1 นอร์มเวกเตอร์และนอร์มเมทริกซ์ (Vector Norms and Matrix Norms)

นอร์มเป็นวิธีการวัดขนาด โดยจะมีการกำหนดวิธีการวัดตามลักษณะของสิ่งที่จะวัด ทั้งเวกเตอร์และเมทริกซ์จะมีนอร์มที่ใช้ในการวัดขนาดที่มีการนิยามที่ต่างกัน หลายรูปแบบ ก่อนที่จะไปทำความรู้จักนิยามของนอร์มเวกเตอร์ ขอทบทวนนิยามของปริภูมิเวกเตอร์ (vector space) ดังนี้

นิยาม 1.1. [9] ให้ V เป็นเซตใด ๆ โดยที่ $V \neq \emptyset$ และมีการดำเนินการ 2 อย่าง คือ การบวก $\oplus$ และการคูณด้วยสเกลาร์ $\odot$ บนเซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ เราจะเรียกเซต V และ การดำเนินการทั้งสองว่า ปริภูมิเวกเตอร์ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in V$ และสเกลาร์ $c \in \mathbb{R}$ ระบบดังกล่าวมีสมบัติครบ 10 ข้อ ต่อไปนี้

1. $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \in V$
2. $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$
3. $(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} = \mathbf{v} \oplus (\mathbf{u} \oplus \mathbf{w})$
4. มี $\mathbf{0} \in V$ ที่ทำให้ $\mathbf{u} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{u}$
5. สำหรับทุก ๆ $\mathbf{u} \in V$ จะมี $-\mathbf{u} \in V$ ที่ทำให้ $\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
6. $c \odot \mathbf{u} \in V$
7. $c \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = (c \odot \mathbf{u}) \oplus (c \odot \mathbf{v})$
8. $(c + d) \odot \mathbf{u} = (c \odot \mathbf{u}) \oplus (d \odot \mathbf{v})$
9. $(cd) \odot \mathbf{u} = c \odot (d \odot \mathbf{u})$
10. มี $1 \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

หมายเหตุ สมบัติข้อ 1 และ 6 เรียกว่าสมบัติปิด ซึ่งบางครั้งในการเขียนสมบัติของปริภูมิเวกเตอร์จะละไว้

ตัวอย่าง 1.2. $V = \mathbb{R}^2$ และการดำเนินการ

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$k(x_1, x_2) = (kx_1, kx_2)$ เมื่อ $k \in \mathbb{R}$ เป็นสเกลาร์

V และการดำเนินการทั้งสองเป็นปริภูมิเวกเตอร์

ปริภูมิเวกเตอร์ของจำนวนจริง $\mathbb{R}^n$ มักจะเรียกว่า ปริภูมิยูคลิด (Euclidean n-space) และปริภูมิเวกเตอร์ของจำนวนเชิงซ้อน คือ $\mathbb{C}^n$ [3]

1.1 Vector Norms

นิยาม 1.3. ให้ E เป็น vector space บนจำนวนจริง $\mathbb{R}$ **นอร์ม**บน E คือ ฟังก์ชัน $||\ || : E \to \mathbb{R}_+$ ซึ่งจะให้ค่าที่เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ สำหรับทุกเวกเตอร์ $x, y \in E$ และ $\lambda \in \mathbb{R}$ นอร์มเวกเตอร์สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $||x|| \geq 0$
2. $||x|| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$
3. $||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||$
4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

vector space E และนอร์ม $||\ ||$ รวมกันจะเรียกเป็น normed vector space

ตัวอย่าง 1.4. กำหนด E ต่างกันจะได้นอร์ม ดังนี้

1. ให้ $E = \mathbb{R}$ จะได้ $||x|| = |x|$ เป็นค่าสัมบูรณ์ของ x
2. ให้ $E = \mathbb{R}^n$ ดังนั้น $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ จะมีนอร์มมาตรฐานที่ใช้กันอยู่ 3 แบบ ได้แก่

   $||x||_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$

   $||x||_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

   $||x||_\infty = \max\left\{|x_i|\big|1 \leq i \leq n\right\}$

โดย $||\ ||_2$ จะเรียกว่า Euclidean norm หรือ นอร์ม l_2 และ $||\ ||_\infty$ เรียก นอร์ม l_∞

ตัวอย่าง 1.5. ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} 3.3330x_1 + 15920x_2 - 10.333x_3 &= 15913 \\ 2.2220x_1 + 16.710x_2 + 9.6120x_3 &= 29.544 \\ 1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 &= 8.4254 \end{aligned}$$

มีผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) เป็น $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t = (1, 1, 1)^t$ โดยการใช้วิธีการเชิงตัวเลขได้ผลเฉลยโดยประมาณ (approximate solution) เป็น

$$\tilde{\mathbf{x}} = (1.2001, 0.99991, 0.92538)^t$$

จงใช้นอร์ม l_2 และ l_∞ ในการหาผลต่างของผลเฉลยแม่นตรงและผลเฉลยโดยประมาณ

วิธีทำ ผลต่างของผลเฉลยโดยประมาณและผลเฉลยแม่นตรง มีค่าเป็น $\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = (0.2001, -0.00009, -0.07462)^t$

$$\begin{aligned} ||\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}||_2 &= \left(|0.2001|^2 + |-0.00009|^2 + |-0.07462|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 0.21356 \\ ||\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}||_\infty &= \max\{|0.2001|, |-0.00009|, |-0.07462|\} \\ &= 0.2001 \end{aligned}$$

1.2 Matrix Norms

ทบทวนนิยามต่าง ๆ เกี่ยวกับเมทริกซ์
กำหนดเมทริกซ์ $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{C})$

- **สังยุค** (conjugate) ของเมทริกซ์ A คือ $\overline{A}$ และ $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$
- **เมทริกซ์สลับสับเปลี่ยน** (transpose) ของเมทริกซ์ A คือ A^t และ $A^t = (\overline{a}_{ji})$
- **เมทริกซ์สังยุค สลับสับเปลี่ยน** (conjugate transpose) หรือ Hermitian transpose ของเมทริกซ์ A ที่มีขนาด $m \times n$ แทนด้วย A^* และ $A^* = \overline{(A^t)} = (\overline{A})^t$
  ถ้า A เป็นเมทริกซ์ของจำนวนจริงจะได้ $A^* = A^t$
- ถ้า A เป็นเมทริกซ์ของจำนวนจริง $A \in M_n(\mathbb{R})$ เมทริกซ์ A จะเป็นเมทริกซ์**สมมาตร** (symmetric) เมื่อ $A^t = A$
- เมทริกซ์ $A \in M_n(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์**ปรกติ** (normal) เมื่อ $AA^* = A^*A$
  เมทริกซ์ $A \in M_n(\mathbb{R})$ เป็นเมทริกซ์ปรกติ เมื่อ $AA^t = A^tA$
- เมทริกซ์ $Q \in M_n(\mathbb{R})$ เป็นเมทริกซ์**ตั้งฉาก** (orthogonal) ถ้า $QQ^t = Q^tQ = I$
- เมทริกซ์ $U \in M_n(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์**ยูนิเทรี** (unitary) เมื่อ $U^*U = UU^* = I$
- กำหนดเมทริกซ์ $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ **เทรซ** (trace) ของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย $tr(A)$ มีค่าเท่ากับผลบวกของสมาชิกในแนวทแยง นั่นคือ $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

นิยาม 1.6. [5] **เมทริกซ์นอร์ม** (matrix norm) $||\ ||$ บนสเปซของเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $M_n(K)$ โดยที่ $K = \mathbb{R}$ หรือ $K = \mathbb{C}$ เป็นนอร์มบนเวกเตอร์สเปซ $M_n(K)$ ที่มีสมบัติเพิ่มขึ้น ซึ่งเรียกว่า submultiplicativity

$$||AB|| \leq ||A||\,||B||$$

สำหรับทุก ๆ $A, B \in M_n(K)$ นอร์มบนเมทริกซ์ที่สอดคล้องเงื่อนไขข้างต้นมักจะเรียกว่า submultiplicative matrix norm

นิยาม 1.7. นอร์มโฟรบิเนียส (Frobenius norm) แทนด้วยสัญลักษณ์ $||\ ||_F$ กำหนดโดย

$$||A||_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{tr(AA^*)} = \sqrt{tr(A^*A)} \tag{1}$$

เมื่อ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ และ $A \in M_n(\mathbb{C})$

นิยาม 1.8. สำหรับเมทริกซ์จัตุรัสใด $A \in M_n(\mathbb{C})$ จำนวนเชิงซ้อน $\lambda \in \mathbb{C}$ เป็นค่าไอเก้น (eigenvalue) ของเมทริกซ์ A ถ้ามีเวกเตอร์ $u \neq 0$ และ $u \in \mathbb{C}^n$ ซึ่ง

$$Au = \lambda u$$

ถ้า λ เป็นค่าไอเก้นของเมทริกซ์ A แล้วเวกเตอร์ที่ไม่เป็นศุนย์ $u \in \mathbb{C}^n$ ซึ่งสอดคล้องกับ $Au = \lambda u$ จะเรียกว่า เวกเตอร์ไอเก้น (eigenvector) ของเมทริกซ์ A ที่สัมพันธ์กับค่าไอเก้น λ เมื่อนำเวกเตอร์ไอเก้นทั้งหมด รวมกับเวกเตอร์ศูนย์ จะเป็นสเปซย่อย (subspace) ของ $\mathbb{C}^n$ แทนด้วย $E_\lambda(A)$ และเรียกว่า eigenspace associated with λ

นิยาม 1.9. ให้เมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ ใด ๆ $A \in M_n(\mathbb{C})$ พหุนาม

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n - tr(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A) \tag{2}$$

เป็น characteristic polynomial ของเมทริกซ์ A ค่ารากคำตอบ n ราก (ไม่จำเป็นต้องต่างกัน อาจจะซ้ำกันได้) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ของสมการ (2) เป็นค่าไอเก้นทั้งหมดของเมทริกซ์ A และ spectrum หรือ spectral radius (ρ) ของเมทริกซ์ A กำหนดดังนี้

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \tag{3}$$

บทแทรก 1.10. สำหรับนอร์มเมทริกซ์ใด ๆ $|| \; ||$ บน $M_n(\mathbb{R})$ และเมทริกซ์จัตุรัส $A \in M_n(\mathbb{R})$ มีขนาด $n \times n$ จะได้

$$\rho(A) \leq ||A|| \tag{4}$$

ตัวอย่าง 1.11. จงหา spectral radius ของเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ หาเมทริกซ์ $A - \lambda I$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

จาก

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{5}$$

จะได้

$$(1-\lambda)^3 + 2(1-\lambda) + (1-\lambda) = 0$$

จัดรูป และแก้สมการจะได้ $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{3}i$

จากนิยามของ spectral radius จะได้

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \max\{|1|, |1+\sqrt{3}i|, |1-\sqrt{3}i|\} \quad (6) \\ &= \max\{1, 2, 2\} \quad (7) \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 1.12. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ นอร์ม l_2 ของเมเทริกซ์ A แทนด้วย $||A||_2$

$$||A||_2 = \sqrt{\rho(A^t A)} \tag{8}$$

ตัวอย่าง 1.13. จงหา $||A||_2$ เมื่อกำหนดเมทริกซ์ A ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

คำตอบ $||A||_2 = \sqrt{7+\sqrt{7}} \approx 3.11$

นิยาม 1.14. ถ้า $||\,||$ เป็นนอร์มบน $\mathbb{C}^n$ เรากำหนดฟังก์ชัน $||\,||$ บน $M_n(\mathbb{C})$ โดย

$$||A|| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{C}^n \\ x\neq 0}} \frac{||Ax||}{||x||} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{C}^n \\ ||x||=1}} ||A|| \tag{9}$$

ฟังก์ชันจาก $A \to ||A||$ เรียกว่า subordinate matrix norm หรือ operator norm ที่เหนี่ยวนำโดยนอร์ม $||\,||$

บทแทรก 1.15. สำหรับเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ $A \in M_n(C)$ จะได้

$$||A||_1 = \sup_{\substack{x\in\mathbb{C}^n \\ ||x||_1=1}} ||A||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$||A||_\infty = \sup_{\substack{x\in\mathbb{C}^n \\ ||x||_\infty=1}} ||A||_\infty = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \tag{10}$$

$$||A||_2 = \sup_{\substack{x\in\mathbb{C}^n \\ ||x||_2=1}} ||A||_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} \tag{11}$$

ตัวอย่าง 1.16. กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

1-norm การหาค่าที่มากที่สุดของผลบวกในแต่ละหลัก (column)

$$\begin{aligned} ||A||_1 &= \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \\ &= \max\{|2| + |1| + |-4|, |-1| + |1| + |2|, |3| + |-1| + |1|\} \\ &= \max\{7, 4, 5\} = 7 \end{aligned}$$

∞-norm การหาค่าที่มากที่สุดของผลบวกในแต่ละแถว (row)

$$\begin{aligned} ||A||_\infty &= \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \\ &= \max\{|2| + |-1| + |3|, |1| + |1| + |-1|, |-4| + |2| + |1|\} \\ &= \max\{6, 3, 7\} = 7 \end{aligned}$$

Frobenius norm การหารากที่สองของผลบวกของสมาชิกทุกตัวยกกำลังสอง

$$\begin{aligned} ||A||_F &= \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(|2|^2 + |-1|^2 + |3|^2 + |1|^2 + |1|^2 + |-1|^2 + |-4|^2 + |2|^2 + |1|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{38} \approx 6.16 \end{aligned}$$

1.3 ความคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าและ condition number

ในระบบสมการเชิงเส้น $Ax = b$ ในบางครั้งการปรับเปลี่ยนค่าเล็กน้อย อาจจะส่งผลมากต่อคำตอบของระบบสมการ

ตัวอย่าง 1.17. [2]

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix} \tag{12}$$

ระบบสมการนี้มีคำตอบเป็น $x = (1, 1, 1, 1)$

เราเปลี่ยนค่าเล็กน้อยของเมทริกซ์ขวาสุด จะได้ระบบสมการ

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ x_2 + \Delta x_2 \\ x_3 + \Delta x_3 \\ x_4 + \Delta x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{bmatrix} \tag{13}$$

ระบบสมการนี้มีคำตอบเป็น $x = (9.2, -12.6, 4.5, -1.1)$

เราเปลี่ยนค่าเล็กน้อยของเมทริกซ์ จะได้ระบบสมการ

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.98 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ x_2 + \Delta x_2 \\ x_3 + \Delta x_3 \\ x_4 + \Delta x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix} \tag{14}$$

ระบบสมการนี้มีคำตอบเป็น $x = (-81, 137, -34, 22)$

จะเห็นได้ว่า การเปลี่ยนแปลงค่าเพียงเล็กน้อยในระบบสมการ ส่งผลต่อคำตอบมหาศาล ปัญหาลักษณะแบบนี้เกิดจากเมทริกซ์ของสมการไม่ดี

ทฤษฎีบท 1.18. ให้ $\tilde{x}$ แทน คำตอบเชิงประมาณค่าของระบบสมการ $Ax = b$ และ r เป็นเวกเตอร์เศษเหลือ (residual vector) ของ $\tilde{x}$ แล้ว

$$||x - \tilde{x}|| \leq ||A^{-1}||\,||r||$$

และถ้า $x \neq 0$ และ $b \neq 0$

$$\frac{||x - \tilde{x}||}{||x||} \leq ||A||\,||A^{-1}||\frac{||r||}{||b||}$$

อสมการในทฤษฎีบท 1.18 ทำให้เห็นว่า $||A^{-1}||$ และ $||A||\,||A^{-1}||$ มีความเชื่อมโยงกันระหว่างเวกเตอร์เศษเหลือและความถูกต้องของการประมาณค่า

นิยาม 1.19. condition number ของเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (nonsingular matrix) คือ

$$K(A) = ||A||\,||A^{-1}|| \tag{15}$$

เมทริกซ์ A จะดี (well conditioned) ถ้า $K(A)$ มีค่าเข้าใกล้ 1 และไม่ดี (ill conditioned เมื่อค่าของ $K(A)$ มีค่าไกลจาก 1 อย่างเห็นได้ชัด

ตัวอย่าง 1.20. จงหา condition number ของเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ condition number สามารถหาได้จากสมการ (15)

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{(1)(2) - (1.0001)(2)} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1.0001 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -20000 & 20000 \\ 10001 & -10000 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

เลือกใช้ 1-norm จะได้

$$||A||_1 = \max\{2.0001, 4\} = 4$$

$$||A^{-1}||_1 = \max\{30001, 30000\} = 30001$$

$$K(A) = 120004$$

ค่าของ $K(A)$ มีค่ามากอย่างเห็นได้ชัด ดังนั้น เมทริกซ์ A เป็น ill conditioned matrix

แบบฝึกหัด

1. ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 7 \\ 2x + y + z &= 4 \\ -3x + 2y - 2z &= -10 \end{aligned}$$

   มีผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) เป็น $\mathbf{x} = (x, y, z)^t = (2, -1, 1)^t$
   ใช้วิธีการเชิงตัวเลขได้ผลเฉลยโดยประมาณเป็น $\widetilde{\mathbf{x}} = (2.0175, -0.9987, 1.0001)^t$
   จงใช้ l_∞ ในการหาผลต่างของผลเฉลยแม่นตรงและผลเฉลยโดยประมาณ

2. กำหนดเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   จงหาค่าของ Frobenious norm

3. กำหนดเมทริกซ์

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & \sqrt{8} \end{bmatrix}$$

   3.1 จงหาค่าของ $||A||_2$

   3.2 จงหาค่าของ $||A^{-1}||_2$

   3.3 จงหาค่าไอเก้นของเมทริกซ์ A

4. จงหา condition number ของเมทริกซ์ต่อไปนี้โดยใช้ 1-norm (l_1)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2.01 & 1 \end{bmatrix}$$

2 การแยกค่าเอกฐาน (Singular Value Decomposition)

2.1 Unitary และ Orthogonal Matrices

นิยามของ Unitary และ Orthogonal Matrices กำหนดดังในกรอบสี่เหลี่ยม

เมทริกซ์ $U \in M_n(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์**ยูนิเทรี** (unitary) เมื่อ $U^*U = UU^* = I$ หรือกล่าวได้ว่า หลัก (หรือ แถว) ของเมทริกซ์ U ประกอบด้วย orthomornal basis สำหรับ $\mathbb{C}^n$ เมทริกซ์ $Q \in M_n(\mathbb{R})$ เป็นเมทริกซ์**ตั้งฉาก** (orthogonal) ถ้า $QQ^t = Q^tQ = I$ หรือกล่าวได้ว่า หลัก (หรือ แถว) ของเมทริกซ์ Q ประกอบด้วย orthomornal basis สำหรับ $\mathbb{R}^n$

เมื่อ orthonomal basis ของ inner product space V ที่มีสมาชิกเป็นเวกเตอร์ที่เป็น orthonormal หรือ กล่าวได้ว่า เป็นเวกเตอร์หน่วยและตั้งฉาก (orthogonal) กัน

Unitary และ Orthogonal Matrices มีสมบัติที่ดีบางอย่าง สิ่งแรก คือ ถ้าเมทริกซ์มีสมบัติเป็น Unitary หรือ Orthogonal จะหาเมทริกซ์ผกผัน (inverse matrix) ง่าย นั่นคือ ถ้า U เป็น unitary จะได้ $U^{-1} = U^*$ โดยสามารถเห็นได้ชัดเจน กำหนดให้ $U_{n\times n} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u_n} \end{bmatrix}$ โดยที่ $\mathbf{u}_i$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$ เป็น orthonormal vectors ก็ต่อเมื่อ

$$[U^*U]_{ij} = u_i^* u_j = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad i = j \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad i \neq j \end{cases} \iff U^*U = I \iff U^{-1} = U^*$$

ข้อสังเกตุ เนื่องจาก $U^*U = I \iff UU^* = I$ หลักของเมทริกซ์ U เป็น orthonormal ก็ต่อเมื่อแถวของ U เป็น orthonormal ดังนั้นในนิยามของยูนิเทรี และ orthonomal matrices สามารถเขียนได้ทั้ง หลักหรือแถวเป็น orthonormal

ตัวอย่าง 2.1. พิจารณาเมทริกซ์ต่อไปนี้ ว่าเป็น ยูนิเทรี หรือ orhogonal เมทริกซ์ หรือไม่

1. เมทริกซ์เอกลักษณ์ I
2. $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$
3. $U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$

วิธีทำ

1. เมทริกซ์เอกลักษณ์ I ถ้ามองเป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ จะได้

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 & \cdots & \mathbf{i}_n \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่า $\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l = 0$ โดยที่ $k \neq l$ และ $|\mathbf{i}_k| = 1$ เมื่อ $k = 1, 2, \ldots, n$
ดังนั้น I เป็น orthogonal matrix

2.

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} \tag{16}$$

เวกเตอร์

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (0)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

ดังนั้น $\mathbf{q}_1$ ตั้งฉาก $\mathbf{q}_2$
ในทำนองเดียวกัน จะได้ $\mathbf{q}_1$ ตั้งฉาก $\mathbf{q}_3$ และ $\mathbf{q}_2$ ตั้งฉาก $\mathbf{q}_3$

และ

$$|\mathbf{q}_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (0)^2} = 1$$

ในทำนองเดียวกัน $|\mathbf{q}_2| = |\mathbf{q}_3| = 1$
ดังนั้น จะได้ว่าเมทริกซ์ Q เป็น orthogonal matrix

หรือ อาจจะแสดงได้โดยการนำเมทริกซ์ Q และ Q^t มาคูณกัน ก็จะได้

$$QQ^t = Q^tQ = I$$

3. ในการแสดงว่าเมทริกซ์ U เป็น unitary matrix สามารถทำได้โดยการแสดงว่า

$$UU^* = U^*U = I$$

$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$

$U^* = \left(\overline{U}\right)^t$ ดังนั้น $U^* = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-i & 1-i \\ -1-i & 1+i \end{bmatrix}$

จะได้

$$\begin{aligned} UU^* &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-i & 1-i \\ -1-i & 1+i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (1+i)(1-i)+(-1+i)(-1-i) & (1+i)(1-i)+(-1+i)(1+i) \\ (1+i)(1-i)+(1-i)(-1-i) & (1+i)(1-i)+(1-i)(1+i) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $U^*U = I$ จึงสามารถสรุปได้ว่า เมทริกซ์ U เป็น unitary matrix

2.2 ค่าไอเก้นและเวกเตอร์ไอเก้น

จากนิยาม 1.8 สำหรับเมทริกซ์จัตุรัสใด $A \in M_n(\mathbb{C})$ จำนวนเชิงซ้อน $\lambda \in \mathbb{C}$ เป็นค่าไอเก้น (eigenvalue) ของเมทริกซ์ A ถ้ามีเวกเตอร์ $u \neq 0$ และ $u \in \mathbb{C}^n$ ซึ่ง

$$Au = \lambda u$$

ถ้า λ เป็นค่าไอเก้นของเมทริกซ์ A แล้วเวกเตอร์ที่ไม่เป็นศูนย์ $u \in \mathbb{C}^n$ ซึ่งสอดคล้องกับ $Au = \lambda u$ จะเรียกว่า เวกเตอร์ไอเก้น (eigenvector) ของเมทริกซ์ A ที่สัมพันธ์กับค่าไอเก้น λ

ตัวอย่าง 2.2. กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

1. จงหาค่าไอเก้น และเวกเตอร์ไอเก้นที่สัมพันธ์กัน

2. จงหา othogonal matrix ของ A

วิธีทำ

1. จาก $|A - \lambda I|$ จะได้ $\lambda = 1, 3$ โดยกำหนดให้ $\lambda_1 = 1$ และ $\lambda_2 = 3$
   สำหรับ $\lambda_1 = 1$ หา eigenvector v_1 จาก $A\mathsf{v}_1 = \lambda_1 \mathsf{v}_1$ หรือ $(A - \lambda_1 I)\mathsf{v}_1 = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} v_{11} + v_{12} \\ v_{11} + v_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

   ดังนั้นจะได้สมการ 2 สมการที่ไม่อิสระต่อกัน (linearly dependence) จาก $v_{11} + v_{12} = 0$ ให้ $v_{11} = 1$ จะได้ $v_{12} = -1$ ดังนั้นจะได้

$$\mathsf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

สำหรับ $\lambda_2 = 3$ หา eigenvector $\mathbf{v}_2$ จาก $A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$ หรือ $(A - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda_2 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -v_{21} + v_{22} \\ v_{21} - v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้สมการ 2 สมการที่ไม่อิสระต่อกัน (linearly dependence) จาก $-v_{21} + v_{22} = 0$ ให้ $v_{21} = 1$ จะได้ $v_{22} = 1$ ดังนั้นจะได้

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. ให้ Q แทน orthogonal matrix ของเมทริกซ์ A
   จาก eigenvectors โดยที่ $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = \sqrt{2}$ ดังนั้น จะได้

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

   โดยสามารถตรวจสอบความถูกต้องได้โดย

   (1) $\mathbf{v}_1$ และ $\mathbf{v}_2$ เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากกัน โดยสามารถตรวจเช็คได้จาก $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$

   (2) $QQ^t = Q^tQ = I$

ทฤษฎีบท 2.3. (Singular Value Decomposition) [6] สำหรับเมทริกซ์ A ที่มีขนาด $m \times n$ จะมี U และ V เป็นเมทริกซ์ตั้งฉาก (orthogonal matrix) โดยที่เมทริกซ์ U มีขนาด $n \times n$ เมทริกซ์ V มีขนาด $m \times m$ และ D เป็นเมทริกซ์แนวทะแยง (diagonal matrix) ที่ทำให้ $A = VDU^T$ โดยที่ D อยู่ในรูป

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \cdots & \\ & \sigma_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \cdots & \sigma_n \\ 0 & \vdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{ หรือ } D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \cdots & & 0 & \cdots & 0 \\ & \sigma_2 & \cdots & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ & & \cdots & \sigma_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ เป็น ค่าเอกพจน์ (singular values) ของ f นั่นคือ รากที่สองของค่าไอเก้นที่ไม่เป็นศูนย์ของ AA^t และ A^tA และ $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \cdots = \sigma_p = 0$ เมื่อ $p = \min\{m, n\}$ หลัก (column) ของเมทริกซ์ U เป็นเวกเตอร์ไอเก้นของ A^tA และ หลัก (column) ของเมทริกซ์ V เป็นเวกเตอร์ไอเก้นของ AA^t

พิสูจน์. เนื่องจาก A^tA เป็น positive semidefinite matrix จะมีเมทริกซ์ U ที่เป็น orthogonal matrix ที่ทำให้

$$A^tA = U\Sigma^2U^t \tag{17}$$

โดยที่เมทริกซ์ $D = \mathtt{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0]$
โดยที่ $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2$ เป็นค่าไอเก้นที่ไม่เป็นศูนย์ของเมทริกซ์ A^tA
r เป็นแรงค์ (rank) ของเมทริกซ์ A สังเกตได้ว่า $r = \min\{m, n\}$
AU เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ จะได้

$$U^tA^tAU = (AU)^tAU = \Sigma^2$$

ให้ $f_i \in \mathbb{R}^m$ เป็นหลักที่ j ของเมทริกซ์ AU สำหรับ $j = 1, 2, \ldots, n$ จะได้

$$< f_i, f_j >= \sigma_i^2\delta_{ij} \quad \text{เมื่อ} \quad 1 \leq i, j \leq r$$

และ

$$f_j = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad r + 1 \leq j \leq n$$

ถ้าเรากำหนดค่า $[v_1, v_2, \ldots, v_r]$ โดย

$$v_j = \sigma_j^{-1} f_j \quad \text{เมื่อ} \quad 1 \leq j \leq r$$

แล้ว เราจะได้

$$< v_i, v_j >= \delta_{ij} \quad \text{เมื่อ} \quad 1 \leq i, j \leq r$$

เนื่องจาก $f_i = \sigma_j v_j$ สำหรับ $j = 1, 2, \ldots, r$ จะได้

$$< v_i, f_j >= \sigma_j < v_i, v_j >= \sigma_j \delta_{ij} \quad \text{เมื่อ} \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r$$

และเนื่องจาก $f_j = 0$ สำหรับ $j = r+1, r+2, \ldots, n$ จะได้

$$< v_i, f_j >= 0 \quad \text{เมื่อ} \quad 1 \leq i \leq m, r+1 \leq j \leq n$$

ถ้าแต่ละหลักของเมทริกซ์ V ประกอบด้วย $v_1, v_2, \ldots, v_m$ แล้วเมทริกซ์ V จะเป็น เมทริกซ์ขนาด $m \times m$ และเป็นเมทริกซ์ตั้งฉาก

ถ้า $m \geq n$ จะได้

$$D = \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0_{m-n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \cdots & \\ & \sigma_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \cdots & \sigma_n \\ 0 & \vdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

ถ้า $n \geq m$ จะได้

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \cdots & & 0 & \cdots & 0 \\ & \sigma_2 & \cdots & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ & & \cdots & \sigma_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น จึงสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$V^t A U = D$$

เมื่อจัดรูป จะได้ $A = VDU^t$ ตามที่ต้องการ

จาก สมการ

$$A = VDU^t \tag{18}$$

คูณสมการ (18) ด้วย A^t ทั้งทางซ้ายและทางขวา จะได้

$$A^tA = UD^tDU^t = U\texttt{diag}[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^n, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-r}]U^t$$

และ

$$AA^t = VD^tDV^t = V\texttt{diag}[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^n, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m-r}]V^t$$

ซึ่งแสดงได้ว่าทั้ง A^tA และ AA^t มีค่าไอเก้นที่ไม่เป็นศูนย์เหมือนกัน สมาชิกในหลักของเมทริกซ์ U คือ เวกเตอร์ไอเก้นของเมทริกซ์ A^tA และ สมาชิกในหลักของเมทริกซ์ V คือ เวกเตอร์ไอเก้นของเมทริกซ์ AA^t $\square$

ตัวอย่าง 2.4. กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

จงหา singular value decomposition

วิธีทำ หาเมทริกซ์ U V และ D ที่ทำให้ได้ $A = VDU^t$

V ประกอบด้วยเวกเตอร์ไอเก้นของเมทริกซ์ AA^t

U ประกอบด้วยเวกเตอร์ไอเก้นของเมทริกซ์ A^tA

D ประกอบด้วยรากที่สองของค่าไอเก้นที่ไม่เป็นศูนย์ของ AA^t หรือ A^tA

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^tA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

หาค่าไอเก้น

$$|A^tA - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = 0$$

แก้สมการ จะได้ $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0$

จาก $\lambda_1 = 2$ หาเวกเตอร์ไอเก้น $\mathbf{u}_1$

$$\begin{aligned} (A^tA - \lambda_1 I)\mathbf{u}_1 &= \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

จะได้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} -u_{11} + u_{12} &= 0 \\ u_{11} - u_{12} &= 0 \end{aligned}$$

ให้ $u_{12} = 1$ จะได้ $u_{11} = 1$ ดังนั้น จะได้เวกเตอร์ไอเก้น

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

จาก $\lambda_2 = 0$ หาเวกเตอร์ไอเก้น $\mathbf{u}_2$

$$\begin{aligned} (A^tA - \lambda_2 I)\mathbf{u}_2 &= \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

จะได้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} u_{21} + u_{22} &= 0 \\ u_{21} + u_{22} &= 0 \end{aligned}$$

ให้ $u_{21} = 1$ จะได้ $u_{22} = -1$ ดังนั้น จะได้เวกเตอร์ไอเก้น

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_2| = \sqrt{2}$$

ดังนั้น

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

หาเมทริกซ์ V จาก

$$AA^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

หาค่าไอเก้น

$$|AA^t - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(2-\lambda) = 0$$

แก้สมการ จะได้ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$
จาก $\lambda_1 = 2$ หาเวกเตอร์ไอเก้น $\mathbf{v}_1$

$$\begin{aligned} (AA^t - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 &= \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

จะได้ระบบสมการ

$$\begin{aligned}-2v_{12} &= 0\\ -2v_{13} &= 0\end{aligned}$$

ให้ $v_{12} = 0$ จะได้ $v_{13} = 0$ เลือกให้ $v_{11} = 1$ ดังนั้น จะได้เวกเตอร์ไอเก้น

$$\mathsf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จาก $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ หาเวกเตอร์ไอเก้น v_2 และ v_3

$$\begin{aligned}(AA^t - \lambda_2 I)\mathsf{v}_2 &= \mathbf{0}\\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

จะได้สมการ

$$2v_{21} = 0$$

จะได้ $v_{21} = 0$ ให้ $v_{22} = 1$ และ $v_{23} = 0$ จะได้เวกเตอร์ไอเก้น

$$\mathsf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ให้ $v_{22} = 0$ และ $v_{23} = 1$ จะได้เวกเตอร์ไอเก้น

$$\mathsf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|\mathsf{v}_1| = |\mathsf{v}_2| = |\mathsf{v}_3| = 1$$

ดังนั้น

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

และ

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

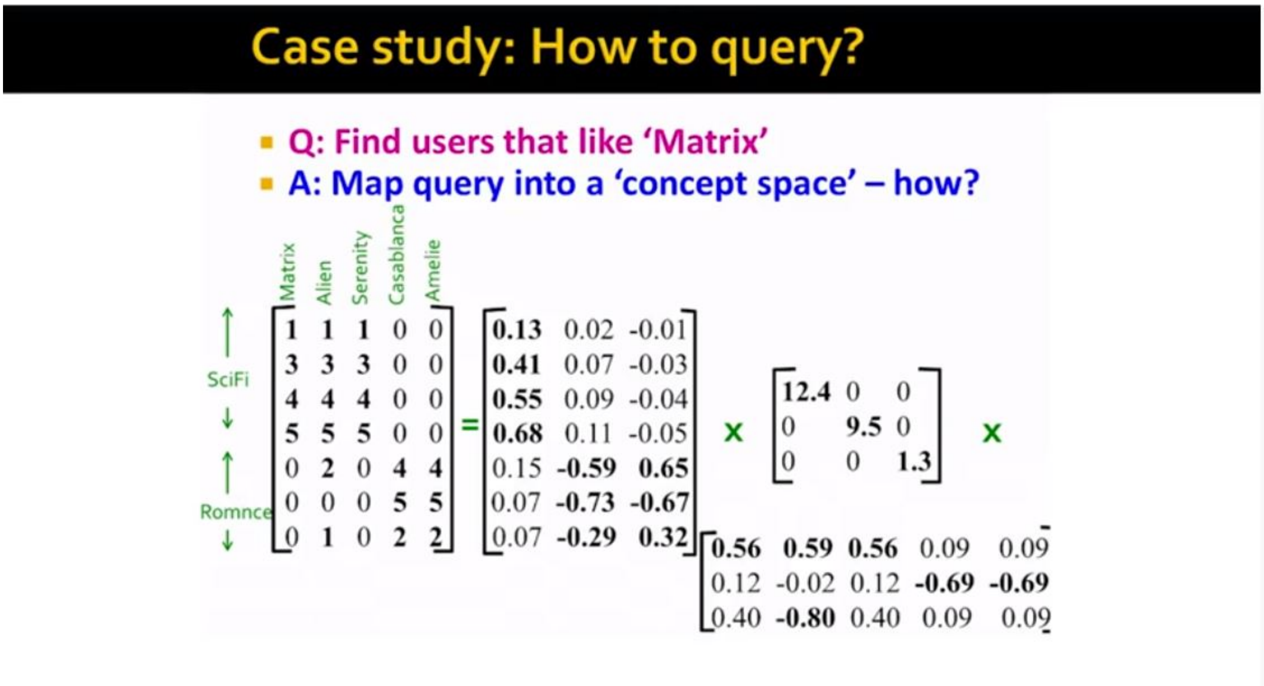
ในการคำนวณ singular value decomposition ค่อนข้างใช้การคำนวณเยอะสำหรับเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่ ดังนั้นจึงมีการพัฒนาการเขียนโปรแกรมสำหรับการแยกเมทริกซ์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้ ซึ่งใช้ภาษา python โดยอาจจะลองใช้คำสั่งบน google colab ได้ ซึ่งจะได้คำตอบออกมาเช่นเดียวกับตัวอย่าง 2.4 [4]

```python
# Singular-value decomposition
from numpy import array
from scipy.linalg import svd
# define a matrix
A = array([[1, 1], [0, 0], [0, 0]])
print(A)
# SVD
U, s, VT = svd(A)
print(U)
print(s)
print(VT)
```

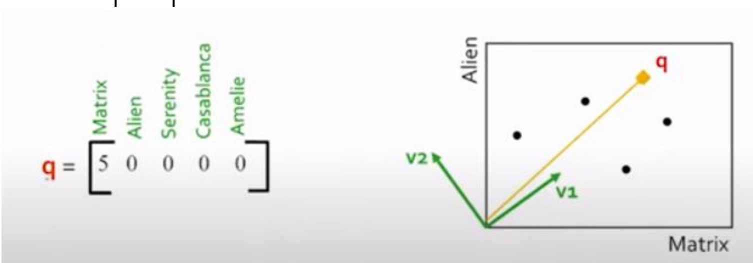
```
[[1 1]
 [0 0]
 [0 0]]
[[1. 0. 0.]
 [0. 1. 0.]
 [0. 0. 1.]]
[1.41421356 0.        ]
[[ 0.70710678  0.70710678]
 [-0.70710678  0.70710678]]
```

ตัวอย่าง 2.5. [7] การประยุกต์ใช้ SVD กับปัญหาที่มาจากข้อมูล ตัวอย่างนี้เป็น การเก็บข้อมูลของภาพยนตร์ 5 เรื่อง ซึ่งเป็นภาพยนตร์แนววิทยาศาสตร์ และแนวรักโรแมนติก

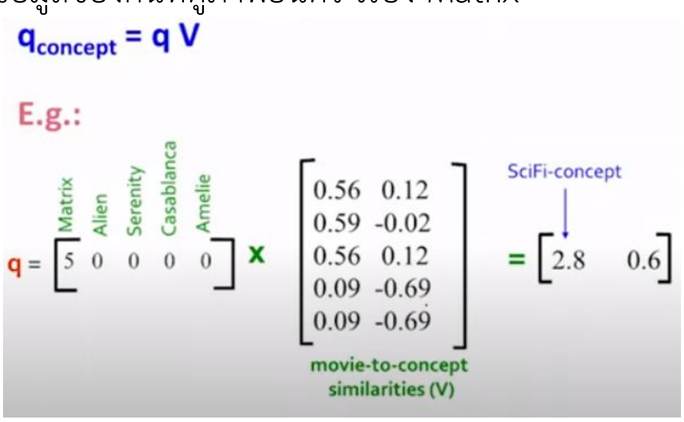
เป้าหมาย คือ หาคนที่ชอบดูภาพยนตร์ เรื่อง Matrix



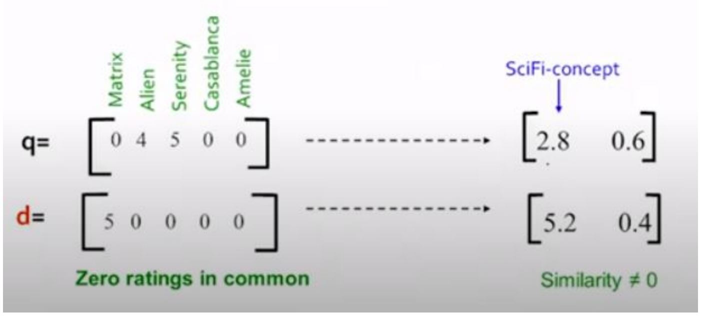
ในการที่จะคาดการณ์จากข้อมูลที่มีว่า แต่ละคน จะชอบภาพยนตร์ เรื่อง Matrix หรือไม่ จะเริ่มต้นจากการทำ concept space



ลองใช้กับข้อมูลของคนที่ดูภาพยนตร์ เรื่อง Matrix



เปรียบเทียบ input 2 แบบ โดยคนนึงเคยดู แต่อีกคนไม่เคยดู ภาพยนตร์ เรื่อง Matrix แต่ได้ผลลัพธ์ไปในทางเดียวกัน คือ ชอบดูภาพยนตร์แนว Scifi ทั้งคู่ จึงสามารถตอบได้ว่า คนนี้จะชอบดูภาพยนตร์เรื่อง Matrix



แบบฝึกหัด

1. กำหนดเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์ V D และ U^t ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็น Singular value decompostion หรือไม่

$$V = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{0.2} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{0.8} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{0.8} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{0.2} \end{bmatrix}$$

2. กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

จงใช้ singular value decomposition ในการแยกเมทริกซ์ A ให้อยู่ในรูป $A = VDU^t$ พร้อมทั้งแสดงวิธีการตรวจคำตอบ

3. กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

จงใช้ singular value decomposition ในการแยกเมทริกซ์ A ให้อยู่ในรูป $A = VDU^t$ พร้อมทั้งแสดงวิธีการตรวจคำตอบ

หนังสืออ้างอิง

[1] Singular value decomposition. https://en.wikipedia.org.

[2] https://www.cis.upenn.edu/ cis515/cis515-11-sl4.pdf, January 2021.

[3] vector space. https://mathworld.wolfram.com, January 2021.

[4] J. Brownlee. How to calculate the svd from scratch with python. https://machinelearningmastery.com/singular-value-decomposition-for-machine-learning/.

[5] M. P. Deisenroth, A. A. Faisal, and C. S. Ong. *Mathematics for Machine Learning*. Cambridge University Press, England, 2019.

[6] J. Gallier and J. Quaintance. *Linear Algebra for Computer Vision, Robotics, and Machine Learning*. University of Pennsylvania, USA, 2019.

[7] Leskovec, Rajaraman, and Ullman. Lecture 50 — svd example and conclusion | stanford university.

[8] C. D. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM, USA, 2000.

[9] W.T.MathKKU. 321211 Linear Algebra I. https://home.kku.ac.th/wattou/teaching/321211/101.pdf.