ระบบสมการเชิงเส้น (Linear System of Equations)

Araya Wiwatwanich (13 Aug 2022)

1. บทนำ

ระบบสมการเชิงเส้น (Linear system of Equations) ของตัวแปร $x_1, x_2, \dots, x_n$ คือระบบสมการที่อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

โดยที่ a_{ij}, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ เป็นค่าคงที่ เรียกว่า สัมประสิทธิ์ (Coefficients) ส่วน b_i , $i = 1, 2, \dots, n$, เป็นค่าคงที่ทางขวามือของระบบสมการ

ตัวอย่างที่ 1 สวนสัตว์แห่งหนึ่ง ขายตั๋วสำหรับเด็กใบละ 150 บาท ขายตั๋วสำหรับผู้ใหญ่ใบละ 200 บาท สมมติวันนี้ขายตั๋วไปได้ 41 ใบ ได้เงินรวม 7,350 บาท จงหาว่าสวนสัตว์ขายตั๋วสำหรับเด็กและตั๋วสำหรับผู้ใหญ่ไปอย่างละกี่ใบ

<u>Sol^n</u> ให้ x_1 และ x_2 แทนจำนวนตั๋วสำหรับเด็กและตั๋วสำหรับผู้ใหญ่ ตามลำดับ

เราแปลงปัญหามาสู่ระบบสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 41 \\ 150x_1 + 200x_2 &= 7350 \end{aligned} \qquad (A1)$$

โดยวิธีทางพีชคณิต เราอาจกำจัดตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งออกก่อน โดยการทำสัมประสิทธิ์ ให้เท่ากัน เช่นจะกำจัด x_2 โดยคูณสมการที่ 1 ด้วย 200

$$200x_1 + 200x_2 = 8200 \qquad (1)$$

$$150x_1 + 200x_2 = 7350 \qquad (2)$$

จากนั้นนำสมการทรา 1 ลบด้วยสมการที่ 2 จะเหลือสมการเดียวคือ

$$50x_1 = 850$$

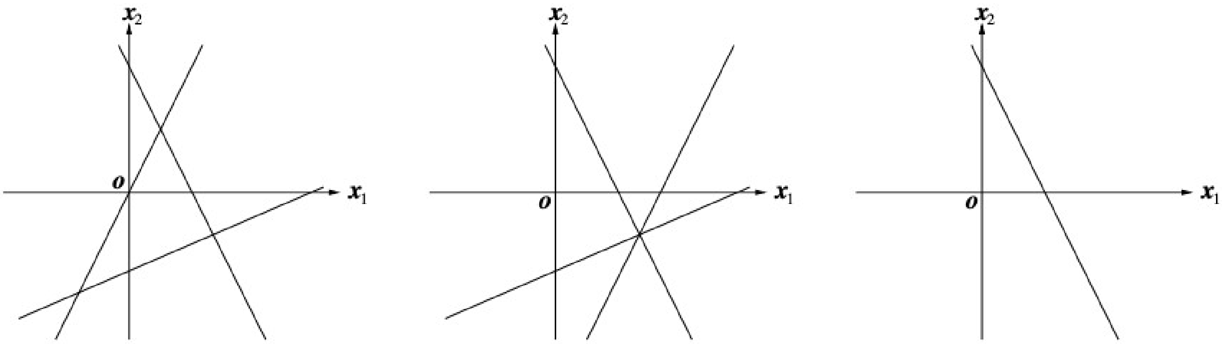
ซึ่งทำให้ได้ทันทีว่า $x_1 = 17$ และเมื่อแทนค่า x_1 กลับไปยังสมการใดสมการหนึ่งด้านบน ก็จะได้ $x_2 = 24$ นั่นคือ สวนสัตว์ขายตั๋วสำหรับเด็กไป 17 ใบ และตั๋วสำหรับผู้ใหญ่ไป 24 ใบ

ระบบสมการเชิงเส้น 2 สมการ 2 ตัวแปรเช่นในตัวอย่างที่ 1 นี้ อาจอธิบายโดยกราฟได้ ให้ค่าทางแกน $\mathbf{x}$ เป็นของ $\mathbf{x_1}$ และค่าทางแกน $\mathbf{y}$ เป็นของ $\mathbf{x_2}$ กราฟของทั้ง 2 สมการจะเป็นเส้นตรงดังนี้

ซึ่งจะเห็นว่า **คำตอบของระบบสมการ (solution)** จะเป็นจุดตัดระหว่างกราฟทั้งสอง

การมีคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นจะแบ่งเป็น 3 กรณี คือ ไม่มีคำตอบ (no solution) มีคำตอบเดียว (unique solution) และมีคำตอบมากมายไม่จำกัด (infinitely many solutions) ดังตัวอย่าง

$$(a)\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & = & 3 \\ 2x_1 & -x_2 & = & 0 \\ x_1 & -2x_2 & = & 4 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & = & 3 \\ 2x_1 & -x_2 & = & 5 \\ x_1 & -2x_2 & = & 4 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & = & 3 \\ 4x_1 & +2x_2 & = & 6 \\ 6x_1 & +3x_2 & = & 9 \end{cases}$$



ในการประยุกต์ในงานด้านวิทยาศาสตร์หรือวิศวกรรมนั้น จำนวนตัวแปรและจำนวนสมการจะมากกว่านี้มาก ดังนั้นจึงไม่สามารถอธิบายด้วยกราฟได้ แต่เรายังสามารถขยายแนวคิดของวิธีการทางพีชคณิตมาใช้ได้ ในบทนี้เราจะพิจารณาการแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การดำเนินการตามแถว ซึ่งจะได้รากของระบบสมการที่แม่นตรง ไม่ใช่การประมาณ จึงเรียกว่าเป็น Direct Method

2. พีชคณิตของเมทริกซ์

จากระบบสมการ m สมการ n ตัวแปร ในรูปทั่วไปดังระบบสมการ (1) เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการของเวกเตอร์และเมทริกซ์ได้เป็น

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

โดยที่ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ *และ* $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

เมทริกซ์ $\mathbf{A}$ เรียกว่า เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ (Coefficient matrix)
เวกเตอร์ $\mathbf{b}$ เรียกว่า เวกเตอร์ค่าคงที่ทางขวามือของสมการ
คำตอบของสมการก็คือเวกเตอร์ $\mathbf{x}$ ที่ทำให้ทุกสมการในระบบนี้เป็นจริง

เมทริกซ์ที่ประกอบด้วย เมทริกซ์ $\mathbf{A}$ และมีหลักสุดท้ายเป็น เวกเตอร์ $\mathbf{b}$ เรียกว่า **เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented matrix)**

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

ตัวอย่างที่ 2 จากระบบสมการ (a), (b), (c) ในหน้า 2 จงเขียนในรูปสมการของเวกเตอร์และเมทริกซ์

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

และจงเขียนเมทริกซ์แต่งเติม

ในหัวข้อนี้จะขอทบทวนสมบัติพื้นฐานต่าง ๆ ของเมทริกซ์และการดำเนินการบนเมทริกซ์ เพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นต่อไป รวมถึงดีเทอร์มิแนนต์และเมทริกซ์ผกผันด้วย

นิยามการเท่ากัน การบวก และการคูณด้วยจำนวนจริง

ให้ $\mathbf{A} = [\mathrm{a_{ij}}]_{\mathrm{m\times n}}$ และ $\mathbf{B} = [\mathrm{b_{ij}}]_{\mathrm{m\times n}}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $\mathrm{m \times n}$ และ c เป็นจำนวนจริง

1. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ก็ต่อเมื่อ $\mathrm{a_{ij}} = \mathrm{b_{ij}}$ สำหรับ $\mathrm{i} = 1, 2, \dots, \mathrm{m}, \ \ \mathrm{j} = 1, 2, \dots, \mathrm{n}$
2. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [\mathrm{a_{ij}} + \mathrm{b_{ij}}]_{\mathrm{m\times n}}$
3. $\mathrm{c}\mathbf{A} = [\mathrm{ca_{ij}}]_{\mathrm{m\times n}}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ และ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -9 \end{bmatrix}$ จงคำนวณ $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ และ **3 $\mathbf{A}$ - $\mathbf{B}$**

สมบัติภายใต้การบวกและการคูณด้วยจำนวนจริง

ให้ $\mathbf{A} = [\mathrm{a_{ij}}]_{\mathrm{m\times n}}$, $\mathbf{B} = [\mathrm{b_{ij}}]_{\mathrm{m\times n}}$, และ $\mathbf{C} = [\mathrm{c_{ij}}]_{\mathrm{m\times n}}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $\mathrm{m \times n}$

$\mathbf{0} = [0]_{\mathrm{m\times n}}$ เป็นเมทริกซ์ศูนย์ และ c, d เป็นจำนวนจริง

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
3. $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$
4. $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{A} = \mathbf{0}$
5. $c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$
6. $(c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$
7. $(cd)\mathbf{A} = c(d\mathbf{A})$
8. $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$ และ $0\mathbf{A} = \mathbf{0}$

การคูณเมทริกซ์

ให้ $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n\times p}$ จะได้ผลคูณ $\mathbf{AB} = \mathbf{C} = [c_{ij}]_{m\times p}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times p$ โดยที่

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

กล่าวคือ c_{ij} ได้มาจากการนำสมาชิกแถวที่ i ของ $\mathbf{A}$ คูณกับสมาชิกในหลักที่ j ของ $\mathbf{B}$ จนครบทุกคู่ แล้วนำมาบวกกัน

ตัวอย่างที่ 4 กำหนด $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ และ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ จงคำนวณ $\mathbf{AB}$ และ $\mathbf{BA}$

ข้อสังเกต :

1. ผลคูณของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ และเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ จะหาได้ ก็ต่อเมื่อจำนวนหลักของ $\mathbf{A}$ เท่ากับจำนวนแถวของ $\mathbf{B}$
2. เมทริกซ์ที่เป็นผลลัพธ์จะมีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนของ $\mathbf{A}$ และจำนวนหลักเท่ากับจำนวนหลักของ $\mathbf{B}$
3. โดยปกติแล้ว $\mathbf{AB}$ ไม่เท่ากับ $\mathbf{BA}$

เมทริกซ์แบบต่าง ๆ

เมทริกซ์ศูนย์ (Zero Matrix or Null Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีสมาขิกทุกตัวเป็นศูนย์ เขียนแทนด้วย $\mathbf{o}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$

เมตริกซ์จัตุรัส (Square Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก

เมทริกซ์ทแยงมุม (Diagonal Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกบนแนวทแยงมุมหลักเป็นจำนวนจริงใด ๆ และสมาชิกนอกแนวทแยงมุมหลักทุกตัวเป็นศูนย์

เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกบนแนวทแยงมุมหลักเป็น 1 ทั้งหมด เขียนแทนด้วย I_{n}

เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper Triangular Matrix) คือ เมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกใต้แนวทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด

เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (Lower Triangular Matrix) คือ เมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกเหนือแนวทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด

เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transpose of a Matrix) ถ้า $\mathbf{A}$ เมทริกซ์มิติ $m \times n$ แล้วเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ $\mathbf{A}$ เขียนแทนด้วย $\mathbf{A}^{\boldsymbol{T}}$ คือ เมทริกซ์ซึ่งได้จากการนำแถวของ $\mathbf{A}$ มาสร้างให้เป็นหลักของ $\mathbf{A}^{\boldsymbol{T}}$

เมทริกซ์สมมาตร (Symmetric Matrix) คือ เมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกแถวที่ i หลักที่ j กับสมาชิกแถวที่ j หลักที่ i เท่ากัน กล่าวคือ ถ้า $\mathbf{A}$ เมทริกซ์สมมาตร จะได้ว่า $\mathbf{A}^{\boldsymbol{T}} = \mathbf{A}$

ทฤษฎีบท 5 ถ้า k เป็นสเกลาร์ใด ๆ และ $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติแล้วจะได้ว่า

1. $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$
3. $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$
4. $(k\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = k\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐาน (Elementary Row Operation)

O1: สลับแถวที่ p และแถวที่ q เขียนแทนด้วย $R_p \leftrightarrow R_q$

O2: นำค่าคงที่ α คูณแถวที่ p เขียนแทนด้วย αR_p

O3: นำค่าคงที่ α คูณแถวที่ q แล้วนำไปบวกเข้าในแถวที่ p เขียนแทนด้วย $\alpha R_q + R_p$

บทนิยาม 6 เมทริกซ์ $\mathbf{A}$ **สมมูลตามแถว** กับเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ ก็ต่อเมื่อ $\mathbf{B}$ เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานบน $\mathbf{A}$ เขียนแทนด้วย $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$

ทฤษฎีบท 7 ถ้าระบบสมการเชิงเส้น 2 ระบบมีเมทริกซ์แต่งเติมซึ่งสมมูลตามแถวกัน แล้วระบบเชิงเส้นทั้งสองระบบมีเซตผลเฉลยเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 8 จากตัวอย่างที่ 1 เขียนให้อยู่เมทริกซ์แต่งเติม ได้เป็น

$$\mathbf{A}_1 = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 41 \\ 150 & 200 & 7350 \end{array}\right]$$

การคูณสมการที่ 1 ด้วย 200 แล้วลบด้วยสมการที่ 2 ก็คือการดำเนินการ O3 กับเมทริกซ์ $\mathbf{A_1}$ ได้เป็น $\mathbf{A_2}$

$$\mathbf{A_1} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 41 \\ 150 & 200 & 7350 \end{array}\right] \; 200R_1 + R_2 \quad \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 41 \\ -50 & 0 & -850 \end{array}\right] = \mathbf{A_2}$$

*** สมาชิกในแถวที่ 2 หลักที่ 2 ของ เป็น 0 แสดงถึงว่า ตัวแปร $\mathrm{x_2}$ ได้ถูกกำจัดไปแล้ว ***

เมื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติม $\mathbf{A_2}$ ให้กลับไปอยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} \mathrm{x_1} + \mathrm{x_2} &= 41 \\ 50\mathrm{x_1} \qquad &= 850 \end{aligned} \qquad \text{(A2)}$$

จึงได้ว่า ระบบสมการ (A1) และ (A2) มีผลเฉลยเดียวกัน แต่ระบบสมการ (A2) ลดรูปมาแล้วจึงแก้ง่ายกว่า

บทนิยาม 9 เมทริกซ์ $\mathbf{A}$ จะเป็น **เมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถว (row-echelon matrix)** ก็ต่อเมื่อ

1. สมาชิกตัวแรกที่ไม่เป็นศูนย์ของแต่ละแถว เรียกว่า ตัวนำ (leading entry) ตัวนำในแถวล่างจะต้องเยื้องมาทางขวาของตัวนำในแถวบน
2. แถวที่สมาชิกทุกตัวเป็น 0 จะต้องอยู่แถวล่างสุดของเมทริกซ์

ทฤษฎีบท 10 ทุก ๆ เมทริกซ์สามารถลดรูปโดยใช้การดำเนินการตามแถวให้เป็นเมทริกซ์ในรูปเมทริกซ์ขั้นบันไดได้

หมายเหตุ โดยทั่วไป การทำให้เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถวจะใช้การดำเนินการ O3 กับแถวหนึ่ง เพื่อให้สมาชิกในแถวอื่นบนหลักเดียวกันเป็น 0 ตัวนำที่อยู่บนแถวนั้นเรียกว่า pivot position และหลักของตัวนำเรียกว่า pivot column

บทนิยาม 11 เมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถว $\mathbf{A}$ ที่มีสมบัติต่อไปนี้เพิ่มเติมจะเรียกว่าเป็น **เมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถวลดรูป (reduced row-echelon matrix)**

1. ตัวนำของทุกแถว (ถ้ามี) ต้องมีค่าเท่ากับ 1
2. สมาชิกตัวอื่นในหลักของตัวนำ จะต้องมีค่าเป็น 0

ทฤษฎีบท 12 ทุก ๆ เมทริกซ์สามารถลดรูปโดยใช้การดำเนินการตามแถวให้เป็นเมทริกซ์ในรูปเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถวลดรูปได้**แบบเดียวเท่านั้น**

ตัวอย่างที่ 13 ตัวอย่างเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถว

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถวลดรูป

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 14 กำหนดเมทริกซ์ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$,

จงลดรูปเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ขั้นบันได และ เมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูป

3. ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant)

บทนิยาม 15 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัส $\mathbf{A} = \left[\mathrm{a_{ij}}\right]_{\mathrm{n\times n}}$ เขียนแทนด้วย $\det(\mathbf{A})$ หรือ | $\mathbf{A}$ | กำหนดโดย

กรณีที่ $n = 1$ เราให้ $\det(\mathbf{A}) = a_{11}$

กรณีที่ $n > 1$ จะได้ว่า

$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$ สำหรับแถว *i* ใด ๆ ที่ตรึงไว้

หรือ $\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$ สำหรับหลัก *j* ใด ๆ ที่ตรึงไว้

เมื่อ M_{ij} เป็นดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ *i* และ หลักที่ *j* ของ $\mathbf{A}$

ตัวอย่างที่ 16 จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

จากตัวอย่างที่แล้วจะเห็นว่าการคำนวณดีเทอร์มิแนนต์จะเป็นการกระทำแบบวนซ้ำ ยิ่งเมทริกซ์มีขนาดใหญ่ขึ้นการคำนวณก็ยิ่งซับซ้อนขึ้น อย่างไรก็ดี ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยให้การหาดีเทอร์มิแนนต์ง่ายยิ่งขึ้น

ทฤษฎีบท 17 ให้ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ จะได้ว่า

1. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$
2. $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$
3. ถ้าสองแถวใด ๆ ของ $\mathbf{A}$ เหมือนกัน แล้ว $\det(\mathbf{A}) = 0$
4. ถ้า $\mathbf{B}$ เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการดำเนินการตามแถว $R_p \leftrightarrow R_q$ ($p \neq q$) กับ $\mathbf{A}$ แล้ว $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$
5. ถ้า $\mathbf{B}$ เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการดำเนินการตามแถว αR_p กับ $\mathbf{A}$ แล้ว $\det(\mathbf{B}) = \alpha \det(\mathbf{A})$
6. ถ้า $\mathbf{B}$ เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการดำเนินการตามแถว $\alpha R_q + R_p$ ($p \neq q$) กับ $\mathbf{A}$ แล้ว $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$

ทฤษฎีบท 18 ให้ $\mathbf{A}$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน หรือสามเหลี่ยมล่าง ขนาด $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ จะได้ว่า

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

จากทฤษฎีบทข้างต้น ทำให้เราสามารถหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัส $\mathbf{A}$ ได้โดยการดำเนินการตามแถวลดรูปเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ จนได้เมทริกซ์ขั้นบันได ซึ่งมีลักษณะเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน และคำนวณดีเทอร์มิแนนต์จากผลคูณของสมาชิกบนแนวทแยงมุมหลัก

ตัวอย่างที่ 19 จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

4. เมทริกซ์ผกผัน (Inverse Matrix)

บทนิยาม 20 ให้ $\mathbf{A}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ ถ้ามีเมทริกซ์ $\mathbf{C}$ ซึ่ง

$$\mathbf{AC} = \mathbf{I}_{\mathrm{n}} = \mathbf{CA}$$

เราเรียก $\mathbf{C}$ ว่า **เมทริกซ์ผกผัน (inverse matrix) ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$**
และเขียนแทนผกผันของ $\mathbf{A}$ ด้วย $\mathbf{A}^{-1}$

หมายเหตุ สังเกตว่า ถ้า $\mathbf{B}$ เป็นเมทริกซ์ผกผันอีกตัวหนึ่งของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ จะได้ว่า

$$\mathbf{B} = \mathbf{BI}_{\mathrm{n}} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = (\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{I}_{\mathrm{n}}\mathbf{C} = \mathbf{C}$$

ดังนั้น ถ้า $\mathbf{A}$ มีเมทริกซ์ผกผันแล้วจะมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

บทนิยาม 21 เราเรียกเมทริกซ์ที่ไม่มีเมทริกซ์ผกผันว่า **เมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix)**
และเรียกเมทริกซ์ที่มีเมทริกซ์ผกผันว่า **เมทริกซ์ไม่เอกฐาน (nonsingular matrix)**

ทฤษฎีบท 22 กำหนด $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติเดียวกัน และมีเมทริกซ์ผกผัน

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
3. $(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{T})^{-1}$
4. $\mathbf{A}^{\mathrm{n}}$ มีเมทริกซ์ผกผัน และ $(\mathbf{A}^{\mathrm{n}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{n}}$ เมื่อ n = 0, 1, 2, …
5. $k\mathbf{A}$ มีเมทริกซ์ผกผัน และ $(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$ สำหรับจำนวนจริง $k \neq 0$

ทฤษฎีบท 23 ให้ $\mathbf{A}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ และ $\mathbf{0} = [0]_{\mathrm{n}\times 1}$ เป็นเวกเตอร์ศูนย์ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. เมทริกซ์ $\mathbf{A}$ หาเมทริกซ์ผกผันได้
2. เมทริกซ์ $\mathbf{A}$ สมมูลตามแถวกับเมทริกซ์เอกลักษณ์ $\mathbf{I}_{\mathrm{n}}$
3. เมทริกซ์ $\mathbf{A}$ มี pivot position n ตำแหน่ง
4. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
5. สมการเมทริกซ์ $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ มีผลเฉลยชัด (trivial solution) เพียงผลเฉลยเดียว
6. สมการเมทริกซ์ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ มีผลเฉลยเดียวสำหรับแต่ละเวกเตอร์ $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$

หมายเหตุ จากข้อ 4 ทำให้สามารถแสดงได้ว่า $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}$

จากทฤษฎีบทข้างต้น เราสามารถหาเมทริกซ์ผกผันของ $\mathbf{A}$ ได้ (ถ้ามี) โดยการดำเนินการตามแถวกับเมทริกซ์แต่งเติม $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I_n}]$ จนกระทั่งได้เมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูป $[\mathbf{I_n} \mid \mathbf{B}]$ ก็จะได้ทันทีว่า $\mathbf{A^{-1}} = \mathbf{B}$

ดังนั้นสมการเมทริกซ์ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ก็จะมีผลเฉลยเป็น $\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}b} = \mathbf{Bb}$

ตัวอย่างที่ 24 จงหาเมทริกซ์ผกผันของ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 25 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 \qquad + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

5. การกำจัดแบบเกาส์ (Gauss Elimination)

การกำจัดแบบเกาส์ เป็นการแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการลดรูปเมทริกซ์แต่งเติม ให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน จากนั้นใช้วิธีแทนค่ากลับจากล่างขึ้นบน (Backward substitution) ดังขั้นตอนวิธีต่อไปนี้

Algorithm – Gauss Elimination

Input : Given Matrix a[1 : n, 1: n+1]

Output : x[1 : n]

Begin

for k=1 to n-1 #สำหรับตำแหน่ง pivot แถว k หลัก k

  for i=k+1 to n #สำหรับทุกแถว i ที่อยู่ล่างแถว k

    u = a_{ik}/a_{kk} #เรียก u ว่าตัวคูณ multiplier

    for j=k to n+1 #สำหรับทุกหลัก j >= k ในแถว i

      $a_{ij} = a_{ij} - u*a_{kj}$ #การดำเนินการ O3 : $R_i + (-u)R_k$

    next j

  next i

next k

$x_n = a_{n,n+1}/a_{nn}$ #เริ่มแทนค่ากลับจากแถวที่ n

for i=n-1 to 1 step -1

  sum=0

  for j=i+1 to n

    sum = sum + a_{ij} *x_j

  next j

  x_i = ($a_{i,n+1}$ - sum)/a_{ii}

next i

end

นอกจากวิธีกำจัดแบบเกาส์แล้ว ยังมีวิธีอื่น ๆ ที่มีรากฐานมาจากการดำเนินการตามแถว เช่น LU decomposition, Cholesky, Crout factorization เป็นต้น ซึ่งเหมาะกับเมทริกซ์ที่มีสมบัติต่างกัน รวมถึงยังมีเทคนิคต่าง ๆ ที่ทำให้การคำนวณเร็วขึ้นหรือลดความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ (round-off error) ซึ่งผู้เรียนสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ในวิชา Numerical Analysis

ตัวอย่างที่ 25 จงแก้ระบบสมการ

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1, \\
3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -3, \\
-x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4.
\end{array}$$