

Basic Simple Type Theory

Rei Tomori

2025/6/10

1 Type-free λ -calculus

定義 (λ -terms)

項変数の無限列が与えられているとする. λ 項の構文要素は,

- 各項変数: アトムもしくは原子項とよばれる.
- M, N が λ 項のとき, $(M\ N)$ は λ 項: 適用
- 項変数 x と λ 項 M に対し, $\lambda x.M$ は λ 項: (λ) 抽象.

アトムでない λ 項は合成 λ 項という.

記法 (表記)

- 項変数は添字を付けることを許して, メタ変数 u, v, w, x, y, z, \dots で表わされる. 明示されない限り, 異なるメタ変数は異なる項を表わす.
- 任意の λ 項はメタ変数 $L, M, N, P, Q, S, T, \dots$ で表わす.
- 項 M, N に対して $M \equiv N$ なることを, M が N と構文的に等しいことと定義する.
- 抽象は右結合, 適用は左結合とする.

1.1 代入

定義 (置換)

$[N/x]M$ を, N の自由変数が捕獲されないようにしながら, M における x の各自由出現を N に置き換える操作とする. つまり, 全ての $N, x, P, Q, y \neq x$ に対し,

- $[N/x]x = N$
- $[N/x]y = y$
- $[N/x](P, Q) = ([N/x]P)([N/x]Q)$

- $[N/x](\lambda x \cdot P) = \lambda x \cdot P$
- $[N/x](\lambda y \cdot P) = \lambda y \cdot P \quad (x \notin \text{FV}(P))$
- $[N/x](\lambda y \cdot P) = \lambda y \cdot [N/x]P(x \in \text{FV}(P) \wedge y \notin \text{FV}(N))$
- $[N/x](\lambda y \cdot P) = \lambda z \cdot [N/x][z/y]P(x \in \text{FV}(P) \wedge y \in \text{FV}(N))$

ただし, z は項変数の列の要素のうち, N に自由出現を持たない最小の項変数とする.

同時代入