

# 極超音速 TVD スキームにおけるエントロピー補正係数設定の効率化<sup>\*1</sup>

## —飛行試験結果及び他計算法との比較—

### Improvement in Entropy Correction Parameter of TVD Scheme for a Hypersonic Flow : Comparison with Existing Flight Data and Other CFD Methods

村 上 桂 一<sup>\*2</sup>・藤 原 俊 隆<sup>\*2</sup>  
Keiichi MURAKAMI and Toshi FUJIWARA

**Key Words :** CFD, High Enthalpy Flow, TVD

**Abstract :** An efficient method to handle entropy correction parameters in a TVD scheme is proposed for the computational estimate of aerodynamic heating around a hypersonic vehicle. The whole flowfield is divided into two regions: one region includes shock waves, and the other covers the boundary layer. Different constant values of entropy correction parameters are suitably chosen in the two regions. This simple setting of parameters substantially reduces trial-and-alter computations in comparison with other existing methods. The application to the OREX reentry vehicle problem demonstrates the advantage of the present method.

#### 1. は じ め に

極超音速再突入物体周囲の熱的・化学的非平衡流の計算で、セル平均値の計算に一般化された Roe タイプの平均<sup>1)</sup>を用いて、Harten-Yee タイプの 2 次精度風上差分法<sup>2)</sup>で離散化した式を解く場合、流入マッハ数が大きくなると、数値振動に起因するカーバンクル現象の発生や強い膨張波のところで発散するなどの問題がある。どちらもエントロピー補正係数の値を大きくして人工粘性によって回避できる。このエントロピー補正係数の与え方について、Yee の提案<sup>2)</sup>した式以外に幾つかの式が提案されている。Müller<sup>3)</sup>は、格子のアスペクト比を考慮した関数で与えることによって全体的な数値粘性を最小限にしている。しかし、これらの方法を用いた試行計算の結果、計算が安定に進むようにパラメータを選ぶと境界層や剪断層での散逸が大きくなり過ぎるので、特に等温壁条件を仮定した物体表面への熱流束の計算には不向きである。Lin の提案した式<sup>4)</sup>は、圧力の 2 階微分の関数として与え、衝撃波では大きく、剪断層や境界層では小さな値となっている。しかしこの方法を実際に導入すると、比熱比一定の熱量的完全気体を仮定した非反応流では良い結果が得られるものの、解離・電離非平衡流では収束途中の圧力変動の影響で収束が遅いことが分かった。また、これらの方法には幾つかの経験パラメータをマッハ数によって適宜選択する必要がある、試行錯誤にかかる計算コストは大きなものとなる。

一方 FDS スキームとは別に、経験的な定数を導入する

ことなく境界層で衝撃波が反射するような問題や剪断層を精度良く解くことができる AUSM (Advection Upstream Splitting Method) 系スキーム<sup>5)</sup>が存在するが、衝撃波直後にわずかなが数値的なオーバーシュートを発生する欠点がある。この欠点を改良したものに AUSMDV スキーム<sup>6)</sup>がある。これは振動の少ない AUSMD スキームと高い衝撃波捕獲能力を持つ AUSMV スキームを圧力勾配による切り替え関数によって組み合わせたものである。つまり、全計算領域内で 2 通りのスキームによって計算された値に切り替え関数によって重みをかけて加えている。AUSMDV スキームはあらゆる流れ場に適用できるよう汎用性をより高めたスキームであるが、そのために 2 通りのスキームによる計算が必要なことや切り替え関数の中に経験的なパラメータを含んでいることから、鈍頭物体前方流れのように境界層と衝撃波層を含む領域を簡単に分離できる場合に限り、以下に述べる本論文で提案した手法が有効であると考えられる。

本研究では、支配的な物理現象によって計算領域が分割できる場合には、エントロピー補正係数を物理量の関数として与えるのではなく、エントロピー補正係数をそれぞれの支配的な物理現象によって分割した領域に適した定数として与える計算法を提案し、収束解に至るまでの物理量の変動の影響をグローバルに排除している。このとき、ベクトル・パラレル計算機 (VPP) を用い、衝撃波と境界層を含む計算領域に分割した格子を、別々のプロセッサ・エレメント (PE) に割り振って計算した。またこの方法では、既存のプログラムを VPP 用書きかえるだけで、エントロピー補正係数に必要な計算ルーチンを追加する必要はない。更に、VPP 用に領域分割したプログラムは、

<sup>\*1</sup> 平成 11 年 7 月 5 日原稿受理

<sup>\*2</sup> 名古屋大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻物理気体力学講座

衝撃波面を含む領域や等温壁条件での物体表面を含む領域の格子点数を増やしたり、物理現象にあわせてモデルやスキームを各領域で変更できるなどの発展性を含んでおり、これらの特徴は、本研究の次段階でも有用である。

本研究では、第13回航空宇宙力学シンポジウムのワークショップの OREX 問題を、VPP 用プログラムで計算することによって、その有用性を検証した。

## 2. 支配方程式

支配方程式は、外力と輻射を無視した Navier-Stokes 方程式に各化学種質量と振動・電子エネルギーの保存式を組み込んだ軸対称円筒座標  $(z, r)$  の方程式系であり、これを物体表面に沿った方向を  $\xi$ 、物体表面に垂直な方向を  $\eta$  とする一般座標系に変換し、更に上流の密度  $\rho^*$ 、速度  $V^*$ 、温度  $T^*$  などで無次元化している。上付き添え字  $*$  は有次元値を、下付き添え字  $\infty$  は上流の値をそれぞれ示す。ただし、レイノルズ数  $Re = \rho^* V^* L^* / \mu^*$  と座標の無次元化には代表長  $L^* = 1\text{ m}$  を用い、時間  $t$  の無次元化は  $t = t^* / (L^* / V^*)$  とする。無次元化した支配方程式をベクトル形で書き表すと以下ようになる：

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}_v}{\partial \eta} \right] + \hat{S} + \hat{H}. \quad (1)$$

式(1)左辺第1項の保存量ベクトル  $\hat{U}$  は、無次元密度  $\rho = \rho^* / \rho^*$ 、各化学種  $s$  の無次元密度  $\rho_s = \rho_s^* / \rho^*$ 、無次元速度  $u = u^* / V^*$ 、 $v = v^* / V^*$ 、無次元全エネルギー  $E = E^* / V^{*2} = [(u^{*2} + v^{*2}) / 2 + \sum_{s=1}^{11} \rho_s^* e_s^* / \rho^*] / V^{*2}$ 、無次元振動・電子エネルギー  $e_v = e_v^* / V^{*2}$  によって次式で与えられる：

$$\hat{U} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho_s \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \\ \rho e_v \end{bmatrix}.$$

ここで、 $J = 1 / (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)$  はヤコビアンである。式(1)左辺の対流項ベクトル  $\hat{F}$ 、 $\hat{G}$  は

$$\hat{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho_s \hat{U} \\ \rho u \hat{U} + \xi_z p \\ \rho v \hat{U} + \xi_r p \\ \rho H \hat{U} \\ \rho e_v \hat{U} \end{bmatrix}, \quad \hat{G} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho_s \hat{V} \\ \rho u \hat{V} + \eta_z p \\ \rho v \hat{V} + \eta_r p \\ \rho H \hat{V} \\ \rho e_v \hat{V} \end{bmatrix},$$

で与えられ、 $\hat{U} = \xi_z u + \xi_r v$ 、 $\hat{V} = \eta_z u + \eta_r v$  は反変速度を、 $p$  は上流の動圧で無次元化した無次元圧力  $p = p^* / (\rho^* V^{*2})$  を、 $\xi_z$ 、 $\xi_r$ 、 $\eta_z$ 、 $\eta_r$  はメトリックスを、 $H$  は無次元全エンタルピー  $H = (E^* + p^* / \rho^*) / V^{*2}$  をそれぞれ表す。式(1)右辺の粘性項、熱伝導項、拡散項を含むベクトル  $\hat{F}_v$ 、 $\hat{G}_v$  は次式で与えられる：

$$\hat{F}_v = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho(\xi_z \tilde{u}_s + \xi_r \tilde{u}_s) \\ \xi_z \tau_{zz} + \xi_r \tau_{rz} \\ \xi_z \tau_{zr} + \xi_r \tau_{rr} \\ \xi_z (u \tau_{zz} + v \tau_{zr} + q_z) + \xi_r (u \tau_{zr} + v \tau_{rr} + q_r) \\ \xi_z q_{vz} + \xi_r q_{vr} \end{bmatrix},$$

$$\hat{G}_v = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho(\eta_z \tilde{u}_s + \eta_r \tilde{u}_s) \\ \eta_z \tau_{zz} + \eta_r \tau_{rz} \\ \eta_z \tau_{zr} + \eta_r \tau_{rr} \\ \xi_z (u \tau_{zz} + v \tau_{zr} + q_z) + \xi_r (u \tau_{zr} + v \tau_{rr} + q_r) \\ \eta_z q_{vz} + \eta_r q_{vr} \end{bmatrix}.$$

ここで、 $\tilde{u}_s$ 、 $\tilde{v}_s$  は化学種  $s$  の無次元拡散速度を、 $\tau_{zz}$  などは無次元量で評価した粘性応力を、 $q_z$ 、 $q_r$  は  $z$ 、 $r$  方向の無次元全熱流束を、 $q_{vz}$ 、 $q_{vr}$  は  $z$ 、 $r$  方向の振動・電子温度勾配による無次元熱流束を表す。式(1)右辺の  $\hat{S}$  は生成項を表すベクトルで、各化学種  $s$  の無次元生成速度  $\dot{w}_s = \dot{w}_s^* / (\rho^* V^* / L^*)$  と、振動・電子エネルギーの無次元生成速度  $\dot{w}_v = \dot{w}_v^* / (\rho^* V^{*3} / L^*)$  によって次式で表される：

$$\hat{S} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \dot{w}_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{w}_v \end{bmatrix}.$$

つまり、有次元で計算した生成速度を、無次元支配方程式(1)に合うように無次元化している。式(1)右辺の  $\hat{H}$  は円筒座標変換によって生じるベクトルで、各成分は次式の通りである：

$$\hat{H} = \frac{1}{J} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\rho_s v + \frac{1}{Re} \tilde{v}_s \\ -\rho uv + \frac{1}{Re} \tau_{zr} \\ -\rho v^2 + \frac{1}{Re} (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) \\ -\rho H v + \frac{1}{Re} (u \tau_{zr} + v \tau_{rr} + q_r) \\ -(\rho e_v + p_e) v + \frac{1}{Re} q_{vr} \end{bmatrix}.$$

ここで、 $r$  は対称軸からの無次元距離を、 $p_e$  は無次元電子圧力を表している。

上記のように、2温度モデルを用いた計算では、並進温度と回転温度が等しいとし、振動温度と電子温度が等しいとして、振動エネルギーと電子エネルギーの保存式をまとめて振動・電子エネルギーの保存式としている<sup>7)</sup>。2温度モデルの粘性係数、熱伝導係数、拡散係数の計算には Yos の式<sup>8)</sup>を導入している<sup>7)</sup>。

解離・電離反応を含む流れ場を計算する場合、 $N_2$ 、 $O_2$ 、 $N$ 、 $O$ 、 $NO$ 、 $O_2^+$ 、 $N_2^+$ 、 $NO^+$ 、 $O^+$ 、 $NO^+$ 、 $e^-$  の11化学種を考慮した Park の17反応モデル<sup>9)</sup>を用いる。

## 3. 数値解法

3.1 差分法 一様流マッハ数25の非平衡極超音速流に対して、経済的かつ収束する解を与えるように、数値解析には幾つかの工夫がなされているので、ここでは解法についてある程度詳しく述べることにする。数値解法として、Harten-Yee の non-MUSCL-type Second-Order Upwind Explicit TVD Scheme<sup>2)</sup>を、一般座標で書かれた支配方程式(1)に適用すると、次式のように表すことができる：

$$\begin{aligned}\hat{U}_{j,k}^{n+1} &= \hat{U}_{j,k}^n \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (\tilde{\bar{F}}_{j+\frac{1}{2},k}^n - \tilde{\bar{F}}_{j-\frac{1}{2},k}^n) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} (\tilde{\bar{G}}_{j,k+\frac{1}{2}}^n - \tilde{\bar{G}}_{j,k-\frac{1}{2}}^n) \\ &\quad + \Delta t [Re^{-1}(\delta_\xi \hat{F}_v^n + \delta_\eta \hat{G}_v^n)] \\ &\quad + \Delta t [\hat{S}^n + \hat{H}^n].\end{aligned}\quad (2)$$

ここで、上付添字  $n$  はタイムステップを、下付添字  $j, k$  は  $\xi, \eta$  方向の格子点をそれぞれ表しており、下付添字の  $1/2$  はセル境界での値を意味する。式(2)の  $\Delta t$  は無次元時刻幅を表している。また、 $\Delta \xi, \Delta \eta$  は計算面の格子における  $\xi, \eta$  方向の格子間隔で、どちらも 1 とする。式(2)の右辺第 4 項における粘性及び熱応力項中の空間微分は中心差分で計算しており、中心差分の演算子を  $\delta_\xi, \delta_\eta$  で表す。

式(2)の  $\tilde{\bar{F}}_{j+\frac{1}{2},k}$  は添字  $k$  を省略すると次式で与えられる：

$$\begin{aligned}\tilde{\bar{F}}_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} [\bar{F}_j + \bar{F}_{j+1} + \bar{R}_{j+\frac{1}{2}} \bar{\Phi}_{j+\frac{1}{2}} / J_{j+\frac{1}{2}}], \\ \frac{1}{J_{j+\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{J_{j+1}} + \frac{1}{J_j} \right].\end{aligned}$$

$\bar{R}$  は  $\hat{A} = \partial \bar{F} / \partial \hat{U}$  の固有値  $a'$  に対応する右固有ベクトル行列である。 $\bar{\Phi}$  の  $l$  成分  $\phi^l$  は 2 次精度風上 TVD スキームの場合は次式となる：

$$(\phi_{j+\frac{1}{2}}^l)^U = \sigma(a_{j+\frac{1}{2}}^l)(g_{j+1}^l + g_j^l) - \Psi(a_{j+\frac{1}{2}}^l + \gamma_{j+\frac{1}{2}}^l) a_{j+\frac{1}{2}}^l.$$

ここで  $\sigma, \Psi$  は変数  $z$  の関数として以下のように表される：

$$\sigma(z) = \frac{1}{2} [\Psi(z) - \lambda z^2].$$

ここに現れる  $\Psi(z)$  は  $z$  の絶対値に相当するが、非物理的な解を避けるために次式のエントロピー補正係数が用いられている：

$$\Psi(z) = \begin{cases} |z| & \text{for } |z| \geq \delta_1, \\ (z^2 + \delta_1^2) / 2\delta_1 & \text{for } |z| < \delta_1. \end{cases}\quad (3)$$

$\delta_1$  は小さな正の数で、物体表面熱流束や数値解の収束性に影響を与える。これには様々な式が提案されており、詳細は後述する。 $\gamma$  については

$$\begin{aligned}\gamma_{j+\frac{1}{2}}^l &= \sigma(a_{j+\frac{1}{2}}^l) \begin{cases} (g_{j+1}^l - g_j^l) / a_{j+\frac{1}{2}}^l & \text{for } a_{j+\frac{1}{2}}^l \neq 0, \\ 0 & \text{for } a_{j+\frac{1}{2}}^l = 0, \end{cases} \\ g_j^l &= \min \text{mod}(a_{j-\frac{1}{2}}^l, a_{j+\frac{1}{2}}^l), \\ a_{j+\frac{1}{2}} &= \bar{R}_{j+\frac{1}{2}}^{-1} (U_{j+1} - U_j).\end{aligned}$$

ここで、 $\min \text{mod}$  関数は次式で定義される：

$$\min \text{mod}(x, y) = \text{sgn}(x) \cdot \max \{0, \min[|x|, y \cdot \text{sgn}(x)]\}.$$

添字  $j \pm 1/2$  で表されるセル境界での値は、Liu-Vinokur の一般化された Roe 平均<sup>1)</sup>で与えられる。

**3.2 時間分割法と部分陰解法** 式(2)を解くために、衝撃波が定常解の位置に移動するまでの計算の安定性を考えて、時間分割法<sup>10)</sup>を導入した：

$$\hat{U}_{j,k}^{n+1} = \mathcal{L}_\xi^{4t/2} \mathcal{L}_\eta^{4t/2} \mathcal{L}_v^{4t} \mathcal{L}_\eta^{4t/2} \mathcal{L}_\xi^{4t/2} \hat{U}_{j,k}^n. \quad (4)$$

ここで、各演算子  $\mathcal{L}$  は

$$\begin{aligned}\hat{U}_{j,k}^{(1)} &= \mathcal{L}_\xi^{4t/2} \hat{U}_{j,k}^n \\ &= \hat{U}_{j,k}^n - \frac{\Delta t/2}{\Delta \xi} (\tilde{\bar{F}}_{j+\frac{1}{2},k}^n - \tilde{\bar{F}}_{j-\frac{1}{2},k}^n),\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}\hat{U}_{j,k}^{(2)} &= \mathcal{L}_\eta^{4t/2} \mathcal{L}_\xi^{4t/2} \hat{U}_{j,k}^n \\ &= \hat{U}_{j,k}^{(1)} - \frac{\Delta t/2}{\Delta \eta} (\tilde{\bar{G}}_{j,k+\frac{1}{2}}^{(1)} - \tilde{\bar{G}}_{j,k-\frac{1}{2}}^{(1)}),\end{aligned}\quad (6)$$

$$\begin{aligned}\hat{U}_{j,k}^{(3)} &= \mathcal{L}_v^{4t} \mathcal{L}_\eta^{4t/2} \mathcal{L}_\xi^{4t/2} \hat{U}_{j,k}^n \\ &= \hat{U}_{j,k}^{(2)} + \Delta t [Re^{-1}(\delta_\xi \hat{F}_v^{(2)} + \delta_\eta \hat{G}_v^{(2)})] \\ &\quad + \Delta t [\hat{S}^{(2)} + \hat{H}^{(2)}].\end{aligned}\quad (7)$$

さらに、生成項の硬直性を考慮して Semi-Implicit Scheme を用いるために、 $\hat{S}^{(2)}$  を

$$(1-\theta)\hat{S}^{(2)} + \theta\hat{S}^{(3)} \quad (8)$$

で置き換える。 $\hat{S}^{(3)}$  を時間レベルでテーラー展開して

$$\hat{S}^{(3)} = \hat{S}^{(2)} + \Delta t \frac{\partial \hat{S}}{\partial t} = \hat{S}^{(2)} + \Delta t \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{U}} \frac{\partial \hat{U}}{\partial t}. \quad (9)$$

これを式(7)に代入して変形すると

$$\begin{aligned}D_{j,k}^n (\hat{U}_{j,k}^{(3)} - \hat{U}_{j,k}^{(2)}) &= \Delta t [Re^{-1}(\delta_\xi \hat{F}_v^{(2)} + \delta_\eta \hat{G}_v^{(2)})] \\ &\quad + \Delta t [\hat{S}^{(2)} + \hat{H}^{(2)}],\end{aligned}\quad (10)$$

$$D = \left( I - \Delta t \theta \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{U}} \right). \quad (11)$$

定常解を求める場合は時間精度が 1 次でも構わないので、 $\theta=1$  とする。

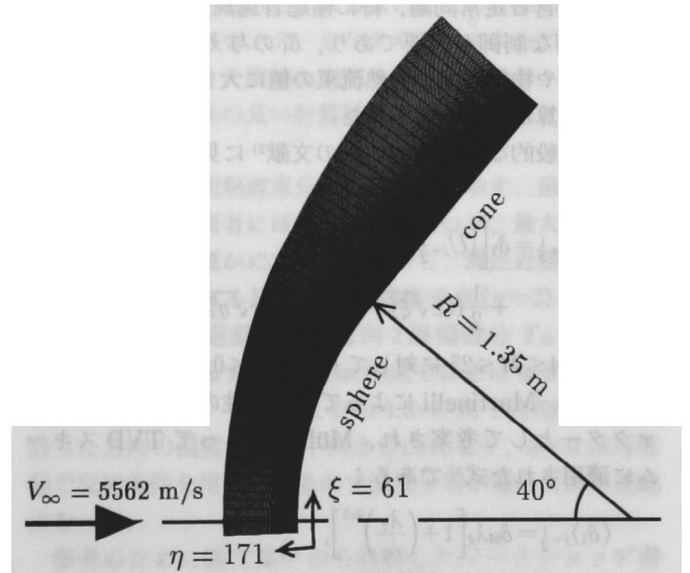
(10)式を解いて求めた  $\hat{U}_{j,k}^{(3)}$  から以下のように計算する：

$$\begin{aligned}\hat{U}_{j,k}^{(4)} &= \mathcal{L}_\eta^{4t/2} \mathcal{L}_v^{4t} \mathcal{L}_\eta^{4t/2} \mathcal{L}_\xi^{4t/2} \hat{U}_{j,k}^n \\ &= \hat{U}_{j,k}^{(3)} - \frac{\Delta t/2}{\Delta \eta} (\tilde{\bar{G}}_{j,k+\frac{1}{2}}^{(3)} - \tilde{\bar{G}}_{j,k-\frac{1}{2}}^{(3)}),\end{aligned}\quad (12)$$

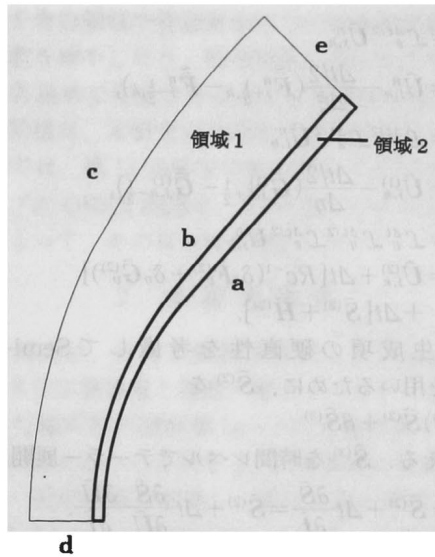
$$\begin{aligned}\hat{U}_{j,k}^{(5)} &= \mathcal{L}_\xi^{4t/2} \mathcal{L}_\eta^{4t/2} \mathcal{L}_v^{4t} \mathcal{L}_\eta^{4t/2} \mathcal{L}_\xi^{4t/2} \hat{U}_{j,k}^n \\ &= \hat{U}_{j,k}^{(4)} - \frac{\Delta t/2}{\Delta \xi} (\tilde{\bar{F}}_{j+\frac{1}{2},k}^{(4)} - \tilde{\bar{F}}_{j-\frac{1}{2},k}^{(4)}).\end{aligned}\quad (13)$$

時間分割法と部分陰解法の導入によって、計算の安定性が向上した。

**3.3 計算領域分割格子と境界条件** 全体の計算格子は、上流境界を放物線で与え、物体表面で  $\eta$  方向の格子が密になるように与えた。このとき、1 次元補間関数<sup>11)</sup>を用いた。こうして形成された格子を初期値とし双曲型偏微



第 1 図 計算領域全体の格子



第2図 分割計算領域1, 2と境界a~e

分方程式を解いて、直交性を満たす格子<sup>11)</sup>に作り直したものが第1図である。格子点数は $\xi \times \eta = 61 \times 171$ 、物体近傍の格子間隔は100  $\mu\text{m}$ である。そして第2図のように、境界層を含む領域1と衝撃波を含む領域2とに分割した。

壁面境界aは等温、非触媒、すべりなしとする。計算領域境界bは領域1と2で格子を4点重ね、外側の2点の保存量や温度に他領域での計算結果を代入する。上流境界cは一樣流の値を与え、円筒座標系軸境界dでは、格子点の中心に軸があり反射条件を与える。流出境界eは、超音速部分は双曲型で亜音速部は放物型であるため0次外挿とし、内側の格子点と等しく置いている。

#### 4. 計算結果と考察

式(3)のエントロピー補正係数 $\delta_1$ だが、定常あるいは準定常衝撃波を含む問題では、エントロピー崩壊を防ぐために小さな正の値で与え、非定常問題では0とする。強い衝撃波を含む定常問題、特に極超音速鈍頭物体流れでは、 $\delta_1$ の適切な制御が重要であり、 $\delta_1$ の与え方によって、解の収束性や物体表面での熱流束の値に大きく影響することが試行計算から確かめられた。

最も一般的なのは、Yeeの文献<sup>2)</sup>に見られる次式である：

$$(\delta_1)_{j+\frac{1}{2}} = \delta_v \left[ |\bar{U}_{j+\frac{1}{2}}| + |\bar{V}_{j+\frac{1}{2}}| + \frac{1}{2} ((c\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2})_{j+\frac{1}{2}} + (c\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2})_{k+\frac{1}{2}}) \right].$$

ここで、 $4 \leq M \leq 25$  に対して  $0.05 \leq \delta_v \leq 0.25$  である。

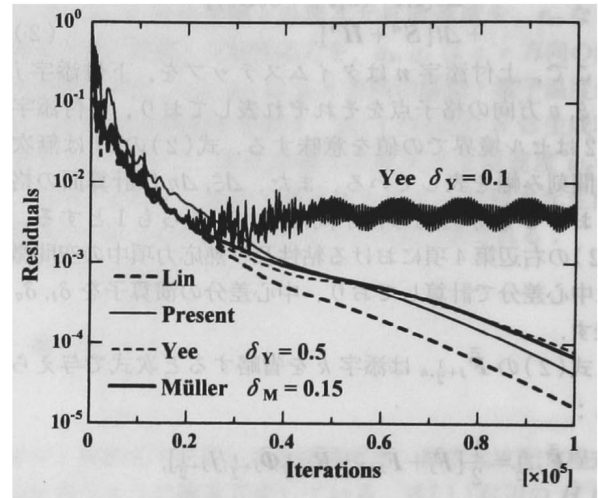
次式は、Martinelli によって人工粘性のスケールングファクターとして考案され、Müller によって TVD スキームに適用された式<sup>3)</sup>である：

$$(\delta_1)_{j+\frac{1}{2}} = \delta_M \lambda_\epsilon \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_\eta}{\lambda_\epsilon} \right)^{2/3} \right],$$

$$\lambda_\epsilon = |\bar{U}_{j+\frac{1}{2}}| + (c\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2})_{j+\frac{1}{2}}.$$

第1表 OREX ワークショップの計算条件

課題	$U_\infty$ (m/s)	$T_\infty$ (K)	$P_\infty$ (N/m <sup>2</sup> )	$T_{\text{wall}}$ (K)	流体モデル
II-2	5562	248.1	23.60	1519	層流, 非平衡, 非触媒
II-5	5562	248.1	23.60	1519	層流, 無反応



第3図 残差曲線 (非反応流)

ここで、 $\delta_M = O(10^{-1})$  である。

Lin は次式を提案している<sup>4)</sup>：

$$(\delta_1)_{j+\frac{1}{2}} = \delta_L [|\bar{U}_{j+\frac{1}{2}}| + (c\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2})_{j+\frac{1}{2}}],$$

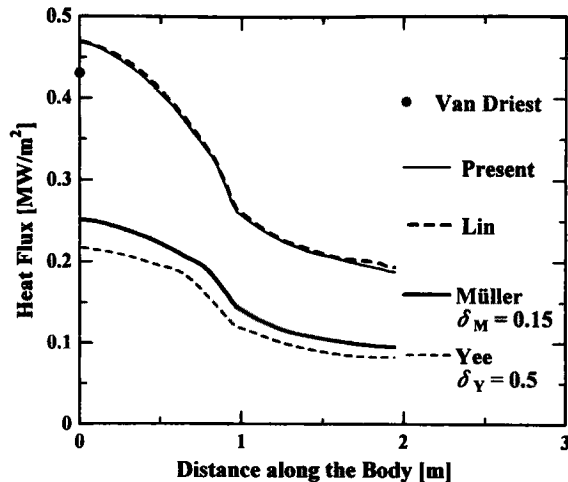
$$\delta_L = \begin{cases} (k_1 + k_2 k_p) & \text{for } \bar{U} \pm c\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, \\ (k_3 k_p) & \text{for } \bar{U}, \end{cases}$$

$$k_p = 0.5 \left( \left| \frac{P_{j+1,k} - 2P_{j,k} + P_{j-1,k}}{P_{j+1,k} + 2P_{j,k} + P_{j-1,k}} \right| + \left| \frac{P_{j,k+1} - 2P_{j,k} + P_{j,k-1}}{P_{j,k+1} + 2P_{j,k} + P_{j,k-1}} \right| \right).$$

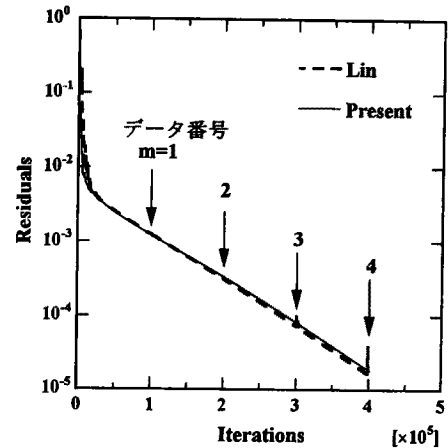
ここでは、 $k_1 = 0.25$ ,  $k_2 = 5$ ,  $k_3 = 15$  として<sup>4)</sup> 試算された。

このように、 $\delta_1$ を与える式はいくつか提案されているが、どれもマッハ数や鈍頭物体の形状に依存するパラメータを含む。これら3ケースを OREX Workshop<sup>12)</sup> P-II-5 非反応流条件 (第1表) 下で比較し、第3図に残差曲線を、第4図に物体表面に沿った熱流束分布を示す。第3図を見ると、Yee の場合、 $\delta_1$ の値が大きい程収束は良いが、熱流束が過小評価されることが分かる。Lin の場合、上記の  $k_1 \sim k_3$  であれば、非反応流に対して収束性も良く、熱流束の値も観測点では Van Driest の関係式<sup>13)</sup>と近い結果が得られた。

以上の計算結果から各エントロピー補正式で与えた値を衝撃波と境界層で比較すると、収束性を良くするには強い衝撃波を含む領域で大きな  $\delta_1$  を与え、熱流束の値を精度良く求めるには境界層を含む領域で小さな  $\delta_1$  を与えれば良いことがわかる。しかし、最適な値を見つけるための試行錯誤が避けられず、流れ場全体で均一のパラメータを用いることができない場合もあり得る。この問題を流れ場中の物理量を用いて解決しているのが Lin の提案式であるが、化学反応を考慮した場合、収束途中の物理量の変化に



第4図 OREX 再突入物体表面上の熱流束分布 (非反応流)



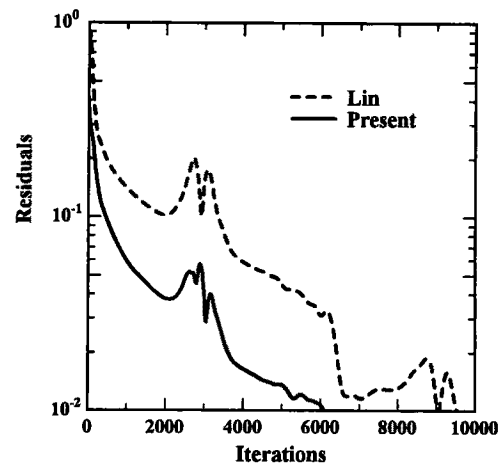
第5図 残差曲線 (非平衡流)

敏感になり過ぎ、かえって収束が遅くなる可能性もある。特にマッハ数が大きくなると衝撃波での圧力勾配が大きくなり  $\delta_L$  が大きくなるので、衝撃波厚みを抑えるために  $k_1 \sim k_3$  の値を再考しなければならない可能性がある。

そこで、支配的な物理現象が異なる領域に計算領域を分割し、各領域に十分な大きさのパラメータを与え、並列計算機を用いて計算する方法を提案する。計算領域を分割することで、保存量などの物理量を境界条件として与えるため、数値流束の計算が分割した領域をまたがらない。つまり、各領域での支配的な物理現象に合わせて数値流束を計算できる。具体的には、鈍頭物体の場合、衝撃波を含む領域と境界層を含む領域に分割する。そして Yee の式で  $\delta_L$  を与え、 $\delta_Y$  は衝撃波では 1.0 とし、境界層では 0.001 とした。非反応流で計算した結果を第 3, 4 図に示す。非反応流の場合、Lin の式と比べて収束性はやや劣るものの、熱流束は同一値となった。この収束性の差は、Lin の式では Yee の式で  $\delta_Y = 1.0$  とした値より大きな  $\delta_L$  が、衝撃波で与えられているからである。

本方法の利点は、各領域で十分なオーダーのパラメータを定数で与えるので、パラメータの最適値を探す試行錯誤が不要なこと、パラメータを物理量から決定するための演算が不要であることなどが挙げられる。更に、既存のプログラムを並列計算機用に書換えるだけで、各領域で異なる  $\delta_Y$  などを入力パラメータとして扱うことが可能である。もちろん、並列計算機を用いるので、同じ回数の繰返し計算にかかる時間は半分以下である。

本計算法と Lin の式を、OREX Workshop P-II-2 熱的・化学的非平衡流条件 (第 1 表) に適用して結果を比較した。初期条件には非反応流の計算結果を用いた。第 5 図に非平衡流の密度による残差曲線を示す。両者の収束過程に大きな違いはないが、計算初期では衝撃波と物体間を圧力波が往復しており、その圧力波による圧力勾配のために  $\delta$  の値が変動し、第 6 図に見られるように計算初期では Lin の方が収束が遅い。最大温度変化率を次式で定義し、第 5 図のデータ番号に対してプロットした図が第 7 図である：



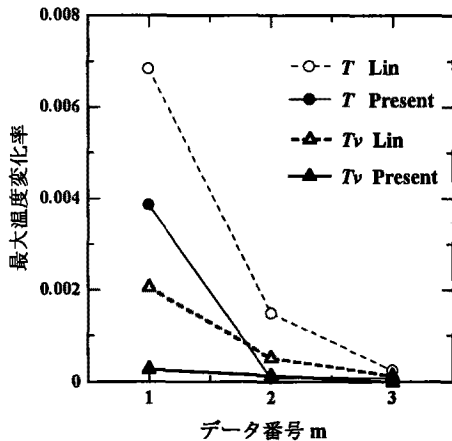
第6図 計算の初期段階での残差曲線 (非平衡流)

$$(\text{温度変化率}) = \frac{|(T_{\max})_{m+1} - (T_{\max})_m|}{(T_{\max})_m}$$

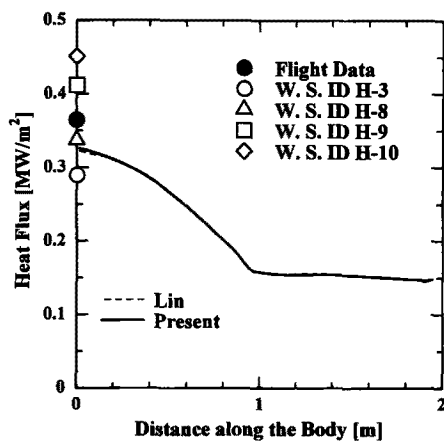
ここで、 $m$  は第 5 図のデータ番号を表す。第 7 図から、並進・振動温度とも本方法の方が速く一定値に近づいていることが分かる。従って、本方法のように計算領域を分割して十分な値のパラメータを与えることによって、極超音速非平衡流のように複雑な物理を含む計算でも、少ない計算コストで収束性の良い計算結果が得られることが証明された。

非平衡流の表面熱流束分布を第 8 図に示す。第 8 図に見られるように、両者にほとんど差はないが、最大値は本方法の方がほんの僅かに大きい。しかし、凝点近傍を拡大して第 9 図に示される物体表面隣接格子点 ( $\eta=2$ ) 上並進温度分布から、並進温度の  $\xi$  方向 2 階偏微分  $T_{\xi\xi}$  を 2 次精度中心差分で計算すると、Lin の式では正になるが、本方法では負となる。このことから Lin の式では物体表面に沿った方向の温度分布が下向きに凸になり、 $\xi=0$  の対称軸で反射条件を用いているので温度分布が僅かだが不連続になった。

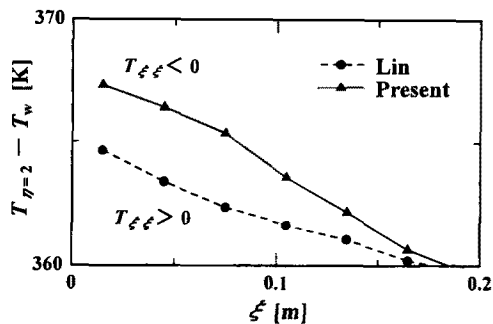
参考のために論文集<sup>12)</sup>から抜粋したワークショップ参加者の提出した値と、フライトデータ<sup>14)</sup>を第 8 図に示し



第7図 収束途中の最大温度変化率 (非平衡流)



第8図 OREX 再突入物体表面上の熱流束分布 (非平衡流)



第9図 stagnation point 近傍での物体表面隣接格子点上的並進温度分布

た。これらの計算例と比較しても、本方法が OREX 再突入物体の熱流束の推算に関して有効であることを示している。また、フライトデータは熱防護材の持つ触媒性による影響を含んだ値であるため OREX Workshop P-II-2 の条件とは異なるが、本方法や他の計算結果と比較すると、数値計算によって実機熱防御設計の際に有益なデータが得られると言える。

## 5. 結 論

再突入鈍頭物体前方の流れ場から受ける最大加熱率の推

算を差分法による数値計算によって行う場合、衝撃波と境界層を含む領域に計算領域を分割し、エントロピー補正係数をそれぞれの物理現象に適したオーダーの定数として与える計算法を提案した。これは、並列計算機を有効に利用する手段の一つでもある。

非反応流の場合は、エントロピー補正係数に衝撃波では大きな値を、境界層では小さな値を与えると、Lin の提案した局所的圧力勾配の関数として与える方法よりも少ない演算プロセスで、カーバンクル現象の発生を抑えつつ、物体表面熱流束が Van Driest の経験式と良く一致する計算結果が得られた。非平衡流の場合も、本方法によって妥当な熱流束分布が得られることが、OREX Workshop P-II-2 の課題を計算することによって検証された。

本方法によって、解が安定に収束して物体表面での熱流束を過小評価しないようなエントロピー補正係数の最適値を、試行錯誤して探す計算コストを大幅に軽減することができる。

## 参 考 文 献

- 1) Liu, Y. and Vinokur, M.: Upwind Algorithms for General Thermo-Chemical Nonequilibrium Flows, AIAA 89-0201, 1989.
- 2) Yee, H.C.: Upwind and Symmetric Shock-Capturing Schemes, NASA Technical Memorandum 89464, 1987.
- 3) Müller, B.: Simple Improvement of an Upwind TVD Schemes for Hypersonic Flow, AIAA Paper 89-1977 CP, 1989.
- 4) Lin, H.C.: Dissipation Additions to Flux-Difference Splitting, J. Comp. Phys., **117** (1995), pp. 20-27.
- 5) Liou, M.-S. and Steffen, C. J.: A New Flux Splitting Scheme, J. Comp. Phys., **107** (1993), pp. 23-39.
- 6) Yasuhiro, W. and Liou, M.-S.: A Flux Splitting Scheme with High-Resolution and Robustness for Discontinuities, NASA TM-106452, 1994.
- 7) Gnoffo, P. A., Gupta, R. N. and Shinn, J. L.: Conservation Equations and Physical Models for Hypersonic Air Flows in Thermal and Chemical Nonequilibrium, NASA TP-2867, 1989.
- 8) Yos, J.M.: Transport Properties of Nitrogen, Hydrogen, Oxygen, and Air to 30,000 K, Tech. Memo. RAD-TM-63-7 (Contract AF 33(616)-7578), AVCO Corp., Wilmington, Massachusetts, 1963.
- 9) Park, C.: Assessment of Two-Temperature Kinetic Model for Ionizing Air, J. Thermophysics Heat Transfer, **3** (1989), pp. 233-244.
- 10) Strang, G.: Linear Algebra and Its Applications, Academic Press, New York, 1976.
- 11) 数値流体力学編集委員会編：格子形成法とコンピュータグラフィックス, 東京大学出版会, 東京, 1995, pp. 11-86.
- 12) 航空機計算空気力学シンポジウム運営委員会, 特別企画実行ワーキンググループ：第13回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, 航空宇宙技術研究所特別資料, SP-29, 1996.
- 13) Van Driest, E. R.: The Problem of Aerodynamic Heating, Aeronautical Engineering Review, **15**, 10(1956), pp. 26-41.
- 14) 嶋田 徹, 関野展弘, 田村直樹：高エンタルピー流れの数値解析, 1995年度宇宙航行の力学シンポジウム, 1995, pp. 152-155.