Types and Programming Languages
Chapter 8,9

Rei Tomori

July 14, 2025

概要

今回は以下の内容を扱う:

1. §11. 単純な拡張
2. §12. 正規化
3. §13. 参照

§11. 単純な拡張

基本型

1. プログラミング言語には基本型[1].i.e. 構造を持たない単純な値の集合とその上のプリミティブな演算がある.
   - 今後は $\mathtt{Nat}, \mathtt{Bool}$ に加え，$\mathtt{String}, \mathtt{Float}$ 型を用いる.
2. (その上の演算を捨象した) 一般的な基本型を扱いたいことがある．そのためには，言語が”非解釈の”基本型の集合 $\mathscr{A}$[2]を備えているとする.
   - これを表わすためには，型の構文規則を変更してメタ変数 A($\mathscr{A}$ の要素を表わす) を加える.
   - 以降，基本型の名前として $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}$ を用いる.
3. 非解釈な型を導入することで，基本型の要素上を特定することなく，その上で走る変数を束縛できる.
   - $\lambda \mathsf{x} : \mathsf{A}.\mathsf{x}$ は $\mathsf{x} : \mathsf{A}$ が何であれ，x を x 自身に写す恒等関数である.

[1]基底型

[2]原子型，つまり型システムにおいては内部システムを持たない型の略

§11.2. Unit 型

要素を 1 つしか持たない型である Unit 型を導入する．この型は次のように解釈される:

- 唯一の要素は項定数 unit(u，しばしば () で表わされる) で，任意の Unit 型の項は一意的に unit に評価される．

Unit 型は主に副作用を持つ言語で応用される[3]．たとえば，可変参照を変更する関数では，返り値ではなく副作用に興味があるため，Unit 型が返り値の型とされる．類似物として C 系言語の void 型がある．

[3]純粋函数型言語では，たとえば各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

Unit 型

Unit 型は[4]，以下の構文，型付け規則および派生形式 (i.e. 糖衣構文)，すなわち STLC への埋め込み方で定義される．

Def.Unit 型の定義

新しい構文形式

(項) $\mathtt{t} ::= \ldots$

$\quad \mathtt{Unit}$

(項) $\mathtt{v} ::= \ldots$

$\quad \mathtt{unit}$

(型) $\mathtt{T} ::= \ldots$

$\quad \mathtt{Unit}$

新しい型付け規則

$$\Gamma \vdash \mathtt{unit} : \mathtt{Unit}$$

新しい派生形式

$$\mathtt{t}_1; \mathtt{t}_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda \mathtt{x} : \mathtt{Unit}.\mathtt{t}_2)\mathtt{t}_1$$

ただし $x \notin FV(\mathtt{t}_2)$

[4] Haskell でいうところの 0-tuple

§11.3. 派生形式: 逐次実行とワイルドカード

副作用のある言語における文の逐次実行を形式化する．逐次実行形式は項 $\mathtt{t}_1, \mathtt{t}_2$ に対し，$\mathtt{t}_1$ を正規形まで評価し，結果を捨てた後に $\mathtt{t}_2$ を評価する．

$(;)$ の意味を直接表わす方法と，$(;)$ を内部言語のある項の略記とする 2 通りの形式化が考えられる．

1. $\mathtt{t}_1; \mathtt{t}_2$ を新たな構文要素とする方法．評価規則

$$\frac{\mathtt{t}_1 \to \mathtt{t}_1'}{\mathtt{t}_1; \mathtt{t}_2 \to \mathtt{t}_1'; \mathtt{t}_2}\ (\text{E-SEQ})$$

$$\mathtt{v}_1; \mathtt{t}_2 \to \mathtt{t}_2\ (\text{E-SEQNEXT})$$

   および型付け規則

$$\frac{\Gamma \vdash \mathtt{t}_1 : \mathtt{Unit} \qquad \Gamma \vdash \mathtt{t}_2 : \mathtt{T}_2}{\Gamma \vdash \mathtt{t}_1; \mathtt{t}_2 : \mathtt{T}_2}\ (\text{T-SEQ})$$

   を付け加えることで $(;)$ の振る舞いを特徴付ける．

2. 内部言語の項の略記とする方法．$\mathtt{t}_1; \mathtt{t}_2 \stackrel{\mathtt{def}}{=} (\lambda \mathtt{x} : \mathtt{Unit}.\mathtt{t}_2)\mathtt{t}_1$，ただし $x\mathtt{x} \notin FV(\mathtt{t}_2)$ とする．

派生形式

はじめの形式化で定めた評価および型付け規則は，Unit のみを型として持つ STLC の評価関係および型付け規則より従う．このことを確認しよう．

Thm.11.3.1[逐次実行は派生形式である]
Unit 型，逐次実行およびそれらの評価・型付け規則を持つ STLC を λ^E と書く．[5]また，Unit 型のみを持つ STLC を λ^I と書き，$e \in \lambda^I \to \lambda^E$ を，λ^I の各項を対応する λ^E の項に写す詳細化関数[6]とする．つまり，e は $t_1; t_2$ の各出現を，$(\lambda x : \mathtt{Unit}.t_2)t_1 (x \notin FV(t_2))$ に置き換える．すると，λ^E の各項 t に対して，

1. $t \to_E t' \Rightarrow e(t) \to_I e(t')$．逆に $e(t) \to_I u \Rightarrow \exists t'.t'$ は λ^E の項 $\wedge u = e(t') \wedge t \to_E t'$.
2. $\Gamma \vdash^E t : T \Leftrightarrow \Gamma \vdash^I e(t) : T$

[5]外部言語の略.
[6]elaboration function

Thm.11.3.1. の証明 (一部)

Proof.
$\mathtt{t}$ の構造帰納法で示す．(2) の主張は白板で示すことにする．

1. (1) の証明．
   1. ($\Rightarrow$) 新たな構文要素，つまり $\mathtt{t} = \mathtt{t}_1; \mathtt{t}_2$ または $\mathtt{t} = \mathtt{v}_1; \mathtt{t}_2$ の場合を考え，$\mathtt{t} \to_{\mathsf{E}} \mathtt{t}'$ なる $\mathtt{t}'$ の存在を仮定．
      - $\mathtt{t} = \mathtt{v}_1; \mathtt{t}_2$．仮定より $\mathtt{t}' = \mathtt{t}_2$．いま $\mathtt{x} \notin \mathit{FV}(\mathtt{t}_2)$ を任意に取ると，定義より $e(\mathtt{t}) = (\lambda \mathtt{x} : \mathtt{Unit}.e(\mathtt{t}_2))\ \mathtt{v}_1$．(E-APPABS) から $\mathtt{t} \to_I [\mathtt{x} \mapsto \mathtt{v}_1]\, e(\mathtt{t}_2) = \mathtt{t}'$ がいえ，$\mathtt{x} \notin \mathit{FV}(e(\mathtt{t}_2))$ からこれは $\mathtt{v}_1$ に等しい．
      - $\mathtt{t} = \mathtt{t}_1; \mathtt{t}_2$．仮定より $\mathtt{t}' = \mathtt{t}_1'; \mathtt{t}_2 \wedge \mathtt{t}_1 \to_{\mathsf{E}} \mathtt{t}_1'$ なる $\mathtt{t}', \mathtt{t}_1'$ が存在．IH より $e(\mathtt{t}_1) \to_I e(\mathtt{t}_1')$．(E-APP1) から $e(\mathtt{t}) = e(\mathtt{t}_1)e(\mathtt{t}_2) \to_I e(\mathtt{t}_1')e(\mathtt{t}_2 = e(\mathtt{t}')$．
   2. ($\Leftarrow$)．$e(\mathtt{t}) \to_I \mathtt{u}$ を仮定する．(1) と同様に場合を分ける．
      - $\mathtt{t} = \mathtt{v}_1; \mathtt{t}_2$ のとき．$e(\mathtt{t}) = (\lambda \mathtt{x} : \mathtt{Unit}.e(\mathtt{t}_2))\mathtt{v}_1$($\mathtt{x}$ は fresh な変数)，$\mathtt{u} = e(\mathtt{t}_2)$．このとき．$\mathtt{t}' = \mathtt{t}_2$ とすれば従う．
      - $\mathtt{t} = \mathtt{t}_1; \mathtt{t}_2$ のとき．$\mathtt{t} = (\lambda \mathtt{x} : \mathtt{Unit}.e(\mathtt{t}_2))\ e(\mathtt{t}_1)$ であり，仮定より $e(\mathtt{t}_1) \to \mathtt{u}_1'$ なる $\mathtt{u}_1'$ を取ると $\mathtt{u} = (\lambda \mathtt{x} : \mathtt{Unit}.e(\mathtt{t}_1))\ \mathtt{u}_1'$．帰納法の仮定より，$\mathtt{u}_1' = e(\mathtt{t}_1') \wedge \mathtt{t}_1 \to_E \mathtt{t}_1'$ なる λ^E の項 $\mathtt{t}_1'$ が取れる．ゆえに $\mathtt{u} = (\lambda \mathtt{x} : \mathtt{Unit}.e(\mathtt{t}_2))e(\mathtt{t}_1') = e(\mathtt{t}_1'; \mathtt{t}_2)$ となり従う．

□

派生形式

1. 派生形式として導入する利点には，表層構文を拡張しつつ型安全性を保証しなければならない内部言語を単純に保てることにある．
2. 他の派生形式として，抽象の本体で使わない引数を束縛するようなワイルドカード[7]の慣習がある．ワイルドカード束縛子は (_) で表わされる．
   - $\lambda \_ : \mathsf{S.t} \stackrel{\mathsf{def}}{=} \lambda x : \mathsf{S.t}$，ただし x は t に現れない．

[7] hole などということもある

§11.4. 型指定

1. 所与の項に特定の型を明示的に指定する機能を型指定 といい，型 T を指定した項 t は t as T と書かれる．用途としては次のようなものがある:
   - ドキュメンテーション．特に型シグネチャが複雑になる場合などは有用．
   - 複雑な型の表示の制御．複雑な型式の略記[8]を導入し，型検査器に必要に応じて略記を折り畳み/展開させる．
   - 抽象化．項 t が複数の異なる型を持ちうる体系 (たとえば部分型付けのある) において，t がより少数の型を持つかのよう型検査器に指示し，型の一部を隠蔽させる．

[8]型シノニムなどと呼ばれる

型指定

型指定の型付けおよび評価規則は以下の通り:

Def. 型指定

$$t ::= \ldots \mid t \text{ as } T$$

評価規則

$$v_1 \text{ as } T \to v_1 \text{ (E-ASCRIBE)}$$

$$\frac{t_1 \to t_1'}{t_1 \text{ as } T \to t_1' \text{ as } T} \text{ (E-ASCRIBE1)}$$

型付け規則

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : T}{\Gamma \vdash t_1 \text{ as } T : T} \text{ (T-ASCRIBE)}$$

型指定

演習 11.4.1.(推奨)

1. 型指定を派生形式として形式化し，p.10 の型付け規則と評価規則が派生形式と対応することを示せ.
2. E-ASCRIBE, E-ASCRIBE1 の代りに，以下の規則が与えられたとする:

$$t_1 \text{ as } T \to t_1 \quad \text{(E-ASCRIBEEAGER)}$$

この場合に型指定を派生形式として扱うことは出来るか.

Proof.

1. $t \text{ as } T$ を $(\lambda x : T.x)\ t$ の略記と定める．評価規則と型付け規則を示そう.

   - 評価規則．$v_1 \text{ as } T$ とすると $v_1 \text{ as } T = (\lambda x : T.x)\ v_1 \to [x \mapsto v_1]\, x = v_1$ より E-ASCRIBE が従う．$t_1 \to t_1'$ とすると $t_1 \text{ as } T = (\lambda x : T.x)\ t_1 \to (\lambda x : T.x)\ t_1' = t_1' \text{ as } T$ より，E-ASCRIBE1 も従う.
   - 型付け規則．$\Gamma \vdash t_1 : T$ とする.

□

演習 11.4.1.

Proof.

1. 以下の導出木より成り立つ:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, x : T \vdash x : T}{\Gamma \vdash \lambda x : T.x : T \to T}\,(\text{Proj}) \qquad \Gamma \vdash t_1 : T}{\Gamma \vdash (\lambda x : T.x)\ t_1 : T}\,(\text{T-ABS})}{\Gamma \vdash t_1\ \mathtt{as}\ T : T}$$

2. E-ASCRIBEEAGER を実現するためにはサンクを噛ませることで t_1 の評価を遅延させなければならない．次のようになる．ただし y はフレッシュとする:

$$t_1\ \mathtt{as}\ T \stackrel{\mathtt{def}}{=} (\lambda x : \mathtt{Unit} \to T.x\ \mathtt{unit})(\lambda y : \mathtt{Unit}.t_1)$$

この定義では，t as T の型指定を消去するために
$t\ \mathtt{as}\ T \to (\lambda y : \mathtt{Unit}.t_1)\ \mathtt{unit} \to t_1$ と 2 ステップの簡約を経なければならない．したがって，Thm11.3.1 を考えると，(2) は成立するものの，(1) の結論は内部言語で多ステップの簡約を経るように弱めなければならない．

□

1. ML 系言語などでは，部分式に名前を付ける手段として let 束縛子を提供している.
   - $\texttt{let}\ x = t_1\ \texttt{in}\ t_2$ は，項 t_1 を値に評価して x に束縛し，t_2 を評価することを意味していた.

今回は ML 同様に値呼び戦略を用いて let 束縛子を定義する:

Def.11.4.let 束縛

構文要素

$$t ::= \ldots$$
$$\texttt{let}\ x = t_1\ \texttt{in}\ t_2$$

評価関係

$$\texttt{let}\ x = v_1\ \texttt{in}\ t_2 \to [x \mapsto v_1]\, t_2 \ (\text{E-LETV})$$

$$\frac{t_1 \to t_1'}{\texttt{let}\ x = t_1\ \texttt{in}\ t_2 \to \texttt{let}\ x = t_1'\ \texttt{in}\ t_2}\ (\text{E-LET})$$

型付け規則

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : T_1 \qquad \Gamma, x : T_1 \vdash t_2 : T_2}{\Gamma \vdash \texttt{let}\ x = t_1\ \texttt{in}\ t_2 : T_2}\ (\text{T-LET})$$

演習 11.5.1

演習 11.5.1.(推奨)
型検査器 letexercise の eval 関数および typeof 関数を完成させよ.

解答.
eval1 関数のパターンマッチの TmLet の節に以下を足せばよい:

$$|\texttt{TmLet}(\texttt{fi}, \texttt{x}, \texttt{t1}, \texttt{t2}) \to \texttt{if isval ctx t1 then termSubstTop t1 t2}$$
$$\texttt{else let t1}' = \texttt{eval1 ctx t1 in TmLet}(\texttt{fi}, \texttt{x}, \texttt{t1}', \texttt{t2})$$

型検査器 typeof 関数に対しては以下を足せばよい: □

let 束縛

`let` を派生形式として定義することを考える.

- 素朴には，$\texttt{let x} = \texttt{t}_1 \texttt{ in } \texttt{t}_2 \stackrel{def}{=} (\lambda \texttt{x} : \texttt{T}_1.\texttt{t}_1)\ \texttt{t}_2$ とすることが考えられるが，左辺には右辺の型注釈が出現しない (実際には，構文解析器は型検査器から x の型を得る). そのため，単純に項に対する脱糖衣変換とはみなせず，代わりに型付け導出に対する変換と見做す必要がある. 具体的には，派生形式は `let` に関する導出

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash \texttt{t}_1 : \texttt{T}_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma, \texttt{x} : \texttt{T}_1 \vdash \texttt{t}_2 : \texttt{T}_2\end{array}}{\Gamma \vdash \texttt{let x} = \texttt{t}_1 \texttt{ in } \texttt{t}_2 : \texttt{T}_2}$$

を以下の導出に写すように定める:

$$\frac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma, \texttt{x} : \texttt{T}_1 \vdash \texttt{t}_2 : \texttt{T}_2\end{array}}{\Gamma \vdash \lambda \texttt{x} : \texttt{T}_1.\texttt{t}_2 : \texttt{T}_2}\ (\text{T-ABS}) \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash \texttt{t}_1 : \texttt{T}_1\end{array}}{\Gamma \vdash (\lambda \texttt{x} : \texttt{T}_1.\texttt{t}_2)\texttt{t}_1 : \texttt{T}_2}\ (\text{T-APP})$$

つまり，評価に関する振る舞いとは違い，型付けに関する振る舞いは (型が implicit な場合を扱えるように) 内部言語に組込まれていなければならない. このことは，§22 でより詳細に扱う.

1. 2 つ組，ひいては任意個の値の組 (およびその一般化であるレコード型) について考える．[9]
   - 以下の構文要素を追加する:2 つ組化 $\{t_1, t_2\}$，第一および第二成分への射影 t.1, t.2，および型 T_1 と T_2 の直積[10] $T_1 \times T_2$．組を表現するために波括弧を用いているのはレコード型の具体例であることを強調するため．
   - 組は第一成分を値に評価した後第二成分を，そして完全に評価された 2 つ組に対して射影の適用を許すことにする．

型付け規則は次頁に示す通り:

[9] 以後，n 個組を単にタプルと呼ぶことがある．
[10] デカルト積

§11.6.2 つ組

構

文:$t ::= \ldots \mid \{t, t\} \mid t.1 \mid t.2$

値:$v ::= \ldots \{v, v\}$

型:$T ::= \ldots \mid T_1 \times T_2$

評価・型付け

$$\{v_1, v_2\}.1 \to v_1$$

$$\{v_1, v_2\}.2 \to v_2$$

$$\frac{t_1 \to t_1'}{t_1.1 \to t_1'.1} \text{ (E-PROJ1)}$$

$$\frac{t_1 \to t_1'}{t_1.2 \to t_1'.2} \text{ (E-PROJ2)}$$

$$\frac{t_1 \to t_1'}{\{t_1, t_2\} \to \{t_1', t_2\}} \text{ (E-PAIR1)}$$

$$\frac{t_2 \to t_2'}{\{v_1, t_2\} \to \{v_1, t_2'\}} \text{ (E-PAIR2)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : T_1 \qquad \Gamma \vdash t_2 : T_2}{\Gamma \vdash \{t_1, t_2\} : T_1 \times T_2} \text{ (T-PAIR)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : T_1 \times T_2}{\Gamma \vdash t_1.1 : T_1} \text{ T-PROJ1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : T_1 \times T_2}{\Gamma \vdash t_1.2 : T_2} \text{ T-PROJ2}$$

§11.6 を n 項の直積に拡張する．n 項の直積を，$\left\{\mathtt{t}_\mathtt{i}^{\mathtt{i}\in 1\ldots\mathtt{n}}\right\} : \left\{\mathtt{T}_\mathtt{i}^{\mathtt{i}\in 1\ldots\mathtt{n}}\right\}$ と表わす．ただし $n = 0$ の場合は空の組 $\{\}$ を表わし，射影は定義されない．構文，評価および型付けは以下の通り:

Def.11.6. 組

項:$\mathtt{t} ::= \ldots \mid \left\{\mathtt{t}_\mathtt{i}^{\mathtt{i}\in 1\ldots\mathtt{n}}\right\} \mid \mathtt{t}.\mathtt{i}$

値:$\mathtt{v} ::= \ldots \mid \left\{\mathtt{v}_\mathtt{i}^{\mathtt{i}\in 1\ldots\mathtt{n}}\right\}$

型:$\mathtt{T} ::= \ldots \mid \left\{\mathtt{T}_\mathtt{i}^{\mathtt{i}\in 1\ldots\mathtt{n}}\right\}$

$$\frac{\mathtt{t}_1 \to \mathtt{t}_1'}{\mathtt{t}_1.\mathtt{i} \to \mathtt{t}_1'.\mathtt{i}}\ (\text{E-PROJ})$$

$$\frac{\mathtt{t}_\mathtt{j} \to \mathtt{t}_\mathtt{j}'}{\left\{t_i^{i\in 1\ldots j-1}, t_j, t_k^{k\in j+1\ldots n}\right\} \to \left\{t_i^{i\in 1\ldots j-1}, t_j', t_k^{k\in j+1\ldots n}\right\}}$$

評価規則:

$$\left\{\mathtt{v}_\mathtt{i}^{\mathtt{i}\in 1\ldots\mathtt{n}}\right\}.\mathtt{i} \to \mathtt{v}_\mathtt{i}\ (\text{E-PROJTUPLE})$$

$$\frac{\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \Gamma \vdash \mathtt{t}_\mathtt{i} : \mathtt{T}_\mathtt{i}}{\Gamma \vdash \left\{\mathtt{t}_\mathtt{i}^{\mathtt{i}\in 1\ldots\mathtt{n}}\right\} : \left\{\mathtt{T}_\mathtt{i}^{\mathtt{i}\in 1\ldots\mathtt{n}}\right\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathtt{t}_1 : \left\{\mathtt{T}_\mathtt{i}^{\mathtt{i}\in 1\ldots\mathtt{n}}\right\}}{\Gamma \vdash \mathtt{t}_1.\mathtt{j} : \mathtt{T}_\mathtt{j}}$$

§11.7 を (ラベル付き) レコード型に拡張する．以下のように定めればよい:

Def.11.7.

項:$t ::= \ldots \mid \left\{l_i = t_i^{i=1\ldots n}\right\} \mid t.l$

値:$v ::= \ldots \mid \left\{l_i = v_i^{i\in 1\ldots n}\right\}$

型:$T ::= \ldots \mid \left\{l_i : T_i^{i\in 1\ldots n}\right\}$

$$\frac{t_1 \to t_1'}{t_1.l \to t_1'.l}\ (\text{E-PROJ})$$

$$\frac{t_j \to t_j'}{\left\{l_i = t_i^{i<j}, l_j = t_j, l_k = t_k^{j+1\le k\le n}\right\} \to \left\{l_i = t_i^{i\in 1\ldots j-1}\right.}$$

評価規則:

$$\left\{l_i = v_i^{i\in 1\ldots n}\right\}.l_j \to v_j$$

$$\frac{\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \Gamma \vdash t_i : T_i}{\Gamma \vdash \left\{t_i^{i\in 1\ldots n}\right\} : \left\{T_i^{i\in 1\ldots n}\right\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : \left\{T_i^{i\in 1\ldots n}\right\}}{\Gamma \vdash t_1.j : T_j}$$