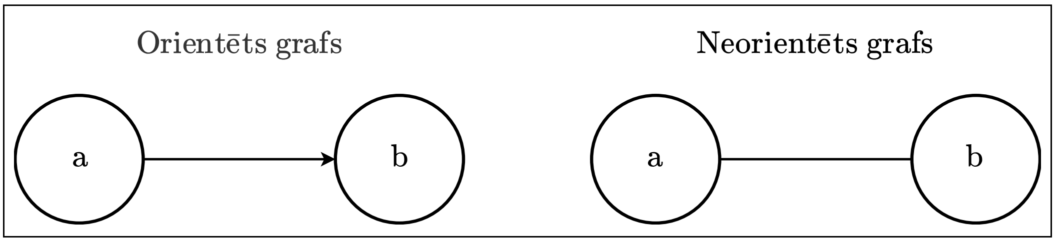
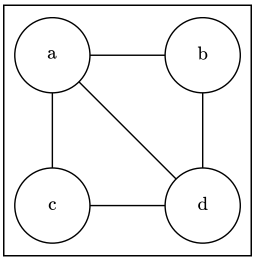
Diskrētās struktūras datorzinātnē
Grafu teorija

Kopā eksistē divi veidu grafi: orientēti un neorientēti

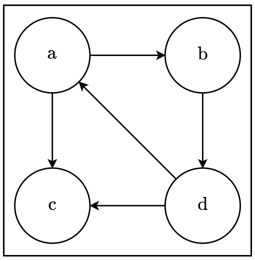


Orienētām grafam G_1 loku kopu Q_1 veido korteži, bet neorientētam G_2 – kopas.
Loku kopa Q_1 sastāv tikai no virsotņu kopas V_1 elementiem, pie tam
korteža pirmo elemetu sauc par sākuma virsotni, bet otro par beigu virsortni.

Katrai virsotnei ir lokālā pakāpe – vesels skaitlis. Neorientētam grafam tā ir vienāda ar kopīgo loku skaitu ar šo virsotni. Ja grafs ir orientēts, tad viņam ir divu veidu lokālās pakāpes – izejošās un ieejošās attiecīgi. $(d_G^+,\ d_G^-)$

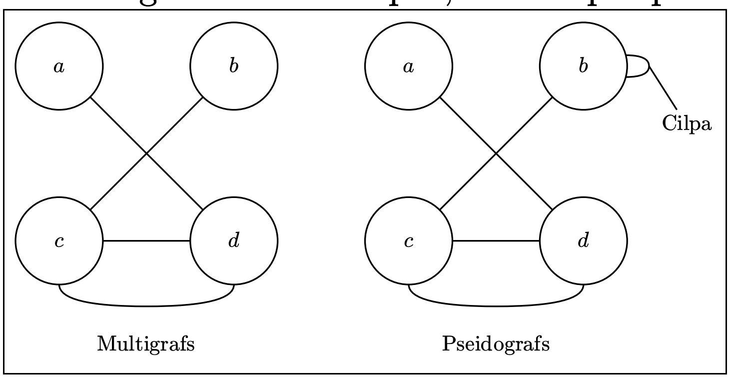


Dotajam grafam: $\mathrm{d}_G\,(a) = 3; \quad \mathrm{d}_G\,(b) = 2; \quad \mathrm{d}_G\,(c) = 2; \quad \mathrm{d}_G\,(d) = 3$

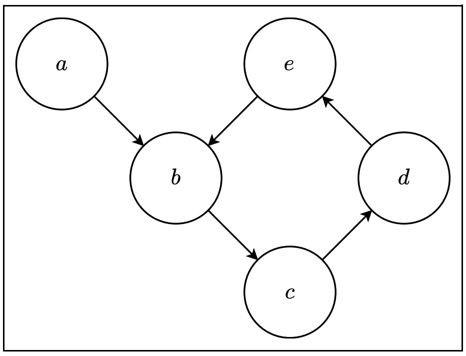


Dotajam grafam: $\begin{array}{llll} \mathrm{d}_G^+\,(a) = 2; & \mathrm{d}_G^+\,(b) = 1; & \mathrm{d}_G^+\,(c) = 0; & \mathrm{d}_G^+\,(d) = 1 \\ \mathrm{d}_G^-\,(a) = 1; & \mathrm{d}_G^-\,(b) = 1; & \mathrm{d}_G^-\,(c) = 2; & \mathrm{d}_G^-\,(d) = 2 \end{array}$

Mēdz eksistēt arī jauktie grafi: tādi, kas sastāv gan no orientētiem, gan neor. lokiem.
Šādā gadījumā neorientētus lokus ir jāparveido par orientētiem.
Lokus tipa $q = \langle \alpha, \alpha \rangle$ tradicionāli sauc par cilpām.
Ja vienam un tam pašam virsotņu pārim ir vairāki atšķīrīgi loki, tad tas ir multigrafs.
Ja multigrafam ir arī cilpas, to sauc par pseidografu.



Ceļš ar garumu n ir tāda virsotņu $\{ V_i \mid i \in [0; n] \}$ secība, ka
$\forall j \in [1; n] \exists \langle V_{j-1}; V_j \rangle \in Q$
Ceļu, kuram sākuma punkts sakrīt ar beigu punkta, sauc par ciklu.
Ceļu var apzīmēt ar (V_p, V_q). Ja starp šiem elementiem $\exists V_i$, tad no tā skatapunkta V_p ir tā priekštecis, bet V_q ir tā pēctecis. Ir arī funkcijas, kas atgriež to kopu:
$\Gamma_G^+ (V_i)$ atgriež pēcteču kopu, $\Gamma_G^- (V_i)$ atgriež priekšsteču kopu

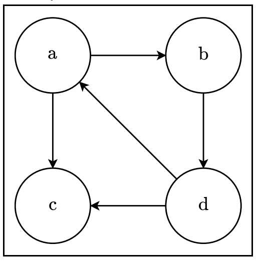


Šajā attēlā var redzēt vairākus ceļus, piemēram (a, c), vai arī ciklu no elementiem $\langle b, c, d, e \rangle$

Grafu attēlošana

Grafu var atspoguļot dažādos veidos, ne tikai grafiski.
Blakusvirsotņu matrica – kvadrātiskā matrica $|V| \times |V|$, kas sastāv no "0" un "1" pēc likuma, ka ir "1", ja pāris (kortežā vai kopā) $x, y \in Q$

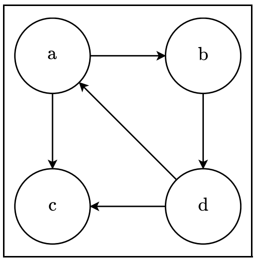
$$A = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \Leftrightarrow$$



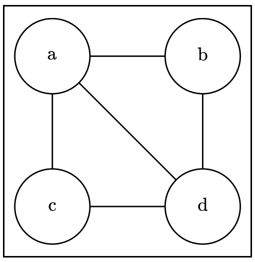
Ja grafs ir neorientēts, tad matricai piemīt simetrija pret diagonālo ass.

Loku saraksts💀 – kopa, kurā ir pierakstīti visi loki.

$$\boxed{\{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle d, a \rangle, \langle d, c \rangle \}} \Leftrightarrow$$

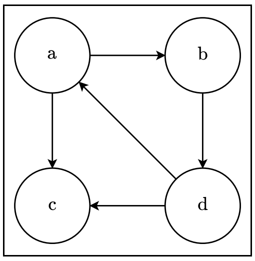


$$\boxed{\{ \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, d \}, \{ d, a \}, \{ d, c \} \}} \Leftrightarrow$$



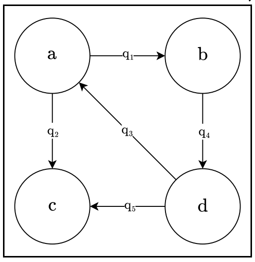
Sasniedzamības matrica – kvadrātiskā matrica $|V| \times |V|$, kas sastāv no "0" un "1" pēc likuma, ka ir "1", ja no elementa x ir ceļš līdz elementam y.

$$R = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow$$



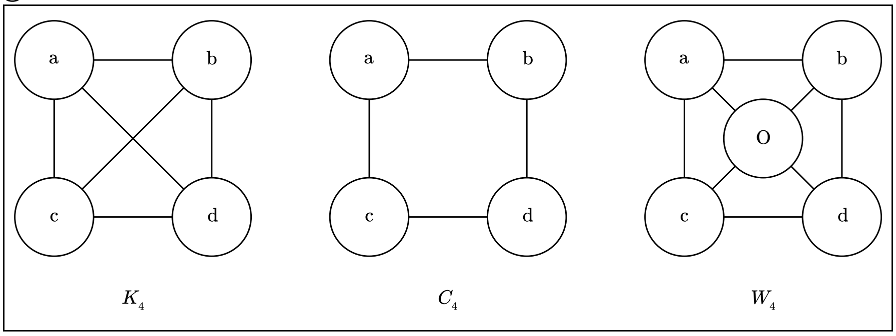
Incidenču matrica – matrica $|V| \times |Q|$, kur rindas ir virsotnes, bet kolonnas ir loki.
Neorientētam grafam ir 1, ja virsotne iekļauta lokā, bet 0, ja ir pretēji.
Orientētam grafam ir +1, ja loks iziet no virsotnes, -1, ja ieiet virsotnē, 0, ja ir pretēji.

$$B = \begin{array}{c|ccccc} & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ \hline a & + & + & - & 0 & 0 \\ b & - & 0 & 0 & + & 0 \\ c & 0 & - & 0 & 0 & - \\ d & 0 & 0 & + & - & + \end{array} \Leftrightarrow$$

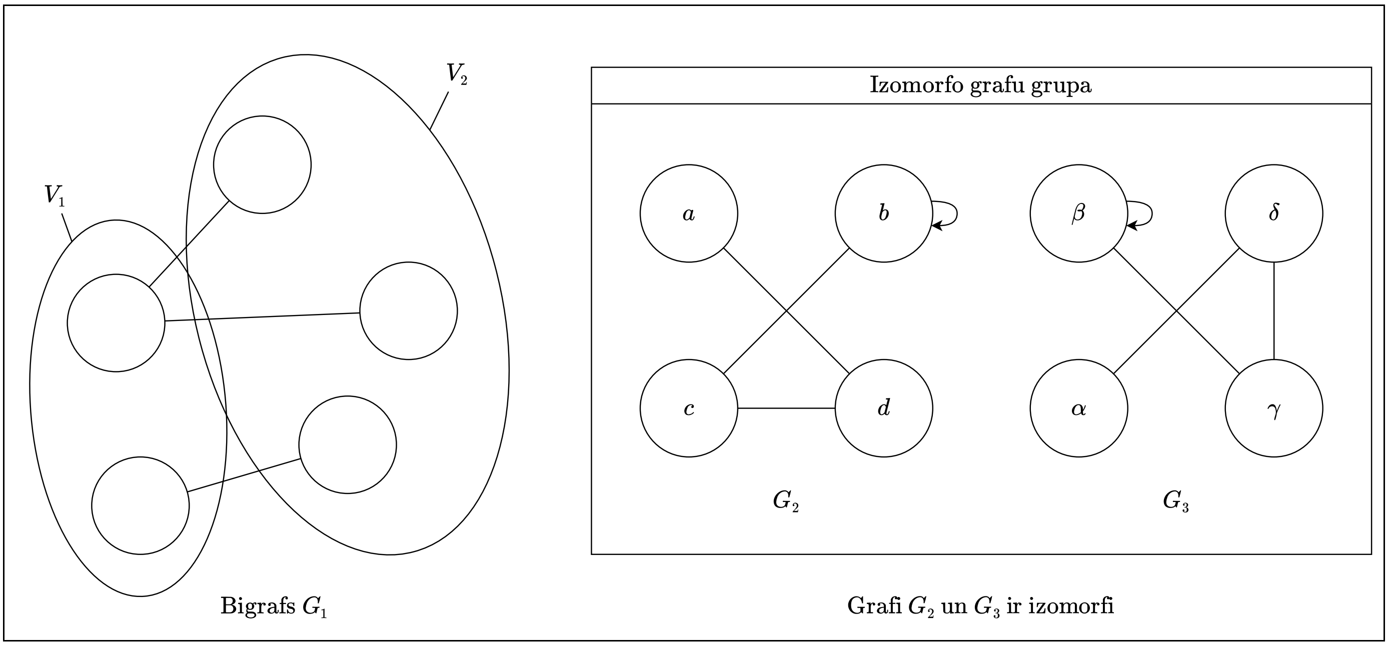


Grafu veidi

Pilns grafs – tāds grafs K_n kuram ir n virsotņu un katra no tām ir savienota ar katru.
Ciklisks grafs – tāds grafs C_n, kuram ir n virsotņu un veido vienu vienkāršu ciklu.
Ritenis W_n sastāv no cikliska grafa C_n un vienas virsotnes, ar kuru ir savienoti C_n grafa virsotnes.



Divdaļīgs grafs jeb bigrafs ir tāds, kuru kopu V var sadalīt citās divās kopās V_1 un V_2, lai visi loki savieno virsotnes no abām tām kopas. Ja katrai virsotnei būs loks, tas būs pilns bigrafs.
Eksistē arī t.s. izomorfo grafu grupas. Tās grupas grafiem vienmēr ir vienāds virsotņu, loku skaits un lokālo pakāpju vērtības. Grafi ir izomorfie, ja var izdarīt pieņēmumu, ka katram $v_p \in V_1$ eksistē tāds $v_q \in V_2$, ka, ja pieņemot, ka $v_p \equiv v_q$, tad $Q_1 \Leftrightarrow Q_2$.



Izdevīgāko ceļu meklēšana grafos

Grafu teoriju var lietot, lai atrast īsāko ceļu starp virsotnēm. Šādā gadījumā lokiem parādas jauna īpašība – svars. Izdevīgākais ceļš ir tas, kuram ir mazāks kopsvars.

Deikstras algoritms

Informāciju, kurai vajadzēja būt izklāsts šajā sadaļā es jebal, jo man tad vajag iedzert kaut ko, jo šo murgu skaidrā diez vai normāls cilvēks sapratīs, bet man turklāt tas ir jāizskaidro, lai citi saprastu, tāpēc es iesaku pajautāt par šo ChatGPT vai citu LVM.