logaritmos de cada um deles com a mesma base. $Se\ c > 0\ e\ c \neq 1, a > 0, b > 0, temos$:

$$log_c(a \times b) = log_c a + log_c b$$

Logaritmo do quociente

O logaritmo da divisão de dois fatores é igual a subtração dos logaritmos de cada um deles com a mesma base. $Se\ c > 0\ e\ c \neq 1, a > 0, b > 0, temos$:

$$\log_c {}^{a}\!/_{b} = \log_c a - \log_c b$$

Logaritmo da potência

O logaritmo da potência de um fator é igual ao produto entre o expoente e o logaritmo. $Se\ a > 0\ e\ a \neq 1, b > 0,$ c ∈ R, $temos$:

$$\log_a b^c = c . \log_a b$$

Logaritmo de uma raiz

O logaritmo da raiz de um fator é igual ao produto inverso deste e do logaritmo. $Se\ a > 0\ e\ a \neq 1, b > 0,$ n ∈ N, $temos$:

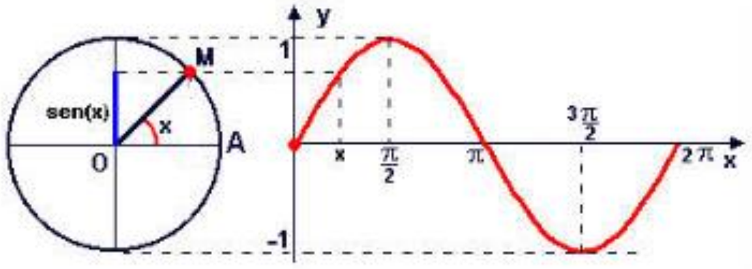
$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

Trigonométrica

São as funções associadas ao arco trigonométrico que é dividido em quatro quadrantes. As três principais funções são:

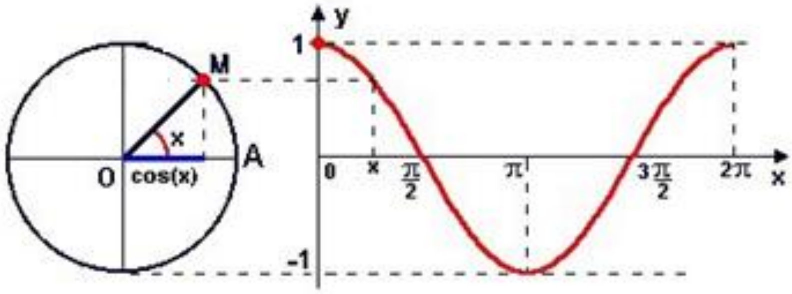
Seno: é uma função periódica e seu período é 2π. Ela é expressa por:

$$Função\ f(x) = sen\ x$$



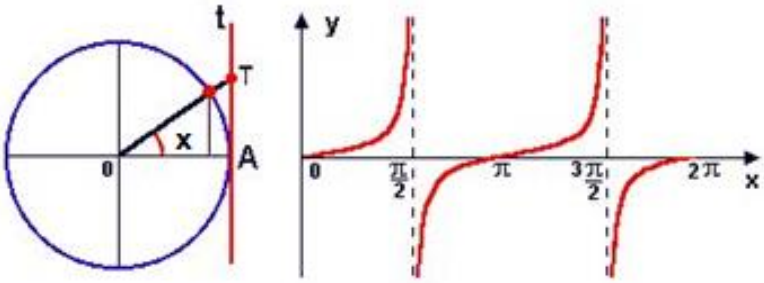
Cosseno: é uma função periódica e seu período é 2π. Ela é expressa por:

$$Função\ f(x) = cos\ x$$



Tangente: é uma função periódica e seu período é π. Ela é expressa por:

$$Função\ f(x) = tg\ x$$



Função Composta

Duas funções que possuem o seu domínio (*função f*, por exemplo) igual ao contradomínio (*função g*, por exemplo) da outra função, podem se unir para criar uma função composta, pois assim, o seu domínio e contradomínio são relacionados diretamente.

f: A → B e g: B → C, a função composta de g com f é a função h(x) = g(f(x)), que também pode ser representada como gof(x) – que é lida como “g bola f de x”. Como por exemplo:

$$gof(x) = 2(2x^3) + 3(2x^3)$$

$$gof(x) = ln\big(sen(x^2)\big)$$

$$gof(x) = \frac{e^x}{x^3 + \sqrt{x}}$$

$$gof(x) = cos(x) \cdot \sqrt[3]{x} \cdot ln(3x)$$

Limite

O limite da função *f(x)* no ponto a é o valor do qual a função *f(x_0)* se aproxima quando x_0 tende (se aproxima) ao valor a. Por exemplo, seja $f(x) = x^2$, o limite da função *f(x)* quando x se aproxima de 2 é: $f(1,8) = 1,8^2 = 3,24$; $f(1,89) = 1,89^2 = 3,5721$; $f(1,95) = 1,95^2 = 3,8025$; $f(1,99) = 1,99^2 = 3,9601$; $f(1,999) = 1,999^2 = 3,996001$; $f(1,9999) = 1,9999^2 = 3,99960001$. Vemos claramente que $f(x)$ se aproxima de 4 quando o valor x se aproxima de 2, matematicamente escrevemos, $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$. A definição de $\lim_{x\to a} f(x)$ diz que devemos considerar valores de x que se aproximam de a, mas não iguais a a.

Vamos utilizar um exemplo para facilitar a compreensão:

determinar o limite da função $f(x) = x^2 - 5x + 3, quando\ x\ tende\ a$ 4.

Como temos uma função em vários monômeros usamos a regra: o limite das somas é a soma dos limites, com isso vamos realizar a soma entre eles depois.

$$\lim_{x\to 4} x^2 = 4^2 = 16$$

$$\lim_{x\to 4} 5x = 5.4 = 20$$

$$\lim_{x\to 4} 3 = 3$$

$$16 - 20 + 3 = -1$$

$$\lim_{x\to 4} x^2 - 5x + 3 = -1$$

O conceito de limite é interessante nos casos onde há uma indeterminação, a função não é definida no ponto em questão. Temos várias indeterminações: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, \infty^0\ e\ 1^\infty$. Vamos ver alguns exemplos de indeterminação:

Vamos calcular $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$, se substituirmos diretamente o valor de x por 9, chegaremos em $\frac{0}{0}$. Entretanto, manipulando a expressão matematicamente podemos remover esta indeterminação. Multiplicando ambos os termos da fracção por $\sqrt{x} + 3$, vem:

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

$$\lim_{x \to 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)}$$

$$\lim_{x \to 9} \frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)}$$

$$\lim_{x \to 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{6}.$$

DERIVADAS

Mas, afinal, o quê é derivada?

A **derivada** em determinado ponto de uma função y(x), representa a taxa de variação de y em relação à x, ou seja, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$. Esta taxa de variação equivale a inclinação da reta tangente à curva no ponto analisado.

Ok! Mas, por quê isso é importante?

Na produção animal, comumente as funções são utilizadas para demonstrar desempenhos zootécnicos ou econômicos de um rebanho ou sistema produtivo. Analisando a função e, interpretando seu comportamento (através do conhecimento de derivadas), é possível tomar decisões técnicas mais assertivas.

Exemplo:

Ao analisar a curva de ganho de peso de um animal, a derivada permite a análise matemática se o animal continuará ganhando peso, estabilizará, ou entrará em declínio (perda de peso).

Deu pra entender o quanto é importante?

Notação: O apóstrofo (‘) indica que a respectiva função foi derivada.
Ou seja: $f'(x) =$ a derivada da função $f(x)$ e $g'(x) =$ derivada da função $g(x)$.

Exemplo:

$f(x) = 3x^2 + 2x$ (Leia-se: Função f de x é igual à 3x ao quadrado mais 2x)

$f'(x) = 6x + 2$ (Leia-se: A derivada da função f de x é igual à 6x mais 2).

Derivada das funções básicas

constante

$$f(x) = a$$
$$f'(x) = 0$$

Exemplos

$$f(x) = 8$$
$$f'(x) = 0$$

$$g(x) = 7$$
$$g'(x) = 0$$

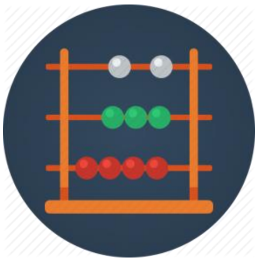
variável x

$$f(x) = x$$
$$f'(x) = 1$$
$$f(x) = ax$$
$$f'(x) = a$$

Exemplos

$$f(x) = 8x$$
$$f'(x) = 8$$

$$g(x) = 3x$$
$$g'(x) = 3$$
$$g(x) = x$$
$$g'(x) = 1$$



sen(x) e cos(X)

$$f(x) = sen(x)$$
$$f'(x) = cos(x)$$

$$f(x) = cos(x)$$
$$f'(x) = -sen(x)$$

e^x

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x$$

ln(x)

$$f(x) = ln(x)$$
$$f'(x) = 1/x$$

Potência

$$f(x) = x^3$$
$$f'(x) = 3x^{(3-1)} = 3x^2$$

Como visto, desce (dá o tombo) no expoente, multiplica-o pela função, e subtrai 1 do expoente.

Exemplos:

$$f(x) = x^6$$
$$f'(x) = 6x^{(6-1)} = 6x^5$$

$$f(x) = x^2$$
$$f'(x) = 2x^{(2-1)} = 2x^1 = 2x$$

$$f(x) = x^5$$
$$f'(x) = 5x^{(5-1)} = 5x^4$$

$$f(x) = 3x^3$$

$$f'(x) = 3.3x^{(3-1)} = 9x^2$$

$$f(x) = 2x^4$$

$$f'(x) = 2.4x^{(4-1)} = 8x^3$$

Nos casos acima, como já havia uma constante acompanhando a variável “x”, o expoente “tombado” multiplica-se” à constante.

Regras

Regra da soma ou subtração

$$Se\ m(x) = g(x) + f(x)$$

$$m'(x) = g'(x) + f'(x)$$

Deriva-se cada função (parte) da soma ou subtração.

Exemplos:

$$f(x) = 2x^2 + 6$$

$$f'(x) = 2.2x^{(2-1)} + 0 = 4x$$

$$m(x) = 5x^4 + 3x$$

$$m'(x) = 5x^{4'} + 3x'$$

$$m'(x) = 4.5x^{(4-1)} + 3.1$$

$$m'(x) = 20x^3 + 3$$

$$f(x) = cos(x) + 8 + e^x$$

$$f'(x) = cos(x)' + 8' + e^{x\prime}$$

$$f'(x) = -sen(x) + 0 + e^x$$

$$f'(x) = e^x - sen(x)$$

No último exemplo, percebe-se que mesmo havendo mais de 2 funções, deriva-se cada parte separadamente.

Regra do produto

$$Se\ f(x) = g(x) \,.\, m(x)$$

$$f'(x) = g'(x).\, m(x) + g(x) \,.\, m'(x)$$

Derivada da primeira função vezes segunda função (normal) + primeira função (normal) vezes derivada da segunda função.

Exemplos:

$$f(x) = x^2.\, cos(x)$$

$$f'(x) = x^{2\prime}.\, cos(x) + x^2.\, cos(x)'$$

$$f'(x) = 2x.\, cos(x) + x^2.\, [-sen(x)]$$

$$f'(x) = 2xcos(x) - x^2sen(x)$$

$$g(x) = 3x.\, 2x^5$$

$$g'(x) = 3x'.\, 2x^5 + 3x.\, 2x^{5\prime}$$

$$g'(x) = 3.\, 2x^5 + 3x10x^4 = 6x^5 + 30x^5 = 36x^5$$

$$g(x) = 3x.2x^5.sen(x)$$

$$g'(x) = 3x'.2x^5.sen(x) + 3x.2x^{5'}.sen(x) + 3x.2x^5.sen(x)'$$

$$g'(x) = 3.2x^5 sen(x) + 3x10x^4 sen(x) + 3x2x^5 cos(x)$$

$$g'(x) = 6x^5 sen(x) + 30x^5 sen(x) + 6x^6 cos(x)$$

No último exemplo, percebe-se que são 3 funções. Assim sendo, na primeira parte da soma deriva-se a 1° função, na segunda parte, deriva-se a 2° função e, assim por diante.

Atenção: Você já deve ter percebido que os resultados de muitas funções podem ser simplificados.

Pode simplificar? Sim.

É obrigatório simplificar? Não.

Se for simplificar, tenha MUITA atenção!

Principalmente com o jogo de sinais

Regra do quociente

$$Se\ f(x) = g(x)/m(x)$$

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot m(x) - g(x) \cdot m'(x)}{(m(x))^2}$$

Exemplos:

$$f(x) = \frac{4x^3 + 1}{6x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(4x^3+1)' \cdot (6x^2) - (4x^3 + 1) \cdot (6x^2)'}{(6x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{12x^2 \cdot 6x^2 - (4x^3+1) \cdot 12x}{6x^4}$$

Lembre-se: Se for simplificar, atenção aos sinais.

Regra da Cadeia

Essa regra é usada quando temos uma função composta, ou seja, uma função de outra função.

$$[f\,(g(x))] = f'\,(g(x)) \,.\, g'(x)$$

Exemplo:

$$f(x) = \cos\,(x^2)$$

é uma função composta por x^2 e cos(x)

com isso,

$$f'(x) = -sen(x^2).(x^2)'$$

$$f'(x) = -sen(x^2).2x$$

Derivada da função $f(x) = ln\left(\frac{x^2+x^3}{e^x}\right)$

Função Externa **e** **Conteúdo interno**

A regra da cadeia determina que a derivada de *f(x) (f'(x))*, é dada pela derivada da função externa *(ln(u))*, onde u é o conteúdo interno, multiplicado pela derivada do conteúdo interno u'. A derivada da função logaritmo na base neperiana (e) é a fração inversa do conteúdo interno da função, $ln'(u) = \frac{1}{u}$, logo:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2 + x^3}{e^x}} \cdot \left(\frac{x^2 + x^3}{e^x}\right)'$$

na derivada da parte interna (vermelho) vamos utilizar a regra da divisão:

$$f'(x) = \frac{e^x}{x^2 + x^3} \cdot \left(\frac{(x^2 + x^3)' \cdot e^x - (x^2 + x^3) \cdot (e^x)'}{(e^x)^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{x^2+x^3} \cdot \left(\frac{(2 \cdot x + 3 \cdot x^2) \cdot e^x - (x^2 + x^3) \cdot e^x}{e^{2x}}\right),$$

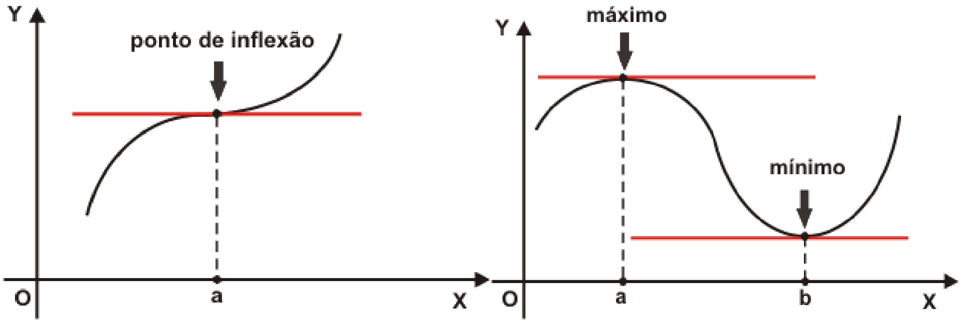
colocando o e^x em evidência:

$$f'(x) = \frac{\cancel{e^x}}{x^2+x^3} \cdot \cancel{e^x} \cdot \left(\frac{(2 \cdot x + 3 \cdot x^2) - (x^2 + x^3)}{\cancel{e^{2x}}}\right) = \frac{2 \cdot x + 3 \cdot x^2 - x^2 - x^3}{x^2 + x^3}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2 \cdot x + 2 \cdot x^2 - x^3}{x^2 + x^3}}$$

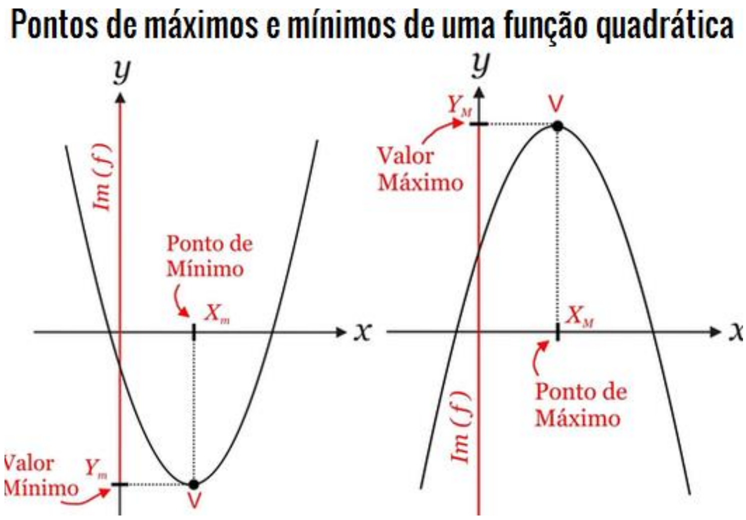
Máximos e mínimos de uma função

Para acharmos os pontos máximos, mínimos ou inflexão de uma função usaremos o que aprendemos em derivadas.



Vemos que a reta tangente ao ponto máximo, mínimo ou inflexão é horizontal, derivada igual a zero.

A grosso modo, vamos descobrir o valor onde se tem o **maior valor no eixo y,** ou topo da **crista,** o valor onde se tem **o menos valor no eixo y**, ou do **vale,** ou o ponto de inflexão.



Em relação aos gráficos temos:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + bx$$

$f''(x) = 2a$, o sinal de *a* será o sinal da derivada segunda.

Se *a* > 0, derivada segunda positiva, o extremo é um ponto mínimo

Se *a* < 0, derivada segunda negativa, o extremo é um ponto máximo

Se *a* = 0, o extremo é um ponto de inflexão.

Os pontos críticos, pontos onde a derivada da função é zero, mostram os pontos de máximos, de mínimos, ou de inflexão de uma função com intervalos infinitos. Por isso, ao derivarmos e igualarmos a zero, achamos os pontos extremos, os quais devem ser classificados através da derivada segunda.

Nos pontos extremos, usamos a regra da derivada segunda para sua classificação:

$f''(x_0) > 0$, então x_0 é mínimo

$f''(x_0) < 0$, então x_0 é máximo

$f''(x_0) = 0$, então x_0 é ponto de inflexão

Exemplo:
$f(x) = x^2 - 2x - 3$ com $x \in \mathbb{R}$.

Vamos derivar essa função
$f'(x) = 2x - 2$.

Calculando os pontos críticos: $0 = 2x - 2$

$$0 = 2x - 2$$
$$2 = 2x$$
$$x = 1$$

A derivada segunda (derivada da função derivada $f'(x)$) é:

$f''(x) = 2x' - 2' = 2 - 0 = 2 > 0$. Como a derivada segunda é positiva, o extremo é um ponto de mínimo. Logo, x = 1 é um ponto de mínimo para função $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Com isso podemos tirar duas conclusões, encontramos o ponto de mínimo da função, uma vez que ela é continua. A outra conclusão é baseada na primeira, não a pontos de máximo pois a função tende nas suas extremidades para $+\infty$.