2 การแยกค่าเอกฐาน (Singular Value Decomposition)

2.1 Unitary และ Orthogonal Matrices

นิยามของ Unitary และ Orthogonal Matrices กำหนดดังในกรอบสี่เหลี่ยม

เมทริกซ์ $U \in M_n(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์**ยูนิเทรี** (unitary) เมื่อ $U^*U = UU^* = I$ หรือกล่าวได้ว่า หลัก (หรือ แถว) ของเมทริกซ์ U ประกอบด้วย orthomornal basis สำหรับ $\mathbb{C}^n$ เมทริกซ์ $Q \in M_n(\mathbb{R})$ เป็นเมทริกซ์**ตั้งฉาก** (orthogonal) ถ้า $QQ^t = Q^tQ = I$ หรือกล่าวได้ว่า หลัก (หรือ แถว) ของเมทริกซ์ Q ประกอบด้วย orthomornal basis สำหรับ $\mathbb{R}^n$

เมื่อ orthonomal basis ของ inner product space V ที่มีสมาชิกเป็นเวกเตอร์ที่เป็น orthonormal หรือ กล่าวได้ว่า เป็นเวกเตอร์หน่วยและตั้งฉาก (orthogonal) กัน

Unitary และ Orthogonal Matrices มีสมบัติที่ดีบางอย่าง สิ่งแรก คือ ถ้าเมทริกซ์มีสมบัติเป็น Unitary หรือ Orthogonal จะหาเมทริกซ์ผกผัน (inverse matrix) ง่าย นั่นคือ ถ้า U เป็น unitary จะได้ $U^{-1} = U^*$ โดยสามารถเห็นได้ชัดเจน กำหนดให้ $U_{n\times n} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u_n} \end{bmatrix}$ โดยที่ $\mathbf{u}_i$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$ เป็น orthonormal vectors ก็ต่อเมื่อ

$$[U^*U]_{ij} = u_i^* u_j = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad i = j \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad i \neq j \end{cases} \iff U^*U = I \iff U^{-1} = U^*$$

ข้อสังเกตุ เนื่องจาก $U^*U = I \iff UU^* = I$ หลักของเมทริกซ์ U เป็น orthonormal ก็ต่อเมื่อ แถวของ U เป็น orthonormal ดังนั้นในนิยามของยูนิเทรี และ orthonomal matrices สามารถเขียนได้ทั้ง หลักหรือแถวเป็น orthonormal

ตัวอย่าง 2.1. พิจารณาเมทริกซ์ต่อไปนี้ ว่าเป็น ยูนิเทรี หรือ orhogonal เมทริกซ์ หรือไม่

1. เมทริกซ์เอกลักษณ์ I
2. $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$
3. $U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$

วิธีทำ

1. เมทริกซ์เอกลักษณ์ I ถ้ามองเป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ จะได้

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 & \cdots & \mathbf{i}_n \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่า $\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l = 0$ โดยที่ $k \neq l$ และ $|\mathbf{i}_k| = 1$ เมื่อ $k = 1, 2, \ldots, n$
ดังนั้น I เป็น orthogonal matrix

2.

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} \tag{16}$$

เวกเตอร์

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (0)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

ดังนั้น $\mathbf{q}_1$ ตั้งฉาก $\mathbf{q}_2$
ในทำนองเดียวกัน จะได้ $\mathbf{q}_1$ ตั้งฉาก $\mathbf{q}_3$ และ $\mathbf{q}_2$ ตั้งฉาก $\mathbf{q}_3$

และ

$$|\mathbf{q}_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (0)^2} = 1$$

ในทำนองเดียวกัน $|\mathbf{q}_2| = |\mathbf{q}_3| = 1$
ดังนั้น จะได้ว่าเมทริกซ์ Q เป็น orthogonal matrix

หรือ อาจจะแสดงได้โดยการนำเมทริกซ์ Q และ Q^t มาคูณกัน ก็จะได้

$$QQ^t = Q^tQ = I$$

3. ในการแสดงว่าเมทริกซ์ U เป็น unitary matrix สามารถทำได้โดยการแสดงว่า

$$UU^* = U^*U = I$$

$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$

$U^* = \left(\overline{U}\right)^t$ ดังนั้น $U^* = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-i & 1-i \\ -1-i & 1+i \end{bmatrix}$

จะได้

$$\begin{aligned} UU^* &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-i & 1-i \\ -1-i & 1+i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (1+i)(1-i)+(-1+i)(-1-i) & (1+i)(1-i)+(-1+i)(1+i) \\ (1+i)(1-i)+(1-i)(-1-i) & (1+i)(1-i)+(1-i)(1+i) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $U^*U = I$ จึงสามารถสรุปได้ว่า เมทริกซ์ U เป็น unitary matrix

2.2 ค่าไอเก้นและเวกเตอร์ไอเก้น

จากนิยาม 1.8 สำหรับเมทริกซ์จัตุรัสใด $A \in M_n(\mathbb{C})$ จำนวนเชิงซ้อน $\lambda \in \mathbb{C}$ เป็นค่าไอเก้น (eigenvalue) ของเมทริกซ์ A ถ้ามีเวกเตอร์ $u \neq 0$ และ $u \in \mathbb{C}^n$ ซึ่ง

$$Au = \lambda u$$

ถ้า λ เป็นค่าไอเก้นของเมทริกซ์ A แล้วเวกเตอร์ที่ไม่เป็นศูนย์ $u \in \mathbb{C}^n$ ซึ่งสอดคล้องกับ $Au = \lambda u$ จะเรียกว่า เวกเตอร์ไอเก้น (eigenvector) ของเมทริกซ์ A ที่สัมพันธ์กับค่าไอเก้น λ

ตัวอย่าง 2.2. กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

1. จงหาค่าไอเก้น และเวกเตอร์ไอเก้นที่สัมพันธ์กัน
2. จงหา othogonal matrix ของ A

วิธีทำ

1. จาก $|A - \lambda I|$ จะได้ $\lambda = 1, 3$ โดยกำหนดให้ $\lambda_1 = 1$ และ $\lambda_2 = 3$
   สำหรับ $\lambda_1 = 1$ หา eigenvector v_1 จาก $A\mathsf{v}_1 = \lambda_1 \mathsf{v}_1$ หรือ $(A - \lambda_1 I)\mathsf{v}_1 = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} v_{11} + v_{12} \\ v_{11} + v_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

   ดังนั้นจะได้สมการ 2 สมการที่ไม่อิสระต่อกัน (linearly dependence) จาก $v_{11} + v_{12} = 0$ ให้ $v_{11} = 1$ จะได้ $v_{12} = -1$ ดังนั้นจะได้

$$\mathsf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

สำหรับ $\lambda_2 = 3$ หา eigenvector $\mathbf{v}_2$ จาก $A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$ หรือ $(A - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2-\lambda_2 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -v_{21} + v_{22} \\ v_{21} - v_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้สมการ 2 สมการที่ไม่อิสระต่อกัน (linearly dependence) จาก $-v_{21} + v_{22} = 0$ ให้ $v_{21} = 1$ จะได้ $v_{22} = 1$ ดังนั้นจะได้

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. ให้ Q แทน orthogonal matrix ของเมทริกซ์ A
   จาก eigenvectors โดยที่ $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = \sqrt{2}$ ดังนั้น จะได้

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

   โดยสามารถตรวจสอบความถูกต้องได้โดย

   (1) $\mathbf{v}_1$ และ $\mathbf{v}_2$ เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากกัน โดยสามารถตรวจเช็คได้จาก $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$

   (2) $QQ^t = Q^tQ = I$

ทฤษฎีบท 2.3. (Singular Value Decomposition) [6] สำหรับเมทริกซ์ A ที่มีขนาด $m \times n$ จะมี U และ V เป็นเมทริกซ์ตั้งฉาก (orthogonal matrix) โดยที่เมทริกซ์ U มีขนาด $n \times n$ เมทริกซ์ V มีขนาด $m \times m$ และ D เป็นเมทริกซ์แนวทะแยง (diagonal matrix) ที่ทำให้ $A = VDU^T$ โดยที่ D อยู่ในรูป

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \cdots & \\ & \sigma_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \cdots & \sigma_n \\ 0 & \vdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{ หรือ } D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \cdots & & 0 & \cdots & 0 \\ & \sigma_2 & \cdots & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ & & \cdots & \sigma_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ เป็น ค่าเอกพจน์ (singular values) ของ f นั่นคือ รากที่สองของค่าไอเก้นที่ไม่เป็นศูนย์ของ AA^t และ A^tA และ $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \cdots = \sigma_p = 0$ เมื่อ $p = \min\{m, n\}$ หลัก (column) ของเมทริกซ์ U เป็นเวกเตอร์ไอเก้นของ A^tA และ หลัก (column) ของเมทริกซ์ V เป็นเวกเตอร์ไอเก้นของ AA^t

พิสูจน์. เนื่องจาก A^tA เป็น positive semidefinite matrix จะมีเมทริกซ์ U ที่เป็น orthogonal matrix ที่ทำให้

$$A^tA = U\Sigma^2U^t \tag{17}$$

โดยที่เมทริกซ์ $D = \mathtt{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0]$
โดยที่ $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2$ เป็นค่าไอเก้นที่ไม่เป็นศูนย์ของเมทริกซ์ A^tA
r เป็นแรงค์ (rank) ของเมทริกซ์ A สังเกตได้ว่า $r = \min\{m, n\}$
AU เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ จะได้

$$U^tA^tAU = (AU)^tAU = \Sigma^2$$

ให้ $f_i \in \mathbb{R}^m$ เป็นหลักที่ j ของเมทริกซ์ AU สำหรับ $j = 1, 2, \ldots, n$ จะได้

$$< f_i, f_j >= \sigma_i^2\delta_{ij} \quad \text{เมื่อ} \quad 1 \leq i, j \leq r$$

และ

$$f_j = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad r + 1 \leq j \leq n$$

ถ้าเรากำหนดค่า $[v_1, v_2, \ldots, v_r]$ โดย

$$v_j = \sigma_j^{-1} f_j \quad \text{เมื่อ} \quad 1 \leq j \leq r$$

แล้ว เราจะได้

$$< v_i, v_j >= \delta_{ij} \quad \text{เมื่อ} \quad 1 \leq i, j \leq r$$

เนื่องจาก $f_i = \sigma_j v_j$ สำหรับ $j = 1, 2, \ldots, r$ จะได้

$$< v_i, f_j >= \sigma_j < v_i, v_j >= \sigma_j \delta_{ij} \quad \text{เมื่อ} \quad 1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq r$$

และเนื่องจาก $f_j = 0$ สำหรับ $j = r+1, r+2, \ldots, n$ จะได้

$$< v_i, f_j >= 0 \quad \text{เมื่อ} \quad 1 \leq i \leq m,\, r+1 \leq j \leq n$$

ถ้าแต่ละหลักของเมทริกซ์ V ประกอบด้วย $v_1, v_2, \ldots, v_m$ แล้วเมทริกซ์ V จะเป็น เมทริกซ์ขนาด $m \times m$ และเป็นเมทริกซ์ตั้งฉาก

ถ้า $m \geq n$ จะได้

$$D = \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0_{m-n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \cdots & \\ & \sigma_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \cdots & \sigma_n \\ 0 & \vdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

ถ้า $n \geq m$ จะได้

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \cdots & & 0 & \cdots & 0 \\ & \sigma_2 & \cdots & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ & & \cdots & \sigma_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น จึงสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$V^t A U = D$$

เมื่อจัดรูป จะได้ $A = V D U^t$ ตามที่ต้องการ

จาก สมการ

$$A = VDU^t \tag{18}$$

คูณสมการ (18) ด้วย A^t ทั้งทางซ้ายและทางขวา จะได้

$$A^tA = UD^tDU^t = U\mathtt{diag}[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^n, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-r}]U^t$$

และ

$$AA^t = VD^tDV^t = V\mathtt{diag}[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^n, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m-r}]V^t$$

ซึ่งแสดงได้ว่าทั้ง A^tA และ AA^t มีค่าไอเก้นที่ไม่เป็นศูนย์เหมือนกัน สมาชิกในหลักของเมทริกซ์ U คือ เวกเตอร์ไอเก้นของเมทริกซ์ A^tA และ สมาชิกในหลักของเมทริกซ์ V คือ เวกเตอร์ไอเก้นของเมทริกซ์ AA^t $\square$

ตัวอย่าง 2.4. กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

จงหา singular value decomposition

วิธีทำ หาเมทริกซ์ U V และ D ที่ทำให้ได้ $A = VDU^t$

V ประกอบด้วยเวกเตอร์ไอเก้นของเมทริกซ์ AA^t

U ประกอบด้วยเวกเตอร์ไอเก้นของเมทริกซ์ A^tA

D ประกอบด้วยรากที่สองของค่าไอเก้นที่ไม่เป็นศูนย์ของ AA^t หรือ A^tA

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^tA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

หาค่าไอเก้น

$$|A^tA - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = 0$$

แก้สมการ จะได้ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$

จาก $\lambda_1 = 2$ หาเวกเตอร์ไอเก้น $\mathbf{u}_1$

$$\begin{aligned} (A^tA - \lambda_1 I)\mathbf{u}_1 &= \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

จะได้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} -u_{11} + u_{12} &= 0 \\ u_{11} - u_{12} &= 0 \end{aligned}$$

ให้ $u_{12} = 1$ จะได้ $u_{11} = 1$ ดังนั้น จะได้เวกเตอร์ไอเก้น

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

จาก $\lambda_2 = 0$ หาเวกเตอร์ไอเก้น u_2

$$\begin{aligned}(A^tA-\lambda_2 I)\mathsf{u}_2 &= \mathsf{0}\\ \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{21}\\ u_{22}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

จะได้ระบบสมการ

$$\begin{aligned}u_{21}+u_{22} &= 0\\ u_{21}+u_{22} &= 0\end{aligned}$$

ให้ $u_{21} = 1$ จะได้ $u_{22} = -1$ ดังนั้น จะได้เวกเตอร์ไอเก้น

$$\mathsf{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$|\mathsf{u}_1| = |\mathsf{u}_2| = \sqrt{2}$$

ดังนั้น

$$U = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

หาเมทริกซ์ V จาก

$$AA^t = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

หาค่าไอเก้น

$$|AA^t-\lambda I| = \begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2(2-\lambda) = 0$$

แก้สมการ จะได้ $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$
จาก $\lambda_1 = 2$ หาเวกเตอร์ไอเก้น v_1

$$\begin{aligned}(AA^t-\lambda_1 I)\mathsf{v}_1 &= \mathsf{0}\\ \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\\ v_{13}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

จะได้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} -2v_{12} &= 0 \\ -2v_{13} &= 0 \end{aligned}$$

ให้ $v_{12} = 0$ จะได้ $v_{13} = 0$ เลือกให้ $v_{11} = 1$ ดังนั้น จะได้เวกเตอร์ไอเก้น

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จาก $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ หาเวกเตอร์ไอเก้น $\mathbf{v}_2$ และ $\mathbf{v}_3$

$$\begin{aligned} (AA^t - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 &= \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

จะได้สมการ

$$2v_{21} = 0$$

จะได้ $v_{21} = 0$ ให้ $v_{22} = 1$ และ $v_{23} = 0$ จะได้เวกเตอร์ไอเก้น

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ให้ $v_{22} = 0$ และ $v_{23} = 1$ จะได้เวกเตอร์ไอเก้น

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_3| = 1$$

ดังนั้น

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

และ

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

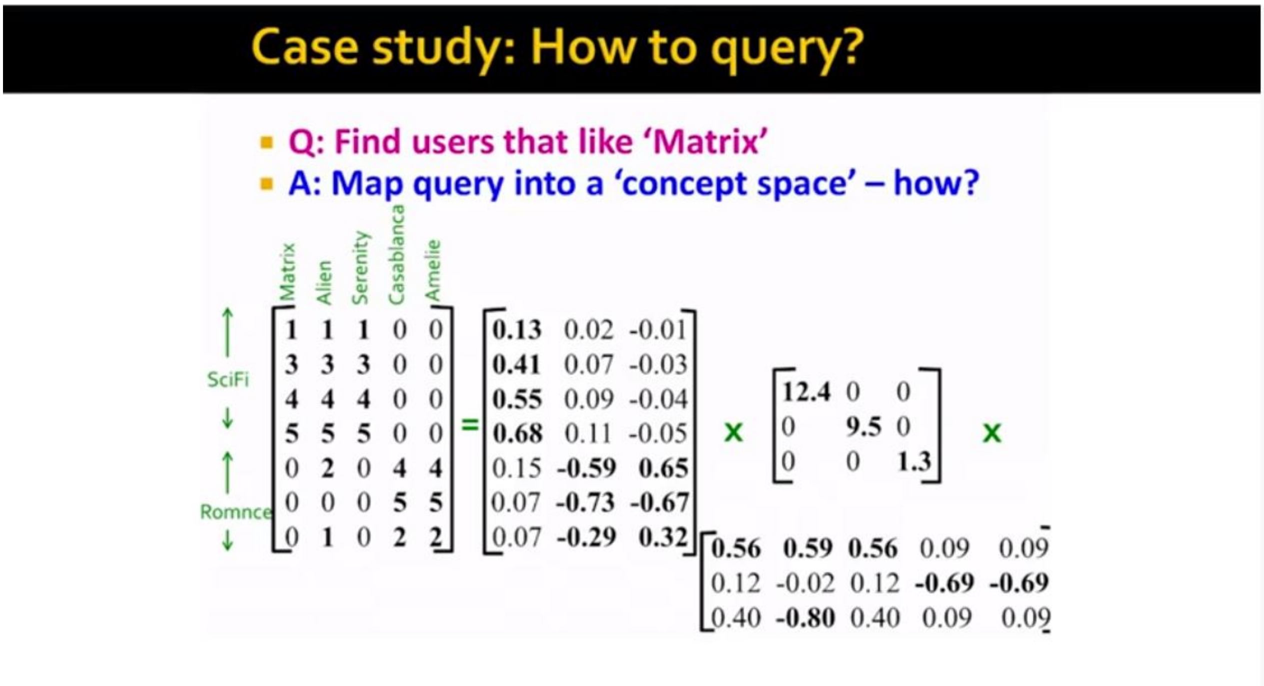
ในการคำนวณ singular value decomposition ค่อนข้างใช้การคำนวณเยอะสำหรับเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่ ดังนั้นจึงมีการพัฒนาการเขียนโปรแกรมสำหรับการแยกเมทริกซ์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้ ซึ่งใช้ภาษา python โดยอาจจะลองใช้คำสั่งบน google colab ได้ ซึ่งจะได้คำตอบออกมาเช่นเดียวกับตัวอย่าง 2.4 [4]

```
# Singular-value decomposition
from numpy import array
from scipy.linalg import svd
# define a matrix
A = array([[1, 1], [0, 0], [0, 0]])
print(A)
# SVD
U, s, VT = svd(A)
print(U)
print(s)
print(VT)
```

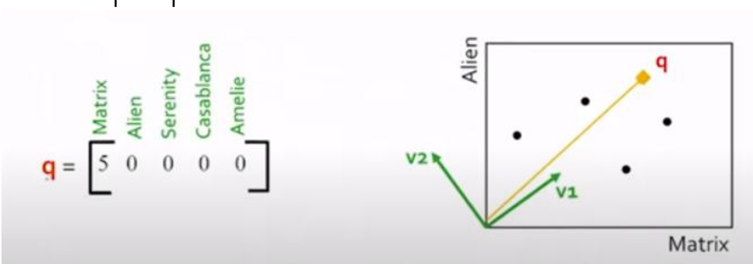
```
[[1 1]
 [0 0]
 [0 0]]
[[1. 0. 0.]
 [0. 1. 0.]
 [0. 0. 1.]]
[1.41421356 0.        ]
[[ 0.70710678  0.70710678]
 [-0.70710678  0.70710678]]
```

ตัวอย่าง 2.5. [7] การประยุกต์ใช้ SVD กับปัญหาที่มาจากข้อมูล ตัวอย่างนี้เป็น การเก็บข้อมูลของภาพยนตร์ 5 เรื่อง ซึ่งเป็นภาพยนตร์แนววิทยาศาสตร์ และแนวรักโรแมนติก

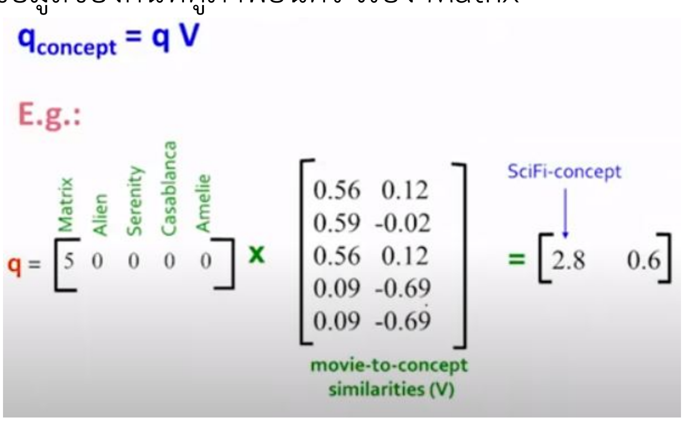
เป้าหมาย คือ หาคนที่ชอบดูภาพยนตร์ เรื่อง Matrix



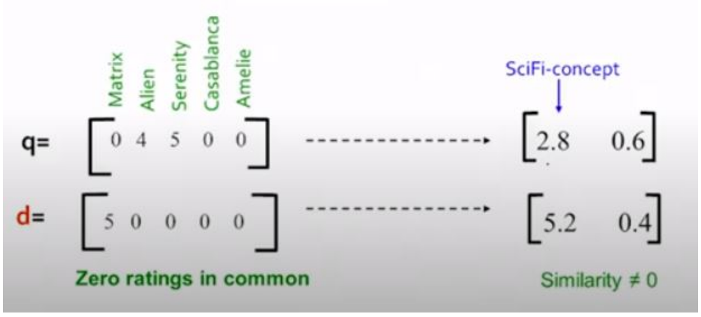
ในการที่จะคาดการณ์จากข้อมูลที่มีว่า แต่ละคน จะชอบภาพยนตร์ เรื่อง Matrix หรือไม่ จะเริ่มต้นจากการทำ concept space



ลองใช้กับข้อมูลของคนที่ดูภาพยนตร์ เรื่อง Matrix



เปรียบเทียบ input 2 แบบ โดยคนนึงเคยดู แต่อีกคนไม่เคยดู ภาพยนตร์ เรื่อง Matrix แต่ได้ผลลัพธ์ไปในทางเดียวกัน คือ ชอบดูภาพยนตร์แนว Scifi ทั้งคู่ จึงสามารถตอบได้ว่า คนนี้จะชอบดูภาพยนตร์เรื่อง Matrix



แบบฝึกหัด

1. กำหนดเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์ V D และ U^t ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็น Singular value decompostion หรือไม่

$$V = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{0.2} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{0.8} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{0.8} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{0.2} \end{bmatrix}$$

2. กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

จงใช้ singular value decomposition ในการแยกเมทริกซ์ A ให้อยู่ในรูป $A = VDU^t$ พร้อมทั้งแสดงวิธีการตรวจคำตอบ

3. กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

จงใช้ singular value decomposition ในการแยกเมทริกซ์ A ให้อยู่ในรูป $A = VDU^t$ พร้อมทั้งแสดงวิธีการตรวจคำตอบ

หนังสืออ้างอิง

[1] Singular value decomposition. https://en.wikipedia.org.

[2] https://www.cis.upenn.edu/ cis515/cis515-11-sl4.pdf, January 2021.

[3] vector space. https://mathworld.wolfram.com, January 2021.

[4] J. Brownlee. How to calculate the svd from scratch with python. https:// machinelearningmastery.com/ singular-value-decomposition-for-machine-learning/.

[5] M. P. Deisenroth, A. A. Faisal, and C. S. Ong. *Mathematics for Machine Learning*. Cambridge University Press, England, 2019.

[6] J. Gallier and J. Quaintance. *Linear Algebra for Computer Vision, Robotics, and Machine Learning*. University of Pennsylvania, USA, 2019.

[7] Leskovec, Rajaraman, and Ullman. Lecture 50 — svd example and conclusion | stanford university.

[8] C. D. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM, USA, 2000.

[9] W.T.MathKKU. 321211 Linear Algebra I. https://home.kku.ac.th/wattou/teaching/ 321211/101.pdf.