

MHDシミュレーションの 多次元化・高次精度化

飯島 陽久（名古屋大学）

3期限目の目標

MHD方程式を
多次元・高解像度
で解く。

もくじ

- 高次精度化

- 1次元高次精度補間法
- 高次精度時間積分法
- 特性変数変換
- リーマンソルバと解像度

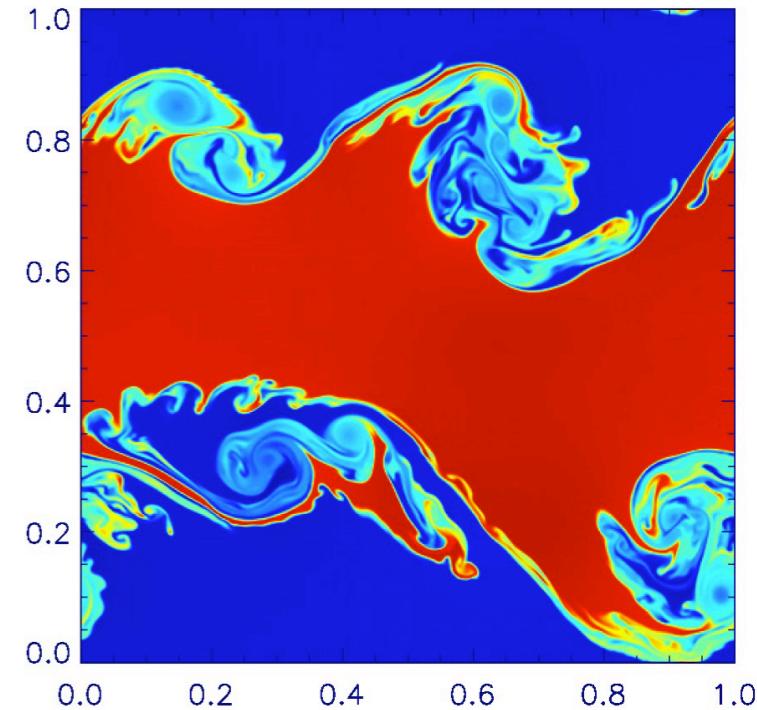
- 多次元化

- 多次元化の方法
- 磁場発散の処理

高次精度化

なぜ高次精度化が必要なのか

- 宇宙プラズマは多くの場合、レイノルズ数が非常に大きい。
数値的な拡散は小さければ小さいほど現実に近い。
- 数値拡散を小さくする方法
 - 計算格子点数を増やす
 - 大規模計算機の利用、計算コードの高速化（明日の講義）
 - 計算スキームを解像度を高める
- 計算スキームの高次精度化
 - N次精度スキームのエラー・数値拡散は $O(dx^N)$ で小さくなっていく
 - 数値拡散を一桁下げるためには、1次精度スキームでは格子点数を1方向につき10倍つぎ込む必要がある。3次元計算なら計算量は1万倍。5次精度スキームなら格子点数を1.6倍、計算量にして6.5倍の増加で済む。



移流方程式の1次精度風上差分法

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad F = aU, \quad a = \text{const.}$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} + \frac{F_{j+1/2} - F_{j-1/2}}{\Delta x} = 0$$

セル i 内で
空間積分

$$F_{j+1/2} = \text{Riemann}(U_j, U_{j+1})$$

$$= \begin{cases} aU_j & \text{if } c > 0 \\ aU_{j+1} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= \frac{a}{2} (U_{j+1} + U_j) - \frac{|a|}{2} (U_{j+1} - U_j)$$

高次精度線形補間

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} + \frac{F_{j+1/2} - F_{j-1/2}}{\Delta x} = 0 \quad : \text{有限体積法}$$

$$F_{j+1/2} = \text{Riemann}(U_L, U_R)$$

$$= \frac{a}{2} (U_R + U_L) - \frac{|a|}{2} (U_R - U_L)$$

$$U_{j+1/2}^L = \begin{cases} U_j & \text{1次精度} \\ (-U_{j-1} + 4U_j + U_{j+1}) / 4 & \text{2次精度} \\ (-U_{j-1} + 5U_j + 2U_{j+1}) / 6 & \text{3次精度} \\ (2U_{j-2} - 13U_{j-1} + 47U_j + 27U_{j+1} - 3U_{j+2}) / 60 & \text{5次精度} \\ \dots \end{cases}$$

$U^R_{j-1/2}$ は $U^L_{j+1/2}$ で..., j-2, j-1, j, j+1, j+2, ...を逆順にしたもの。

高次精度線形補間の導出

セル平均値 (既知量)

$$U_j = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} U_j(x - x_j) dx, \quad I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$$

$$U_{j\pm 1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_{j\pm 1}} U_j(x - x_j) dx, \dots$$

テイラー展開に基づくセルj内の空間分布

$$U_j(x - x_j) = U(x_j) + U_x(x_j)(x - x_j)$$

$$+ U_{xx}(x_j)(x - x_j)^2 / 2 + \dots$$
 必要な精度で打ち切り

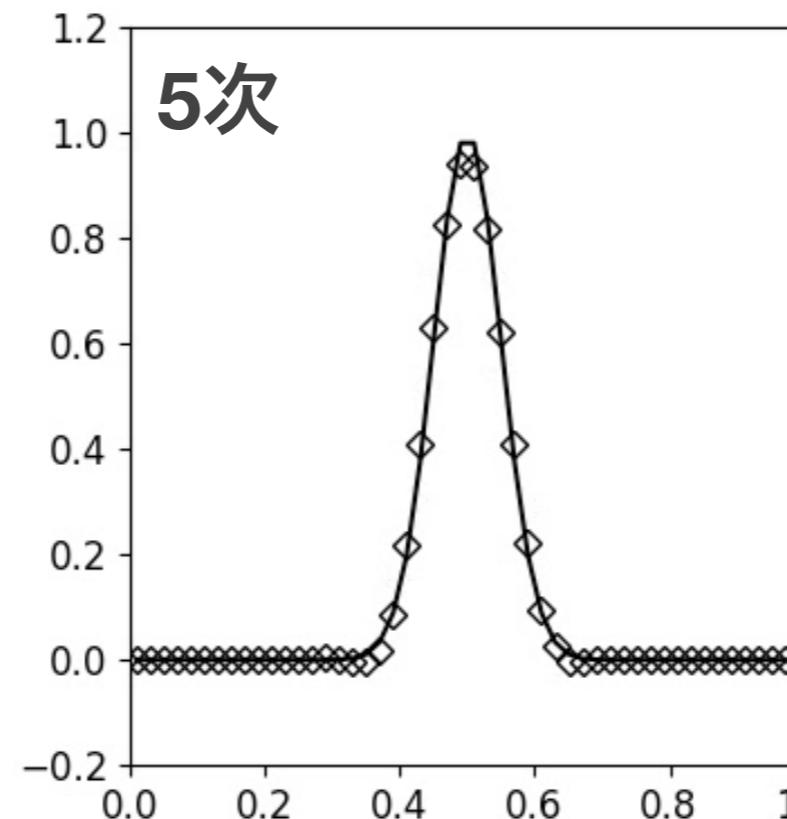
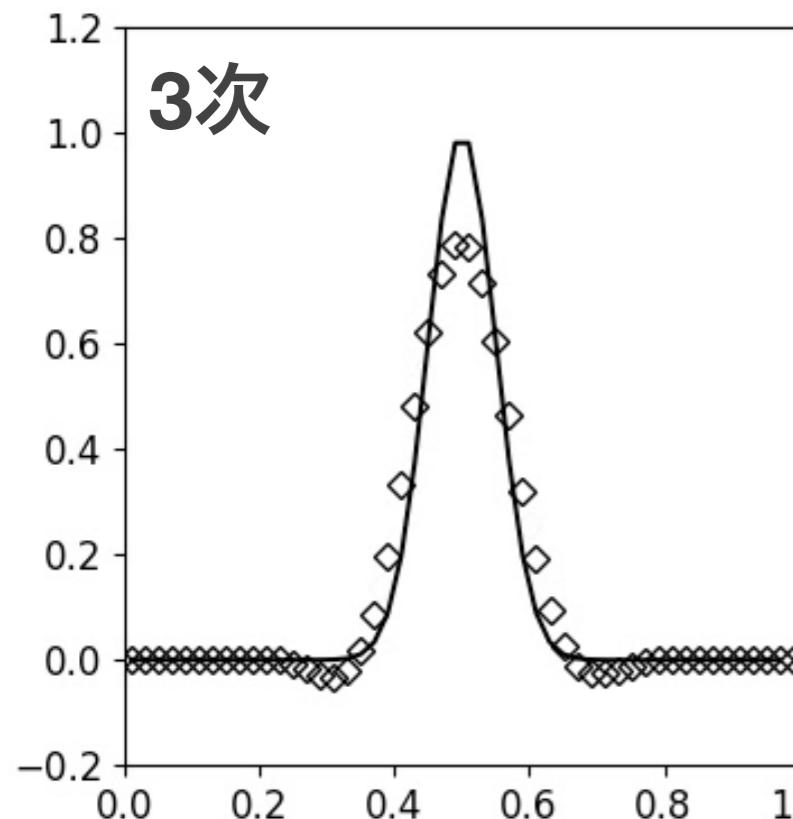
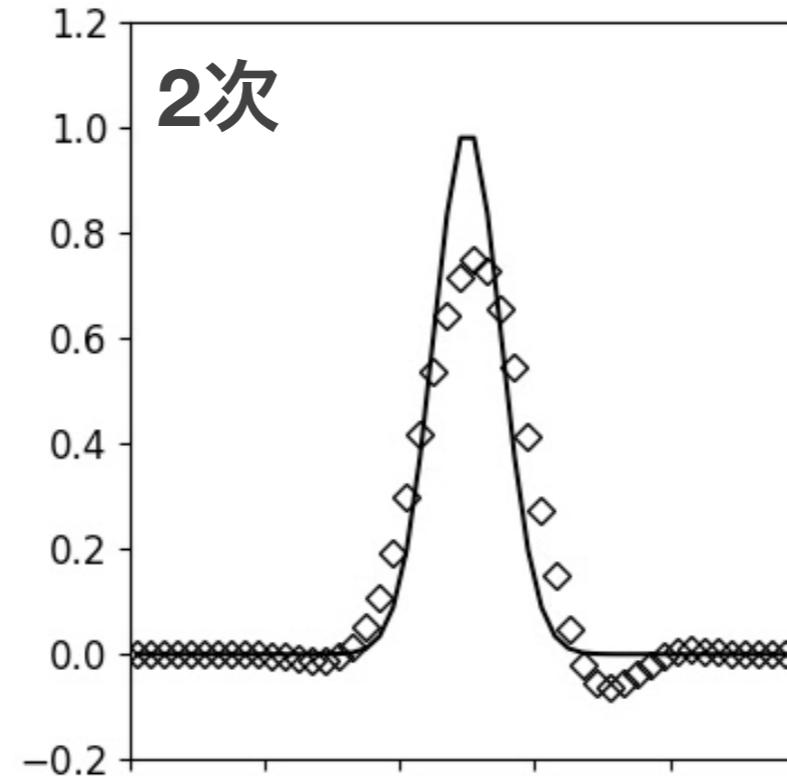
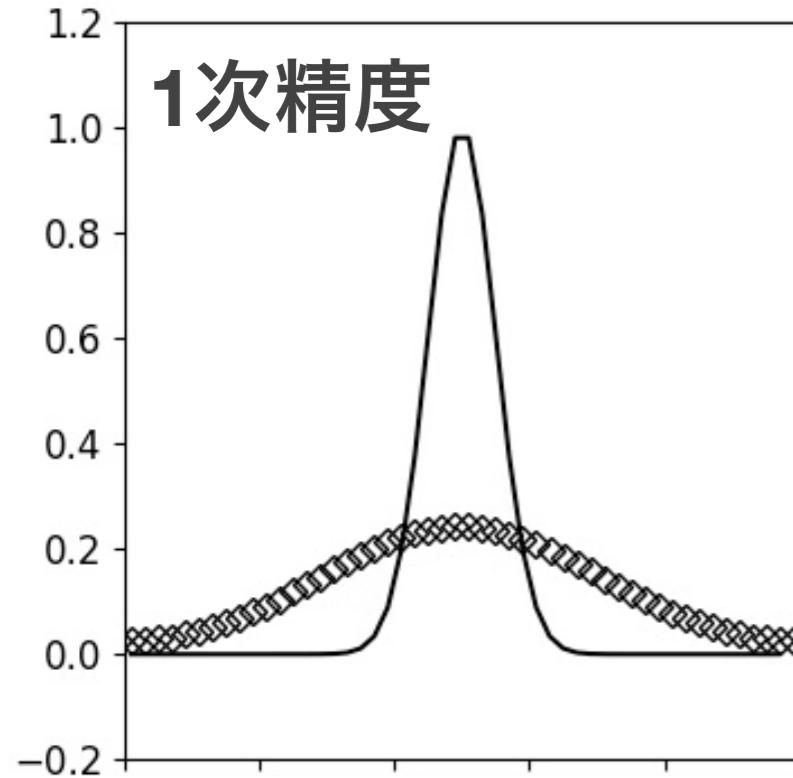
テイラー展開の
微分係数を計算

セル境界における風上補間値

$$U_{j+1/2}^L = U(x_j) + U_x(x_j) \frac{\Delta x_j}{2} + U_{xx}(x_j) \frac{\Delta x_j^2}{8} + \dots$$

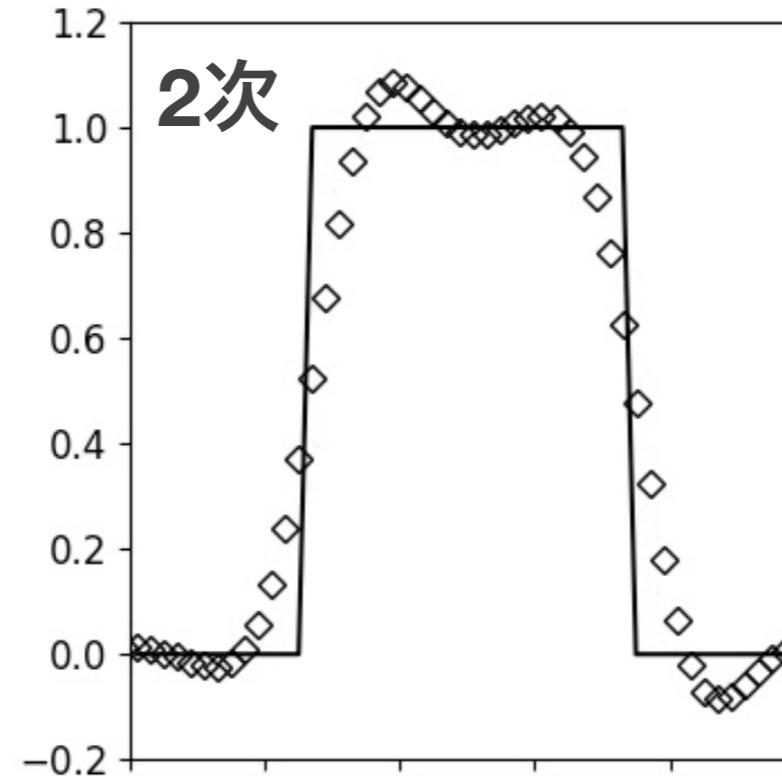
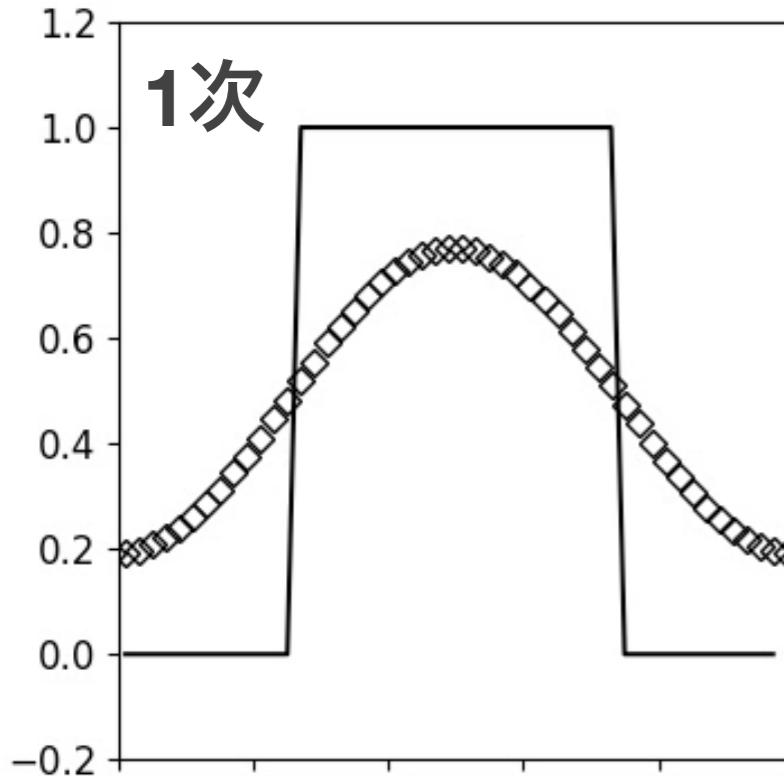
$$U_{j-1/2}^R = U(x_j) - U_x(x_j) \frac{\Delta x_j}{2} + U_{xx}(x_j) \frac{\Delta x_j^2}{8} + \dots$$

高次精度線形補間の比較 | ガウシアン



高次精度になるほど
きれいに解析解に
近づいていく。

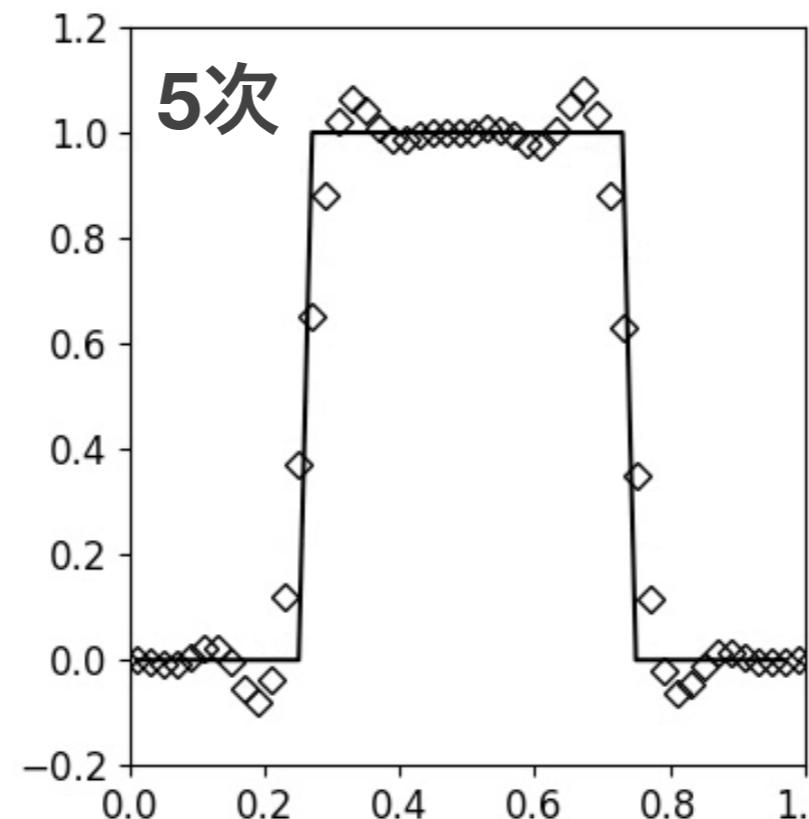
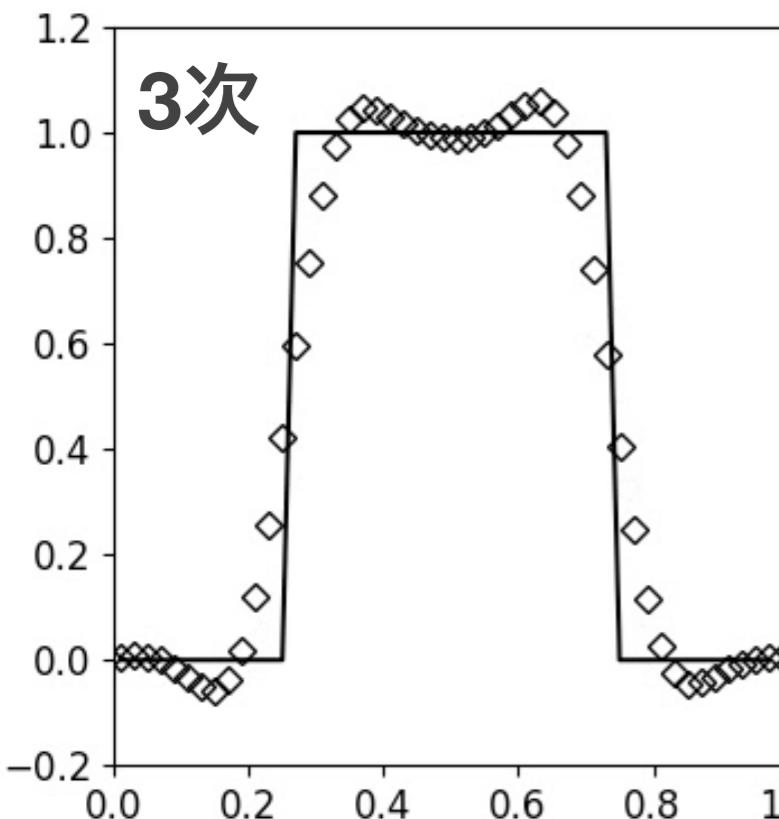
高次精度線形補間の比較 | 矩形波



実線: 解析解

不連續面付近で
数値振動。

Godunovの定理:



2次精度以上の
線形スキームは、
解の単調性を維持
することが出来ない。

非線形スキームが必要。

非線形スキームの例

- 不連続を含むような解をうまく取り回せるスキーム
 - 高次精度 @ なめらかな領域、低次精度 @ 不連続
- Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws
(MUSCL; van Leer, 1979; CANS+に実装)
- Weighted Essentially Oscillatory scheme (**WENO**; Liu et al., 1994; Jiang & Shu, 1996)
- Accurate Monotonicity Preserving scheme (**MP**; Suresh & Huynh, 1997; **CANS+に実装**)
- その他多数

単調性とTVD

TVDスキーム:

スキームが以下の条件を満たす時、TVDスキームと呼ぶ。

$$TV(u_j^{n+1}) \leq TV(u_j^n), \quad TV(u_j) = \sum_j |u_{j+1} - u_j|$$

単調性保持スキーム:

n ステップ目の解 u_j^n が単調な時、

次の $n+1$ ステップ目の解 u_j^{n+1} も単調になるスキーム。

Harten (1983):

TVDスキームは、

単調性保持スキームである。

単調性保持
スキーム

TVDスキーム

MUSCL法

セル j 内の物理量の空間分布

$$U_j(x) = U_j + \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2\Delta x}(x - x_j) \\ + \frac{3\kappa}{2} \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{\Delta x^2} \left[(x - x_j)^2 - \frac{\Delta x^2}{12} \right]$$

セル境界の補間値 (リミターなし)

$$U_{i+1/2}^L = U_j(x_{j+1/2}) = U_j + \frac{1-\kappa}{4}(U_j - U_{j-1}) + \frac{1+\kappa}{4}(U_{j+1} - U_j) \\ U_{j-1/2}^R = U_j(x_{j-1/2}) = U_j - \frac{1-\kappa}{4}(U_{j+1} - U_j) - \frac{1+\kappa}{4}(U_j - U_{j-1})$$

セル境界の補間値 (TVD条件のため流速制限関数Φを導入)

$$U_{i+1/2}^L = U_j + \frac{1-\kappa}{4}\Phi(r)(U_j - U_{j-1}) + \frac{1+\kappa}{4}\Phi(1/r)(U_{j+1} - U_j) \\ U_{j-1/2}^R = U_j - \frac{1-\kappa}{4}\Phi(1/r)(U_{j+1} - U_j) - \frac{1+\kappa}{4}\Phi(r)(U_j - U_{j-1})$$

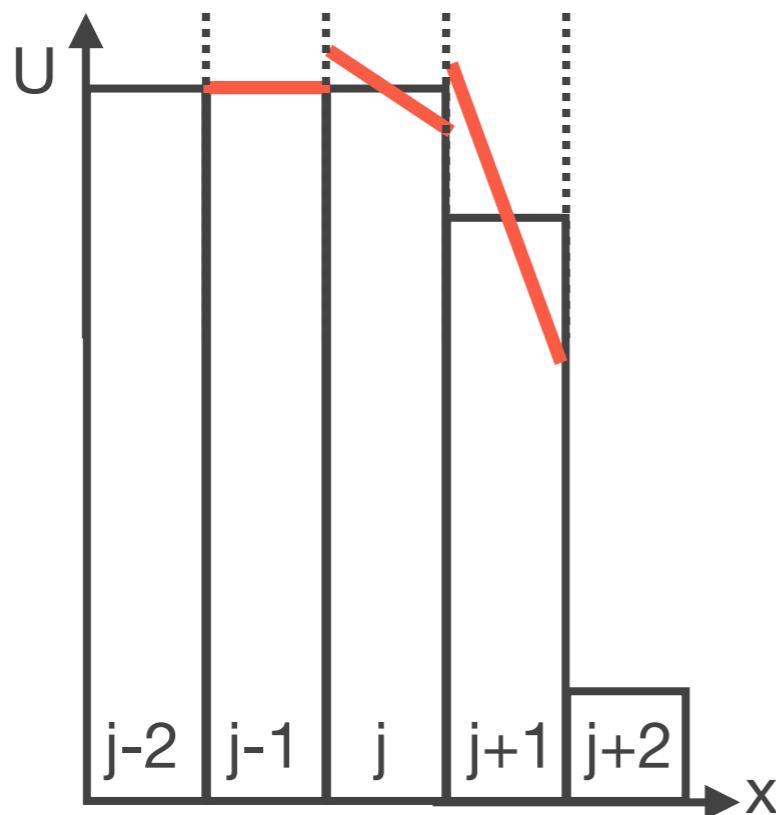
MUSCL法

セル境界の補間値 (リミター Φ が対称な場合; $\Phi(r) = r\Phi(1/r)$)

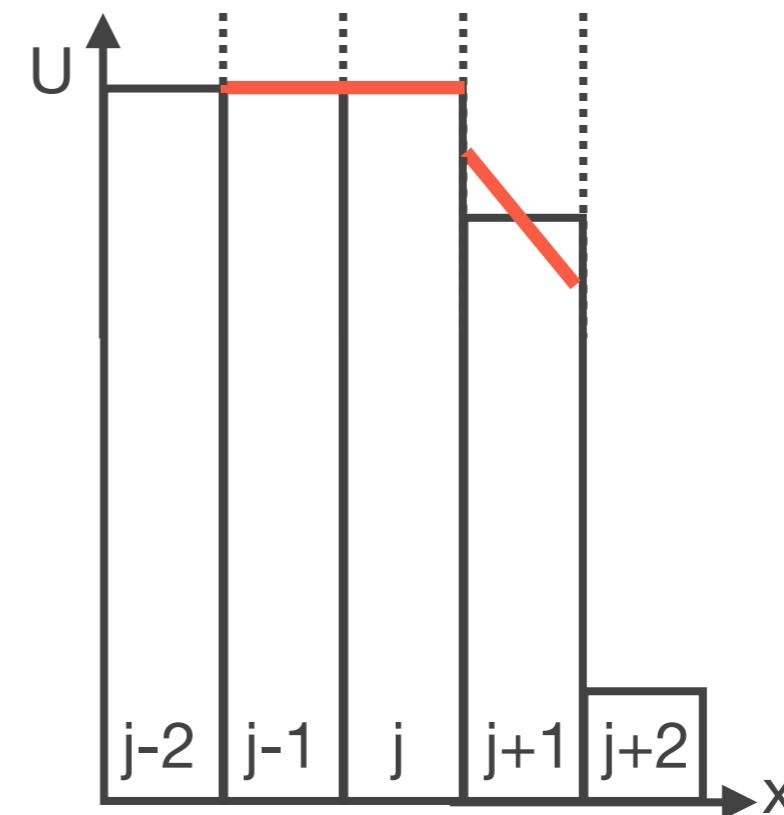
$$U_{i+1/2}^L = U_j + \frac{1}{2}\Delta_j, \quad U_{j-1/2}^R = U_j - \frac{1}{2}\Delta_j$$

$$\Delta_j = \text{Limiter}(U_{j+1} - U_j, U_j - U_{j-1})$$

$$= \Phi(1/r)(U_{j+1} - U_j) = \Phi(r)(U_j - U_{j-1})$$



リミター無し (線形補間)



リミター有り (minmod)

流速制限関数

制限されたセル内のスロープ

$$\Delta_j = \text{Limiter} (U_{j+1} - U_j, U_j - U_{j-1})$$

Minmod (Roe, 1986)

$$\text{minmod}(a, b) = \frac{1}{2} [\text{sgn}(a) + \text{sgn}(b)] \min(|a|, |b|)$$

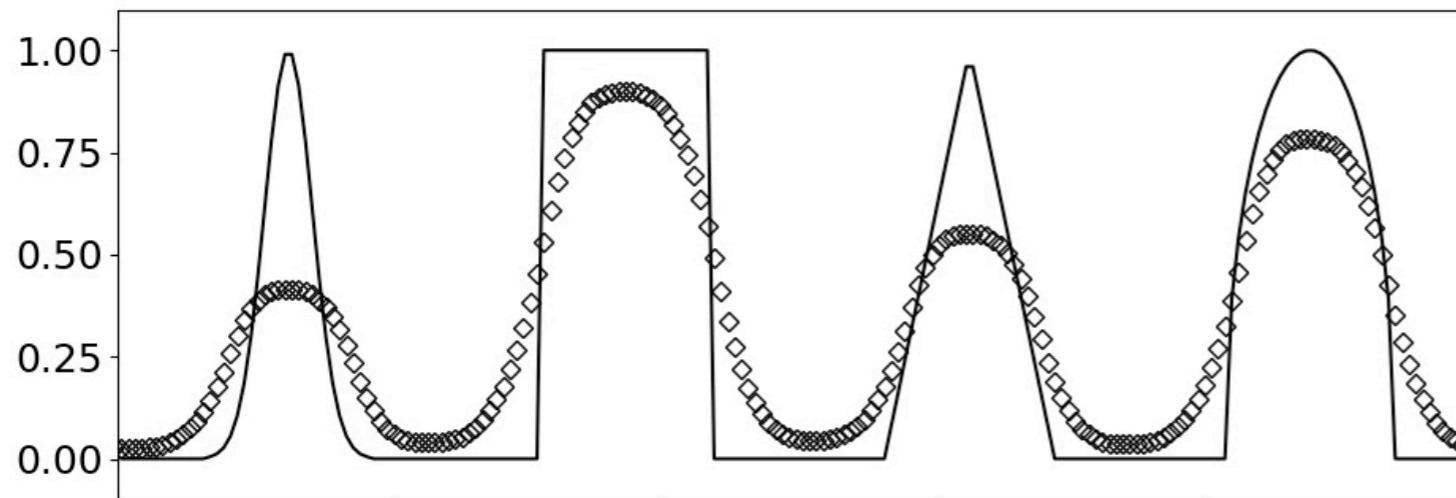
Monotonized Central (MC) (van Leer, 1977)

$$\text{MC}(a, b) = \frac{1}{2} [\text{sgn}(a) + \text{sgn}(b)] \min \left(2|a|, \frac{|a+b|}{2}, 2|b| \right)$$

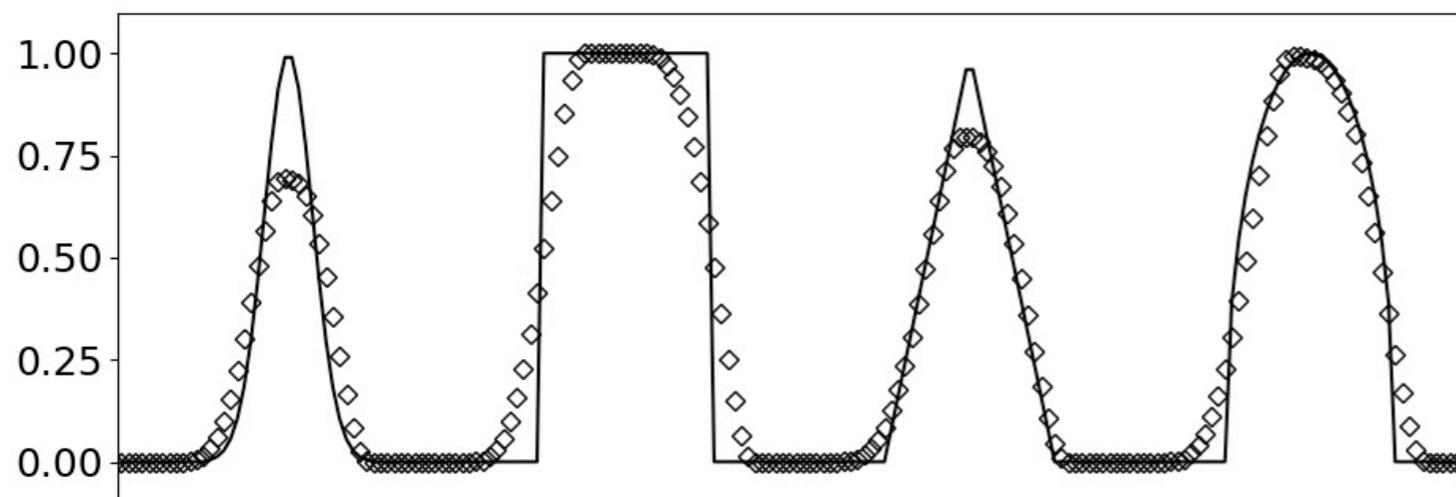
Superbee (Roe, 1986)

$$\begin{aligned} \text{Superbee}(a, b) &= \frac{1}{2} [\text{sgn}(a) + \text{sgn}(b)] \\ &\quad \max [\min (2|a|, |b|), \min (|a|, 2|b|)] \end{aligned}$$

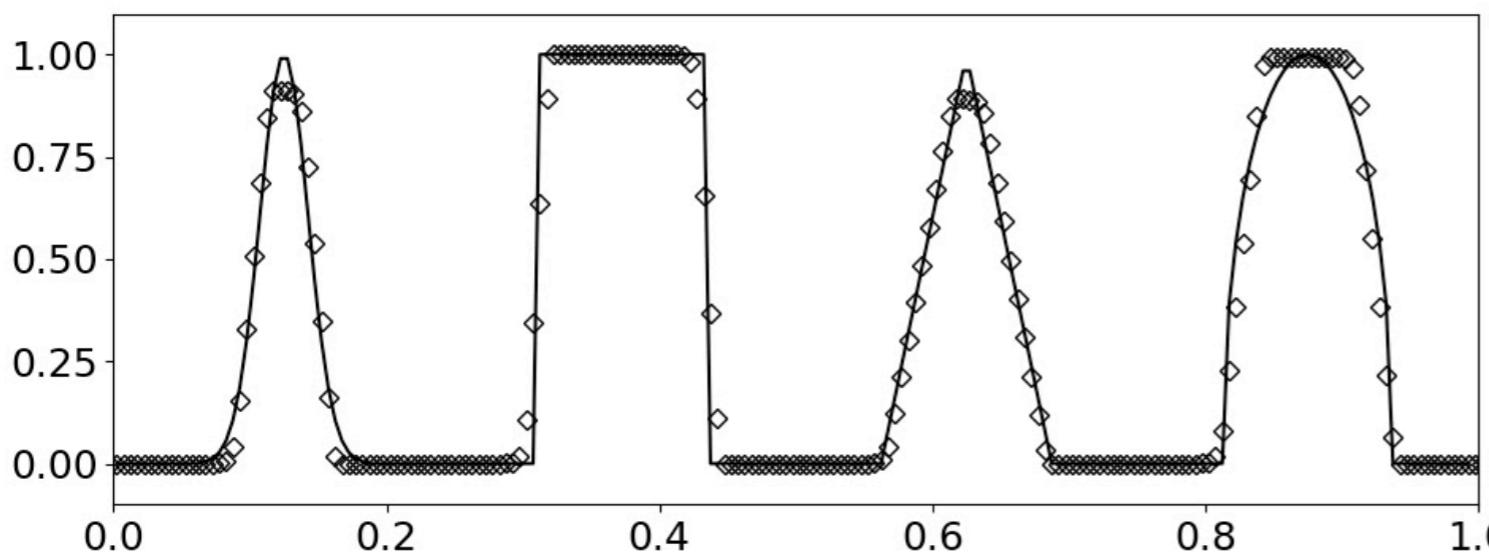
MUSCLスキームの比較



Minmodリミター
(Roe, 1986)



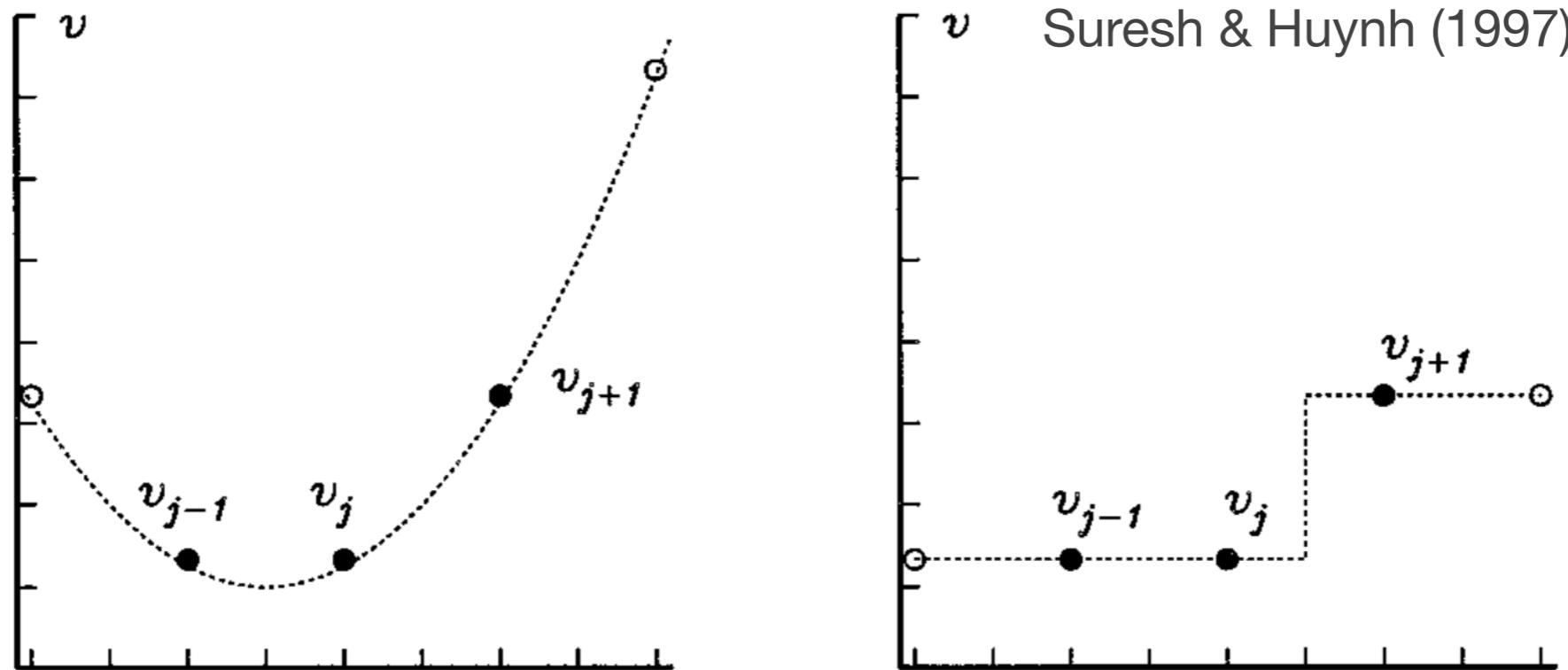
MCリミター
(van Leer, 1974)



Superbeeリミター
(Roe, 1986)

TVDスキームの限界

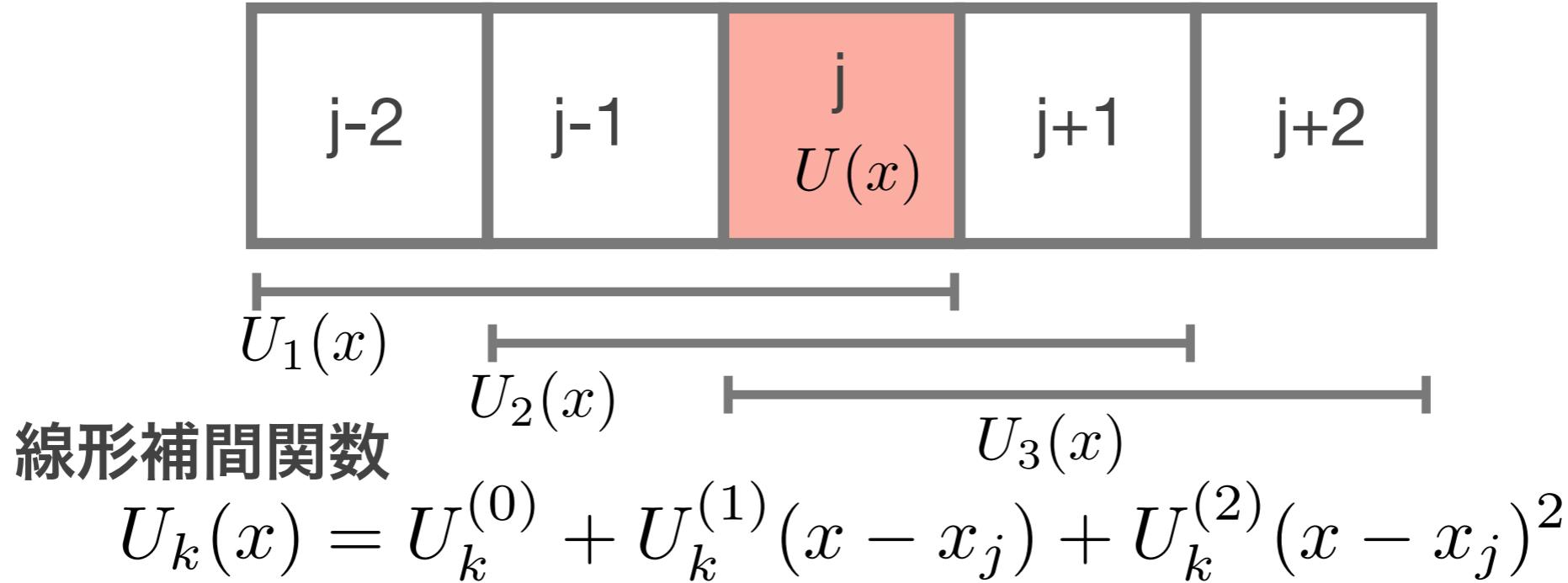
MUSCL法のような3点ステンシルのTVDスキームでは、なめらかな極値と不連続を区別出来ない。



これを回避するため、なめらかな極値を保つようなりミター (MP5) や、なめらかなステンシルを上手く選択する (WENO) ような非TVDスキームが提案されている。

WENO法

Weighted Essentially Non-Oscillatory Scheme
(WENO; Liu et al., 1994; Jiang & Shu, 1999)



重み付け平均補間関数

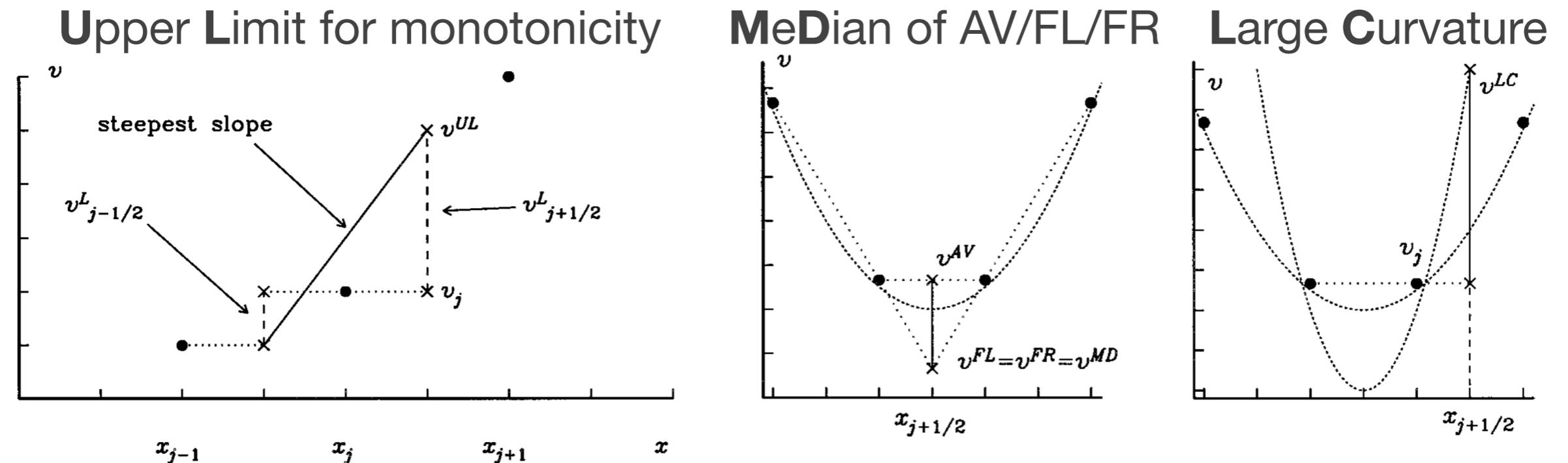
$$U(x) = w_1 U_1(x) + w_2 U_2(x) + w_3 U_3(x)$$

セル内の物理量の分布 $U(x)$ を異なるステンシルで評価された
線形補間関数 U_1, U_2, U_3 の重み付け平均として計算。
重みは不連続を含むステンシルで小さくなるような非線形関数。

MP5法

Accurately Monotonicity Preserving scheme

(MP5; Suresh & Huynh, 1997)

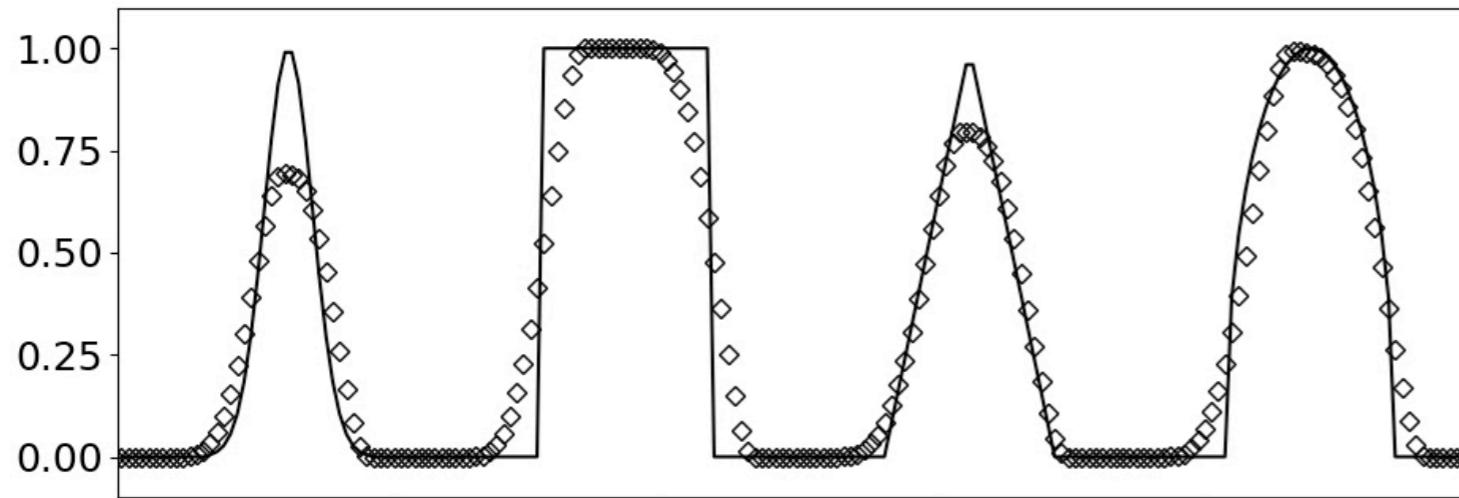


$$U_{j+1/2}^{L*} = (2U_{j-2} - 13U_{j-1} + 47U_j + 27U_{j+1} - 3U_{j+2}) / 60$$

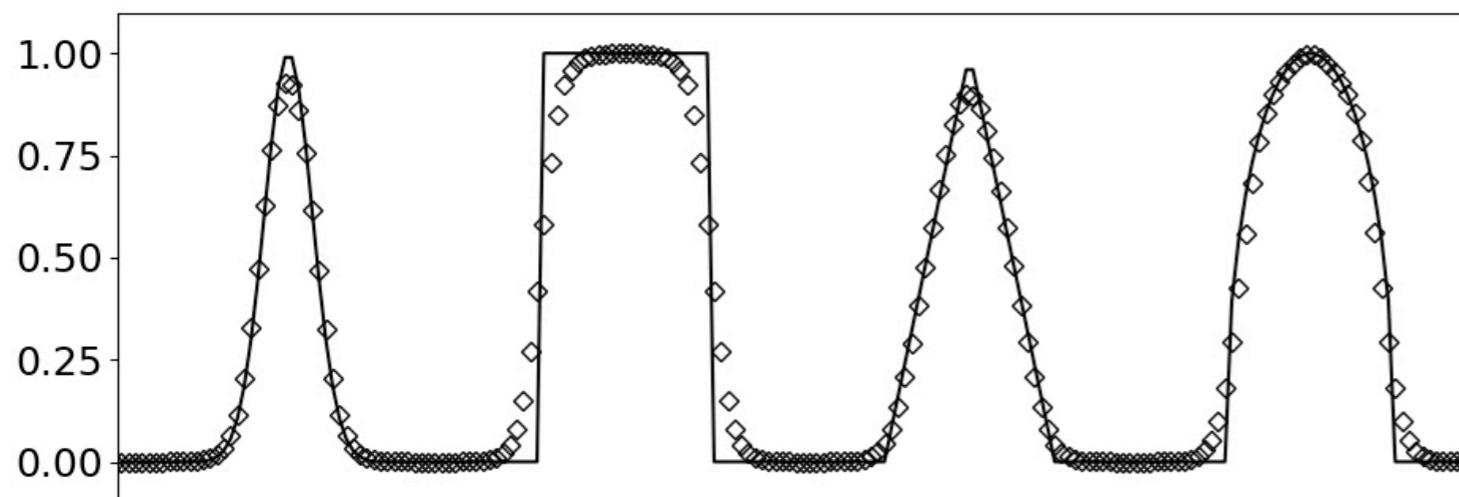
$$U_{j+1/2}^L = \text{median} \left(U_{j+1/2}^{L*}, U_{\min}, U_{\max} \right)$$

複数の条件からセル境界の風上補間値を制限。
単調性を保ちつつ、極値があれば極値も保つ。

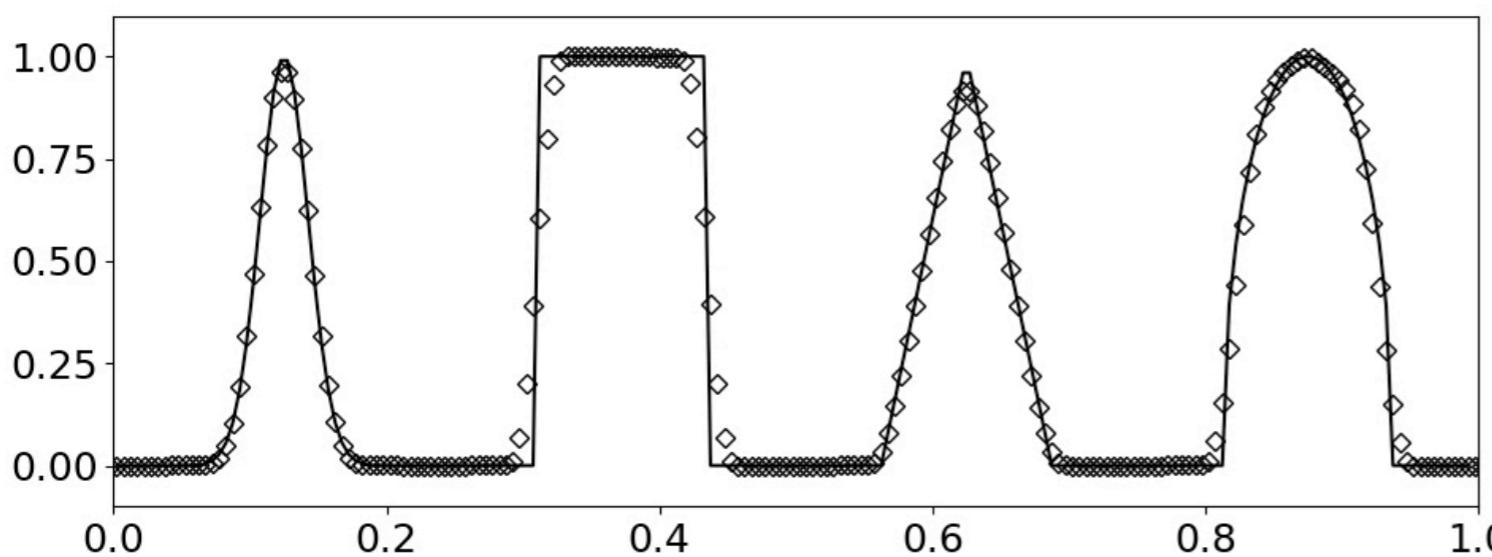
移流スキームの比較



MUSCL-MC



WENO5
(Jiang & Shu, 1996)



MP5
(Suresh & Huynh, 1997)

時間高次精度化 | SSP Runge-Kutta法

Strongly Stability Preserving Runge-Kutta method
(SSP RK; TVD RK; Shu & Osher, 1988)

流体・MHD計算のように衝撃波・不連続を含む場合、通常のRK法で行うような線形安定性解析では不十分。

SSP Runge-Kutta法では、もし前進Euler法に関して数値スキームがTVD条件

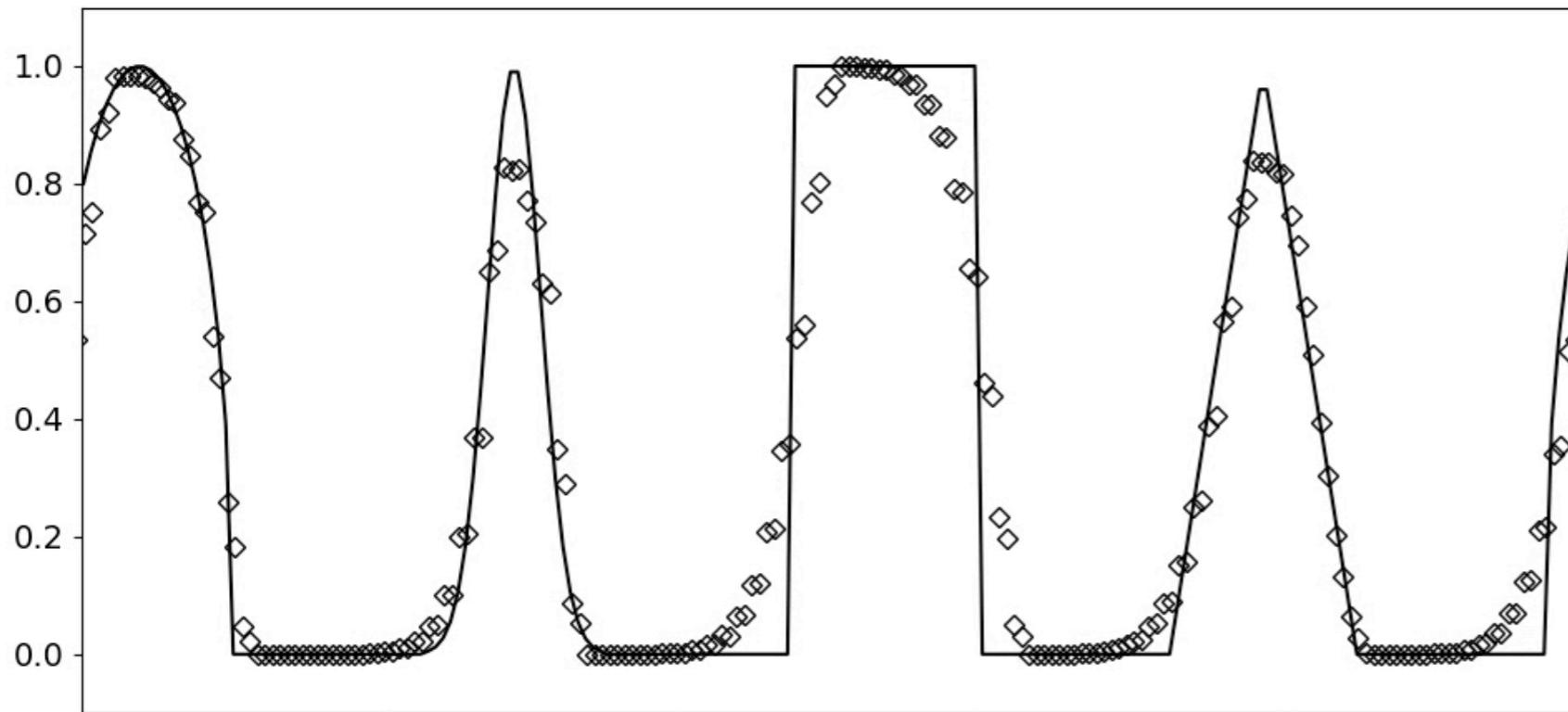
$$\text{TV}[U^n + \Delta t F(U^n)] \leq \text{TV}[U^n]$$

を満たすなら、適切な $\Delta t < \Delta t_{\text{SSP}}$ のもと、SSP Runge-Kutta法で積分した $n+1$ ステップ目の解 U^{n+1} もTVD条件

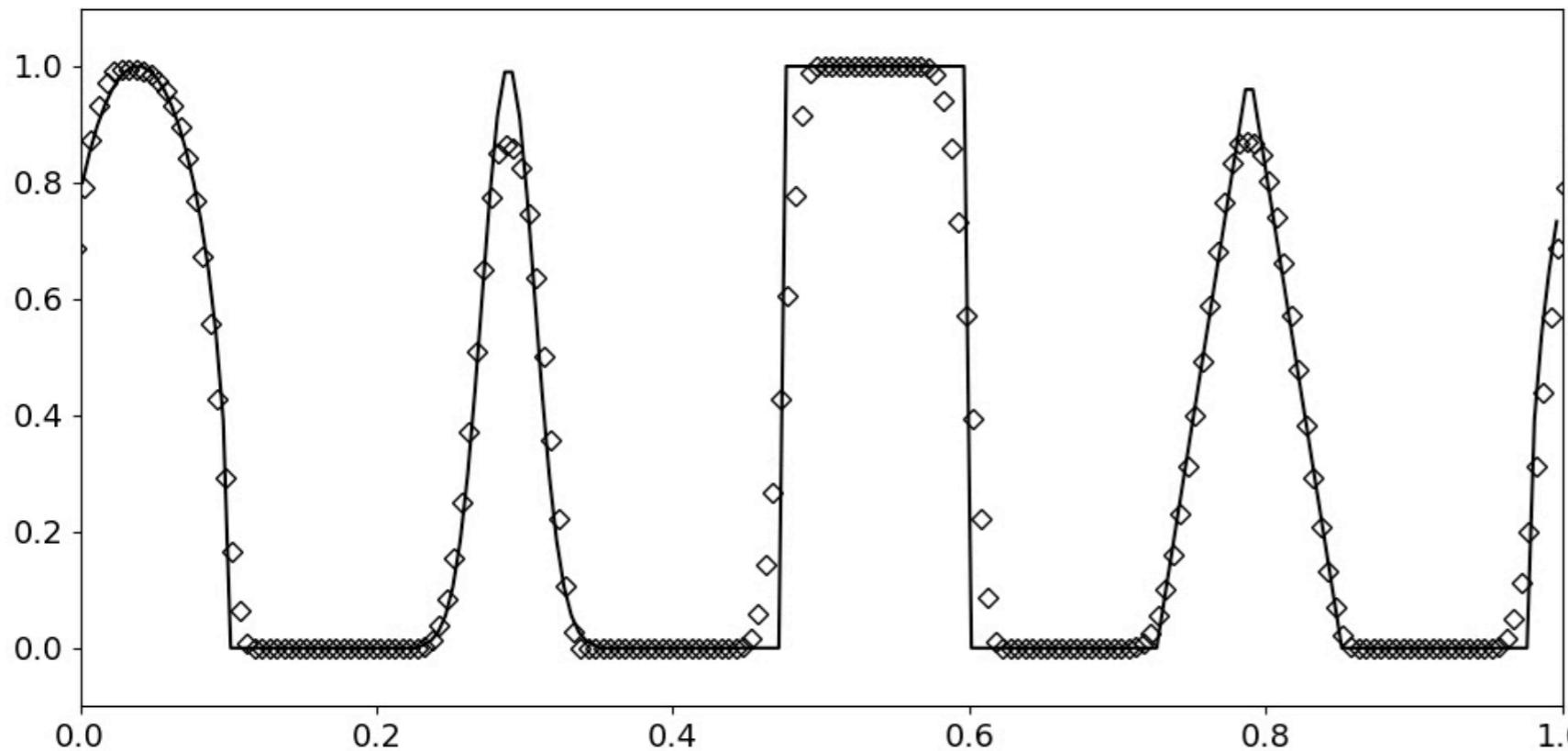
$$\text{TV}[U^{n+1}] \leq \text{TV}[U^n]$$

を満たすことが保証される。このため、解の単調性を保ったまま時間方向に高次精度化することが出来る。

時間積分法の高次精度化



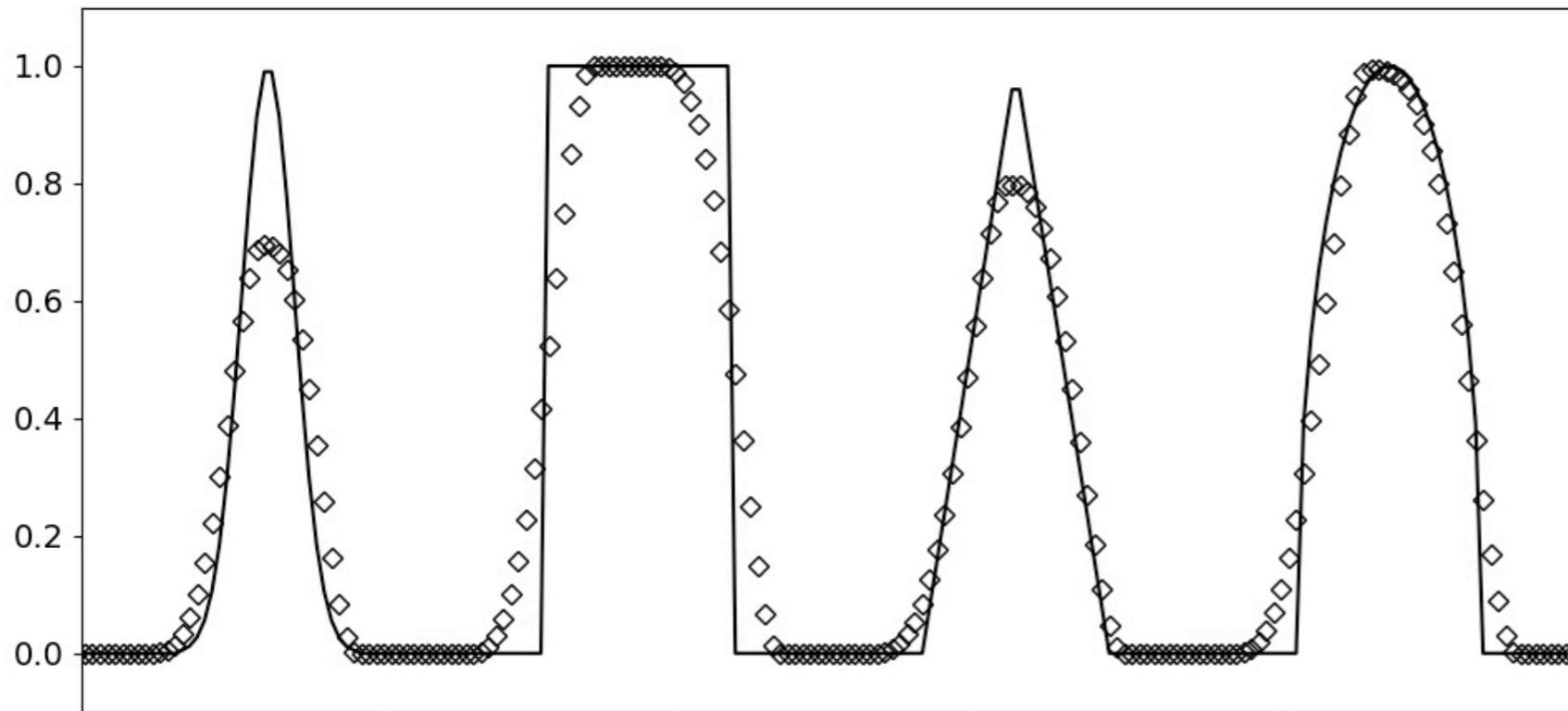
Non SSPRK(5,3)
CFL = 0.8
MUSCL-MC



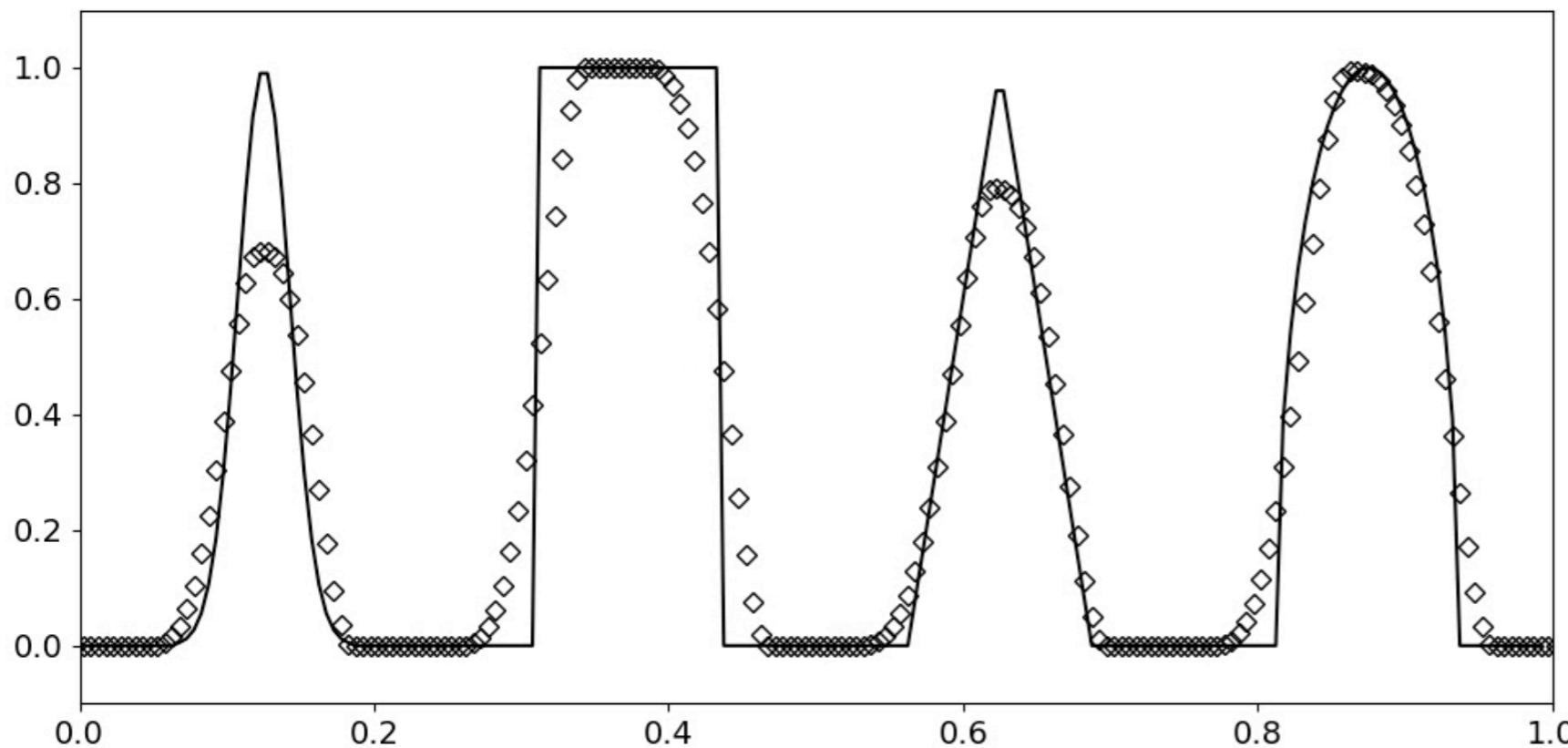
SSPRK(5,3)
CFL = 0.8
MUSCL-MC

非SSPなRKでは、線形
安定なCFLでも、不連
続があると解の単調性
が保てない。

時間積分法の高次精度化



Non SSPRK(5,3)
CFL = 0.7
MUSCL-MC



SSPRK(5,3)
CFL = 1.3
MUSCL-MC

単調性・TVDが保てる
CFL数で比べると、
SSPRKの方が効率的。

Optimal SSP Runge-Kutta法

同じステップ数、同じ精度で、TVDを保てるCFLが
最も大きいSSP Runge-Kutta法。

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

以下の2次、3次のOptimal SSPRKがよく使われる。

1次精度; 前進Euler法

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t f(y^n)$$

2次精度; SSPRK(2, 2)

$$y^{(1)} = y^n + \Delta t f(y^n)$$

$$y^{n+1} = \frac{1}{2}y^n + \frac{1}{2} [y^{(1)} + \Delta t f(y^{(1)})]$$

3次精度; SSPRK(3, 3)

$$y^{(1)} = y^n + \Delta t f(y^n)$$

$$y^{(2)} = \frac{3}{4}y^n + \frac{1}{4} [y^{(1)} + \Delta t f(y^{(1)})]$$

$$y^{n+1} = \frac{1}{3}y^n + \frac{2}{3} [y^{(2)} + \Delta t f(y^{(2)})]$$

1次元理想MHD方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho V_x \\ \rho V_y \\ \rho V_z \\ B_y \\ B_z \\ e \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho V_x \\ \rho V_x^2 + p_T - B_x^2 \\ \rho V_y V_x - B_x B_y \\ \rho V_z V_x - B_x B_z \\ B_y V_x - B_x V_y \\ B_z V_x - B_x V_z \\ (e + p_T) V_x - B_x (V_x B_x + V_y B_y + V_z B_z) \end{pmatrix}$$

$$p_T = p + \frac{1}{2} (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)$$

$$p = (\gamma - 1) \left[e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) - \frac{1}{2} (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \right]$$

制約条件 $\text{div} \mathbf{B} = 0$ より B_x は空間・時間に関して一定。

システム方程式への適用

$$\frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial t} + \frac{\mathbf{F}_{j+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2}}{\Delta x} = 0$$

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \text{Riemann} \left(\mathbf{U}_{j+1/2}^L, \mathbf{U}_{j+1/2}^R \right) : \text{HLL, HLLD, Roe, ...}$$

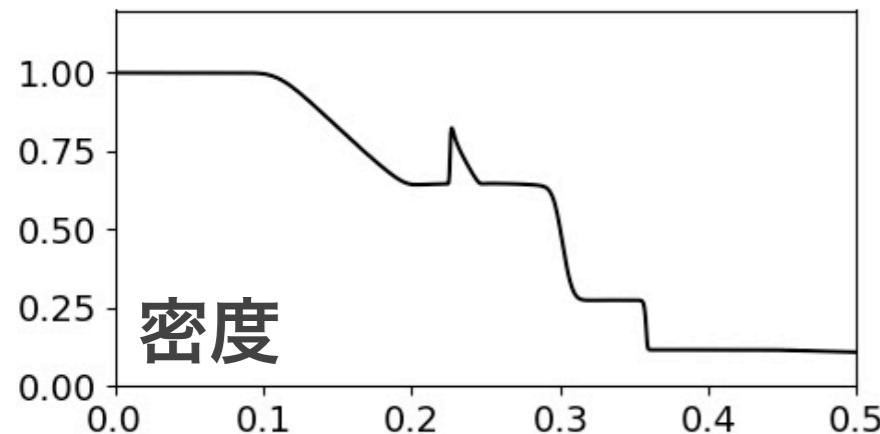
$$\mathbf{U}_{j+1/2}^L = \begin{cases} \mathbf{U}_j \\ \text{MUSCL} (\mathbf{U}_{j-1}, \mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}) \\ \text{WENO5} (\mathbf{U}_{j-2}, \mathbf{U}_{j-1}, \mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}, \mathbf{U}_{j+2}) \\ \text{MP5} (\mathbf{U}_{j-2}, \mathbf{U}_{j-1}, \mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}, \mathbf{U}_{j+2}) \\ \dots \end{cases}$$

$\mathbf{U}_{j-1/2}^R$ は $\mathbf{U}_{j+1/2}^L$ で..., j-2, j-1, j, j+1, j+2, ...を逆順にしたもの。

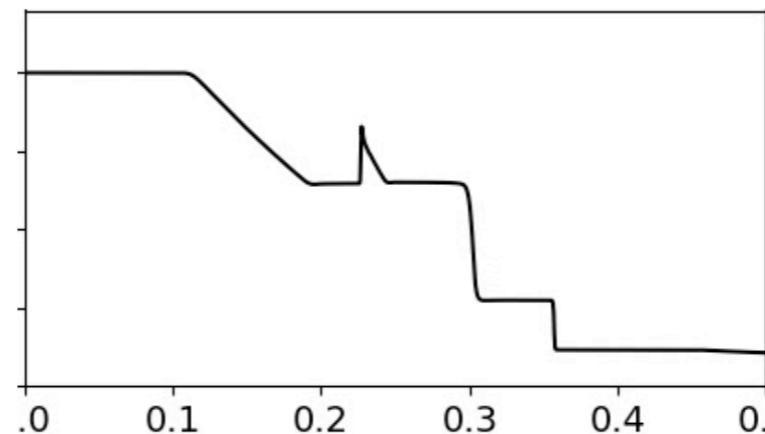
時間積分法は引き続きSSP Runge-Kutta法を使用。

MHD衝撃波管 (Brio & Wu, 1988) | 保存変数補間

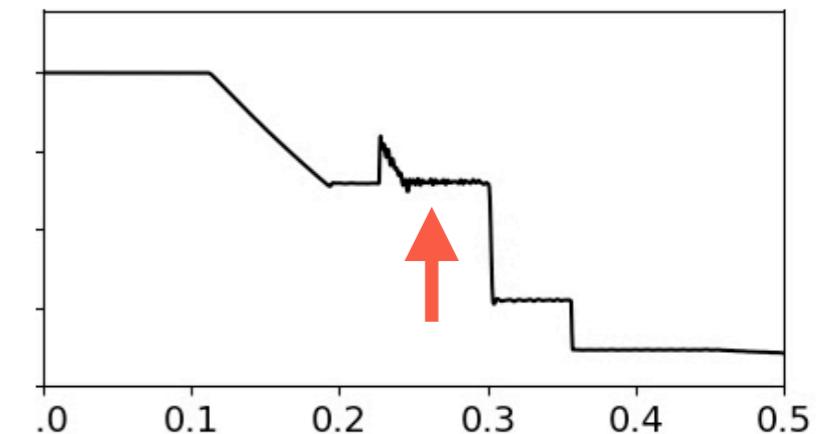
1次精度風上補間



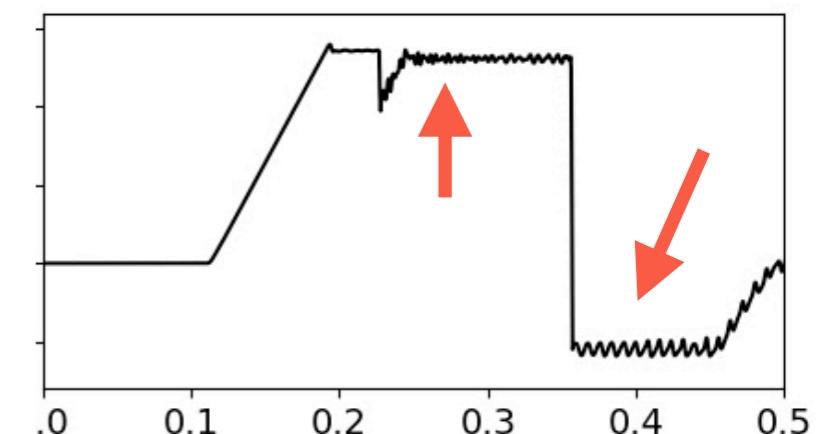
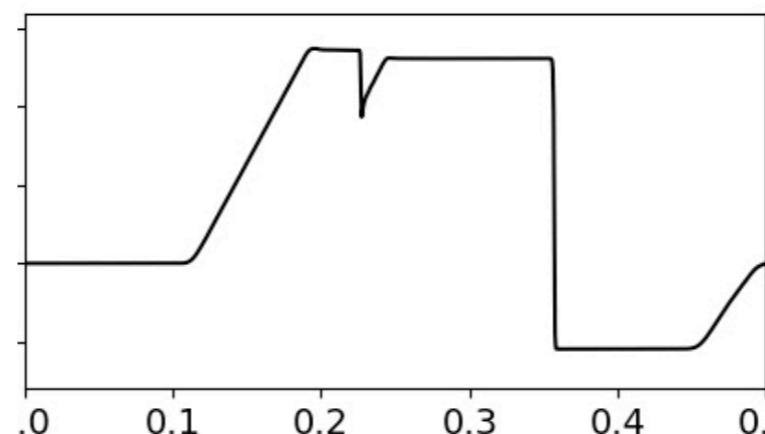
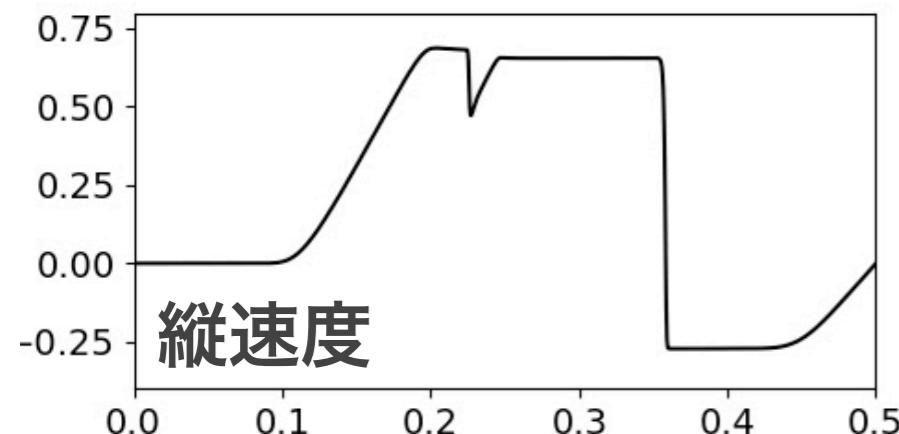
MUSCL-Minmod



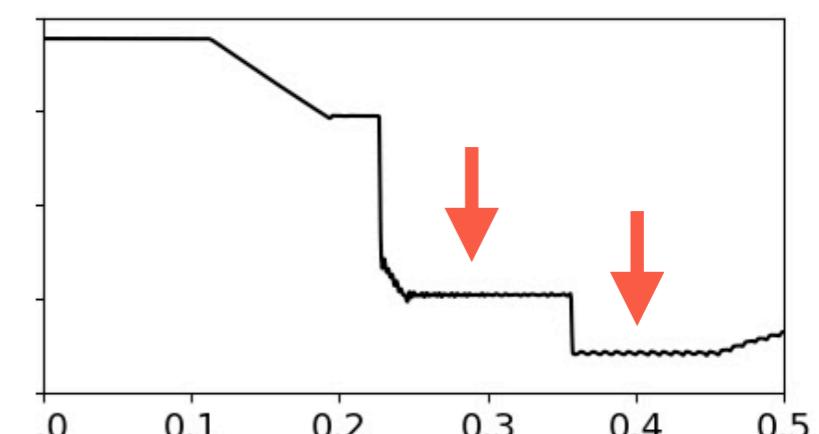
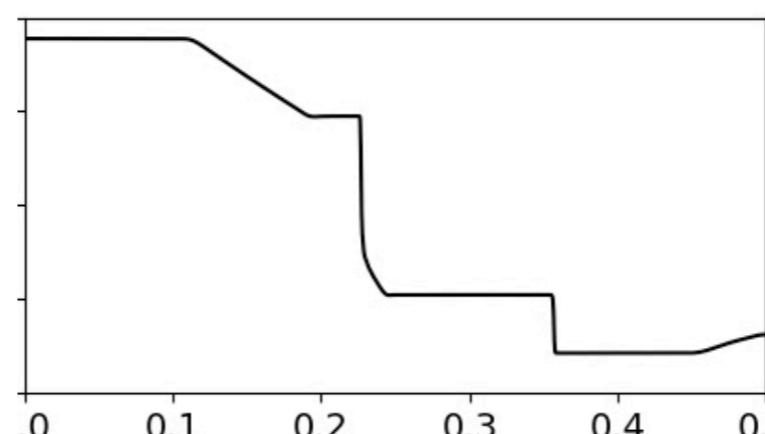
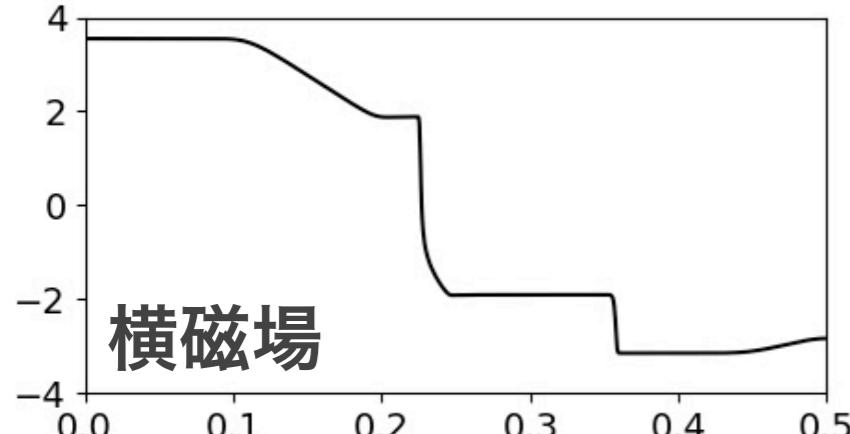
MP5



縦速度



横磁場



Osherの近似リーマンソルバー、3次精度SSP RK法

リーマン不变量

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$$

$$A = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = R\Lambda L, \quad RL = LR = I$$

$$L \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \Lambda \cdot L \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0$$

A: ヤコビアン行列, R/L: Aの左右固有行列

Λ : Aの固有値（実数）を要素とする対角行列

特性量（リーマン不变量） $d\mathbf{W}=Ld\mathbf{U}$ は
位相速度 Λ の特性線に沿って一定。
空間補間もリーマン不变量に関して行いたい。

特性量補間

保存量補間 (MP5の場合)

$$U_{j+1/2}^L = \text{MP5}(U_{j-2}, U_{j-1}, U_j, U_{j+1}, U_{j+2})$$

特性量補間

$$W_k = L_j U_{j+k} : \text{保存量} \Rightarrow \text{特性量}$$

$$W_{j+1/2}^L = \text{MP5}(W_{-2}, W_{-1}, W_0, W_1, W_2)$$

$$U_{j+1/2}^L = R_j W_{j+1/2}^L : \text{特性量} \Rightarrow \text{保存量}$$

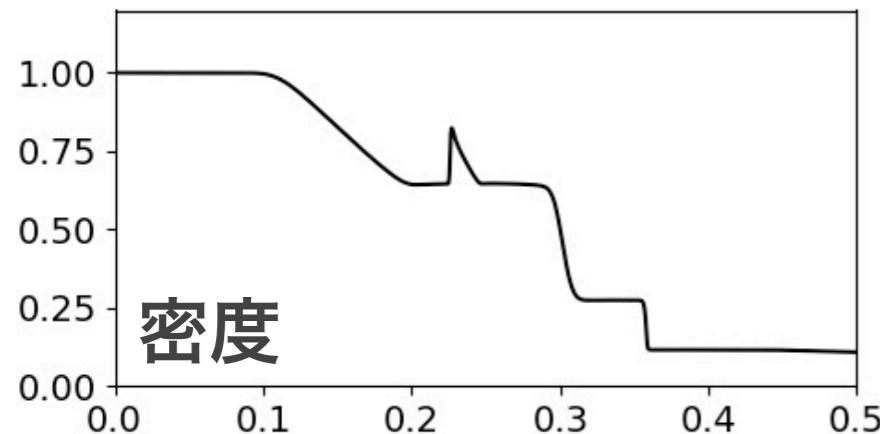
特性量の補間は高コスト、実装も面倒。

固有行列が明らかでない系には使えない。

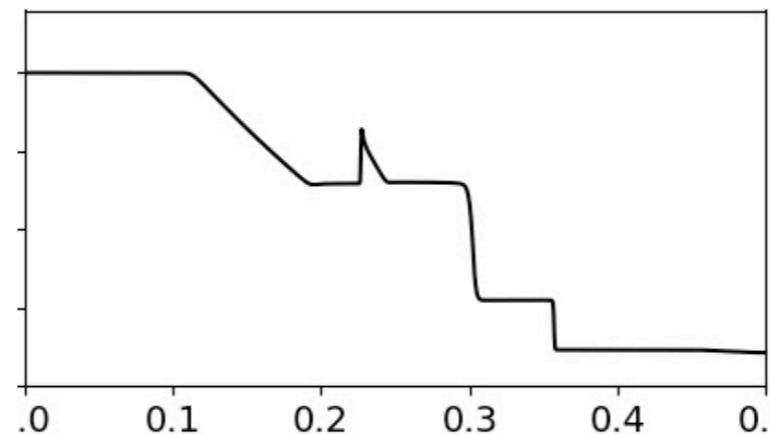
MHDの固有行列: e.g., Stone et al. (2008)

MHD衝撃波管 (Brio & Wu, 1988) | 特性量補間

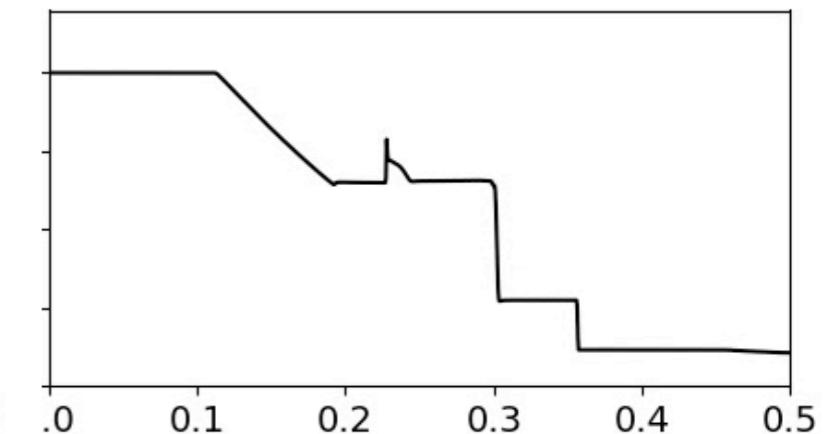
1次精度風上補間



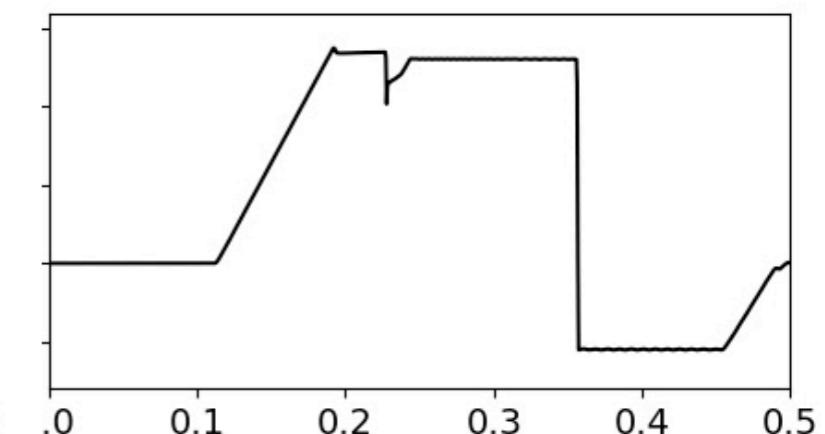
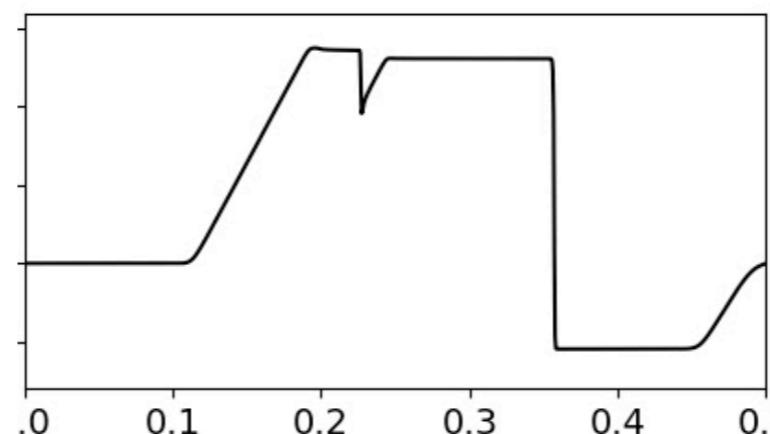
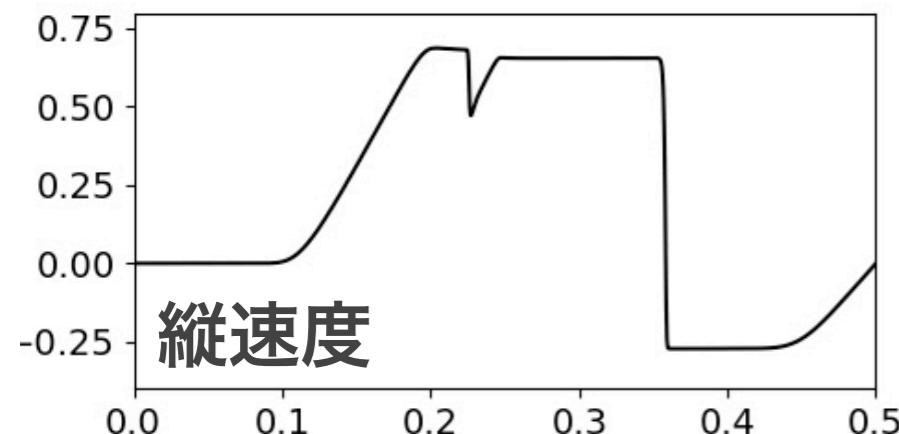
MUSCL-Minmod



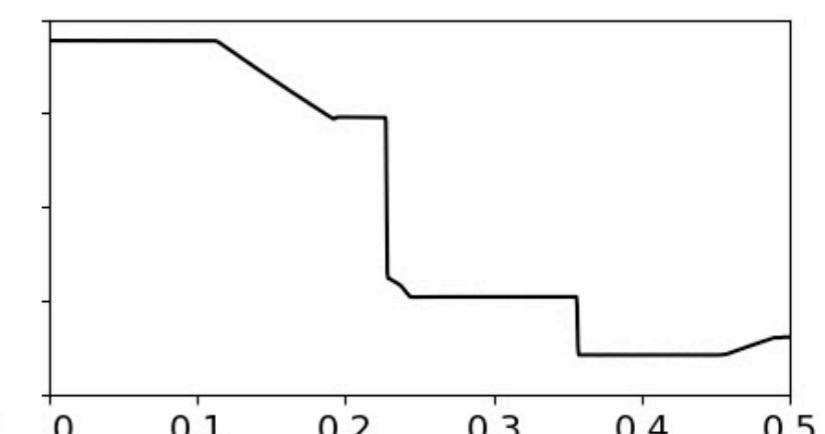
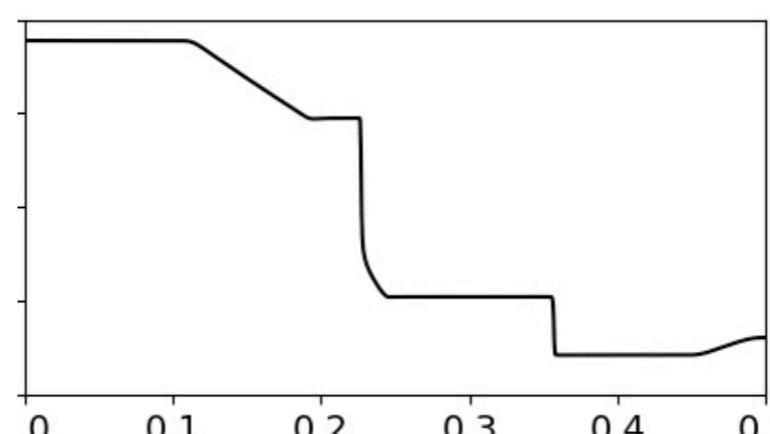
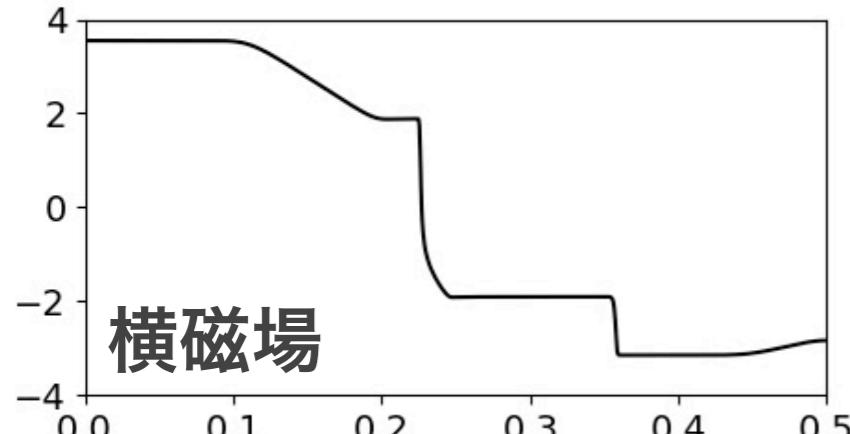
MP5



縦速度

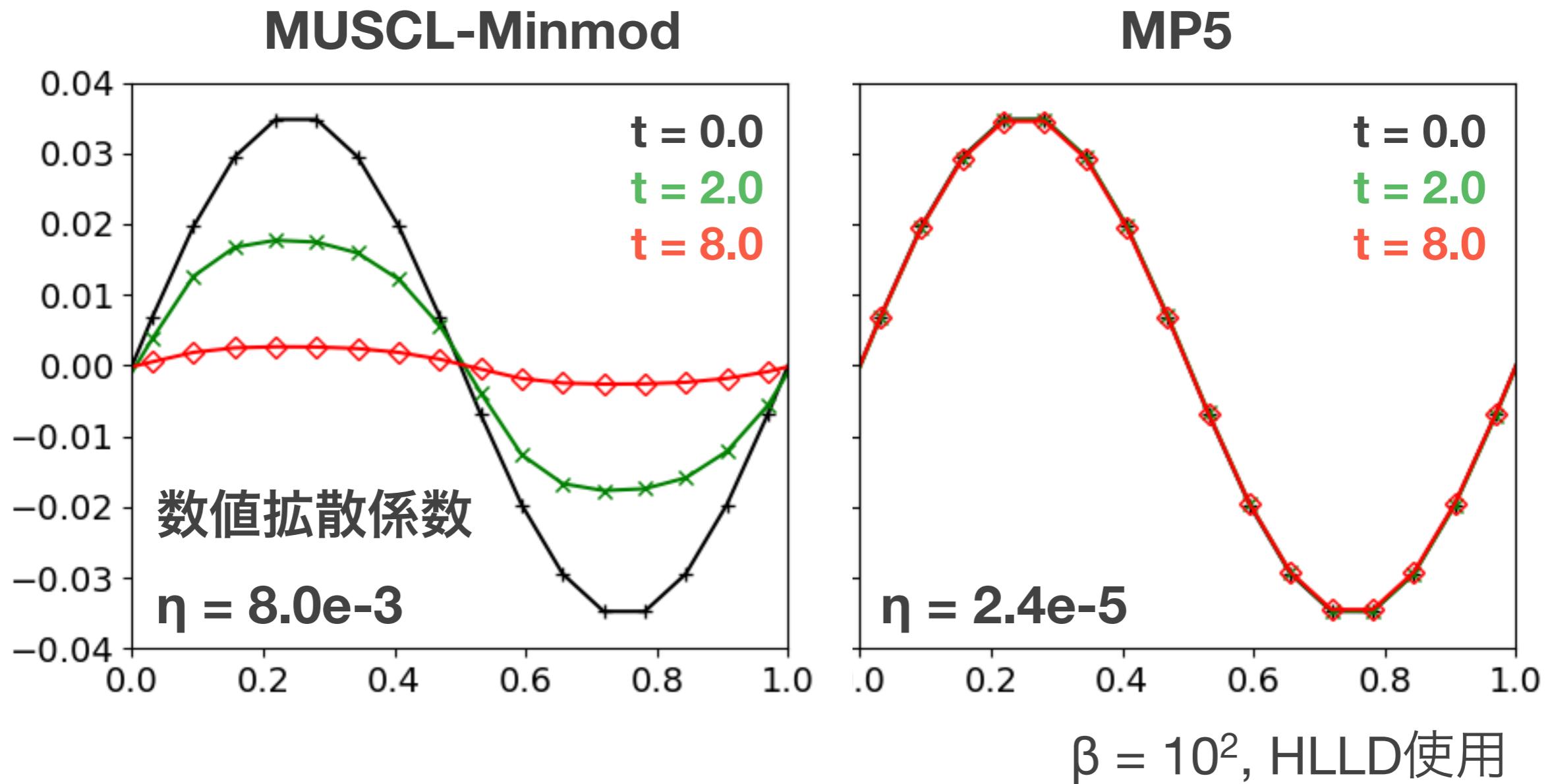


横磁場



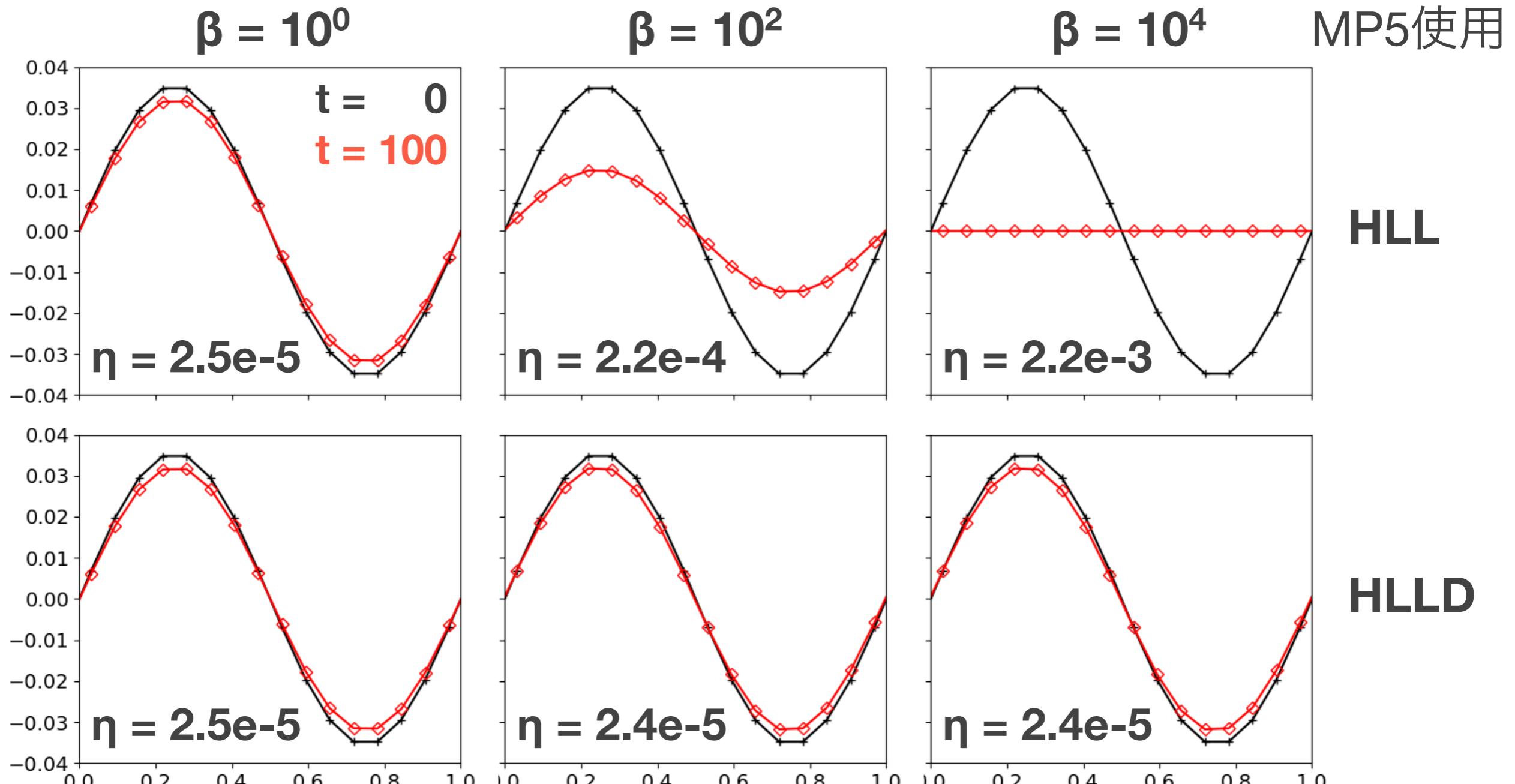
Osherの近似リーマンソルバー、3次精度SSP RK法

アルフベン波 | 補間スキーム依存性



補間スキームを高次精度化することにより、
数値拡散による波の減衰が軽減。

アルフベン波 | リーマンソルバ依存性



$$\eta_{\text{HLL}} \sim \frac{1}{2} (V_x + c_f) \Delta x \sim \frac{1}{2} c_s \Delta x$$

$$\eta_{\text{HLLD}} \sim \frac{1}{2} (V_x + c_A) \Delta x \sim \frac{1}{2} c_A \Delta x$$

$$\rightarrow \quad \eta_{\text{HLL}} / \eta_{\text{HLLD}} \propto \beta^{1/2}$$

多元化

数値スキームの多次元化

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

$$I_{i,j} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$$

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{I_{i,j}} dx dy$$

セル(i,j)内で空間積分

$$\frac{\partial U_{i,j}}{\partial t} + \frac{F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{G_{i,j+1/2} - G_{i,j-1/2}}{\Delta y} = 0$$

directionally unsplit (各方向を同時に時間積分)

$$F_{i+1/2,j} = \text{Riemann} \left(U_{i+1/2,j}^L, U_{i+1/2,j}^R \right)$$

$$G_{i,j+1/2} = \text{Riemann} \left(U_{i,j+1/2}^L, U_{i,j+1/2}^R \right)$$

$$U_{i+1/2,j}^L = \text{MP5} (U_{i-2,j}, U_{i-1,j}, U_{i,j}, U_{i+1,j}, U_{i+2,j})$$

$$U_{i,j+1/2}^L = \text{MP5} (U_{i,j-2}, U_{i,j-1}, U_{i,j}, U_{i,j+1}, U_{i,j+2})$$

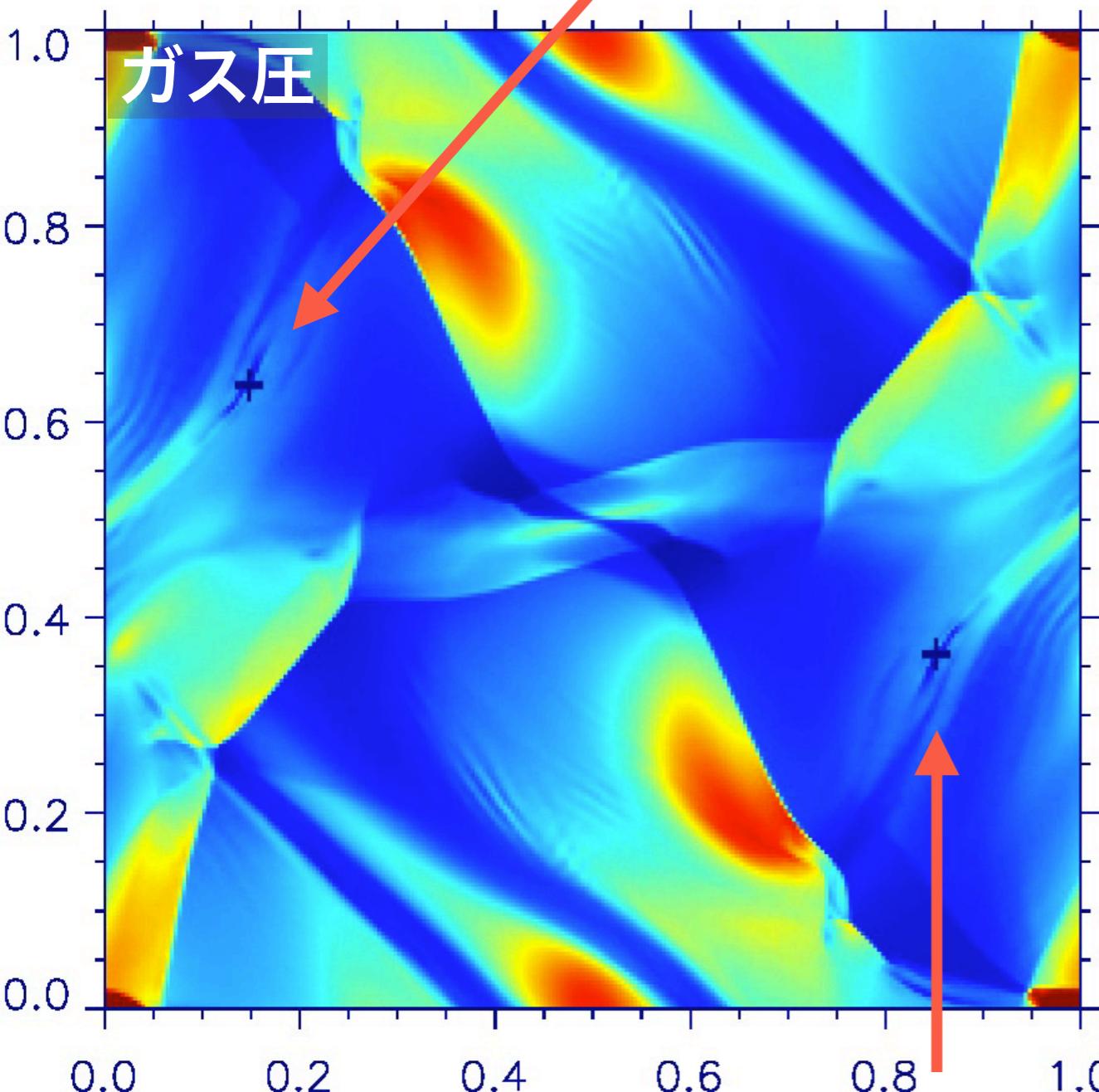
MP5の場合

1次元リーマンソルバ・空間補間スキームを利用

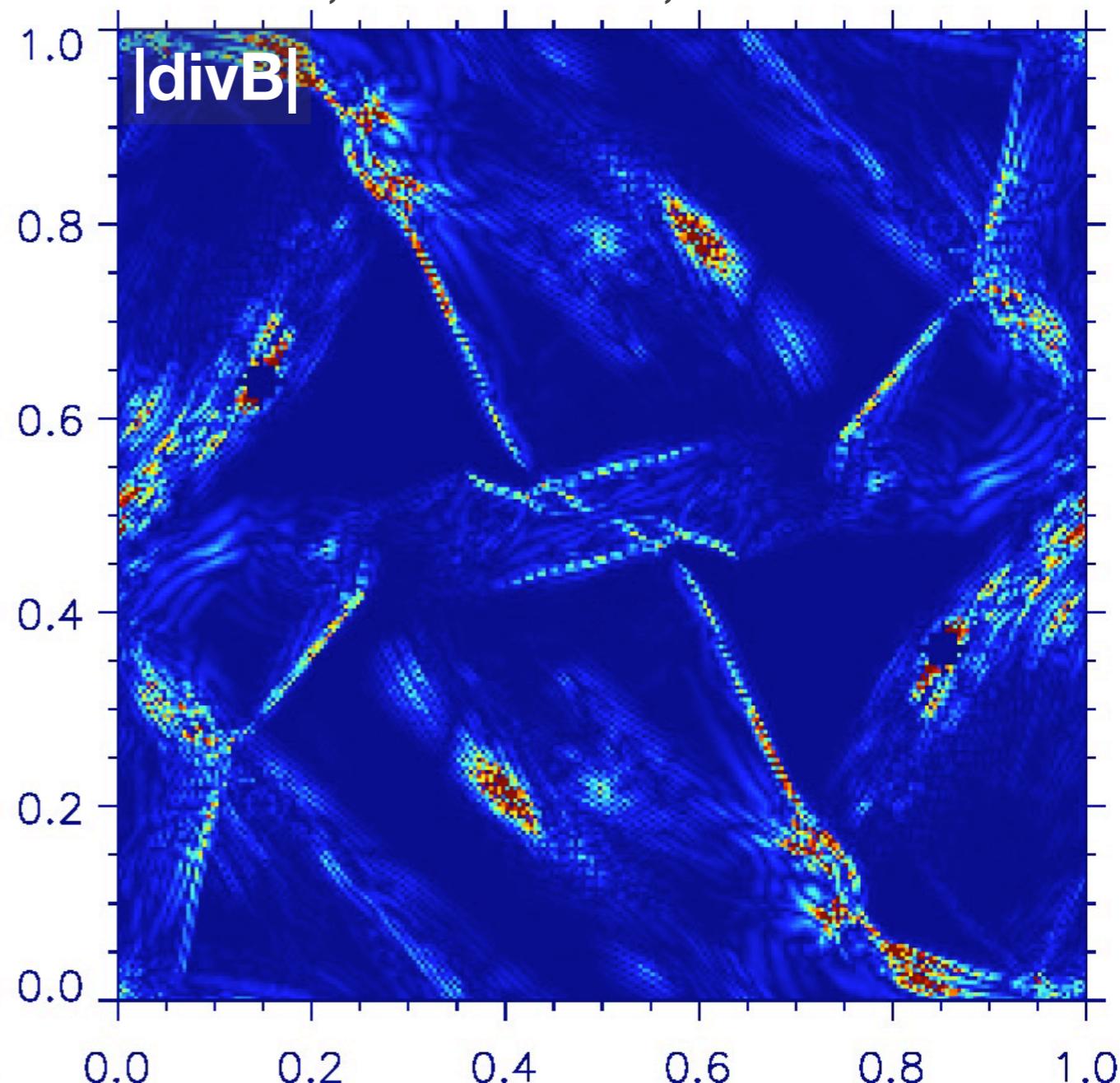
空間補間手法

- Dimension-by-dimension reconstruction (こちらを採用)
 - 実装が簡単、計算量が少ない
 - 1次元スキームがそのまま使える
 - 有限体積法として少しいい加減
- Genuinely 2D/3D reconstruction
(e.g., Shi et al., 2001;; Balsara et al., 2009)
 - 実装が難しい、計算量が多い
 - 多次元と1次元で異なる非線形補間手法
 - 有限体積法としての理論的な整合性が良い

Orszag-Tang渦問題



MP5, HLLD使用, divB処理無し



数値スキームにより生成されたdivBがたまり続け、計算が壊れた。

MHDシミュレーションと磁場の拘束条件

- 磁場の拘束条件（ソレノイダル条件）

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- 運動方程式の保存形

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + \left(p + \frac{B^2}{2} \right) \mathbf{I} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \right] = 0$$

- 運動方程式の非保存形（ $\nabla \cdot \mathbf{B}$ がゼロでない場合）

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \boxed{\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B})}$$

- 物理的な解を得るために拘束条件を満たす必要。

磁場発散の処理

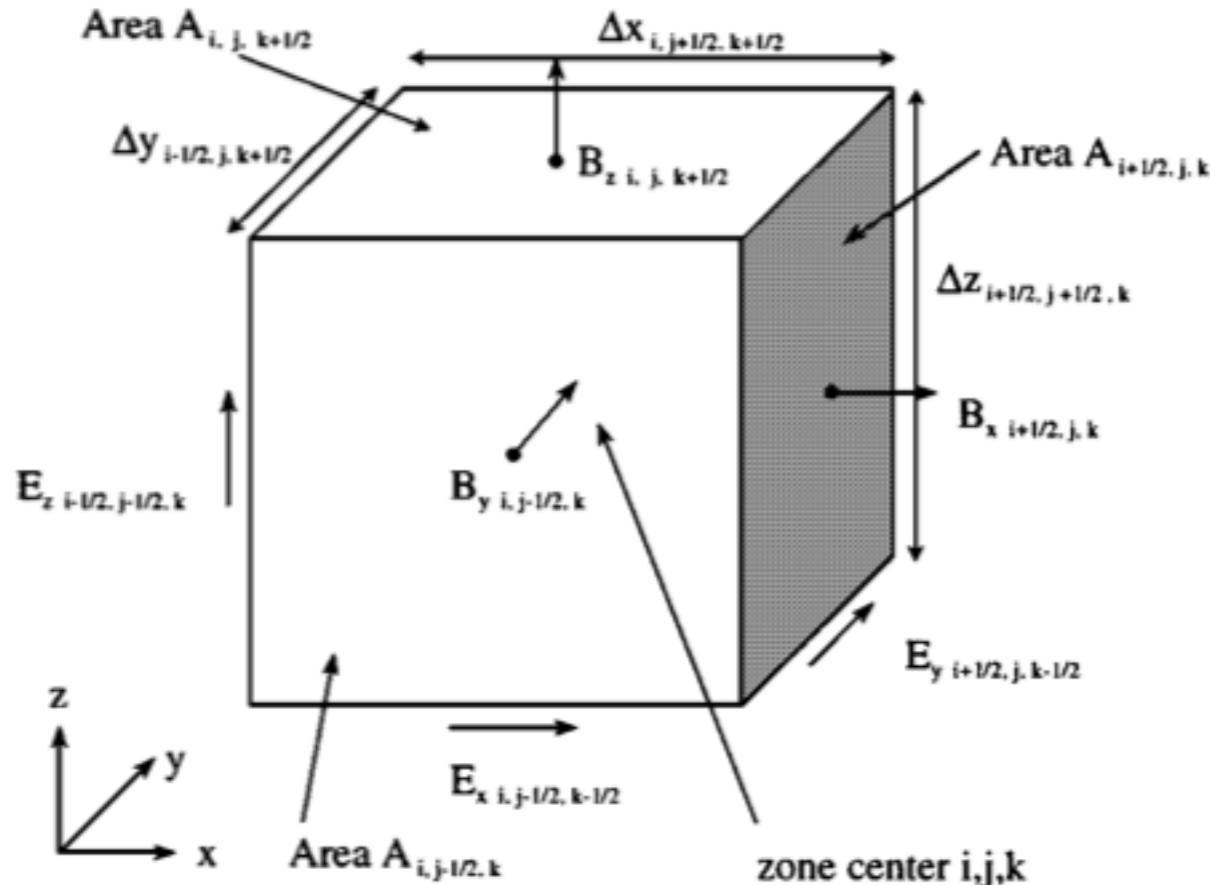
- **divBを生まない離散化手法**

- **Constrained Transport**法 (CT法; Evans & Hawley, 1988): 磁場を特殊なスタッガード格子上に配置
- Central Difference法 (CD法; Toth et al., 2000): 数値フラックスをセル中心で評価・中央差分

- **生まれたdivBを除去する手法**

- プロジェクション法 (Brackbill & Barnes, 1980): ポアソン方程式を解いて磁場のモノポールを除去
- 移流拡散法 (Powel et al., 1999; Dedner, 2002): 磁場の発散を移流拡散方程式や電信方程式を用いて除去、**CANS+に実装**

Constrained Transport法 (CT法)



Balsara & Spicer (1999)

どのようにセルエッジの電場を決定するかが課題。

Londrillo & Del Zanna (2000, 2004)
Balsara (2004, 2009, 2013)

磁場はセル境界面、
電場はセルエッジで定義。
Stokesの定理から磁場を時間発展。
磁場の発散は常にゼロ。

$$B_{x,i+1/2,j,k}^{n+1} = B_{x,i+1/2,j,k}^n - \frac{\Delta t}{A_{i+1/2,j,k}} \begin{pmatrix} \Delta z_{i+1/2,j+1/2,k} E_{z,i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} \\ -\Delta z_{i+1/2,j-1/2,k} E_{z,i+1/2,j-1/2,k}^{n+1/2} \\ +\Delta y_{i+1/2,j,k-1/2} E_{y,i+1/2,j,k-1/2}^{n+1/2} \\ -\Delta y_{i+1/2,j,k+1/2} E_{y,i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} \end{pmatrix}$$

$$B_{y,i,j-1/2,k}^{n+1} = B_{y,i,j-1/2,k}^n - \frac{\Delta t}{A_{i,j-1/2,k}} \begin{pmatrix} \Delta x_{i,j-1/2,k+1/2} E_{x,i,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2} \\ -\Delta x_{i,j-1/2,k-1/2} E_{x,i,j-1/2,k-1/2}^{n+1/2} \\ +\Delta z_{i-1/2,j-1/2,k} E_{z,i-1/2,j-1/2,k}^{n+1/2} \\ -\Delta z_{i+1/2,j-1/2,k} E_{z,i+1/2,j-1/2,k}^{n+1/2} \end{pmatrix}$$

$$B_{z,i,j,k+1/2}^{n+1} = B_{z,i,j,k+1/2}^n - \frac{\Delta t}{A_{i,j,k+1/2}} \begin{pmatrix} \Delta x_{i,j-1/2,k+1/2} E_{x,i,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2} \\ -\Delta x_{i,j+1/2,k+1/2} E_{x,i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} \\ +\Delta y_{i+1/2,j,k+1/2} E_{y,i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} \\ -\Delta y_{i-1/2,j,k+1/2} E_{y,i-1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} \end{pmatrix}$$

移流拡散法

9-wave法 (Dedner, 2002)

$\text{div}B$ を除去するため誘導方程式を修正

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{1}{\tau} \psi$$

$\text{div}B$ について整理すると電信方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_h^2 \Delta + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$$

位相速度 c_h で伝搬しつつ、
時間スケール τ で減衰。

実装しやすく計算負荷も小さい。

9-wave法の解き方(1/2)

x方向の方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} B_x \\ \psi \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \psi \\ c_h^2 B_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\psi/\tau \end{pmatrix}$$

演算子
分離

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} B_x \\ \psi \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \psi \\ c_h^2 B_x \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \text{次スライドへ}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\psi}{\tau} \rightarrow \psi^{n+1} = \exp(-\Delta t/\tau) \psi^n \equiv c_d \psi^n$$

c_h はCFLが許す最大速度 (e.g., $\text{CFL} \times \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z) / \Delta t$) 、
 τ は $0 < c_d < 1$ となるように決定。

9-wave法の解き方(2/2)

ソース項を演算子分割した方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} B_x \\ \psi \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \psi \\ c_h^2 B_x \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} B_x \\ \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_h^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} B_x \\ \psi \end{pmatrix} = 0$$

-> MHD方程式に固有値 $\pm c_h$ の2つの波が加わった形 (9-wave)

セル境界における数値フラックスは以下のように求められる。

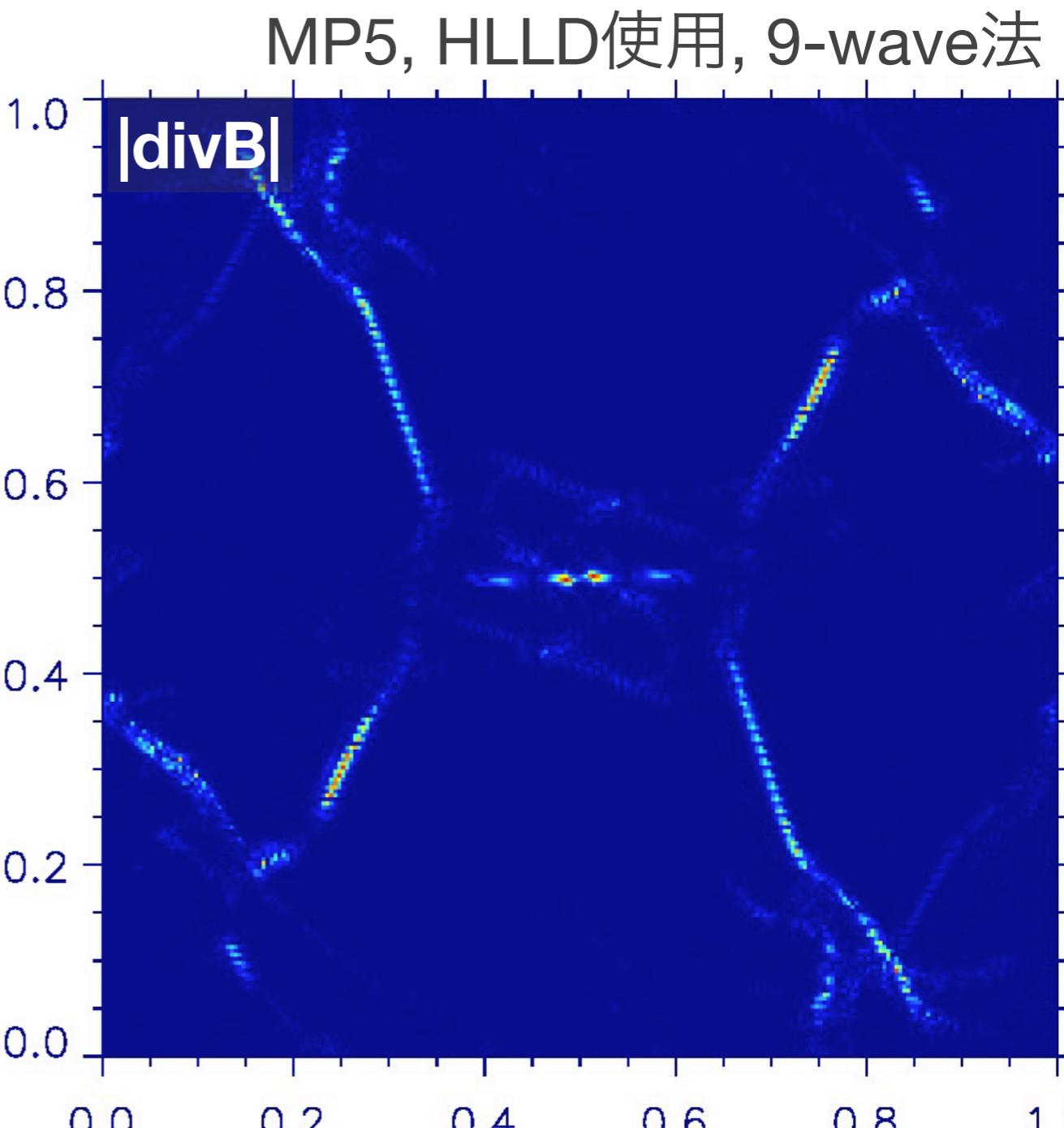
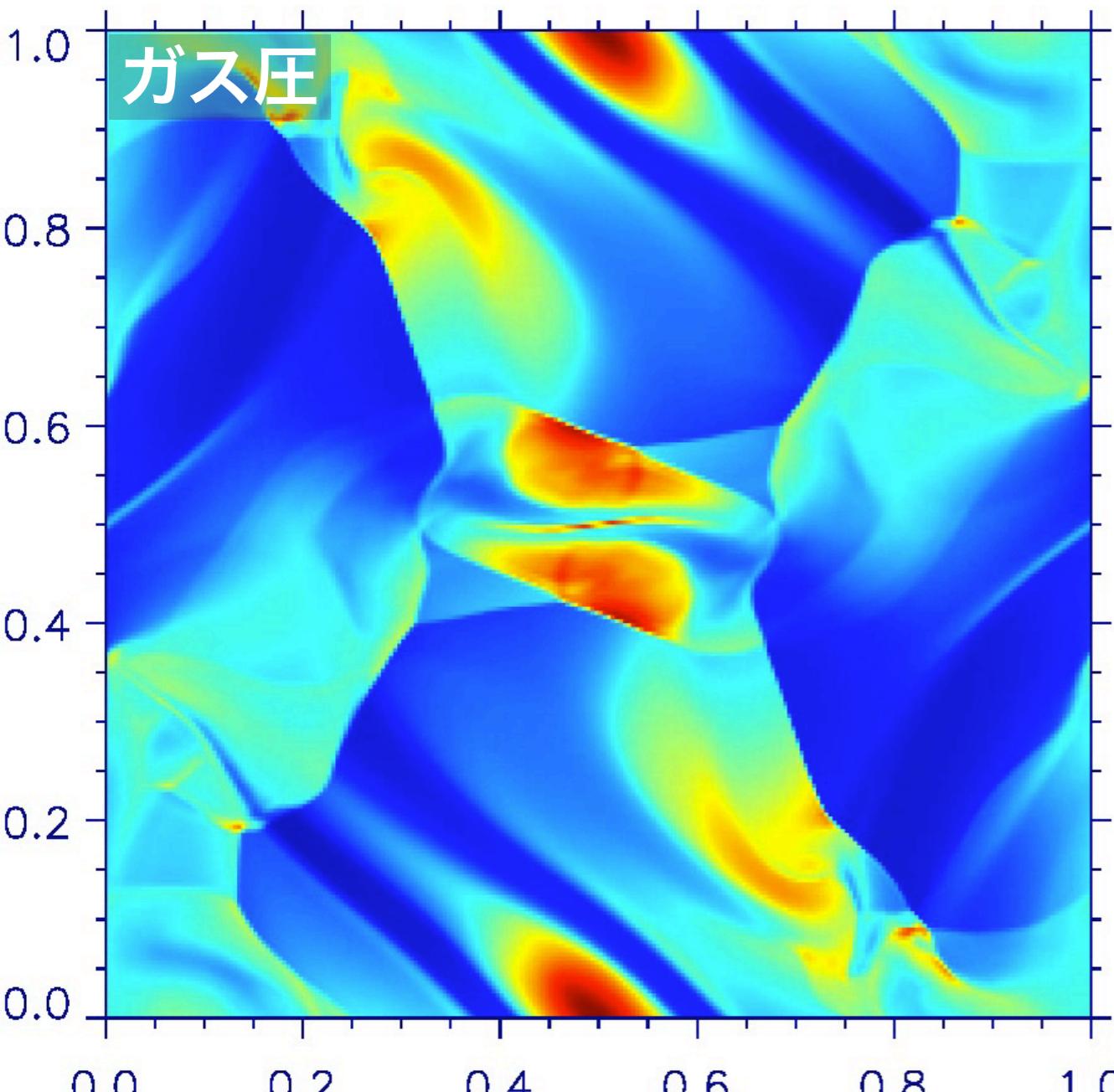
$$\begin{aligned}\psi_{i+1/2} &= \frac{1}{2} \left(\psi_{i+1/2}^L + \psi_{i+1/2}^R \right) + \frac{c_h}{2} \left(B_{x,i+1/2}^L - B_{x,i+1/2}^R \right) \\ (c_h^2 B_x)_{i+1/2} &= \frac{c_h^2}{2} \left(B_{x,i+1/2}^L + B_{x,i+1/2}^R \right) + \frac{c_h}{2} \left(\psi_{i+1/2}^L - \psi_{i+1/2}^R \right)\end{aligned}$$

実装は簡単で計算量負荷も小さいが、多少磁場が拡散的な傾向。

divB を厳密にゼロにするわけではないので、

プラズマベータの低い領域ではその誤差が問題になる場合がある。

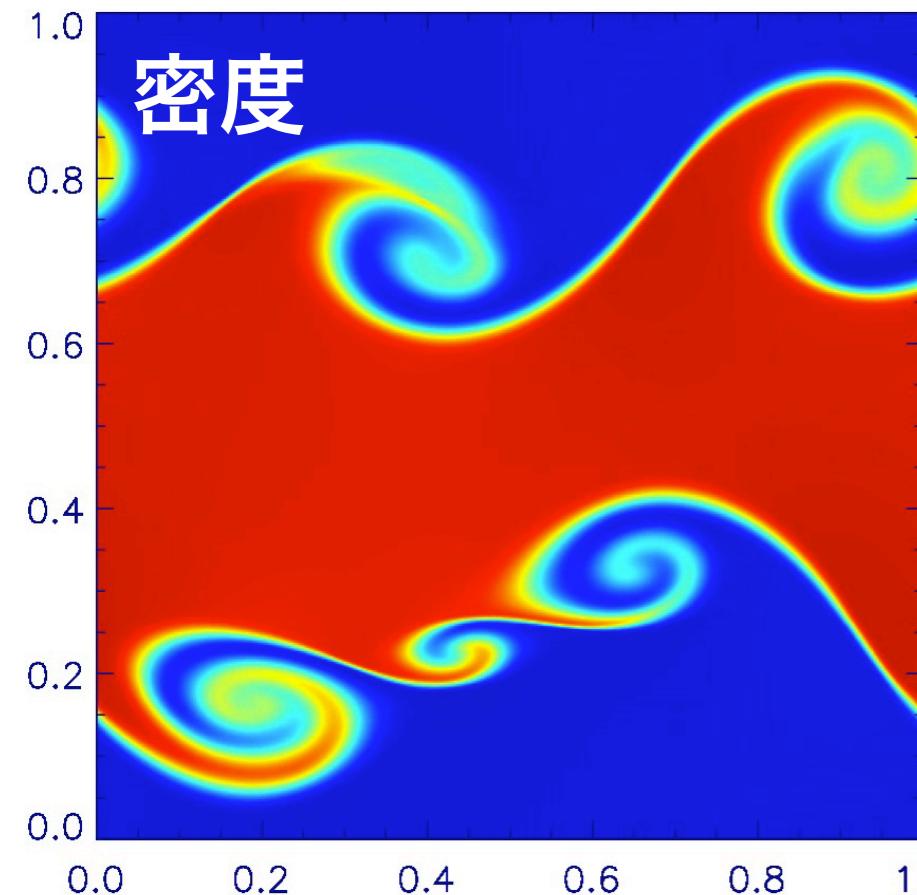
Orszag-Tang渦問題



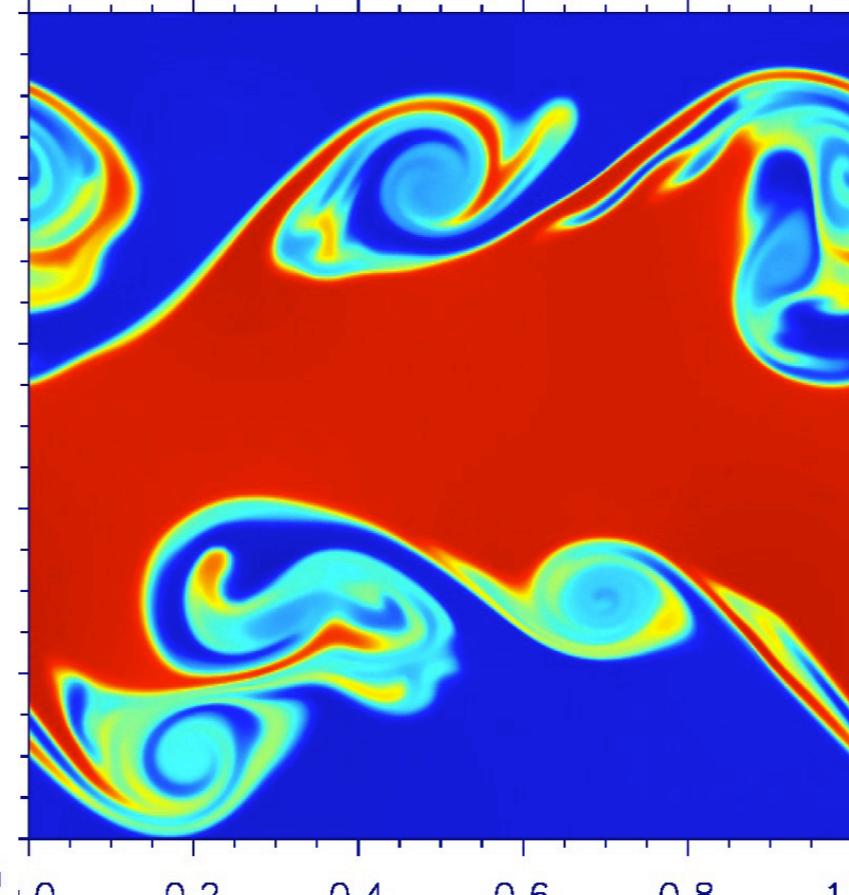
divBは衝撃波付近で生成され続けるが、
不連続面から離れるとすぐに移流・減衰され、誤差が蓄積しない。

ケルビン・ヘルムホルツ不安定 | 補間スキーム依存性

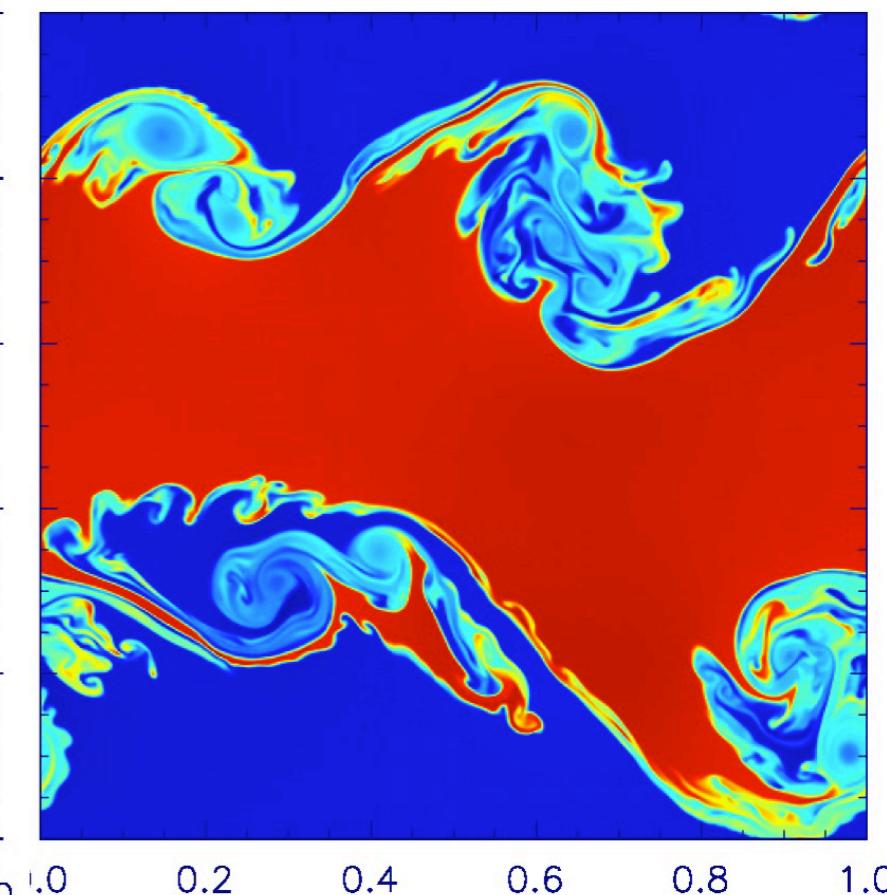
1次精度



MUSCL-Minmod



MP5



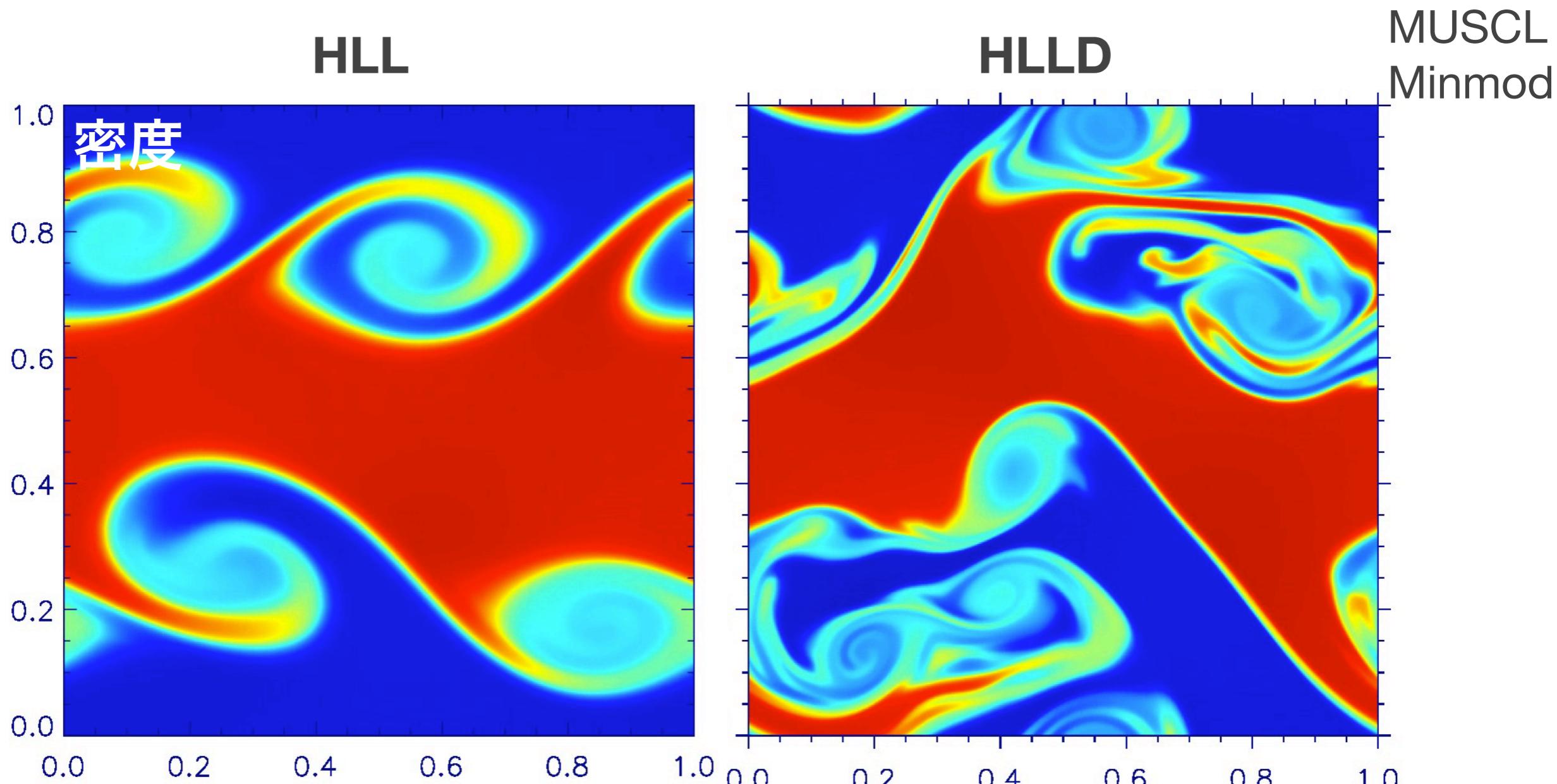
全てHLLDを使用

各層毎に速度差がある流体の間で生じる不安定。

高解像度スキームほど高波数がよく成長する。

接触不連続を分解出来るHLLDスキームを利用。

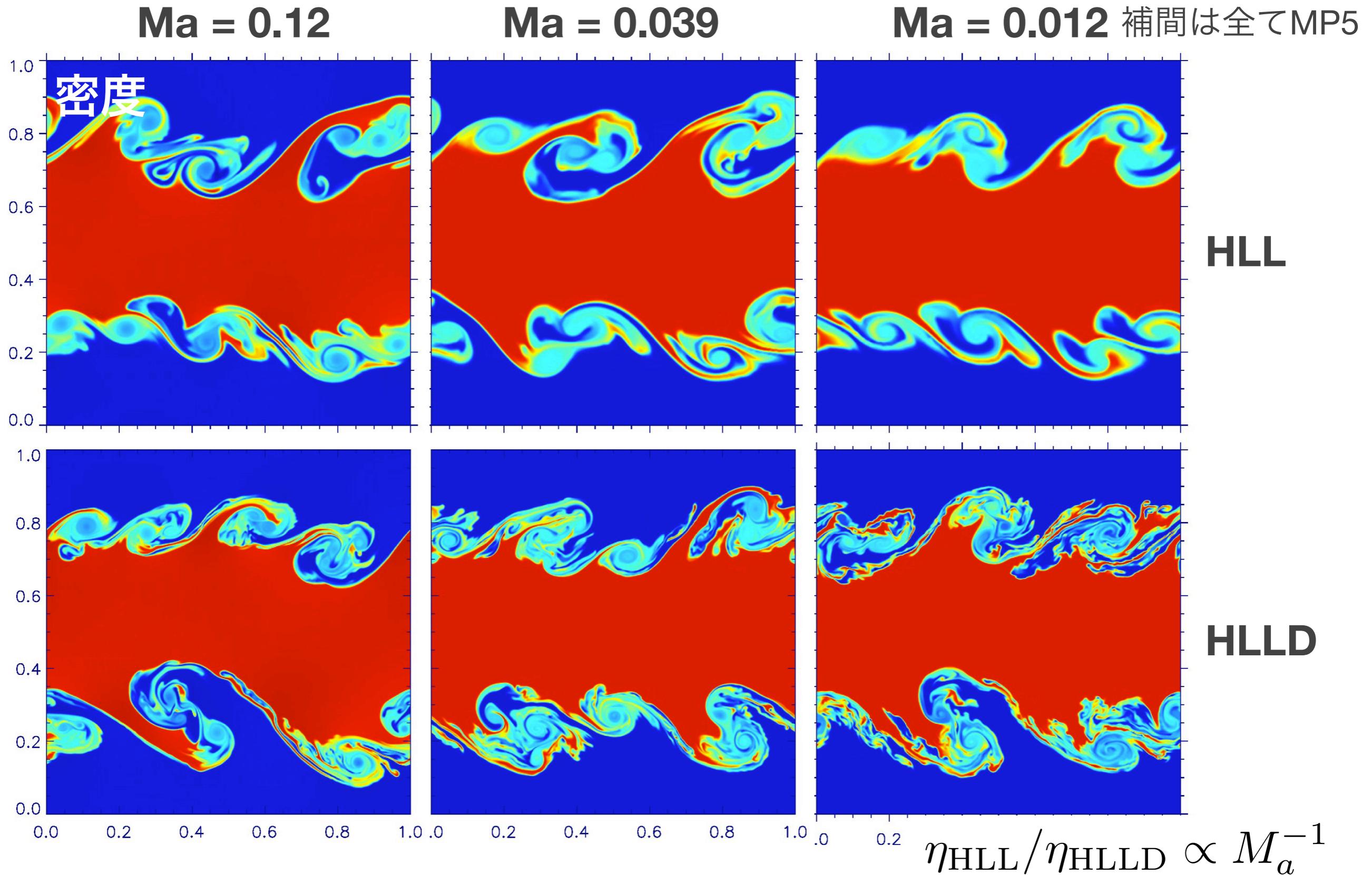
ケルビン・ヘルムホルツ不安定 | リーマンソルバ依存性



HLLは接触不連続を分解出来ないため、低マッハ数の KH不安定の解像度は低い。

$$\eta_{\text{HLL}} \sim \frac{1}{2} (|V| + c_f) \Delta x \sim \frac{1}{2} c_s \Delta x$$
$$\eta_{\text{HLLD}} \sim \frac{1}{2} |V| \Delta x \sim \frac{V}{c_s} \eta_{\text{HLL}} \sim \text{Ma} \cdot \eta_{\text{HLL}}$$

ケルビン・ヘルムホルツ不安定 | マッハ数依存性



まとめ

- 実用的・効率的なMHDシミュレーションのためには
高次精度化・多次元化が必須！
- 高次精度化
 - 衝撃波等の不連続面を取り扱う**非線形補間** (e.g., MUSCL, WENO, MP5)
 - **特性量変換**の効果（高解像度なスキームほど顕著）
 - リーマンソルバも計算結果の解像度に大きく影響
- 多次元化
 - **1次元補間手法の利用** (dimension-by-dimension, unsplit)
 - **磁場発散**の処理 (9-wave法、CT法)