Types and Programming Languages
Chapter 5

Rei Tomori

June 26, 2025

構文

定義 [項]

$\mathcal{V}$ を，変数名の加算集合とする．項の集合は

$$x \in \mathcal{T} \text{ for } \forall x \in \mathcal{T}$$
$$t_1 \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{V} \Rightarrow \lambda x.\mathtt{t}_1 \in \mathcal{T} t_1 \in \mathcal{T}, t_2 \in \mathcal{T} \qquad \Rightarrow t_1\ \ t_2 \in \mathcal{T}.$$

をみたす最小の集合 $\mathcal{T}$ である．

項 $\mathtt{t}$ のサイズは，

$$size\ x = 1$$
$$size\ (\lambda x.t') = size(\mathtt{t}') + 1$$
$$size(\mathtt{t}_1\ \ \mathtt{t}_2) = size(\mathtt{t}_1) + size(\mathtt{t}_2) + 1$$

項の自由変数の集合

項 t の自由変数の集合 $FV(\mathtt{t})$ は,

$$
\begin{aligned}
FV(x) &= \{x\} \\
FV(\lambda x.\mathtt{t}_1) &= FV(\mathtt{t}_1) \setminus \{x\} \\
FV(\mathtt{t}_1\ \mathtt{t}_2) &= FV(\mathtt{t}_1) \cup FV(\mathtt{t}_2)
\end{aligned}
$$

置換

β 簡約の定義で用いた変数の置換を具体的に定義する.

(置換)

項 t の自由変数 x を項 s による置換 $[\mathsf{x} \mapsto \mathsf{s}]\,\mathsf{t}$ を，引数 t に関する帰納的定義により次のように定める.

$$
\begin{aligned}
[\mathsf{x} \mapsto \mathsf{s}]\,\mathsf{x} &= \mathsf{s} \\
[\mathsf{x} \mapsto \mathsf{s}]\,\mathsf{y} &= \mathsf{y} \\
[\mathsf{x} \mapsto \mathsf{s}]\,(\lambda \mathsf{y}.\mathsf{t}_1) &= \lambda \mathsf{y}.\,[\mathsf{x} \mapsto \mathsf{s}]\,\mathsf{t}_1 \text{ if } x \neq y \wedge y \in FV(\mathsf{s}) \\
[\mathsf{x} \mapsto \mathsf{s}]\,(\mathsf{t}_1\ \ \mathsf{t}_2) &= [\mathsf{x} \mapsto \mathsf{s}]\,\mathsf{t}_1\ \ [\mathsf{x} \mapsto \mathsf{s}]\,\mathsf{t}_2
\end{aligned}
$$

$\mathcal{T}$ の α 同値類で考えているので，束縛変数と置換される変数が等しい場合は考える必要がない (評価されないため).

λ 項の (値呼びにおける) 操作的意味論は次のように定義される.

型無し λ 計算

構文

$\mathsf{t} ::=$		項:
	x	変数
	$\lambda\mathsf{x}.\mathsf{t}$	抽象
	$\mathsf{t}\ \mathsf{t}$	適用
$\mathsf{v} ::=$		値:
	$\lambda\mathsf{x}.\mathsf{t}$	抽象

評価

$$\frac{\mathsf{t}_1 \to \mathsf{t'}_1}{\mathsf{t}_1\ \mathsf{t}_2 \to \mathsf{t'}_1\ \mathsf{t}_2}$$

$$\frac{t_2 \to \mathsf{t'}_2}{\mathsf{v}_1\ \mathsf{t}_2 \to \mathsf{v}_1\ \mathsf{t'}_2}$$

$$(\lambda\mathsf{x}.\mathsf{t}_{12})\ \mathsf{v}_2 \to [\mathsf{x} \mapsto \mathsf{v}_2]\ \mathsf{t}_{12}$$

他の評価規則の操作的意味論

完全 β 簡約

v ::=	値:
λx.t	抽象の値

評価

$$\frac{\mathsf{t} \longrightarrow \mathsf{t}'}{\lambda \mathsf{x}.t \longrightarrow \lambda \mathsf{x}.t'}$$

$$\frac{\mathsf{t}_1 \longrightarrow \mathsf{t}_1'}{\mathsf{t}_1\ \mathsf{t}_2 \longrightarrow \mathsf{t}_1'\ \mathsf{t}_2}$$

$$\frac{\mathsf{t}_2 \longrightarrow \mathsf{t}_2'}{\mathsf{t}_1\ \mathsf{t}_2 \longrightarrow \mathsf{t}_1\ \mathsf{t}_2'}$$

$$(\lambda \mathsf{x}.\mathsf{t}_{12})\ \mathsf{v}_2 \longrightarrow [\mathsf{x} \mapsto \mathsf{v}_2]\ \mathsf{t}_{12}$$

他の評価規則の操作的意味論

正規評価順序

v ::=		値:
	λx.t	抽象の値

評価

$$\frac{\mathsf{t} \rightarrow \mathsf{t}'}{\lambda \mathsf{x}.t \rightarrow \lambda \mathsf{x}.t'}$$

$$\frac{\mathsf{t}_2 \rightarrow \mathsf{t}_2'}{\mathsf{t}_1\ \mathsf{t}_2 \rightarrow \mathsf{t}_1\ \mathsf{t}_2'}$$

$$(\lambda \mathsf{x}.\mathsf{t}_{12})\,\mathsf{v}_2 \rightarrow [\mathsf{x} \mapsto \mathsf{v}_2]\,\mathsf{t}_{12}$$

他の評価規則の操作的意味論

名前呼び

$v ::=$		値:
	$\lambda x.t$	抽象の値

評価

$$\frac{t_2 \to t_2'}{t_1\ t_2 \to t_1\ t_2'}$$

$$(\lambda x.t_{12})\ v_2 \to [x \mapsto v_2]\ t_{12}$$

演習 5.3.7

演習 3.5.16 の wrong で拡張した算術式の構文と意味論は次のようであった:

エラー項で拡張された構文 (再掲)

拡張された構文

badnat ::=		数でない正規形:
	wrong	実行時エラー
	true	定数真
	false	定数偽
badbool ::=		ブール値でない正規形:
	wrong	実行時エラー
	nv	数値

元の構文

t ::= . . .		項
	0	定数ゼロ
	succ t	後者値
	pred t	前者値
	iszero t	ゼロ判定

評価関係

if badbool then t_1 else t_2 $\to$ wrong
succ badnat $\to$ wrong
pred badnat $\to$ wrong
iszero badnat $\to$ wrong

演習 5.3.7

問題

この意味論を λNB に拡張せよ.

演習 5.3.8

問題

ラムダ項の評価戦略を大ステップスタイルで形式化するにはどうすればよいか示せ.

演習 5.3.8

値は値に評価されるので

$$\textsc{B-Value}: \ \frac{}{v \Downarrow v}$$

$$\frac{t_1 \Downarrow v_1}{v_1 \ \ t_2 \Downarrow v_1 \ \ t_2}$$