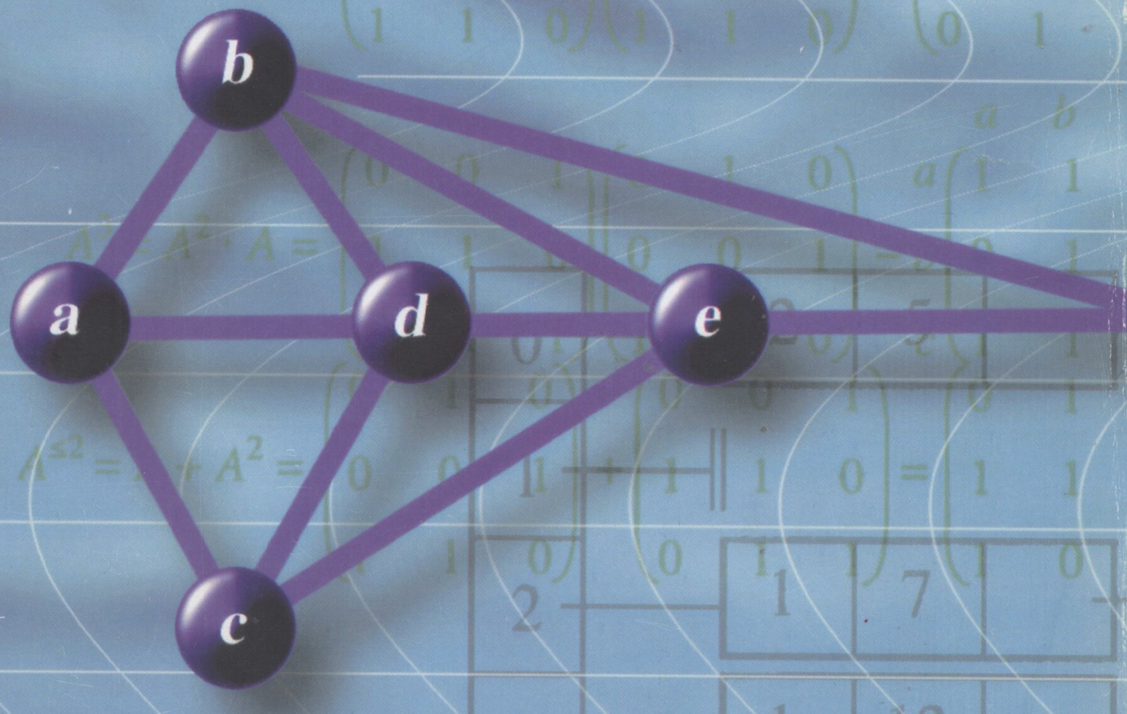
משרד החינוך
האגף לתכנון ולפיתוח
תכניות לימודים

המרכז הישראלי לחינוך
מדעי-טכנולוגי
ע"ש עמוס דה-שליט

המרכז לטכנולוגיה
חינוכית (מט"ח)

האוניברסיטה הפתוחה
בית הספר לטכנולוגיה



מבוא לחקר ביצועים

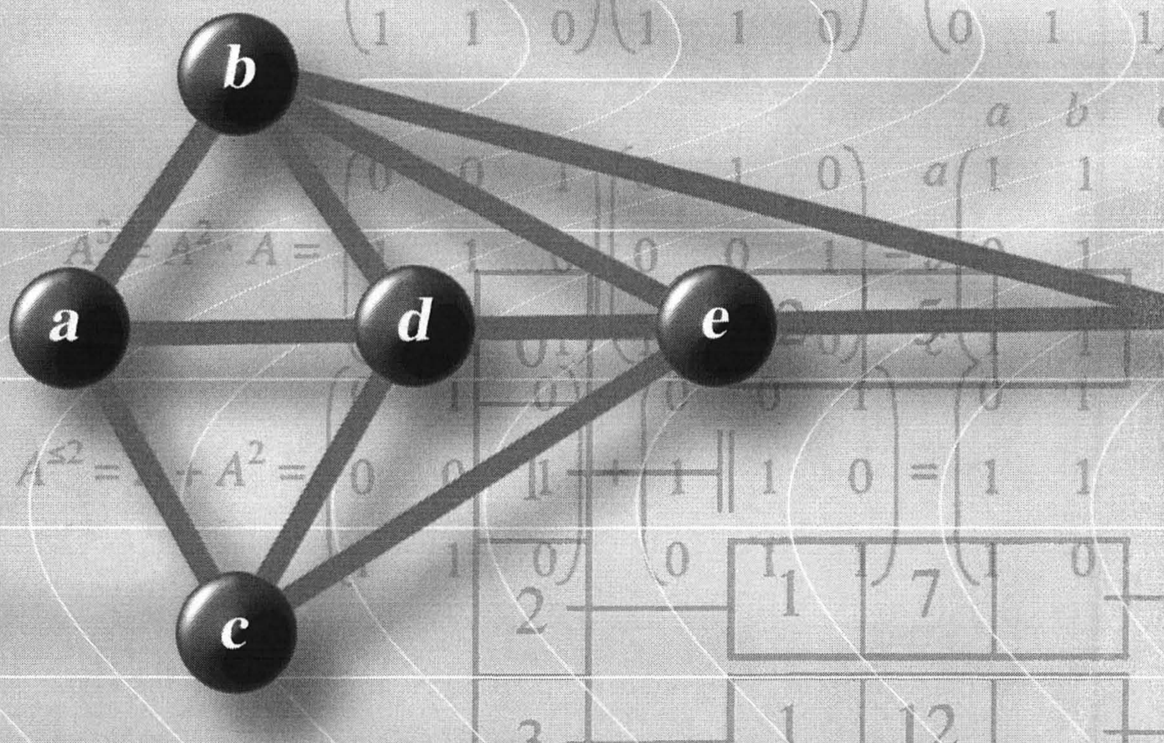
משרד החינוך
האגף לתכנון ולפיתוח
תכניות לימודים

המרכז הישראלי לחינוך
מדעי-טכנולוגי
ע"ש עמוס דה-שליט

המרכז לטכנולוגיה
חינוכית (מט"ח)

האוניברסיטה הפתוחה
בית הספר לטכנולוגיה

מבוא לחקר ביצועים



משרד החינוך התרבות והספורט
אישור מס' נ/4073

כתיבה

ראובן חוטובלי

שולה שצמן

אלון סלפק

עריכה מקצועית

שולה שצמן

ייעוץ אקדמי ודידקטי

ד"ר ציפורה ארליך (פרקים 2-1)

ד"ר צבי פירסט (פרקים 6-3)

קריאה וייעוץ

אתי מנשה

חייט אסתר

דורית כץ

אבנר רובין

עריכה לשונית

אילנה גולן

אראלה ברילנט

איורים

אירית אשר

ספר זה יצא לאור במימון האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים במשרד החינוך, התרבות והספורט והמרכז הישראלי לחינוך מדעי-טכנולוגי ע"ש עמוס דה-שליט.

מק"ט 103425

משרד החינוך
האגף לתכנון ולפיתוח
תכניות לימודים

המרכז הישראלי לחינוך
מדעי-טכנולוגי
ע"ש עמוס דה-שליט

המרכז לטכנולוגיה
חינוכית (מטח)

האוניברסיטה הפתוחה
בית-הספר לטכנולוגיה

מהדורת ניסוי

בית ההוצאה לאור של המרכז לטכנולוגיה חינוכית, קרית משה רואו, רח' קלאוזנר 16, רמת-אביב, ת"ד 39513, תל-אביב 61394.

The Centre For Educational Technology, 16 Klausner St., Ramat-Aviv, P.O.Box 39513, Tel-Aviv, 61394.
Printed in Israel.

תוכן העניינים

פתח דבר

חקר ביצועים הוא תחום מדעי מתמטי, העוסק בפתרון בעיות מעשיות באמצעות ייצוגן במודלים מתמטיים. רוב היישומים של חקר הביצועים עוסקים בפתרון בעיות אופטימיזציה.

השלבים העיקריים בפתרון בעיה בגישת חקר הביצועים הם :

1. בניית מודל מתמטי המתאר את המרכיבים המהותיים של הבעיה.
2. פיתוח אלגוריתמים לפתרון הבעיה כפי שהיא מיוצגת במודל.
3. שימוש באלגוריתם לפתרון של המודל המתמטי.
4. ניתוח הפתרון ובדיקת ישימותו לבעיה המעשית.

החלק הראשון של הספר (פרקים 1-2) מציג את המושגים והעקרונות הבסיסיים של תכנון ליניארי, שהוא הענף המרכזי של חקר הביצועים.
החלק השני של הספר (פרקים 3-6) עוסק בבעיות אופטימיזציה הקשורות לתורת הגרפים והרשתות, שהוא תחום המשותף למדעי המחשב ולחקר ביצועים.

הספר מיועד לתלמידי החטיבה העליונה, הלומדים את יחידת הלימוד החמישית לבגרות במדעי המחשב.

תודתנו נתונה למפמ״ר למדעי המחשב, ד״ר אבי כהן, ולצוות הפיקוח, שתרמו מזמנם ומניסיונם להכוונה ולפיקוח על תהליך הפיתוח וההפעלה הניסויית של הספר ושל תכנית הלימודים שעליה הוא מבוסס.

תודתנו נתונה גם למורות ולתלמידים שהשתתפו בהפעלה הניסויית של תכנית הלימודים.

צוות הפיתוח

פרק 1. מודל התכנון הליניארי

תכנון ליניארי (Linear Programming) נחשב על-ידי רבים כאחת ההתפתחויות החשובות בתחום המתמטיקה במאה העשרים. תכנון ליניארי משמש כלי תכנון מקובל, המאפשר חיסכון כספי ניכר לחברות ולבתי עסק רבים בארצות המתועשות.

מהו טבעו של כלי זה, ולפתרונן של אילו בעיות הוא נועד? תשובה לשאלה זו תינתן במהלך הדוגמאות שתוצגנה בהמשך, אולם נקדים להן תיאור מילולי קצר. היישום הנפוץ ביותר של תכנון ליניארי הוא פתרון בעיות הכרוכות **בהקצאה** היעילה ביותר, חלוקה **אופטימלית** של **משאבים מוגבלים** בין פעילויות שונות **המתחרות** על אותם משאבים.

בעיית הקצאה כזאת מופיעה בכל פעם שיש לבחור את רמתן של פעילויות המתחרות על משאבים מוגבלים (הדרושים לביצוע הפעילויות). תיאור זה מתאים למגוון רחב של מצבים, כגון הקצאת אמצעי ייצור למוצרים שונים, הקצאת משאבים לאומיים לצרכים מקומיים, בחירת תיק נכסים, תכנוני הסעות והובלות, תכנון חקלאי, תכנון טיפולים רפואיים ועוד.

בתכנון ליניארי משתמשים במודל מתמטי כדי לתאר את הבעיה הנדונה. משמעות התואר **ליניארי** היא שכל הפונקציות המתמטיות, המופיעות במודל, חייבות להיות **פונקציות ליניאריות**. לעתים משתמשים במונח **תכנות ליניארי** במקום **תכנון ליניארי**, אולם אין לראות בכך קשר לתכנות מחשבים. תכנון ליניארי עוסק **בתכנון פעילויות** שמביא לקבלת תוצאה אופטימלית – תוצאה המשיגה את המטרה המוגדרת (על-ידי המודל המתמטי) בצורה הטובה ביותר מבין החלופות האפשריות.

הקצאת משאבים היא אמנם היישום הנפוץ ביותר של תכנון ליניארי, אך ללא ספק אין היא היישום היחיד. כל בעיה שניתן לתאר באמצעות מודל מתמטי, המתאים למבנה הכללי של מודל תכנון ליניארי, היא בעיית תכנון ליניארי. היתרון שמקנה מודל התכנון הליניארי לפתרון בעיות, הוא באפשרות להשתמש בשיטה יעילה, הנקראת **שיטת הסימפלקס** (simplex method) המאפשרת לפתור בעיות תכנון ליניארי, גם כאשר ממדיהן גדולים ביותר.

בשל חשיבותו הגדולה של הנושא מוקדשים פרק זה והשניים הבאים אחריו לתכנון ליניארי. בפרק הראשון מוצגות התכונות הכלליות של בעיות תכנון ליניארי; פרק 2 מתמקד בשיטת הסימפלקס; פרק 3 מציג סוג מסוים של בעיית תכנון ליניארי: בעיית התובלה, שחשיבותו מצדיקה התייחסות נפרדת.

נפתח את הפרק הנוכחי בפיתוח דוגמה פשוטה האופיינית לבעיית תכנון ליניארי. דוגמה זו קטנה במידה המאפשרת לפתור אותה ישירות, בצורה גרפית. לאחר הצגת הפתרון הגרפי של הבעיה, נציג את הצורה הכללית של מודל תכנון ליניארי ואת ההנחות הבסיסיות שלו.

1.1 דוגמה לבעיית תכנון ליניארי (תיאור מילולי)

מפעל קטן לייצור גבינות מייצר שני סוגי גבינות: גבינה רגילה וגבינת שמנת. חומרי הגלם העיקריים המשמשים לייצור שני סוגי גבינות אלה הם זהים: שמנת וחלב, אך כמות חומרי הגלם בכל סוג גבינה שונה:

לייצור ק״ג אחד של גבינה רגילה דרושים 200 מיליליטר שמנת ו-800 מיליליטר חלב, ואילו לייצור ק״ג אחד של גבינת שמנת דרושים 300 מיליליטר שמנת ו-700 מיליליטר חלב.

הרווח של המפעל ממכירת ק״ג אחד של גבינה רגילה הוא 2₪, וממכירת ק״ג אחד של גבינת שמנת הוא 4₪. אילו התאפשר הדבר, המפעל היה מייצר גבינה בכל כמות שהשוק דורש, אך מסיבות שונות יכול המפעל לרכוש בכל יום רק 180,000 מיליליטר שמנת ו-560,000 מיליליטר חלב.

הבעיה העומדת בפני מנהל המפעל היא פשוטה: אילו כמויות של שני המוצרים עליו לייצר, בתנאים הנתונים, כדי שרווחיו יהיו הגבוהים ביותר?

הבה נתבונן היטב בבעיה שיש למנהל מפעל הגבינות. הוא צריך למצוא את הצירוף המתאים של כמויות הייצור של שני מוצריו, שיבטיח למפעל רווח מקסימלי. אבל תהליך הייצור כפוף למגבלות מסוימות – מגבלות חומרי הגלם שהוא יכול להשיג מדי יום.

1.2 ניסוח מתמטי של בעיית תכנון ליניארי

ננסה לנסח את הבעיה בצורה מתמטית.

א. הגדרת משתני החלטה

תחילה עלינו לבחור משתנים שייצגו את הכמויות שתיוצרנה מכל סוג גבינה. נסמן ב-X_1 את הכמות (בק"ג) של הגבינה הרגילה שתיוצר מדי יום, וב-X_2 את הכמות (בק"ג) של גבינת השמנת שתיוצר מדי יום. X_1 ו-X_2 נקראים **משתני ההחלטה** של המודל. באמצעות המודל צריך מנהל המפעל להחליט אילו כמויות (X_1 ו-X_2) הוא צריך לייצר (כדי להגיע לרווח מקסימלי כפוף לאילוצים הנתונים).

ב. ניסוח פונקציית המטרה

מנתוני הבעיה למדנו שהרווח מכל ק"ג גבינה רגילה הוא 2₪, לכן, אם נייצר X_1 ק"ג גבינה רגילה ביום, נרוויח $2X_1$₪. באופן דומה, הרווח מייצור יומי של X_2 ק"ג גבינת שמנת יהיה $4X_2$₪. סך כל הרווח (ביום) של בעל המפעל משני סוגי הגבינות הוא $2X_1 + 4X_2$.

נסמן ביטוי זה ב-Z, ונקבל:

$$Z = 2X_1 + 4X_2 \qquad (1)$$

ביטוי זה הוא **פונקציית המטרה**. המטרה היא להביא למקסימום את הביטוי הזה, כאשר על X_1 ו-X_2 חלים האילוצים בהתאם למגבלות חומרי הגלם שמנהל המפעל יכול להשיג מדי יום.

ג. ניסוח האילוצים

נתבונן במגבלות במסגרתן פועל המפעל, ונעבור לניסוח ה**אילוצים** החלים על X_1 ו-X_2 (כמויות הייצור). נתחיל באילוץ על הכמות המקסימלית של שמנת שניתן לרכוש יומיום.

כדי לייצר X_1 ק"ג גבינה רגילה יש צורך ב-$200X_1$ מיליליטר שמנת, וכדי לייצר X_2 ק"ג גבינת שמנת יש צורך ב-$300X_1$ מיליליטר שמנת.

לפיכך, כמות השמנת הכוללת לה נזדקק לצורך הייצור שלנו תהיה:

$$200X_1 + 300X_2 \qquad (2)$$

כזכור, כמות השמנת המיוצגת על-ידי משוואה (2) מוגבלת ל-180,000 מיליליטר.

לפיכך חייב להתקיים אי-השוויון הזה:

$$200X_1 + 300X_2 \leq 180{,}000 \qquad (3)$$

באופן דומה, דרושים $800X_1$ מיליליטר חלב כדי לייצר X_2 ק"ג גבינה רגילה, ו-$700X_2$ מיליליטר חלב כדי לייצר X_2 ק"ג גבינת שמנת. לפיכך, כמות החלב הכוללת לה נזדקק תהיה:

$$800X_1 + 700X_2 \qquad (4)$$

ובגלל מגבלת כמות החלב העומדת לרשותנו, חייב להתקיים אי-השוויון הזה:

$$800X_1 + 700X_2 \leq 560{,}000 \qquad (5)$$

שאלה 1.1

כיצד ישתנו האילוצים בשני המקרים האלה:

א. כמות השמנת מוגבלת ל-200,000 מיליליטר.

ב. כמות החלב הדרושה ליצור ק"ג גבינת שמנת היא 500 מיליליטר.

ד. אילוצי אי-שליליות

ברור לנו כי לא נייצר כמויות שליליות של מוצר כלשהו.

כלומר, חייבים להתקיים אי-השוויונים האלה:

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0 \qquad (6)$$

אי-שוויונים אלה נקראים **אילוצי אי-שליליות.**

לפיכך, הבעיה היא למצוא את הערכים של X_1 ו-X_2 שיקיימו:

Maximize $\quad Z = 2X_1 + 4X_2$

Subject to:

$$200X_1 + 300X_2 \leq 180{,}000$$

$$800X_1 + 700X_2 \leq 560{,}000$$

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$$

זוהי דוגמה אופיינית לבעיית תכנון ליניארי.

לעיתים קרובות נוח יותר לרכז את כל נתוני הבעיה בטבלה אחת. במקרה שלפנינו הטבלה תיראה כך:

	הגבלת כמות	גבינת שמנת X_2 ק״ג	גבינה רגילה X_1 ק״ג
רווח (ש״ח לק״ג)	–	4	2
שמנת (מיליליטר)	180,000	300	200
חלב (מיליליטר)	560,000	700	800

קיימים ערכים רבים של X_1 ו-X_2 המקיימים את האילוצים (פתרונות אפשריים).

הנה דוגמה לפתרון אפשרי לבעיה, כלומר פתרון המקיים את האילוצים:

$X_1 = 300$ ו-$X_2 = 400$.

אם נציב את הערכים של (X_1, X_2) באילוצים השונים, נראה שהם מתקיימים.

באילוץ על השמנת נקבל:

$$200 * \mathbf{300} + 300 * \mathbf{400} = 180{,}000 \leq 180{,}000$$

באילוץ על החלב נקבל:

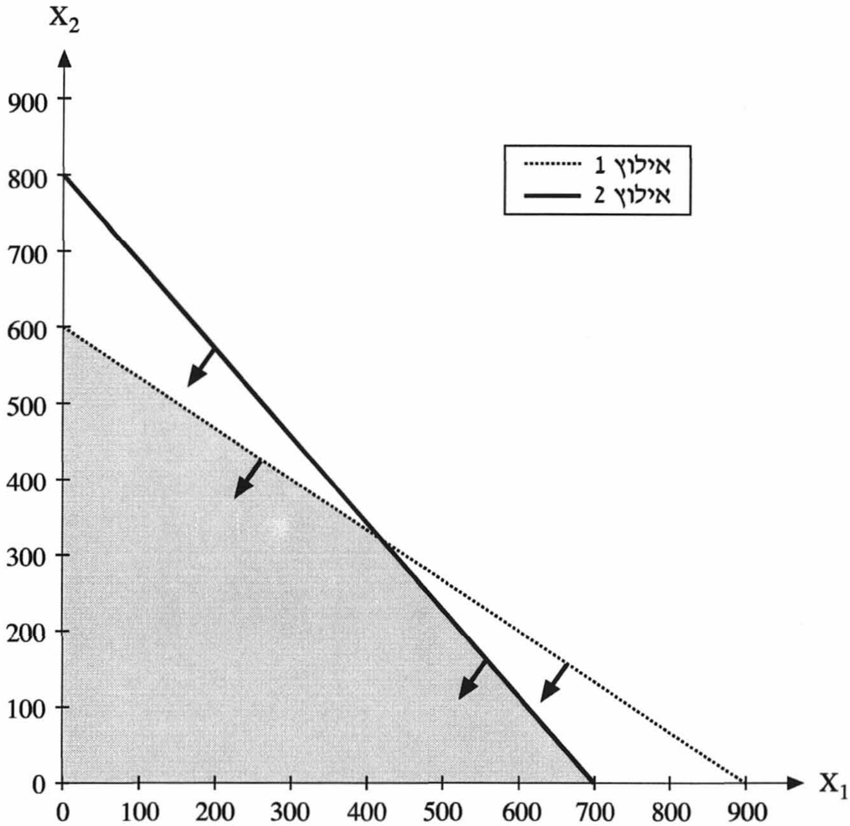
$$800 * \mathbf{300} + 700 * \mathbf{400} = 520{,}000 \leq 560{,}000$$

אם נציב את הערכים $X_1 = 300$ ו- $X_2 = 400$ בפונקציית המטרה $(Z = 2X_1 + 4X_2)$ נקבל $Z = 2200$.

פתרון אפשרי זה אינו אופטימלי, קיימים פתרונות אפשריים טובים יותר. לדוגמה, פתרון אפשרי טוב יותר יהיה $X_1 = 150$ ו-$X_2 = 500$ (בדקו שפתרון זה מקיים את האילוצים).

ערך פונקציית המטרה במקרה זה יהיה $Z = 2300$.

כדי לתאר את תחום הפתרונות האפשריים נוח מאד להיעזר באיור גרפי (ראו איור 1.1).



איור 1.1
תיאור התחום האפשרי

תחום הפתרונות האפשריים לבעיה הוא האזור המוצלל שחסום על-ידי שני הישרים שמייצגים את האילוצים. לכל אילוץ מוצמדים חצים המראים את הכיוון האפשרי לפתרונות שמציב האילוץ.

אפשר להוכיח שנקודת המקסימום של פונקציית המטרה מתקבלת בנקודה שבה $X_1 = 0$ ו-$X_2 = 600$. הערך המקסימלי של פונקציית המטרה הוא $Z = 2400$, כלומר, הרווח המקסימלי של בעל מפעל הגבינות יתקבל אם הוא ייצר 600 ק״ג גבינת שמנת בלבד (ולא ייצר בכלל גבינה רגילה).

בכל נקודה אחרת בתחום הפתרונות האפשריים מתקבל ערך נמוך יותר של פונקציית המטרה.

הבעיה שהצגנו היא דוגמה לבעיית החלטה. בבעיה מסוג זה יש לבחור משתני החלטה שיקיימו את כל האילוצים, ויביאו לאופטימום את פונקציית המטרה. כלומר, יש לבחור פתרון אפשרי אופטימלי.

שאלה 1.2

מצאו את ערך פונקציית המטרה Z עבור נקודות אלה:

- $X_1 = 420$ ו-$X_2 = 320$ (נקודת המפגש בין שני הישרים המייצגים את האילוצים)
- $X_1 = 700$ ו-$X_2 = 0$
- $X_1 = 300$ ו-$X_2 = 300$

בתכנון ליניארי כל קבוצת ערכים של משתני החלטה תיקרא **פתרון**, גם אם אינה עונה על אילוצי הבעיה. בתכנון ליניארי אנו מבחינים בין סוגים שונים של פתרונות, כמפורט להלן.

פתרון אפשרי (feasible solution) הוא פתרון המקיים את כל אילוצי הבעיה.

הפתרון האפשרי שהוצג באיור 1.1 הוא $X_1 = 150$ ו-$X_2 = 500$.

ואילו $X_1 = 0$ ו-$X_2 = 800$ הוא פתרון שאינו אפשרי.

אוסף כל הפתרונות האפשריים נקרא **התחום האפשרי** או תחום הפתרונות האפשרי. באיור 1.1 התחום האפשרי הוא התחום המקווקו.

פתרון אופטימלי (optimal solution) הוא פתרון אפשרי הנותן את הערך הטוב ביותר לפונקציית המטרה. כלומר, פתרון אופטימלי נותן את הערך הקטן ביותר עבור בעיית מינימום, או את הערך הגדול ביותר עבור בעיית מקסימום.

בדוגמה שראינו, הפתרון האופטימלי התקבל בקודקוד של התחום האפשרי. תופעה זו של פתרון אופטימלי בקודקוד אינה מקרית, והיא נובעת מהסיבה הזו: כאשר יש למצוא נקודת מינימום או נקודת מקסימום של פונקציית מטרה ליניארית, ככל שנתקדם בכיוון העלייה של הפונקציה או בכיוון הירידה שלה, נקבל פתרון טוב יותר. תחום הפתרונות האפשריים מגביל את התקדמותנו בכיוון העלייה או הירידה, לכן ברור שנשאף להתקדם אל הנקודה האחרונה האפשרית, הנמצאת כמובן על שפת התחום האפשרי.

מהדוגמה של מפעל הגבינות ניתן להכליל ולהסיק את המסקנה הזו:

הפתרונות האופטימליים של בעיית תכנון ליניארי, שתחום הפתרונות האפשריים שלה חסום ולא ריק, נמצאים על קדקוד אחד או על כמה קדקודים סמוכים, הנמצאים על אותה צלע של תחום הפתרונות האפשריים.

בשלב זה נסתפק בציון המסקנה שהבאנו לעיל ולא נמשיך לעסוק בה; בפרקים הבאים היא תהיה הבסיס לפתרון בעיות תכנון ליניארי.

1.3 מרכיבי מודל התכנון הליניארי

הבעיה של מפעל הגבינות מדגימה בעיית תכנון ליניארי אופיינית, שיש לה שני משתנים. אולם רוב הבעיות בתכנון ליניארי הן מורכבות יותר, ומכילות מספר רב של משתנים ואילוצים. בסעיף זה נדון במאפיינים הכלליים של בעיית התכנון הליניארי.

בעיית תכנון ליניארי טיפוסית כוללת שלושה מרכיבים עיקריים:

1. משתני החלטה;
2. פונקציית המטרה (של משתני ההחלטה);
3. אילוצים (על משתני ההחלטה).

משתני החלטה

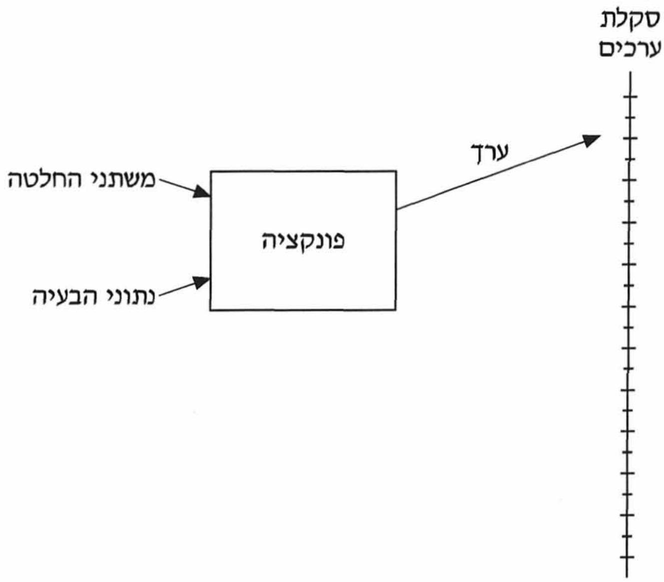
משתני החלטה מייצגים את ההחלטה שיש לקבל. פתרון בעיית ההחלטה מתמצה במציאת הערכים עבור משתני ההחלטה אשר עומדים **באילוצים** על משתני ההחלטה, ואשר מביאים לאופטימום את **פונקציית המטרה**.

מספר משתני הבעיה הוא כמובן חלק חשוב בהגדרת היקף הבעיה, כמו שפתרון משוואה בת נעלם אחד פשוט יותר מפתרון מערכת משוואות עם כמה נעלמים. גם בבעיות החלטה, ככל שגדל מספר משתני ההחלטה, גדלה גם סיבוכיות הפתרון.

פונקציית המטרה

פונקציית המטרה היא ביטוי אלגברי המייצג את **המטרה העיקרית** של המערכת (בדוגמה שלנו – השגת רווח מקסימלי). אפשר להתייחס לפונקציית המטרה כאל כלי מתמטי אשר מקבל מצד אחד (צד הקלט) את **משתני ההחלטה** וחלק מנתוני הבעיה (בדוגמה שלנו – הרווח מכל סוג גבינה), ומפיק ערך המשמש כ"ציון" עבור פתרון נתון. הערך שמפיקה

פונקציית המטרה משמש להשוואה בין הפתרונות השונים ולמציאת הפתרון האופטימלי ביניהם (איור 1.2).



איור 1.2
תיאור הפעולה של פונקציית המטרה

בחירת הפתרון האופטימלי, על-פי הערך שמפיקה פונקציית המטרה, אינו מחייב לבחור דווקא בפתרון בעל הערך המקסימלי, כפי שראינו בבעיה של בעל מפעל הגבינות. קיימות דוגמאות רבות בהן הפתרון האופטימלי יהיה הפתרון בעל הערך הנמוך ביותר. לדוגמה, בבעיות ייצור רבות צריכים לייצר תפוקה נתונה במינימום של הוצאות.

באופן כללי: כאשר נעסוק בבעיות חישוב **רווח**, אלה תהיינה בעיות שפונקציית המטרה שלהן היא מקסימום, ואילו כאשר נעסוק בבעיות **חישוב הוצאות** אלה תהיינה בעיות שפונקציית המטרה שלהן תהיה מינימום.

אילוצים

האילוצים על משתני ההחלטה הם **עובדות המונעות ממקבל ההחלטה לבחור פתרונות מסוימים**. אילוצים אלה עלולים להיות מגבלות על כמות אמצעי הייצור, כמו: חומרי-גלם, זמן ותקציב (בדוגמה שלנו – מגבלות על כמויות השמנת והחלב שניתן להשיג).

האילוצים על משתני ההחלטה של בעיית החלטה מצמצמים את תחום הפתרונות האפשריים, לכן יש חשיבות רבה להבנת המגבלות. קביעת הפתרונות האפשריים, תוך שימוש מוקדם ככל האפשר באילוצים, יכולה להקטין במידה ניכרת את זמן הפתרון של הבעיה. מרבית המודלים לבעיית החלטה כוללים התייחסות מוקדמת לאילוצים על משתני ההחלטה, ובשל כך – צמצום הפתרונות האפשריים שנצטרך לבדוק במהלך החיפוש אחר הפתרון האופטימלי.

1.4 ההנחות עליהן מבוסס מודל התכנון הליניארי

בסעיפים הקודמים הכרנו את בעיות התכנון הליניארי ומנינו את מרכיביו של מודל התכנון הליניארי. המאפיינים המתמטיים של מרכיבי מודל התכנון הליניארי הם:

1. פונקציית מטרה ליניארית;
2. הפתרון כולל מציאת **מינימום** או **מקסימום** של פונקציית המטרה;
3. האילוצים על משתני ההחלטה הם משוואות ליניאריות.

1.4.1 פונקציית מטרה ליניארית

פונקציה ליניארית היא פונקציה שבנויה מסכום של איברים, אשר כל אחד מהם הוא קבוע או משתנה המוכפל במקדם (קבוע); המשתנים בפונקציה צריכים להיות בחזקת 1.

להלן כמה דוגמאות לפונקציות ליניאריות:

$$Z = 3X_1 + 2X_2 + 5$$

$$Z = 5X_1 - 3X_2 - 7$$

שימו לב, משתני הפונקציות (X_1 ו-X_2) הם בחזקת 1, ומבנה הפונקציה הוא סכום של משתני הפונקציה, מוכפלים בקבוע (שיכול להיות גם שלילי) ועוד קבוע חופשי (שגם הוא יכול להיות שלילי).

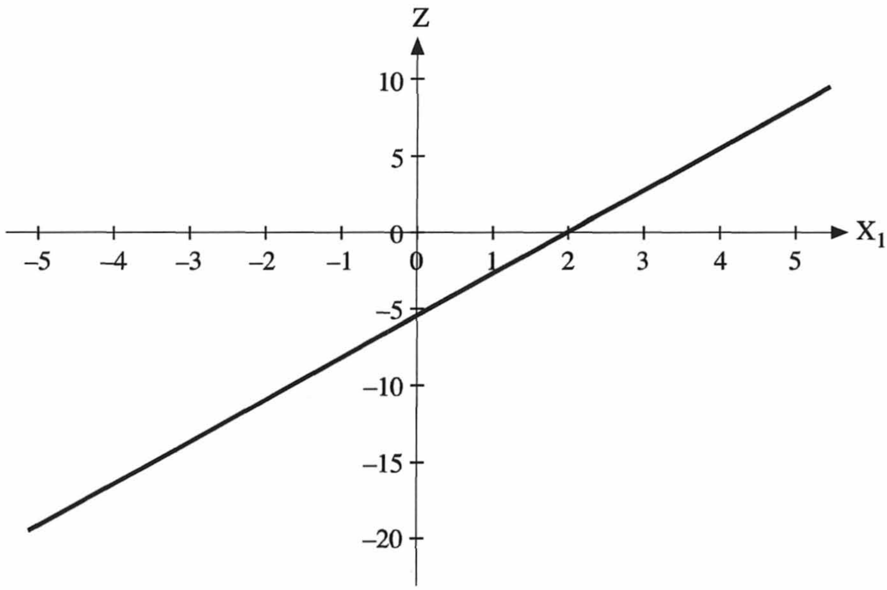
להלן דוגמאות ל**פונקציות לא ליניאריות**:

$$Z = 3X_1^2 - 5$$

$$Z = X_1X_2 + 2X_1 + 3X_2 + 5$$

כפי שראינו, משתני ההחלטה משמשים כמשתני פונקציית המטרה. כאשר פונקציית המטרה היא בעלת משתנה יחיד, תיאורה הגרפי הוא פשוט. באיור 1.3 מתוארת הפונקציה הליניארית:

$$Z = 3X_1 - 6$$



איור 1.3
התיאור הגרפי של פונקציית המטרה $Z = 3X_1 - 6$

במקרה שהפונקציה היא בעלת משתנה יחיד, הגרף המתאר את הפונקציה הוא קו ישר.

שאלה 1.3

כיצד ייראה גרף של פונקציה לא ליניארית בעלת משתנה יחיד?

שאלה 1.4

איזו מן הפונקציות להלן היא ליניארית ואיזו אינה ליניארית?

א. $Z = X_1^2 + 2X_2$

ב. $Z = X_1X_2 + 5$

ג. $Z = 2X_1 + X_2$

ד. $Z = 5X_1 + 3X_2 - 7$

היכולת לתאר באופן גרפי דו-ממדי את פונקציית המטרה ואת האילוצים מקל במידה ניכרת על פתרון הבעיה, ומאפשר הסקת מסקנות בצורה פשוטה. יתרון זה אינו בר-ביצוע כאשר מספר המשתנים של פונקציית המטרה עולה על שניים. במקרה זה המשתנים של הפונקציה מיוצגים על-ידי שלושה צירים במרחב תלת-ממדי, אשר מכיל את כל הפתרונות האפשריים לבעיה. גרף הפונקציה עצמו נמצא בממד רביעי שאינו ניתן לציור במובן המקובל.

עם זאת, מרבית התכונות של בעיות תכנון ליניארי עם n משתנים, שיתוארו בהמשך, ניתנות להבנה על-סמך דוגמאות של בעיות בעלות שני משתני החלטה, ושיטות הפתרון שנלמד בפרק הבא יודגמו על בעיות כאלה.

1.4.2 מציאת מינימום או מקסימום של פונקציית המטרה

מודל התכנון הליניארי מתאים לבעיות בהן צריך למצוא מינימום או מקסימום של פונקציית המטרה. נתבונן בגרף הפונקציה הליניארית באיור 1.3. נניח כי נדרשנו למצוא נקודת מינימום של פונקציית המטרה, כפוף לאילוץ $X_1 \geq 3$. במקרה זה, נקודת המינימום של פונקציית המטרה תהיה כמובן בנקודה $X_1 = 3$. (התוכלו להסביר מדוע?)

שאלה 1.5

מהו הערך המקסימלי של פונקציית המטרה המתוארת באיור 1.3, כאשר נתון האילוץ $X_1 \leq 5$?

1.4.3 האילוצים על משתני ההחלטה הם ליניאריים

הגבלת הפתרונות האפשריים של בעיית החלטה לתחום מסוים, מתוארת בעזרת **האילוצים על משתני ההחלטה**. אילוצים אלה הם משוואות (או אי-שוויונים). בספר זה נשתמש בביטוי **משוואה** כשם כולל לביטויים המכילים את אחד מהסימנים $=, <, >, \geq, \leq, \neq$. המשוואות האלה מכילות חלק ממשתני הבעיה או את כל המשתנים. פתרון של כל משוואה כזו הוא אוסף נקודות המהוות את התחום שבו ניתן לחפש את הפתרון האופטימלי – **תחום הפתרונות האפשריים**. כאשר יש כמה אילוצים על משתני ההחלטה, תחום הפתרונות

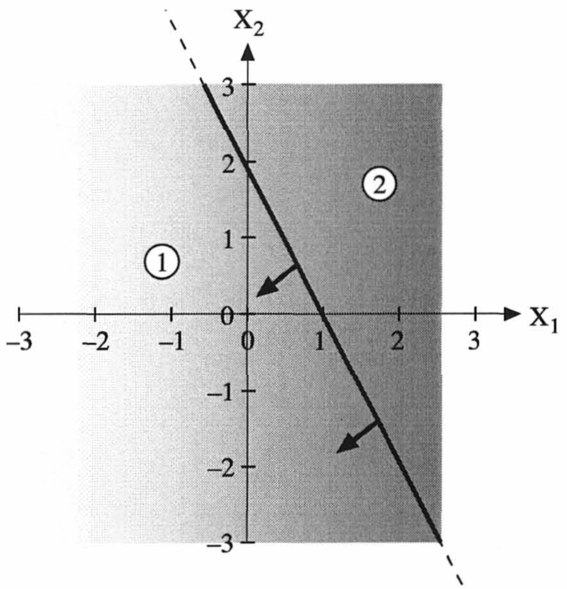
האפשריים הוא חיתוך התחומים המתקבלים מכל אילוץ כזה, או, לשון אחרת, אוסף הנקודות המופיעות בתחומים האפשריים של **כל האילוצים**.

משוואה המתארת אילוץ ליניארי היא משוואה העונה על דרישות הדומות לדרישות שהעמדנו בפני פונקציית המטרה הליניארית.

ניקח לדוגמה את המשוואה הליניארית:

$$2X_1 + X_2 - 2 \le 0$$

משוואה זו עונה על ההגדרה של משוואה ליניארית, ואיור 1.4 מתאר את האילוץ על הפתרון המקיים משוואה זו:



איור 1.4
התחום האפשרי של האילוץ $2X_1 + X_2 - 2 \le 0$

הישר המתאר את האילוץ הוא אוסף הנקודות במישור, המקיימות את המשוואה $2X_1 + X_2 - 2 = 0$. קו ישר זה מחלק את המישור לשני חלקים, המסומנים באיור 1.4 במספרים 1 ו-2.

בצד אחד נמצאות כל הנקודות עבורן $2X_1 + X_2 - 2 < 0$

ובצד שני נמצאות כל הנקודות עבורן $2X_1 + X_2 - 2 > 0$.

נשאלת השאלה: איזה חלק מהמישור הוא תחום הפתרונות האפשריים?

שיטה פשוטה לבחירת התחום האפשרי היא:

בחירת נקודה אחת מאחד התחומים, הצבתה במשוואה ובדיקה אם מתקבל ביטוי אמת או ביטוי שקר.

במקרה שלנו נבדוק את הנקודה (0,0) שהיא הפתרון $X_1 = 0$ ו- $X_2 = 0$ ונקבל את הביטוי $0 \leq 2$ שהוא כמובן ביטוי אמת. המסקנה היא שתחום הפתרונות האפשריים, הנתון על-ידי האילוץ על משתני ההחלטה שבדוגמה, הוא התחום המסומן במספר 1, ובגלל סימן השוויון במשוואה הוא כולל גם את הקו הישר עצמו.

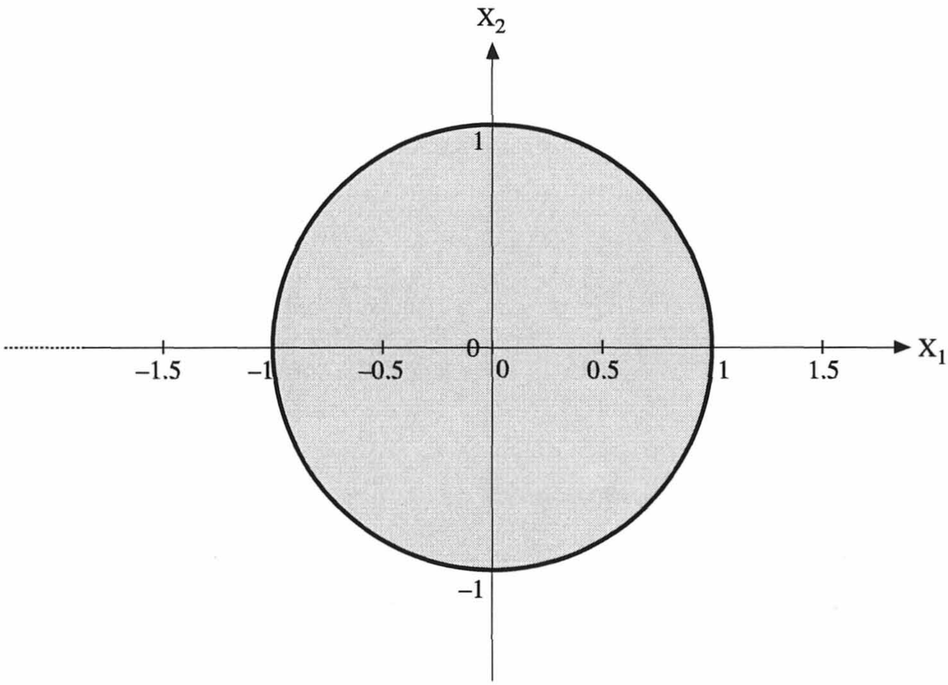
החיצים המופיעים באיור מראים את כיוון התחום האפשרי של אילוץ זה.

שאלה 1.6

מהו תחום הפתרונות האפשריים הנתון על-ידי המשוואה $2X_2 + 3 \leq X_1 + 1$?

איור 1.5 מתאר את התחום האפשרי של האילוץ הנתון על-ידי המשוואה:

$$X_1^2 + X_2^2 \leq 1$$



איור 1.5
התחום האפשרי של האילוץ $X_1^2 + X_2^2 \le 1$

התחום האפשרי כולל את כל הנקודות (X_1,X_2) אשר מקיימות את אי השוויון. נקודות אלה הן הנקודות הנמצאות בתוך מעגל בעל רדיוס 1 (לפי משפט פיתגורס). סימן השוויון מראה כי גם המעגל עצמו כלול בתחום הפתרונות האפשריים.

כפי שבוודאי הבחנתם, האילוץ המופיע בדוגמה הקודמת הוא אילוץ לא-ליניארי. ניתן לראות זאת במשוואה עצמה, הכוללת חזקות ריבועיות של משתני ההחלטה (ולא חזקות של 1 כנדרש) וכן בגרף המתאר את האילוץ שאינו קו ישר.

תחום הפתרונות האפשריים נקבע על-ידי כמה אילוצים ליניאריים

התחום האפשרי הוא התחום המשותף לכל האילוצים על הפתרון. נניח לדוגמה, כי בבעיית החלטה מסוימת נתונים האילוצים האלה:

1. $X_2 + X_1 \le 2$
2. $X_1 - X_2 \le 1$

3. $X_1 \geq 0$

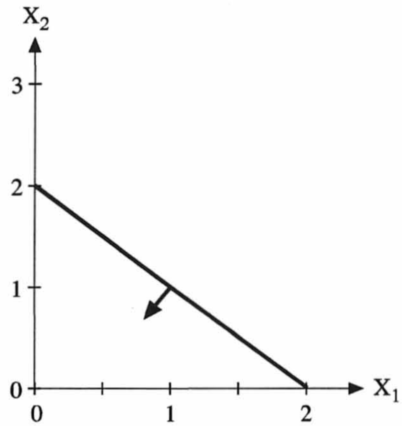
4. $X_2 \geq 0$

ארבע המשוואות מייצגות את האילוצים על משתני ההחלטה. הן יוצרות ארבעה קווים ישרים, שכל אחד מהם מחלק את המישור לשני חלקים. חלק אחד הוא תחום הפתרונות האפשריים, והחלק השני הוא תחום הפתרונות שאינם מקיימים את האילוץ.

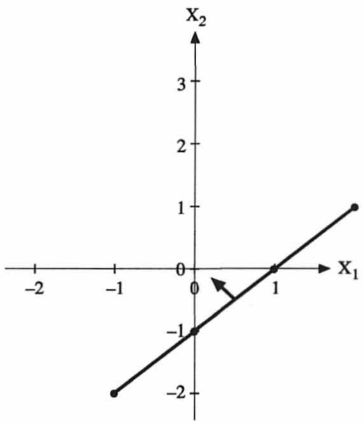
איור 1.6 מתאר את התחום האפשרי של שני האילוצים הראשונים (גרפים א-ב) ואת החיתוך בין שני האילוצים הראשונים ושני אילוצי האי-שליליות (גרף ג). קיבלנו תחום סגור (החלק הצבוע בחלק ג של האיור). התחום הסגור מכיל בתוכו את כל הנקודות שמציינות פתרונות אפשריים לבעיית ההחלטה. מתוך תחום זה יש לבחור את הנקודה בעלת הערך האופטימלי על-פי פונקציית המטרה הנתונה בבעיה.

הפתרון של בעיית תכנון ליניארי מתחלק אם-כן לשני שלבים :

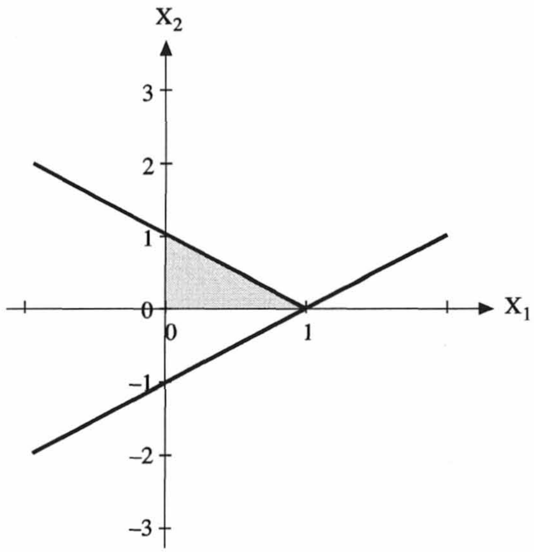
1. הגדרת התחום האפשרי (קבוצת כל הפתרונות האפשריים) ;
2. בחירת פתרון אופטימלי (בחירת הפתרון האפשרי הטוב ביותר).



חלק א' $X_2+X_1 \leq 2$



חלק ב' $X_2-X_1 \leq 1$



חלק ג'

איור 1.6
תחום פתרונות אפשריים לפתרון המוגדר על-ידי 4 אילוצים

בחלק א של איור 1.6 אנו רואים את משוואת הקו הישר של האילוץ $X_2 + X_1 \le 2$ החץ שמופיע באיור מראה את הכיוון שבו נמצאים הפתרונות האפשריים, לאחר הוספת מגבלת אילוץ זה.

בחלק ב של איור 1.6 אנו רואים את משוואת הקו הישר של האילוץ $X_2 - X_1 \le 1$. גם כאן החץ שמופיע באיור מראה את הכיוון שבו נמצאים הפתרונות האפשריים לאחר הוספת מגבלת אילוץ זה.

בחלק ג של איור 1.6 התחום המקווקו הוא התחום האפשרי המתקבל לאחר צירוף מגבלות שני האילוצים מחלק א, חלק ב ושני אילוצי האי-שליליות.

שאלה 1.7

מהו תחום הפתרונות האפשריים המשותף לאילוצים האלה :

$$2X_2 - 3X_1 \le 0 \quad ; \quad X_2 \ge 0 \quad ; \quad X_1 \le 2$$

בפרק הבא נחקור ביתר פירוט את התכונות הגיאומטריות של התחום האפשרי של בעיות תכנון ליניארי, ונראה כיצד תכונות אלה משפיעות על השיטה למציאת הפתרון האופטימלי.

1.5 דוגמאות לניסוח בעיות תכנון ליניארי

בסעיף זה נדגים כיצד ניתן לנסח בעיות תכנון ליניארי על-ידי מציאת שלושת מרכיבי המודל:

- משתני ההחלטה;
- פונקציית המטרה;
- האילוצים.

דוגמה 1.1 – תכנון חקלאי

חקלאי מגדל לאורך שנים מלפפונים ועגבניות בשדה ששטחו 30 דונם. השנה, לקראת הסתיו עליו להחליט כמה דונם יקצה לעגבניות וכמה יקצה למלפפונים. להלן ניתוח של גידוליו בשנים האחרונות:

סוג הגידול	תפוקה לדונם (טונה)	רווח לטונה (שקל)	צריכת מים לדונם
עגבניות	3	1500	18
מלפפונים	4	600	10

עקב הבצורת בשנים האחרונות הוקצבה לחקלאי, לתקופת הגידול הנוכחית, מכסת מים של 450 קוב; האחראי על השיווק במושב דורש לקבל לפחות 1 טון מלפפונים על כל 3 טון עגבניות.

נסחו את הבעיה כבעיית תכנון ליניארי.

פתרון

1. קביעת משתני החלטה

החקלאי צריך להחליט כמה דונם יקצה לכל אחד משני הגידולים, לפיכך משתני ההחלטה שנבחר יהיו כמספר הדונמים המוקצים לכל גידול. נגדיר:

X_1 – מספר הדונמים המוקצים לעגבניות;

X_2 – מספר הדונמים המוקצים למלפפונים.

2. הגדרת פונקציית המטרה

פונקציית המטרה היא הפונקציה המחשבת את שיעור הרווח של החקלאי:

$$Z = 3 \cdot 1500X_1 + 4 \cdot 600X_2$$

פונקציית המטרה כופלת את התפוקה לדונם ברווח לטונה (נתונים הלקוחים מתוך **נתוני הבעיה**) במספר הדונמים המוקצים לכל גידול שהם **משתני ההחלטה**.

3. קביעת האילוצים

ההחלטה כפופה כמובן לכמה **אילוצים על משתני ההחלטה**. לפי תיאור הבעיה קיימים שלושה אילוצים:

א. מגבלת **מכסת המים**

$$18X_1 + 10X_2 \leq 450$$

ב. **סך-כול השטח** העומד לרשות החקלאי

$$X_1 + X_2 \leq 30$$

ג. מגבלת שיווק על היחס בין כמות העגבניות לכמות המלפפונים. משקל המלפפונים צריך להיות גדול משליש משקל העגבניות לשיווק, או בניסוח מתמטי:

$$X_2 \geq \frac{X_1}{3}$$

$$X_2 - \frac{X_1}{3} \geq 0$$

4. הוספת אילוצי אי-שליליות

אולם מגבלות אלה, הנובעות מתוך תיאור הבעיה, אינן היחידות. במקרים רבים קיימות **מגבלות פתרון** נוספות הנובעות מתוך המציאות עצמה אך אינן כתובות במפורש בתיאור הבעיה. לשם איתורן יש להפעיל את השכל הישר ואת הניסיון; התעלמות מהן עלולה להביא לפתרונות שגויים. בדוגמה שלפנינו קיימת מגבלה נוספת, הנובעת מאופי משתני ההחלטה.

משתני ההחלטה הם מספר הדונמים שהוקצו לכל גידול, לכן הם חייבים להיות מספרים אי-שליליים. עובדה זו נראית טריוויאלית וברורה, אך פתרון מתמטי גרידא עלול לא להתחשב במגבלות אלו ולהפיק פתרון הכולל מספרים שליליים. משום כך יש להוסיף את אילוצי אי-השליליות:

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

אם נרכז את כל המרכיבים המתמטיים של הבעיה, נקבל:

Maximize $Z = 3 \cdot 1500 \cdot X_1 + 4 \cdot 600 \cdot X_2$

Subject to:

$$18X_1 + 10X_2 \leq 450$$

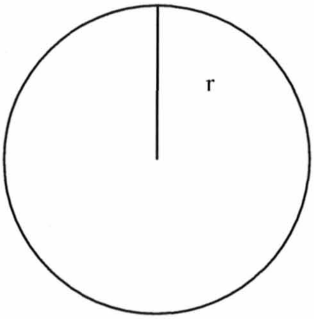
$$X_2 - \frac{X_1}{3} \geq 0$$

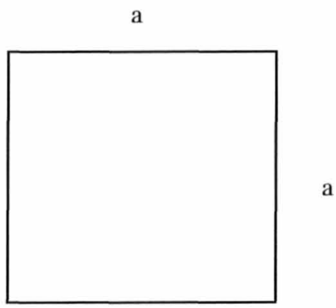
$$X_1 + X_2 \leq 30$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0$$

דוגמה 1.2 – בעיית המכלאות

בחוות הסוסים בקיבוץ החליטו לבנות שתי מכלאות מגודרות. האחת ריבועית לצורך אימוני רכיבה, והשנייה מעגלית לצורך אילוף הסוסים (ראו איור 1.7). מכלאת אימוני הרכיבה (הריבועית) חייבת להיות בעלת צלע העולה על 25 מטר (לצורך מסלול האימונים); היקפה של המכלאה המעגלית חייב לעלות על 200 מטר (לצורכי האילוף). כל אחת מהמכלאות חייבת להיות מוקפת בגדר. לצורך הקמת המכלאות הוקצה תקציב שיאפשר הקמת גדר באורך כולל של 500 מטר; יש להחליט כיצד ניתן לבנות את המכלאות כך שהיקפן הכולל יהיה מקסימלי.





איור 1.7
מכלאות הרכיבה המעגלית (משמאל) והריבועית (מימין)

פתרון

1. קביעת משתני ההחלטה

בבעיה זו **משתני ההחלטה** אינם נתונים בצורה מפורשת, וכל שהוגדר הוא שיש לתכנן את בניית המכלאות. עלינו להגדיר את משתני ההחלטה כך שפתרון אפשרי באמצעותם יצביע על מבנה המכלאות מצד אחד, ויהיה ניתן לנסח את הבעיה בצורה מתמטית מצד שני. משום כך נבחר להגדיר את משתני ההחלטה באופן הזה:

X_1 – רדיוס המכלאה המעגלית

X_2 – צלע המכלאה הריבועית

2. הגדרת פונקציית המטרה

הגדרת פונקציית המטרה דורשת ידע נוסף – במקרה זה ידע בגיאומטריה.

כידוע, משוואות ההיקף של ריבוע ומעגל, הן

היקף הריבוע $L = 4a$

היקף העיגול $L = 2\pi r$

כיוון שעלינו למצוא פתרון שבו ההיקף הכולל של המכלאות יהיה מקסימלי, נקבע את **פונקציית המטרה** כך שתבטא את השטח הכולל של המכלאות:

$$Z = 2\pi X_1 + 4X_2$$

3. קביעת האילוצים על משתני ההחלטה

האילוצים על משתני ההחלטה, המשפיעים על הפתרון האופטימלי, נתונים במקרה זה באופן מפורש:

אורך הגדר המקיפה את המכלאות	$2\pi X_1 + 4X_2 \le 500$
היקף הריבוע	$X_2 \ge 25$
היקף העיגול	$2\pi X_1 \ge 200$

4. הוספת אילוצי אי-שליליות

כמו בבעיית החקלאי, גם כאן היקף המכלאות חייב להיות אי-שלילי, לכן נוסיף את אילוצי אי-השליליות:

$$X_1 \ge 0$$

$$X_2 \ge 0$$

נסכם את ניסוח הבעיה:

Maximize $Z = 2\pi X_1^2 + 4X_2$

Subject to:

$$2\pi X_1 + 4X_2 \le 500$$

$$X_2 \ge 25$$

$$2\pi X_1 \ge 200$$

$$X_1 \ge 0 \quad , \quad X_2 \ge 0$$

דוגמה 1.3 – בעיית המכס

מפעל טקסטיל בדרום הארץ מייצר חולצות, מכנסיים ומעילים לייצוא. המפעל משלם מכס על שיווק המוצרים בחו"ל לפי סוג הפריט:

המכס	הפריט
10ש"ח	חולצה
15ש"ח	מכנסיים
20 ש"ח	מעיל

העברת המוצרים נעשית במכולות; נפח ההעמסה של כל מכולה מוגבל. כל מכולה יכולה להכיל 1000 חולצות או 500 מכנסיים או 200 מעילים. כל מכולה יכולה להכיל כמובן גם צירופים שונים של חולצות, מכנסיים ומעילים.

המשווק בחו"ל מעוניין לקבל מכולת פריטים אשר מכילה לפחות 100 פריטים מכל סוג, אך מספר החולצות חייב להיות שווה למספר זוגות המכנסיים או קטן ממנו. המשווק קונה מכולה מלאה במחיר קבוע, ללא קשר להרכב המוצרים במכולה, ובלבד שיעמוד בדרישותיו. מהו ההרכב האופטימלי למכולה?

פתרון

1. קביעת משתני ההחלטה

נגדיר את **משתני ההחלטה** כמספר הפריטים מכל סוג המועמסים למכולה:

X_1 – מספר החולצות במכולה

X_2 – מספר זוגות המכנסיים במכולה

X_3 – מספר המעילים במכולה

2. הגדרת פונקציית המטרה

כדי להגדיר את פונקציית המטרה נרכז את נתוני הבעיה בטבלה:

הפריט	המכס לפריט (שקלים)	הנפח החלקי של הפריט מתוך הנפח הכולל של המכולה
חולצות	10	1/1000
מכנסיים	15	1/500
מעילים	20	1/200

כיוון שהרווח של המפעל אינו תלוי בהרכב המוצרים, ההרכב האופטימלי של המוצרים הוא זה שיחייב את המפעל במכס הנמוך ביותר. משום כך נקבע את **פונקציית המטרה** כך שתבטא את המכס הכולל שישולם על-פי הרכב הפריטים במכולה:

$$Z = 10X_1 + 15X_2 + 20X_3$$

בניגוד לדוגמאות הקודמות, אנו דורשים במקרה זה שהערך שהפונקציה מפיקה עבור פתרון אופטימלי יהיה מינימלי.

3. קביעת האילוצים על משתני ההחלטה

האילוצים על משתני ההחלטה שלפנינו מבוססים על נפח הפריטים הכולל ועל דרישות השיווק; ננסח אותם בצורה זו:

$$\frac{1}{1000}X_1 + \frac{1}{500}X_2 + \frac{1}{200}X_1 = 1$$

$$X_1 \geq 100$$

$$X_2 \geq 100$$

$$X_3 \geq 100$$

$X_1 \leq X_2$ (או $X_1 - X_2 \leq 0$)

4. הוספת אילוצי אי-שליליות

בבעיה זו אין צורך להגביל את מספר הפריטים; אין חשש שנקבל כתוצאה מספר אי-שלילי מפני שמגבלה זו מיושמת כבר במגבלת מספר הפריטים (לפחות 100 מכל סוג). עם זאת, יש בבעיה זו מגבלה שעלולה להתנגש עם הפתרון המתמטי הטהור של הבעיה: העובדה שמספר הפריטים מכל סוג חייב להיות מספר שלם. במציאות אי אפשר לשווק מספר לא שלם של פריטי לבוש, ואילו הפתרון המתמטי עלול לתת מספר כזה.

נסכם את ניסוח הבעיה:

Minimize $Z = 10X_1 + 15X_2 + 20X_3$

Subject to:

$$\frac{1}{1000}X_1 + \frac{1}{500}X_2 + \frac{1}{200}X_1 = 1$$

$X_1 \geq 100$

$X_2 \geq 100$

$X_3 \geq 100$

$X_1 - X_2 \leq 0$

X_1, X_2, X_3 integers

שאלה 1.8

מפעל מייצר כיסאות-נוח בשני גדלים; הכסאות עשויים עץ ובד. כסא-נוח גדול צורך 5 ק"ג עץ ו-3 מטר בד, וכסא-נוח קטן צורך 4 ק"ג עץ ו-2 מטר בד. המפעל מרוויח על כל כסא-נוח גדול 4 ש"ח ועל כל כסא-נוח קטן 3 ש"ח. ספק חומרי הגלם של המפעל מסוגל לספק 4000 ק"ג עץ ו-2500 מטר בד לחודש; משווק המוצרים אינו מוכן לרכוש בחודש יותר כסאות-נוח גדולים מאשר כסאות קטנים.

מנהל הייצור של המפעל נדרש להחליט מהו מספר כסאות הנוח הקטנים ומהו מספר כסאות הנוח הגדולים שייצר המפעל בחודש. נסחו את הבעיה כבעיית תכנון ליניארי.

שאלה 1.9

ספקי האינטרנט מחוברים לרשת האינטרנט העולמית באמצעות סיבים אופטיים משלושה סוגים. כל סיב מסוגל להעביר מידע בנפח מסוים, ודורש טיפול תקופתי בתדירות שונה. נתוני הסיבים מרוכזים בטבלה הבאה:

סוג הסיב	עלות הנחת סיב (מיליוני דולרים)	קצב העברת הנתונים (GB לשנייה)	זמן בין טיפולים תקופתיים (בחודשים)
אדום	5	10	אין צורך בטיפולים
כחול	9	15	2
צהוב	13	30	1

משרד התקשורת נערך לתכנון הנחת סיבים אופטיים כדי לספק דרישות תקשורת עתידיות של לפחות 1000GB נתונים לשנייה. לפרויקט הוקצב סכום כספי לצורך הטיפולים התקופתיים המאפשר עד 10 טיפולים בחודש. המשרד נערך לחשב את העלות המינימלית הנדרשת להנחת הסיבים האופטיים.

נסחו את הבעיה כבעיית תכנון ליניארי.

שאלה 1.10

1. יש להוסיף מכלאה שלישית לבעיית המכלאות (דוגמה 1.2) שצורתה תהיה ריבוע, והיקפה יהיה לכל היותר מחצית מהיקף המכלאה הריבועית הראשונה, אבל לא פחות מ-50 מטר.
   א. קבעו את משתני ההחלטה;
   ב. הגדירו את פונקציית המטרה;
   ג. נסחו את האילוצים על משתני ההחלטה;
   ד. נסחו את אילוצי אי-השליליות.
2. נניח כי באותה בעיה (דוגמה 1.2) מוצגת דרישה ששטח המכלאות ולא היקפן יהיה מקסימלי; האם אפשר לפתור את הבעיה בעזרת מודל תכנון ליניארי?

1.6 סיכום

בעיית החלטה המתאימה לפתרון באמצעות מודל התכנון הליניארי מחייבת שלושה מאפיינים:

1. פונקציית מטרה ליניארית;
2. מציאת מינימום או מקסימום של פונקציית המטרה (הליניארית);
3. האילוצים (על משתני ההחלטה) הם משוואות ליניאריות.

כדי לבדוק אם בעיית החלטה מסוימת מתאימה למודל הליניארי, יש לנסח אותה בצורה מתמטית, ואז לבדוק אם פונקציית המטרה וגם אילוצי הבעיה הם ליניאריים.

בעיית תכנון ליניארי טיפוסית כוללת שלושה מרכיבים עיקריים:

1. משתני החלטה;
2. פונקציית מטרה;
3. אילוצים על משתני ההחלטה.

משתני החלטה מייצגים את ההחלטה שיש לקבל. פתרון בעיית ההחלטה מתמצה במציאת הערכים עבור משתני ההחלטה, אשר עומדים באילוצים על הפתרון, ואשר מביאים לאופטימום את פונקציית המטרה.

פונקציית המטרה היא כלי מתמטי אשר מקבל, מצד אחד את משתני ההחלטה וחלק מנתוני הבעיה (נתוני הבעיה כוללים את אותם מרכיבים המסייעים לנו בהבנת התרומה של כל משתנה למטרת המערכת) ומפיק ערך המשמש כ"ציון" עבור פתרון נתון. הערך שמפיקה פונקציית המטרה משמש להשוואה בין הפתרונות השונים ולמציאת הפתרון האופטימלי ביניהם.

האילוצים של בעיית החלטה הם עובדות המונעות ממקבל ההחלטה לבחור פתרונות מסוימים. לדוגמה: מגבלות על כמות אמצעי הייצור, כמו חומרי-גלם, זמן ותקציב.
פתרון המקיים את כל אילוצי הבעיה נקרא **פתרון אפשרי**.
אוסף כל הפתרונות האפשריים נקרא **התחום האפשרי.**
פתרון אופטימלי הוא פתרון אפשרי הנותן את הערך הטוב ביותר (האופטימלי) לפונקציית המטרה.

השלבים בניסוח בעיית תכנון ליניארי הם:

1. קביעת משתני ההחלטה;
2. הגדרת פונקציית המטרה;
3. קביעת האילוצים על משתני ההחלטה (כולל הוספת אילוצי אי-שליליות).

אפשר לפתור את בעיית התכנון הליניארי באופן גרפי, ראשית על-ידי שרטוט התחום האפשרי כפי שראינו בפרק זה ולאחר מכן על-ידי בחירת הפתרון האופטימלי, כפי שנלמד בפרק הבא. בפרק הבא נכיר גם שיטה אלגברית לפתרון בעיית התכנון הליניארי.

שאלה 1.11 (רשות)

נתון הניסוח המתמטי של בעיית החלטה:

יש למצוא את נקודת המינימום של פונקציית המטרה:

$$Z = X_1 + 2X_2 - 3X_3 - 7$$

תחת האילוצים:

1) $2X_2 - 5X_2 - 3X_3 \geq 50$

2) $5X_2 - 2X_3 \leq 10$

3) $X_1^2 \leq 4$

4) $X_2 \geq 0$

5) $X_3 \geq 0$

האם אפשר לפתור בעיה זו באמצעות שיטות לפתרון בעיית תכנון ליניארי? נמקו.

בשאלות 1.12-1.21 שלהלן נסחו את הבעיות כבעיות של תכנון ליניארי :

א. קבעו את משתני ההחלטה.

ב. הגדירו את פונקציית המטרה.

ג. נסחו את האילוצים על משתני ההחלטה.

ד. נסחו את אילוצי אי-השליליות.

שאלה 1.12

בית-חרושת לשוקולד מייצר שני סוגי שוקולד – חלב ומריר.

המחיר לצרכן של 100 גרם שוקולד חלב הוא 5 ₪ , ושל 100 גרם שוקולד מריר 4 ₪.

ההבדל בין שני סוגי השוקולד הוא כמויות המרכיבים של השוקולד :

בכל 100 גרם שוקולד חלב ישנם 20 גרם פולי קקאו ו-80 גרם סוכר, ואילו בכל 100 גרם שוקולד מריר נמצאים 35 גרם פולי קקאו ו- 65 גרם סוכר.

למפעל אספקה יומית של 4 טון פולי קקאו ו-10 טון סוכר. טון פולי קקאו עולה 8000 ₪ וטון סוכר עולה 600 ₪.

1. מה צריכה להיות התפוקה היומית של המפעל אם מטרתו היא להביא את הכנסותיו למקסימום ?

2. מה צריכה להיות התפוקה היומית של המפעל אם מטרתו היא להביא את רווחיו למקסימום ?

שאלה 1.13

חייט רכש 80 מ״ר בד כותנה, ו-120 מ״ר בד צמר. כדי לתפור מעיל לגבר זקוק החייט ל-1 מ״ר בד-כותנה, ו-3 מ״ר בד צמר.

כדי לתפור מעיל לאישה זקוק החייט ל-2 מ״ר בד כותנה, ו-2 מ״ר בד צמר.

המחיר של מעיל לגבר הוא $30 והמחיר של מעיל לאישה הוא $20. כמה מעילים, משני הסוגים, על החייט לתפור כדי להרוויח את הסכום המקסימלי ?

שאלה 1.14

יצרן משקאות מייצר שני סוגי משקאות : מיץ ומשקה קל. לייצור ליטר אחד של מיץ הוא צריך 600 מיליליטר תמצית ו-400 מיליליטר מים. לייצור ליטר אחד של משקה קל הוא משתמש ב- 100 מיליליטר תמצית וב- 900 מיליליטר מים.

הרווח שלו ממכירת ליטר מיץ הוא 0.5 ₪ וממכירת ליטר משקה קל 0.1 ₪.

הוא מקבל מדי יום 5000 ליטר תמצית ו- 10,000 ליטר מים.

מה צריכה להיות תפוקתו היומית אם מטרתו הינה רווח מקסימלי ?

שאלה 1.15

במפעל לייצור כלי-רכב ניתן לייצר מכוניות ומשאיות. במפעל 4 מחלקות :

1. הרכבת מנועים
2. טיבוע מתכת
3. הרכבת מכוניות
4. הרכבת משאיות

במחלקה 1 (הרכבת מנועים) אפשר להרכיב מנועי מכוניות, ו/או מנועי משאיות כך גם במחלקה 2 (טיבוע מתכת).

במחלקת הרכבת מכוניות אפשר להרכיב מכוניות בלבד, ובמחלקת הרכבת משאיות ניתן להרכיב משאיות בלבד.

להלן הטבלה המסכמת את כושר הייצור של המחלקות השונות.

המחלקה	כושר הייצור השנתי	
	מכוניות בלבד	משאיות בלבד
הרכבת מנועים	30000	16000
טיבוע מתכת	25000	35000
הרכבת מכוניות	20000	----
הרכבת משאיות	-----	15000

רווח המפעל ממכירת מכונית הוא $3000 וממכירת משאית $2500 . כמה מכוניות וכמה משאיות על המפעל לייצר כדי שהרווח השנתי יהיה מקסימלי ?

שאלה 1.16

קבלן לעבודות עפר התחייב לפנות 10000 מ"ק של אדמה במהלך עבודות התשתית להקמת שכונה חדשה.

לצורך הפינוי הוא יכול להשתמש בטרקטורים או במשאיות. טרקטור יכול לפנות 2 מ"ק אדמה בכל פעם, ומשאית 12 מ"ק. מכיון שהשטח קשה למעבר, הטרקטורים זריזים יותר בביצוע המשימה ומסוגלים לבצע 4 סבבי פינוי בשעה, לעומת המשאיות המבצעות רק 3 סבבים בשעה.

עלות הפעלת טרקטור היא 300 ₪ , ושל משאית 550 ₪ .

לרשות הקבלן עומדים 6 טרקטורים ו-4 משאיות, והתחייבותו היא לפנות את כל הכמות תוך 10 ימי עבודה בני 8 שעות כל אחד.

כמה שעות טרקטור וכמה שעות משאית עליו להשקיע על-מנת לעמוד בהתחייבויותיו במינימום עלות ?

שאלה 1.17

במזכירות קיבוץ דנים בדרך היעילה ביותר להזנת הפרות והעגלים.

נתון שסה"כ כמות המזון הדרושה לראש בקר הוא לפחות 50 ק"ג ליום.

מזון זה חייב לכלול :

א. לפחות 0.7% סידן , אך לא יותר מ- 1.3%

ב. לפחות 23% חלבונים

ג. לא יותר מ- 5% סיבים (fibers)

במחסני הקיבוץ נמצאים כרגע שלושה מוצרי מזון בלבד : אבקת סידן (קלציום), תירס, וגרעיני סויה.

הערך התזונתי והמחיר של כל אחד ממוצרים אלה, סוכמו בטבלה הבאה :

מחיר של ק"ג מוצר ב- ₪	אחוזים של מרכיב בכל ק"ג של סוג מזון			סוג מזון
	סיבים	חלבונים	סידן	
4	0%	0%	38%	אבקת סידן
15	2%	9%	1%	תירס
5	8%	50%	2%	גרעיני סויה

בכמה ק"ג מכל אחד ממוצרי מזון אלה יש להשתמש כדי לספק את המנה היומית של כל ראש בקר, במחיר מינימלי ?

שאלה 1.18

חברת "אופני איכות" מייצרת שני סוגים של אופניים :

1. אופני הרים ;
2. אופני כביש.

פס ייצור האופניים עבור שני הסוגים כולל מעבר דרך שתי תחנות עבודה :

1. הרכבת כידון ;
2. הרכבת גלגלים.

בתחנה 1, הרכבת כידון ניתן להרכיב כידון לזוג אופניים אחד בו-זמנית. הרכבת כידון לאופני הרים אורכת 2 שעות. הרכבת כידון לאופני כביש אורכת שעה אחת.

בתחנה 2, הרכבת גלגלים ניתן להרכיב גלגלים לזוג אופניים אחד בו-זמנית. הרכבת גלגלים לאופני הרים אורכת שעה אחת. הרכבת כידון לאופני כביש אורכת 2 שעות.

החברה עובדת 16 שעות ביום.

הרווח של החברה על זוג אופני הרים הוא $400 ועל זוג אופני כביש $200.

מה מספר זוגות אופני ההרים ומספר זוגות אופני הכביש שעל חברת "אופני איכות" לייצר ביום בכדי להגיע לרווח מקסימלי ?

שאלה 1.19

חקלאי המגדל עופות חייב לדאוג לחימום הלולים. לרשותו שני אמצעי חימום : בנפט או בגז. מטרתו היא כמובן, לדאוג לחימום הלולים בהוצאה המינימלית ההכרחית.

הוא יודע כי כל שעה של הפעלת תנור הגז עולה לו 70 ₪ ואילו הפעלת תנור הנפט עולה לו 40 ₪ בשעה. אבל, תפוקת התנורים ופליטת המזהמים שלהם איננה זהה. בשעת פעולה אחת תנור הגז מייצר 100,000 קילוקלוריות (ק״ק) ופולט לחלל הלול 15,000 ליטר גז של פחמן חד-חמצני. תנור הנפט מייצר 75,000 ק״ק בשעה ופולט במהלכה 30,000 ליטר של פחמן חד-חמצני.

החקלאי יודע כי הלול חייב לקבל, ביממה, לפחות 1,500,000 ק״ק ולא יותר מאשר 500,000 ליטר של פחמן חד-חמצני. כמה שעות עליו להפעיל כל תנור על-מנת לחמם את הלול בהוצאה מזערית, תוך שמירה על כך שרמת הפחמן החד-חמצני לא תחרוג מהמותר?

שאלה 1.20

קיבוץ מגדל בשדותיו כותנה ואבוקדו. הרווח מטונה כותנה הינו 300 ₪ ומטונה אבוקדו 500 ₪ לגידול טון כותנה דרושים : 3 דונם קרקע, 20 מ״ק מים ו-250 ק״ג דשן. לגידול טונה אבוקדו דרושים 4 דונם קרקע, 60 מ״ק מים ו-300 ק״ג דשן. לרשות הקיבוץ עומדים 500 דונם קרקע, 4000 מ״ק מים ו-60 טונות דשן.

מה עליו לגדל על מנת להבטיח רווח מירבי ?

שאלה 1.21 (רשות)

במטוס מטען שלושה תאי אחסון למטענים : קדמי, אמצעי ואחורי. לתאים השונים מגבלות הן בנפח והן במשקל, כמוצג בטבלה הבאה :

תא האחסון	הנפח מותר (מ״ק)	המשקל המותר (טונות)
קדמי	7000	14
אמצעי	10000	20
אחורי	4000	8

כדי לשמור על יציבות המטוס, משקל המטען המועמס בכל אחד מהתאים צריך להתאים למשקל המותר בו.

לקראת הטיסה הבאה אפשריים ארבעה סוגי מטענים, שנתוניהם מפורטים בטבלה הבאה:

מטען מספר	הנפח (מ״ק לטונה)	המשקל (בטונות)	הרווח (₪ לטונה)
1	500	20	320
2	700	16	400
3	600	25	360
4	400	13	290

אפשר להעביר כל חלק רצוי מכל אחד מהמטענים. המטרה היא לקבוע איזה חלק להעביר מכל אחד מהמטענים ובאיזה תא אחסון למקמו, כך שהרווח הכולל מהטיסה יהיה מקסימלי.

1.7 פתרונות לשאלות נבחרות

פתרון לשאלה 1.1

א. השינוי באילוצים יהיה:

$$200X_1 + 300X_2 \leq 200{,}000 \quad (4)$$

ב. השינוי באילוצים יהיה:

$$800X_1 + 500X_2 \leq 560{,}000 \quad (5)$$

פתרון לשאלה 1.2

חישוב ערך פונקציית המטרה עבור הנקודות:

- $X_1 = 420$ ו-$X_2 = 320$

$$Z = 2X_1 + 4X_2 = 2 * \mathbf{420} + 4 * \mathbf{320} = 2120$$

- $X_1 = 700$ ו-$X_2 = 0$

$$Z = 2X_1 + 4X_2 = 2 * \mathbf{700} + 4 * \mathbf{0} = 1400$$

- $X_1 = 300$ ו-$X_2 = 300$

$$Z = 2X_1 + 4X_2 = 2 * \mathbf{300} + 4 * \mathbf{300} = 1800$$

פתרון לשאלה 1.3

התיאור הגרפי של פונקציה לא-ליניארית בעלת משתנה יחיד הוא קו עקום.

פתרון לשאלה 1.4

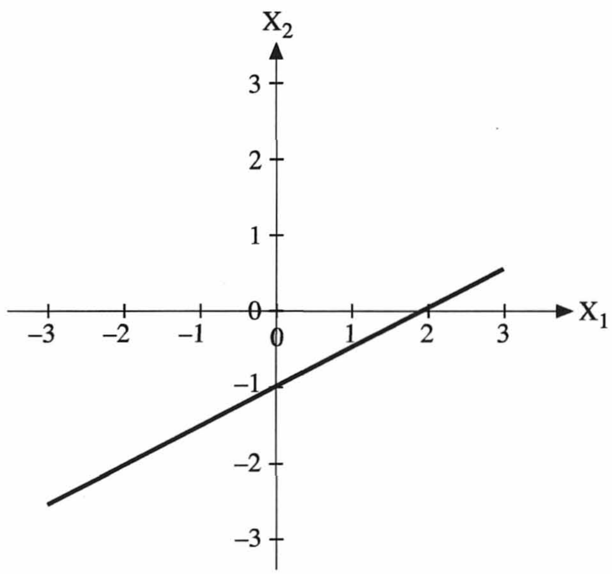
הפונקציות א׳ ו-ב׳ אינן ליניאריות ואילו הפונקציות ג׳ ו-ד׳ הן ליניאריות.

פתרון לשאלה 1.5

במקרה זה הפתרון האופטימלי מתקבל כאשר משתנה ההחלטה X_1 הולך לאינסוף החיובי. פתרון כזה אינו מקובל כפתרון לבעיות החלטה מציאותיות.

פתרון לשאלה 1.6

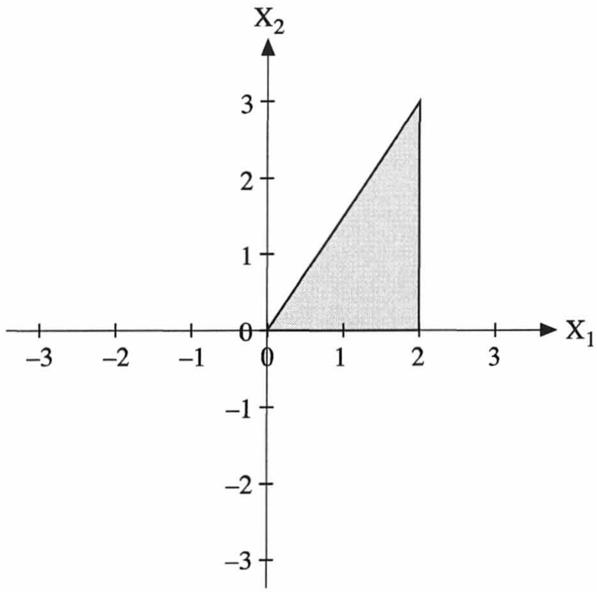
לאחר ארגון המשוואה נקבל $2X_2 - X_1 \leq -2$. אם נציב סימן שוויון נקבל את הקו הישר המתואר באיור הבא:



נציב את הנקודה (0,0) ונקבל $-2 \leq 0$ שהוא ביטוי שקר, כלומר, תחום הפתרונות האפשריים הוא התחום הנמצא מתחת לקו הישר.

פתרון לשאלה 1.7

התחום המשותף לשלושת האילוצים על משתני ההחלטה הוא התחום המתואר באיור הבא:



פתרון לשאלה 1.8

נגדיר את משתני ההחלטה:

X_1 – מספר כסאות הנוח הגדולים לחודש

X_2 – מספר כסאות הנוח הקטנים לחודש

ניסוח הבעיה כבעיית תכנון ליניארי:

Maximize $Z = 4X_1 + 3X_2$

Subject to:

$$5X_1 + 4X_2 \le 4000$$

$$3X_1 + 2X_2 \le 2500$$

$$X_1 \le X_2$$

$$X_1 \ge 0 \quad , \quad X_2 \ge 0$$

פתרון לשאלה 1.9

נגדיר את משתני ההחלטה X_1, X_2, X_3 כמספר הסיבים האופטיים מכל סוג. כדי להשיג עלות הנחת סיבים מינימלית, יש למצוא את נקודת המינימום של פונקציית המטרה:

Minimize $Z = 5X_1 + 9X_2 + 13X_3$

Subject to:

$$10X_1 + 15X_2 + 30X_3 \le 1000$$

$$0.5X_2 + X_3 \le 10$$

$$X_1 \ge 0 \quad , \quad X_2 \ge 0 \quad , \quad X_3 \ge 0$$

פתרון לשאלה 1.10

1. נוסיף משתנה החלטה נוסף X_3 עבור צלע המכלאה הריבועית השלישית. עלינו להביא למקסימום את הפונקציה:

Maximize $Z = 2\pi X_1 + 4X_2 + 4X_3$

Subject to:

$$2\pi X_1 + 4X_2 + 4X_3 \le 500$$

$$X_2 \ge 25$$

$$4X_3 \ge 50$$

$$2\pi X_1 \ge 200$$

$$4X_3 \le \frac{1}{2}4X_2$$

$$X_1 \ge 0 \quad , \quad X_2 \ge 0, \quad X_3 \ge 0$$

2. כיוון שהנוסחאות הגיאומטריות לחישוב שטח ריבוע ושטח עיגול הן:

שטח הריבוע $S_{\text{ריבוע}}=a^2$
שטח העיגול $S_{\text{מעגל}}=\pi r^2$

הרי בכדי לקבל שטח מקסימלי של מכלאות, פונקציית המטרה שתתקבל תהיה:

$$Z = \pi X_1^2 + X_2^2$$

זוהי פונקציה לא ליניארית ולכן לא נוכל לפתור בעיה זו באמצעות תכנון ליניארי.

פתרון לשאלה 1.11

למרות שהאילוץ $X_1^2 \leq 4$ הוא בעל צורה של משוואה לא-ליניארית, ניתן לכתבו על-ידי פירוק לשתי משוואת ליניאריות:

$$X_1 \geq -2$$

$$X_1 \leq 2$$

ולכן זהו ניסוח של בעיה המתאימה לפתרון באמצעות מודל תכנון ליניארי.

פתרון לשאלה 1.12

X_1 – מספר החפיסות (100 גרם) של שוקולד חלב.

X_2 – מספר החפיסות (100 גרם) של שוקולד מריר.

מקסימום הכנסות:

Maximize $Z = 5X_1 + 4X_2$

Subject to:

$$20X_1 + 35X_2 \leq 4{,}000{,}000$$

$$80X_1 + 65X_2 \leq 10{,}000{,}000$$

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$$

פתרון לשאלה 1.13

X_1 – מספר מעילי הגברים.

X_2 – מספר מעילי הנשים.

מקסימום רווח:

Maximize $Z = 30X_1 + 20X_2$

Subject to:

$$X_1 + 2X_2 \leq 80$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 120$$

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$$

פתרון לשאלה 1.14

X_1 – מספר הליטרים של מיץ.

X_2 – מספר הליטרים של משקה קל.

מקסימום רווח :

Maximize $Z = 0.5X_1 + 0.1X_2$

Subject to:

$$0.6X_1 + 0.1X_2 \le 5{,}000$$

$$0.4X_1 + 0.9X_2 \le 10{,}000$$

$$X_1 \ge 0 \quad , \quad X_2 \ge 0$$

פתרון לשאלה 1.15

X_1 – מספר המכוניות המיוצרות בשנה.

X_2 – מספר המשאיות המיוצרות בשנה.

1/30,000 – חלק השנה הדרוש להרכבת מנוע למכונית.

1/16,000 – חלק השנה הדרוש להרכבת מנוע למשאית.

1/25,000 – חלק השנה הדרוש לטיבוע מתכת במכונית.

1/35,000 – חלק השנה הדרוש לטיבוע מתכת במשאית.

מקסימום רווח:

Maximize $Z = 3000X_1 + 2500X_2$

Subject to: **כפוף לאילוצים :**

אילוץ תחנת הרכבת מנוע

$$\frac{1}{30{,}000}X_1 + \frac{1}{16{,}000}X_2 \le 1$$

אילוץ תחנת טיבוע מתכת

$$\frac{1}{25{,}000}X_1 + \frac{1}{35{,}000}X_2 \le 1$$

אילוץ תחנת הרכבת מכוניות

$$X_1 \le 20{,}000$$

אילוץ תחנת הרכבת משאיות

$$X_2 \le 15{,}000$$

$$X_1 \ge 0 \quad , \quad X_2 \ge 0$$

פתרון לשאלה 1.18

X_1 – מספר זוגות אופני ההרים שיש לייצר ביום.

X_2 – מספר זוגות אופני כביש שיש לייצר ביום.

מקסימום רווח:

Maximize $Z = 400X_1 + 200X_2$

Subject to:

כפוף לאילוצים:

$2X_1 + X_2 \le 16$ אילוץ תחנת הרכבת כידון

$X_1 + 2X_2 \le 16$ אילוץ תחנת הרכבת גלגלים

$X_1 \ge 0 \quad , \quad X_2 \ge 0$

פתרון לשאלה 1.21

X_{11} – מספר טונות ממטען מספר 1 שהועברו בתא קדמי.

X_{21} – מספר טונות ממטען מספר 2 שהועברו בתא קדמי.

X_{31} – מספר טונות ממטען מספר 3 שהועברו בתא קדמי.

X_{41} – מספר טונות ממטען מספר 4 שהועברו בתא קדמי.

X_{12} – מספר טונות ממטען מספר 1 שהועברו בתא אמצעי.

X_{22} – מספר טונות ממטען מספר 2 שהועברו בתא אמצעי.

X_{32} – מספר טונות ממטען מספר 3 שהועברו בתא אמצעי.

X_{42} – מספר טונות ממטען מספר 4 שהועברו בתא אמצעי.

X_{13} – מספר טונות ממטען מספר 1 שהועברו בתא אחורי.

X_{23} – מספר טונות ממטען מספר 2 שהועברו בתא אחורי.

X_{33} – מספר טונות ממטען מספר 3 שהועברו בתא אחורי.

X_{43} – מספר טונות ממטען מספר 4 שהועברו בתא אחורי.

מקסימום רווח:

Maximize $Z = 320(X_{11} + X_{12} + X_{13}) + 400(X_{21} + X_{22} + X_{23}) +$

$360(X_{31} + X_{32} + X_{33}) + 290(X_{41} + X_{42} + X_{43})$

Subject to:

<u>מגבלות משקל</u>:

בתא קדמי $X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} \leq 14$

בתא אמצעי $X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} \leq 20$

בתא אחורי $X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} \leq 20$

<u>מגבלות נפח</u>:

בתא קדמי $500X_{11} + 700X_{21} + 600X_{31} + 400X_{41} \leq 7{,}000$

בתא אמצעי $500X_{12} + 700X_{22} + 600X_{32} + 400X_{44} \leq 10{,}000$

בתא אחורי $500X_{13} + 700X_{23} + 600X_{33} + 400X_{43} \leq 4{,}000$

<u>מגבלות משקל של כל מטען</u>:

מטען 1 $X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 20$

מטען 2 $X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 16$

מטען 3 $X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 25$

מטען 4 $X_{41} + X_{42} + X_{43} \leq 13$

<u>אילוצי אי-שליליות</u>:

$X_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2,3,4 \quad j = 1,2,3$

פרק 2. פתרון של בעיות תכנון ליניארי

בפרק הקודם למדנו מהי בעיית תכנון ליניארי וכיצד לנסחה בצורה מתמטית על-ידי שימוש בשלושת **מרכיבי מודל ההחלטה**:

1. משתני ההחלטה;
2. פונקציית המטרה;
3. אילוצים על משתני ההחלטה.

כמו-כן, ראינו כי לצורך פתרון בעיות החלטה נהוג להשתמש במודלים מתמטיים המתאימים לבעיות החלטה מסוגים שונים; המודל שבו עוסק ספר זה הוא מודל התכנון הליניארי.

בבעיות המתאימות למודל התכנון הליניארי ישנם **שני מאפיינים של מרכיבי מודל ההחלטה**:

- מציאת מינימום או מקסימום של פונקציית מטרה ליניארית;
- האילוצים על משתני ההחלטה מתוארים על-ידי משוואות* ליניאריות המגדירות תחום חסום.

בעיות שניסוחן המתמטי עונה על שני המאפיינים הללו הן בעיות הניתנות לפתרון באמצעות מודל התכנון הליניארי.

בפרק זה נלמד שתי שיטות לפתרון בעיות החלטה על-פי מודל התכנון הליניארי:

1. השיטה הגרפית;
2. שיטת הסימפלקס (שיטה אלגברית).

---

* או אי-שיוויונים.

1. השיטה הגרפית

כפי שראינו בפרק הקודם, לא נוכל לבטא בצורה גרפית בעיות החלטה שיש בהן יותר משני משתני החלטה, לכן פתרון בשיטה גרפית מוגבל לבעיות שיש בהן משתנה החלטה אחד או שניים.

למרות מוגבלותה, שיטת הפתרון הגרפי תעניק לנו הבנה ברורה יותר של מאפייני הפתרון של בעיית תכנון ליניארית כללית (עם n משתני החלטה), ותעזור לנו להבין, בצורה אינטואיטיבית, את שיטת הפתרון האלגברית.

2. שיטת הסימפלקס (שיטה אלגברית)

שיטת הסימפלקס היא שיטה אלגברית כללית לפתרון בעיות תכנון ליניארי. השיטה נחשבת כיום לאחת השיטות הנפוצות לפתרון בעיות תכנון ליניארי מכל הגדלים. שיטת הסימפלקס היא למעשה אלגוריתם המבצע סדרת פעולות החוזרות על עצמן כאשר בכל פעולה האלגוריתם מתקדם מפתרון אפשרי אחד לפתרון אפשרי אחר, הנותן לפונקציית המטרה ערך טוב יותר, בהתאם לדרישות הבעיה.

שיטת הסימפלקס מאפשרת לפתור בעיות תכנון ליניארי המכילות מספר גדול מאוד של משתני החלטה; ניתן ליישם אותה בתוכנות מחשב המסייעות לפתרון יעיל של בעיות אלה.

בפרק הראשון עסקנו בניסוח מתמטי של הבעיות שהוצגו; בפרק השני נתמקד בדרך בה פותרים בעיית תכנון ליניארי; משום כך, רוב הדוגמאות יינתנו בניסוח המתמטי הסופי. אם עדיין אינכם בקיאים בצורה מספקת בשלב המעבר מתיאור הבעיה לניסוחה המתמטי, חיזרו וקראו את הפרק הראשון העוסק בשלב זה.

2.1 פתרון גרפי לבעיית תכנון ליניארי

בבעיית תכנון ליניארי יש למצוא, בתחום הפתרונות האפשריים, את הנקודה בעלת הערך האופטימלי, שיתקבל על-ידי הצבת נקודה זו בפונקציית המטרה.

השלב הראשון בפתרון גרפי של בעיית תכנון ליניארי הוא שרטוט תחום הפתרונות האפשרי. השלב השני הוא מציאת הפתרון האופטימלי. מספר הנקודות בתחום הפתרונות האפשריים הוא בדרך-כלל אינסופי, ומציאת הנקודה בעלת הערך האופטימלי תלויה במבנה תחום הפתרונות האפשריים ובמבנה פונקציית המטרה.

בדוגמה 1 נציג מודל תכנון ליניארי שיש לו משתנה החלטה יחיד, ונראה כיצד אפשר למצוא את הפתרון האופטימלי במקרה זה.

דוגמה 2.1 – פתרון גרפי לבעיית תכנון ליניארי בעלת משתנה החלטה יחיד

נתונה הבעיה הבאה:

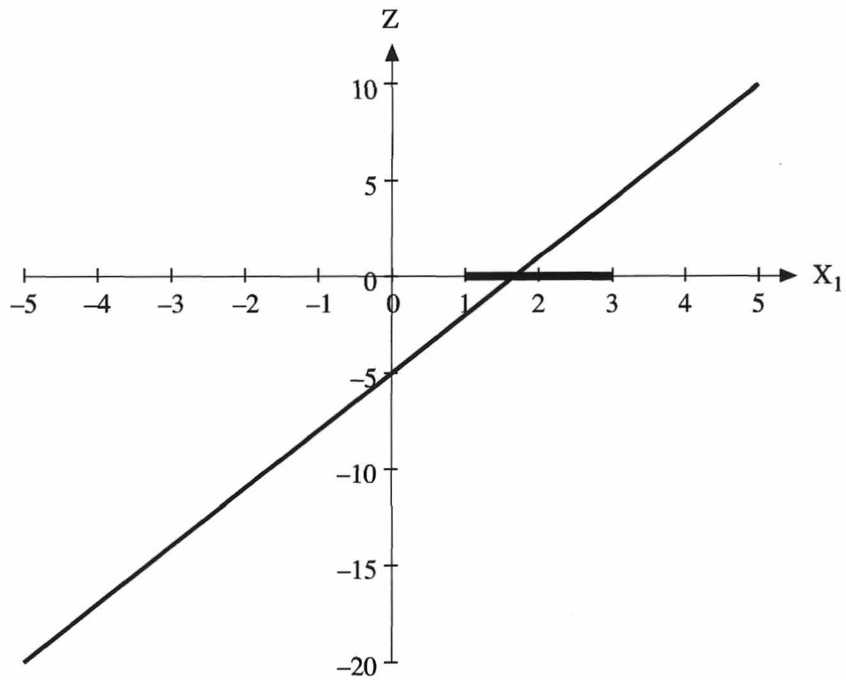
Maximize $Z = 3X_1 - 5$

Subject to:

1) $X_1 \geq 1$

2) $X_1 \leq 3$

באיור 2.1 מוצג התיאור הגרפי של הבעיה.



איור 2.1
התיאור הגרפי של מודל התכנון הליניארי הנתון בדוגמה 2.1

נמצא את הפתרון האופטימלי בשני שלבים:

1. הגדרת התחום האפשרי.
2. מציאת פתרון אופטימלי.

שלב ראשון – הגדרת התחום האפשרי

הקטע המודגש על ציר X_1 מתאר את תחום הפתרונות האפשריים הנתון על-ידי האילוצים על משתני ההחלטה. כלומר, הערכים של X_1 בתחום זה מקיימים את האילוצים של הבעיה. התחום האפשרי המתקבל במקרה זה הוא ***תחום חסום*** (תחום סופי).

שלב שני – מציאת הפתרון האופטימלי

באיור מופיע ישר המתאר את פונקציית המטרה $Z = 3X_1 - 5$. עלינו למצוא את הנקודה בתחום $1 \le X_1 \le 3$ שבו מקבלת פונקציית המטרה את ערכה המקסימלי. באמצעות התיאור הגרפי קל לראות כי נקודה זו היא הנקודה הימנית ביותר בתחום הפתרונות האפשריים, כלומר הנקודה $X_1 = 3$. קיבלנו **פתרון אופטימלי יחיד בקדקוד** התחום האפשרי (בקצה התחום האפשרי).

שאלה 2.1

מהו הפתרון האופטימלי של הבעיה שהוצגה בדוגמה 2.1, אם עלינו למצוא את נקודת המינימום של פונקציית המטרה כפוף לאותם האילוצים?

כאשר יש בבעיה שני משתני החלטה, התהליך דומה. בדוגמה 2.2 נתונה בעיית החלטה בעלת שני משתני החלטה, המתאימה למודל תכנון ליניארי.

דוגמה 2.2 – פתרון גרפי לבעיית תכנון ליניארי בעלת שני משתני החלטה

נתונה הבעיה הזו:

Maximize $Z = 5X_1 + 3X_2 - 7$

Subject to:

$$X_1 + X_2 \le 2$$

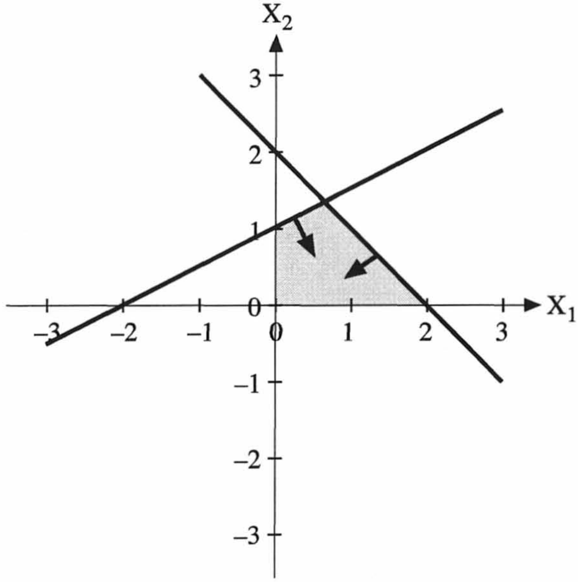
$$-X_1 + 2X_2 \le 2$$

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$$

שלב ראשון – הגדרת התחום האפשרי

התחום האפשרי של אילוצי האי-שליליות ($X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$) הוא כל הנקודות ברבעון ה-I (הרבעון הצפוני-מזרחי). באיור מופיעים הגרפים המתאימים לאילוצים האחרים.

נזכיר כי תחום הפתרונות האפשריים הוא החיתוך של התחומים המתאימים לכל אחד מן האילוצים על משתני ההחלטה, והוא מתואר על-ידי השטח המקווקו באיור. בדוגמה זו מתקבל **תחום אפשרי חסום**.



איור 2.2
תחום הפתרונות האפשריים (התחום המקווקו)

שלב שני – מציאת הפתרון האופטימלי

אפשר להוכיח כי הפתרונות האופטימליים של בעיית תכנון ליניארי בשני משתנים, בעלת תחום פתרונות אפשריים חסום ולא ריק, נמצאים על קדקוד אחד או על צלע המחברת שני קדקודים סמוכים של תחום הפתרונות האפשריים.

נבדוק אם כן את ערכי פונקציית המטרה בכל הקדקודים של התחום האפשרי ונמצא היכן ערכה הוא הגבוה ביותר.

בתחום האפשרי בדוגמה 2.2 קיימים ארבעה קדקודים:

1. $X_2 = 0$, $X_1 = 0$
2. $X_2 = 0$, $X_1 = 2$
3. $X_2 = 1$, $X_1 = 0$
4. $X_2 = \frac{4}{3}$, $X_1 = \frac{2}{3}$

הערה: כדי למצוא את נקודת החיתוך בין שני ישרים צריך להשוות ביניהם. למשל כדי למצוא את נקודת החיתוך בין שני הישרים:

$$X_2 = -X_1 + 2$$

$$X_2 = \frac{X_1}{2} + 1$$

נחבר את שתי המשוואות ונקבל:

$$1 + \frac{X_1}{2} = 2 - X_1$$

ממשוואה זו מתקבל: $X_1 = \frac{2}{3}$

ואם נציב את התוצאה במשוואות של הישרים, נקבל: $X_2 = \frac{4}{3}$.

בכל אחד מארבעת הקדקודים יתקבלו ערכי פונקציית המטרה על-ידי הצבת ערכי X_1 ו-X_2 המתאימים לקדקוד בפונקציית המטרה: $Z = 5X_1 + 3X_2 - 7$

אם נבצע הצבות אלה, נקבל את הערכים המתאימים של פונקציית המטרה. התוצאות מרוכזות בטבלה להלן.

X_1	X_2	Z
0	0	-7
2	0	3
0	1	-4
$^2/_3$	$^4/_3$	$^1/_3$

כלומר, הפתרון האופטימלי הוא $Z = 3$ והוא מתקבל בקדקוד ($X_1 = 2$, $X_2 = 0$).

דרך נוספת למציאת פתרון אופטימלי

בדוגמה 2.2 התקבל תחום אפשרי בעל מספר קטן של קדקודים. במקרה זה, מספר החישובים הדרוש, עד שנגיע לפתרון האופטימלי, אינו רב, אך כאשר מספר הקדקודים בתחום האפשרי יהיה גדול, יידרשו חישובים רבים (ככל שיש יותר אילוצים, כך גדל מספר נקודות החיתוך בין משוואות הישרים של האילוצים). בסעיף הבא נתאר דרך נוספת, יעילה יותר, למציאת הפתרון האפשרי.

נשרטט את היטלי הגבהים של פונקציית המטרה. היטל גובה או קו גובה של פונקציה הוא אוסף כל הנקודות במישור שעבורן ערך פונקציית המטרה קבוע – ממש כפי שמפה טופוגרפית מכילה קווי גובה המבטאים את כל הנקודות השוות בגובהן. שיטת היטלי הגבהים (או קווי הגובה) מאפשרת העברת מידע תלת-ממדי באמצעות איור דו-ממדי, שהוא ברוב המקרים נוח יותר לטיפול. המידע מתאר את ערך פונקציית המטרה (גובה פונקציית המטרה) במקומות שונים, בתוך תחום הפתרונות האפשריים.

כדי להוסיף קווי גובה לתרשים שהתקבל עד כה (התחום האפשרי), נבחר קו גובה מסוים, למשל, קו גובה 2. קו זה יציין את כל נקודות המישור שעבורן ערך פונקציית המטרה הוא 2.

רצוי שקו הגובה הנבחר יעבור בתוך התחום האפשרי, או קרוב אליו, כדי שניתן יהיה לפתור את הבעיה. בחירת הגובה יכולה להיעשות בדרך של ניסוי וטעייה, ומובטח כי עם צבירת ניסיון מספיק, על-ידי תרגול השיטה, נוכל לבחור את הגובה המתאים ביותר קלות.

נציב את הגובה הנבחר בפונקציית המטרה ונקבל משוואת קו ישר עם הנעלמים X_1 ו-X_2 שהם משתני ההחלטה של הבעיה. משוואת הקו הישר מתארת את הנקודות אשר מעליהן גובה פונקציית המטרה הוא הגובה שהצבנו.

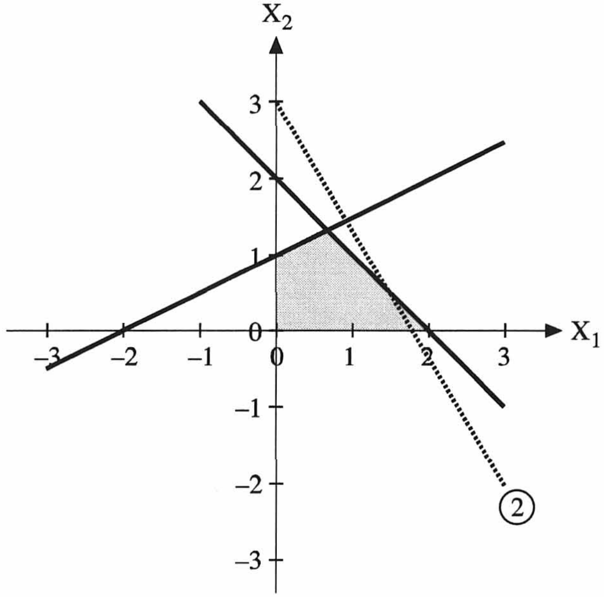
עבור הגובה $Z = 2$:

$$2 = 5X_1 + 3X_2 - 7$$

כלומר:

$$X_2 = -\frac{5}{3}X_1 + 3$$

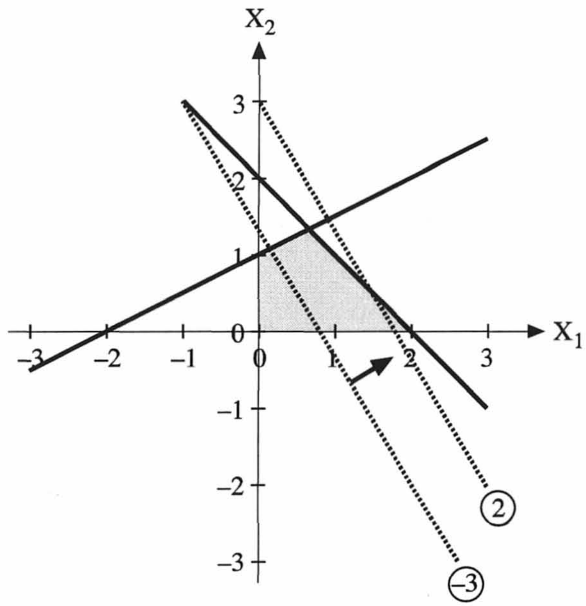
עבור הגובה שבחרנו קיבלנו משוואת קו ישר, בעל שיפוע השווה ל- $-\frac{5}{3}$. עתה, כל שעלינו לעשות הוא לשרטט את קו הגובה המתואר על-ידי משוואת הקו הישר שקיבלנו על השרטוט הקיים.



איור 2.3
היטל הגובה של פונקציית המטרה עבור $Z = 2$

אם נרצה לשרטט קווי גובה נוספים, נוכל לשרטט ישרים נוספים בעלי אותו שיפוע, כלומר, קווים מקבילים לקו הקיים. נשים לב כי אנו עוסקים בבעיות בעלות פונקציית מטרה ליניארית המבוטאת באופן גרפי כמישור משופע. קווי הגובה המתארים מישור משופע הם קווים ישרים מקבילים.

באיור 2.4 הוספנו קו גובה המתאר את כל הנקודות עבורן ערך פונקציית המטרה הוא 3–. ערך קו הגובה מתקבל על-ידי הצבת זוג ערכים המייצג את אחת הנקודות על קו הגובה.



איור 2.4
היטלי הגובה של פונקציית המטרה (הקווים המקווקווים)

החץ בחלק הימני-התחתון של האיור מתאר את כיוון העלייה של פונקציית המטרה. כעת נוכל לנתח את הפתרון של מודל התכנון הליניארי. התבוננו באיור: כדי למצוא את הנקודה שבה פונקציית המטרה מקבלת את הערך המקסימלי, יש להתקדם רחוק ככל האפשר בכיוון עליית פונקציית המטרה. אולם, עלינו לזכור כי כל ההתקדמות צריכה להיעשות בתוך תחום הפתרונות האפשריים, עד שנגיע לפינה של תחום הפתרונות האפשריים. בדוגמה זו הנקודה (2,0). כלומר, הפתרון האופטימלי הוא $X_1 = 2$ ו-$X_2 = 0$.

שאלה 2.2

נתון מודל התכנון הליניארי הזה:

Minimize $Z = 5X_1 - X_2$

Subject to :

1. $X_1 - X_2 \le 1$
2. $X_1 + X_2 \le 3$

3. $2X_1 + X_2 \geq 2$

4. $X_1 \geq 0$

5. $X_2 \geq 0$

א. מצאו את תחום הפתרונות האפשרי ;

ב. מצאו את הפתרון האופטימלי על-ידי חישוב ערכי פונקציית המטרה עבור כל הקדקודים בתחום האפשרי ;

ג. מצאו את הפתרון האופטימלי בשיטת היטלי הגבהים.

בדוגמה שראינו, תחום הפתרונות האפשריים היה בעל צורת **מצולע חסום**, והתקבל **פתרון אופטימלי יחיד בקדקוד**. התופעה של פתרון אופטימלי יחיד בקדקוד (עבור תחום פתרונות אפשריים חסום), אינה תופעה מקרית, והיא אף הגיונית. כאשר צריכים למצוא נקודת מינימום או מקסימום של פונקציית מטרה ליניארית, נקבל פתרון יותר טוב ככל שנתקדם בכיוון העלייה או הירידה של הפונקציה. תחום הפתרונות האפשריים מגביל את התקדמותנו בכיוון העלייה או הירידה, לכן ברור שנשאף להתקדם אל הנקודה האחרונה האפשרית, הנמצאת כמובן על שפת התחום.

בדוגמה 2.3 נראה כי קיימים מקרים שבהם תחום הפתרונות חסום, והפתרון האופטימלי נמצא על צלע שלמה (הכוללת שני קדקודים) של תחום הפתרונות האפשריים. כלומר, הפתרון האופטימלי הוא מרובה (קיים מספר אינסופי של פתרונות אופטימליים).

דוגמה 2.3 – פתרון גרפי לבעיית תכנון ליניארי בעלת פתרונות אופטימליים מרובים

נתון מודל התכנון הליניארי הזה :

Maximize $Z=2X_1+2X_2$

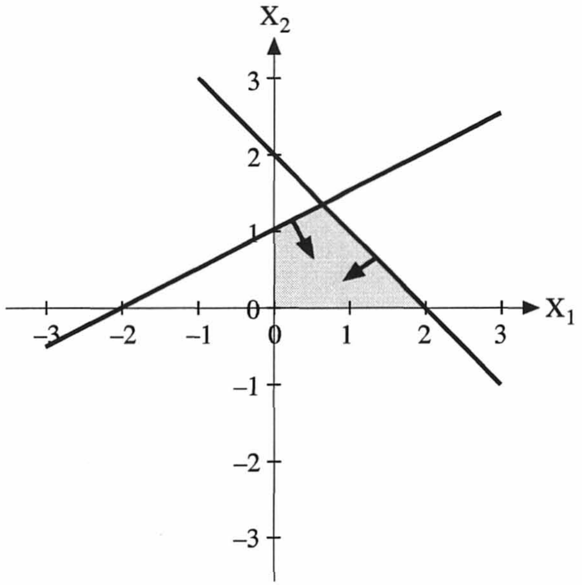
Subject to :

1. $X_1 + X_2 \leq 2$
2. $-X_1 + 2X_2 \leq 2$
3. $X_1 \geq 0$

4. $X_2 \geq 0$

שלב ראשון – הגדרת התחום האפשרי

האילוצים בדוגמה 2.3 דומים לאילוצים בדוגמה 2.2, לכן התחום האפשרי בשתי הדוגמאות זהה (ראו איור 2.5).



איור 2.5
תחום הפתרונות האפשריים (התחום המקווקו)

שלב שני – מציאת הפתרון האופטימלי

ארבעת הקדקודים שהוצגו בדוגמה 2.2 קיימים גם בתחום האפשרי של דוגמה 2.3. ערכי פונקציית המטרה בכל אחד מארבעת הקדקודים יתקבלו על-ידי הצבת ערכי X_1 ו- X_2 המתאימים בפונקציית המטרה: $Z = 2X_1 + 2X_2$.

נבצע הצבות אלה ונקבל את הערכים המתאימים של פונקציית המטרה. התוצאות מרוכזות בטבלה להלן.

X_1	X_2	Z
0	0	0
2	0	4
0	1	2
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	4

ניתוח התוצאה שקיבלנו: בשני קדקודים ערכה של פונקציית המטרה מקסימלי. במקרה זה קיימים **פתרונות מרובים** למודל התכנון הליניארי, שערכם הוא $Z=4$ והם מתקבלים על הצלע בין הקדקודים $(X_1 = 2,\ X_2 = 0)$ ו- $(X_1 = \frac{2}{3},\ X_2 = \frac{4}{3})$.

שימו לב, מקדמי פונקציית המטרה והמקדמים של האילוץ הראשון נבדלים זה מזה ביחס של 1:2 (הגרף של פונקציית המטרה מקביל לגרף של האילוץ הראשון).

הרחבה

אפשר להוכיח כי הנקודה $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ שייכת לצלע שבין הקדקודים $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ אם ורק

אם

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

עבור $0 \leq \alpha \leq 1$.

שאלה 2.3

מצאו את הפתרון האופטימלי עבור דוגמה 2.3 בשיטת היטלי הגובה.

בשלוש הדוגמאות של בעיות התכנון הליניארי שפתרנו עד כה באופן גרפי, התחום האפשרי היה תחום חסום; לא תמיד זה המצב. בדוגמה 2.4 נראה פתרון גרפי של בעיית תכנון ליניארי שהתחום האפשרי שלה אינו חסום.

דוגמה 2.4 – פתרון גרפי של בעיית תכנון ליניארי בעלת תחום אפשרי לא-חסום

נתונה הבעיה הזאת:

Minimize $Z = 5X_1 - X_2$

Subject to:

1) $X_2 - X_1 \le 1$

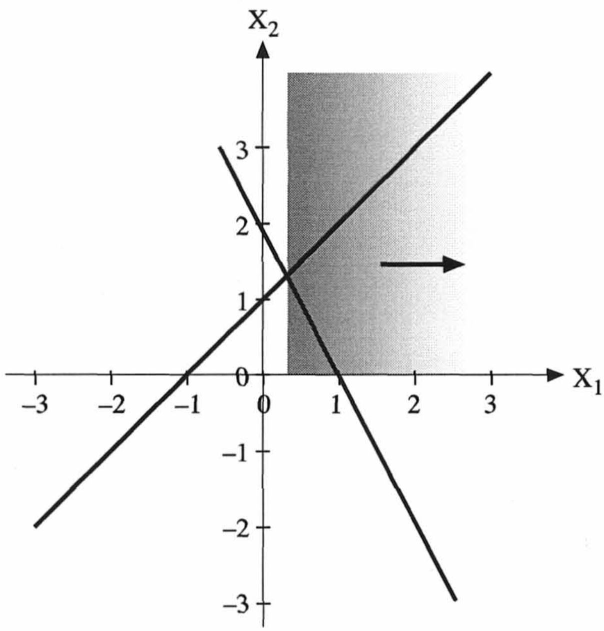
2) $2X_1 + X_2 \ge 2$

3) $X_1 \ge 0$

4) $X_2 \ge 0$

שלב ראשון – הגדרת התחום האפשרי

נצייר את הצירים X_1 ו-X_2 (ראו איור 2.6). נוסיף את תחום הפתרונות האפשריים על-פי האילוצים על משתני ההחלטה:



איור 2.6
תחום הפתרונות האפשריים (התחום המקווקו). התחום אינו חסום מצידו הימני ונמשך לאינסוף

בדוגמה זו תחום הפתרונות האפשריים המתקבל מהאילוצים על משתני ההחלטה אינו תחום חסום, משום שכל הנקודות בכיוון החץ המופיע באיור מקיימות את האילוצים. תחום זה נמשך לאינסוף (כפוף לאילוצים על משתני ההחלטה $X_2 - X_1 \le 1$ ו-$X_1 \ge 0$). תחום פתרונות אפשריים כזה נקרא **תחום לא חסום**, ולכאורה לפנינו משימה בלתי אפשרית – איתור פתרון אופטימלי בתחום אשר אינו חסום מכל צדדיו.

נמשיך לשלב הבא בפתרון הגרפי של הבעיה, מציאת הפתרון האופטימלי, ונראה אם ניתן להתמודד עם משימה זו ובאילו תנאים.

שלב שני – מציאת הפתרון האופטימלי

במקרה של תחום לא חסום, אין טעם לבדוק את הקדקודים כיוון שייתכן כי הפתרון ימצא באינסוף (בחלק הפתוח של התחום) ולא בקדקודים. לפיכך, נשתמש בשיטת היטלי הגבהים:

נשרטט את היטלי הגבהים של פונקציית המטרה:

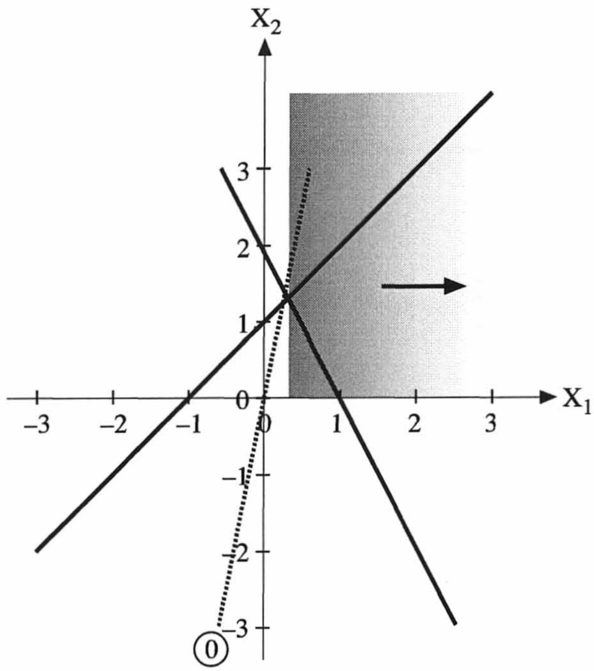
נבחר את הגובה 0.

עבור הגובה $Z = 0$:

$$0 = -X_2 + 5X_1$$

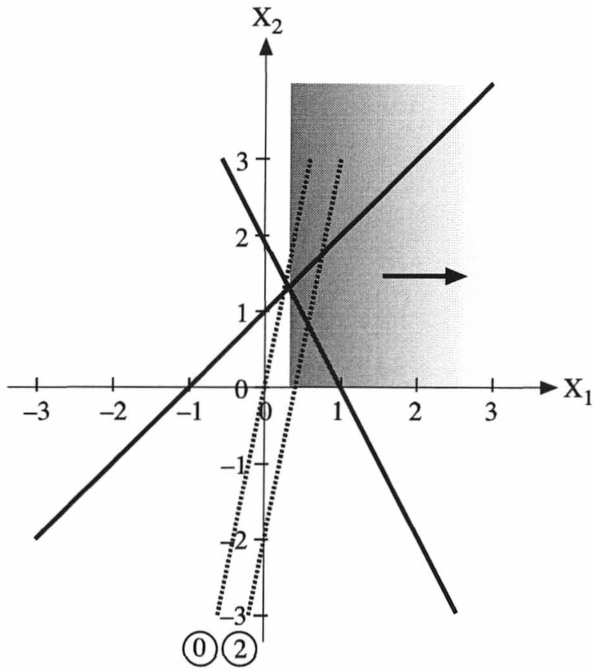
כלומר:

$$X_2 = 5X_1$$



איור 2.7
היטל הגובה של פונקציית המטרה עבור $Z = 0$

לאחר שנוסיף את ההיטל של קו הגובה 2 לאיור 2.7, נקבל את איור 2.8 :



איור 2.8
היטלי הגובה של פונקציית המטרה (הקווים המקווקווים)

הבעיה היא בעיית מינימום, ואם נתקדם בכיוון הירידה של פונקציית המטרה, נקבל שנקודת הפתרון האופטימלי נמצאת בחלקו השמאלי של תחום הפתרונות האפשריים, כלומר בנקודת החיתוך של האילוצים על משתני ההחלטה (פתרון יחיד בקדקוד):

$$X_1 - X_2 \le 1$$

$$2X_1 + X_2 \ge 2$$

שהיא הנקודה:

$$X_1 = \frac{1}{3}$$

$$X_2 = \frac{4}{3}$$

שינוי הבעיה

מהו הפתרון האופטימלי לבעיית ההחלטה שהובאה לעיל, אם פונקציית המטרה היא :
$\text{Maximize } Z = -X_2 + 5X_1$ במקום $\text{Minimize } Z = -X_2 + 5X_1$?

לפי כיוון העלייה של פונקציית המטרה, נקודת הפתרון נמצאת על הציר X_1 בכיוון האינסוף. כיוון שתחום הפתרונות האפשריים אינו חסום בכיוון הזה, הפתרון האופטימלי הוא הנקודה $(\infty,0)$, כאשר ∞ מסמן אינסוף, כלומר מתקבל **פתרון לא חסום**. הפתרון הזה אינו מעשי בבעיות החלטה מציאותיות.

מסקנה

כאשר האילוצים על משתני ההחלטה יוצרים תחום לא חסום, כלומר תחום הפתרונות האפשריים חסום מצד אחד (במקרה שלנו חסום מצדו השמאלי התחתון) אך אינו חסום מצדו השני, קיימות שלוש אפשרויות פתרון. האחת, **פתרון יחיד בקדקוד** – הפתרון נמצא בצד החסום והוא אחת הנקודות על הקווים הישרים המתארים את האילוצים על משתני ההחלטה. האפשרות השנייה – הפתרון נמצא בצד הלא חסום, ואז מתקבל **פתרון לא חסום**. האפשרות השלישית היא **אינסוף פתרונות או פתרונות מרובים לאורך צלע** של התחום האפשרי. שתי האפשרויות הראשונות הודגמו לעיל, ואילו האפשרות השלישית דומה לפתרון של דוגמה 2.3, אלא שהתחום האפשרי אינו חסום.

דוגמה 2.5 – פתרון גרפי של בעיית תכנון ליניארי בעלת תחום אפשרי ריק

נתונה הבעיה שלהלן:

Minimize $Z = 2X_2 + 4X_1 + 50$

Subject to:

1) $X_1 - 2X_2 \geq 40$

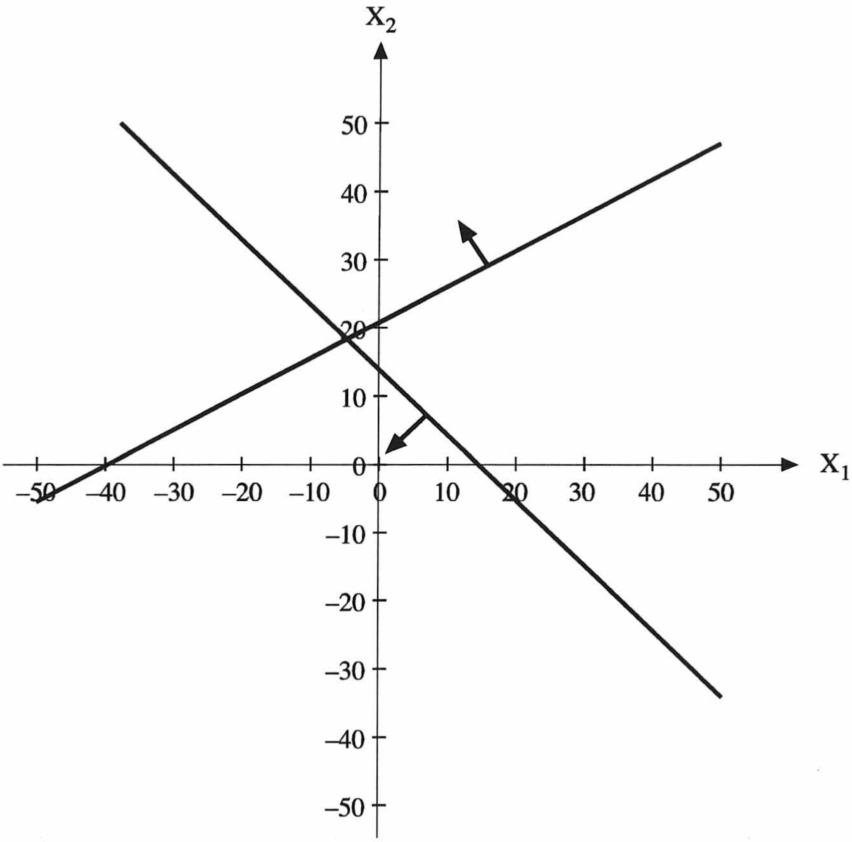
2) $X_1 + X_2 \leq 15$

3) $X_1 \geq 0$

4) $X_2 \geq 0$

שלב ראשון – הגדרת התחום האפשרי

נצייר את הצירים X_1 ו-X_2 (איור 2.9). נוסיף את תחום הפתרונות האפשריים על-פי האילוצים על משתני ההחלטה:



איור 2.9
תחום הפתרונות האפשריים (תחום ריק)

החיתוך של התחומים המוגדרים על-ידי כל משוואות האילוצים על משתני ההחלטה הוא **קבוצה ריקה** (התחום האפשרי ריק). כלומר, אין ל-X_1 ו-X_2 ערכים שמקיימים את כל האילוצים, ולכן אין פתרון לבעיית התכנון הליניארי.

מסקנה

במקרה שבו תחום הפתרונות האפשריים הוא תחום ריק, אין צורך להמשיך בשלב השני של פתרון הבעיה (מציאת הפתרון האופטימלי), משום שממילא לא ניתן להציב בפונקציית

המטרה שום נקודה כמועמדת להיות הפתרון האופטימלי. במקרה זה נאמר כי אין פתרון לבעיית ההחלטה.

בבעיות מציאותיות, האילוצים על משתני ההחלטה נגזרים מהאילוצים על המערכת אשר לה אנו מחפשים את הפתרון האופטימלי. כאשר האילוצים על משתני ההחלטה אינם מאפשרים מציאת פתרון כלשהו לבעיית ההחלטה, מוחזרים הנתונים לגורם מקבל ההחלטות כדי שישנה את האילוצים על משתני ההחלטה על-ידי הגדרת מערכת בעלת אילוצים אחרים. כך לדוגמה, בבעיית ייצור ניתן לחפש ספקים נוספים אשר לא יגבילו את כמות חומרי הגלם, או לרכוש מכונות חדשות אשר יאפשרו ייצור כמות רבה יותר של מוצרים.

סיכום הפתרון הגרפי של בעיית תכנון ליניארית בעלת שני משתני החלטה

נסכם את שלבי הפתרון הגרפי של מודל תכנון ליניארי בעל שני משתני החלטה:

1. **הגדרת התחום האפשרי**: שרטוט תחום הפתרונות האפשריים על-פי האילוצים על משתני ההחלטה;
2. **מציאת הפתרון האופטימלי** בעזרת חישוב ערך פונקציית המטרה בקדקודים, או בעזרת שרטוט פונקציית המטרה.

סוגים של תחומי פתרונות אפשריים:

- תחום סופי וחסום;
- תחום לא חסום;
- תחום ריק.

סוגים של פתרונות אופטימליים:

- פתרון יחיד בקדקוד;
- פתרון מרובה על צלע של התחום האפשרי;
- פתרון לא קיים.

אם תחום הפתרונות האפשריים סופי וחסום, ייתכנו שני סוגים של פתרונות אופטימליים:

1. פתרון יחיד בקדקוד (דוגמה 2.2).
2. פתרון מרובה על צלע של התחום האפשרי (דוגמה 2.3).

אם תחום הפתרונות האפשריים אינו חסום, ייתכנו שלושה סוגים של פתרונות אופטימליים:

1. פתרון יחיד בקדקוד (דוגמה 2.4).
2. פתרון לא חסום (דוגמה 2.4).
3. פתרון מרובה על צלע (חסומה) של התחום האפשרי (כמו בדוגמה 2.3 אך התחום האפשרי לא חסום).

אם תחום הפתרונות האפשרי ריק, אזי לא קיים פתרון אפשרי ולכן אין פתרון אופטימלי. (דוגמה 2.5).

בדוגמאות 2.2 עד 2.5 סקרנו את דרכי הפעולה בכל שלב משני השלבים, ואת הנקודות אשר עלינו להדגישן. יתרונותיו של הפתרון הגרפי נעוצים במיעוט האמצעים שהוא דורש, ובפשטות המתמטית היחסית. עם זאת, יש לזכור כי הפתרון הגרפי מוגבל למודל תכנון ליניארי בעל שני משתני החלטה בלבד, בעוד שבבעיות מציאותיות ניתקל במקרים הדורשים עשרות ואף מאות משתני החלטה. לשם פתרון של בעיות בעלות מספר רב יותר של משתני החלטה, משתמשים בשיטות מתמטיות, דוגמת שיטת הסימפלקס, שעליה נעמוד בסעיף 2.2.

בדוגמאות הקודמות ראינו, כי הפתרון האופטימלי של בעיית ההחלטה – אם קיים פתרון יחיד – הוא קדקוד כלשהו על שני ישרים המציינים את תחום הפתרונות האפשריים. כאשר לבעיה היו מספר פתרונות אופטימליים, כמו בדוגמה 2.3, כל הפתרונות הללו היו על הקו הישר המציין את תחום הפתרונות האפשריים (בין שני קדקודים). תופעה זו משותפת גם לבעיות החלטה בעלות יותר משני משתני החלטה, אך כמובן, במקרים האלו, הקדקודים של תחום הפתרונות האפשריים יהיו נקודות החיתוך של משטחים משופעים רב-ממדיים.

ננסח את התופעה במסקנה הזו:

> הפתרונות האופטימליים של בעיית החלטה בעלת תחום פתרונות אפשריים חסום ולא ריק נמצאים על קדקוד אחד, או על המשטח בין מספר קדקודים סמוכים, של תחום הפתרונות האפשריים.

בניסוח המסקנה לא כללנו את המקרה שבו תחום הפתרונות האפשריים אינו חסום בכיוון הפתרון האופטימלי, משום שהפתרונות של הבעיות האלו אינם מעשיים (לפחות אחד ממשתני ההחלטה מקבל ערך אינסופי). נשים לב כי אם הפתרון האופטימלי נמצא על קדקוד יחיד של תחום הפתרונות האפשריים, אזי מדובר על פתרון יחיד לבעיית התכנון הליניארי, בעוד שבמקרה שבו מספר קדקודים מהווים את הפתרון האופטימלי, אזי קיימים פתרונות אופטימליים רבים.

במקרה של בעיית תכנון ליניארי בעלת שני משתני החלטה, קדקוד במישור הוא חיתוך של שתי משוואות אילוצים. במקרה הזה ייתכנו לכל היותר שני קדקודים המהווים פתרון אופטימלי לבעיה, והם יימצאו משני צדדיה של אחת הצלעות של תחום הפתרונות האפשריים. במקרה זה כל הנקודות הנמצאות על הקטע הישר המחבר את שני הקדקודים הן פתרונות אופטימליים לבעיה.

שאלה 2.4

מהם סוגי הפתרונות האפשריים של בעיית תכנון לינארי בעלת שני משתני החלטה ?

שאלות לתרגול פתרון גרפי

שאלה 2.5

שרטטו את מערכת האילוצים של בעיה 1.12 שבפרק 1 ופתרו אותה באופן גרפי.

שאלה 2.6

שרטטו את מערכת האילוצים של בעיה 1.18 שבפרק 1 ופתרו אותה באופן גרפי.

שאלה 2.7

פתרו את בעיות התכנון הליניארי שלהלן :

.1

Minimize $Z = 3X_1 - 2X_2$

Subject to:

1) $2X_1 + X_2 \le 6$

2) $3X_1 - X_2 \geq 6$

3) $X_1 \geq 0$

4) $X_2 \geq 0$

.2

Minimize $Z = -X_1 + X_2$

Subject to:

1) $X_1 + X_2 \leq 4$

2) $X_1 \leq 3$

3) $X_2 \leq 3$

4) $X_1 \geq 0$

5) $X_2 \geq 0$

.3

Minimize $Z = X_1 + X_2$

Subject to:

1) $3X_1 + X_2 \geq 6$

2) $3X_1 - X_2 \geq 6$

3) $X_1 \leq 3$

4) $X_1 \geq 0$

5) $X_2 \geq 0$

שאלה 2.8

פתרו את בעיות התכנון הליניארי שלהלן :

.1

Maximize $Z = -X_1 + 2X_2$

Subject to:

1) $2X_1 + X_2 \leq 20$

2) $X_2 \leq 6$

3) $X_1 - X_2 \geq 0$

4) $X_1 \geq 0$

5) $X_2 \geq 0$

.2

Maximize $Z = -2X_1 + X_2$

Subject to:

1) $7X_1 + 3X_2 \leq 42$

2) $X_1 - X_2 \leq 0$

3) $X_1 \leq 3$

4) $X_1 \geq 0$

5) $X_2 \geq 0$

.3

Maximize $Z = -X_1 + 2X_2$

Subject to:

1) $8X_1 + 4X_2 \leq 80$

2) $5X_1 - 5X_2 \geq 0$

3) $X_1 \leq 8$

4) $X_2 \leq 3$

5) $X_1 \geq 0$

6) $X_2 \geq 0$

שאלה 2.9

פתרו את בעיית התכנון הליניארי שלהלן:

Minimize $Z = 3X_1 + 2X_2$

Subject to:

1) $5X_1 + X_2 \geq 10$

2) $2X_1 + 2X_2 \geq 12$

3) $X_1 + 4X_2 \geq 12$

4) $X_1 \geq 0 \quad ; \quad X_2 \geq 0$

2.2 שיטת הסימפלקס

שיטת הסימפלקס (The Simplex Method) היא אלגוריתם לפתרון של בעיות תכנון ליניארי. השיטה מבוססת על הרעיון של סריקה יעילה של קדקודים בתחום הפתרונות האפשריים, עד למציאת הקדקוד בעל הערך האופטימלי, בהתאם להגדרת הבעיה. כאשר הבעיה היא בעיית מקסימום, שיטת הסימפלקס תמצא את הקדקוד בעל הערך המקסימלי עבור פונקציית המטרה, וכאשר הבעיה היא בעיית מינימום, שיטת הסימפלקס תמצא את הקדקוד בעל הערך המינימלי עבור פונקציית המטרה.

שיטת הסימפלקס היא אלגוריתם משופר שאינו מצריך בהכרח את סריקת כל הקדקודים, אלא יוצא מקדקוד כלשהו של תחום הפתרונות האפשריים, ומתקדם מקדקוד לקדקוד עד לקדקוד בעל הערך האופטימלי. שיטת הסימפלקס היא בעלת סיבוכיות (ממוצעת) נמוכה מסיבוכיות הסריקה של כל הקדקודים.

השיטה נחשבת כיום לאחת השיטות היעילות לפתרון בעיות תכנון ליניארי מכל הגדלים. שיטת הסימפלקס היא למעשה אלגוריתם איטרטיבי המבצע סדרת פעולות החוזרות על עצמן, ובכל פעולה האלגוריתם מתקדם מפתרון אפשרי אחד לפתרון אפשרי אחר הנותן לפונקציית המטרה ערך טוב יותר בהתאם לדרישות הבעיה.

שיטת הסימפלקס היא אלגוריתם אלגברי שבו כל איטרציה כרוכה בפתרון מערכת משוואות לשם קבלת פתרון חדש שייבחן במבחן האופטימליות. ואולם לשיטה זו יש גם משמעות גיאומטרית.

כדי לרענן את זכרוננו, מוצג באיור 2.10 הגרף המתאים לבעיה שבדוגמה 2.2 לעיל.

דוגמה 2.6

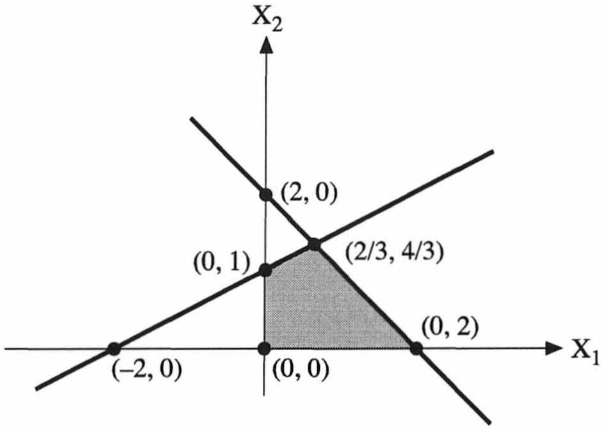
Maximum $Z = 5X_1 + 3X_2 - 7$

Subject to:

1. $X_1 + X_2 \le 2$
2. $-X_1 + 2X_2 \le 2$

3. $X_1 \geq 0$

4. $X_2 \geq 0$



איור 2.10

תחום הפתרונות האפשריים לבעיה בדוגמה 2.2 (התחום המקווקו)

ארבעת קווי האילוצים ושש נקודות החיתוך שלהם מודגשים כי הם המפתח לניתוח הפתרון.

נגדיר עתה את המונחים הבאים על-סמך הפתרון הגרפי מהסעיף הקודם :

קדקוד (vertex) הוא נקודת חיתוך בין משוואות אילוצים. נקודות החיתוך הללו נקראות פתרונות הקדקודים של בעיית התכנון הליניארי.

מאחר שפתרונות קדקוד יכולים להיות אפשריים או לא אפשריים, נגדיר :

קדקוד אפשרי (feasible vertex) הוא קדקוד שמהווה פתרון אפשרי לבעיית התכנון הליניארי.

ארבעה משש הקדקודים באיור 2.10 נמצאים בתחום האפשרי. לדוגמה (0,1) הוא קדקוד אפשרי.

כזכור, בסעיף הקודם הגענו למסקנה כי הפתרונות האופטימליים של בעיית תכנון ליניארי (שהתחום האפשרי שלה חסום) נמצאים על קדקוד אחד או על שני קדקודים סמוכים (הנמצאים על אותה צלע) של תחום הפתרונות האפשריים. לכן הפתרון האופטימלי יימצא באחד (או בשניים) מארבעת פתרונות הקדקוד שבתחום האפשרי:

קדקוד אופטימלי (optimal vertex) הוא קדקוד שמהווה פתרון אופטימלי לבעיית התכנון הליניארי.

שלוש תכונות היסוד של שיטת הסימפלקס מסוכמות להלן:

1א. אם לבעיה יש פתרון אופטימלי יחיד, אזי הוא חייב להיות פתרון קדקוד אפשרי.

1ב. אם לבעיה פתרונות אופטימליים רבים, אז לפחות שניים מהם חייבים להיות פתרונות אפשריים סמוכים (קדקודים הנמצאים על אותה צלע).

2. מספר הקדקודים האפשריים הוא סופי.

3. אם לפתרון קדקוד אפשרי אין פתרונות קדקוד אפשריים סמוכים שהם טובים ממנו (כפי שנמדד על-ידי פונקציית המטרה Z), אזי אין כלל פתרון אחר טוב ממנו; כלומר פתרון הקדקוד האפשרי במקרה זה הוא אופטימלי.

תכונה 1 הוסברה בסעיף הקודם.

תכונה 2 נובעת מן העובדה, כי, ככלל, כאשר לפנינו בעיה בעלת m אילוצים על משתני ההחלטה ו-n משתני החלטה, אזי מספר פתרונות הקדקוד הוא:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

שהוא מספר סופי.

תכונה 3 נובעת מהעובדה שפונקציית המטרה ליניארית, האילוצים ליניאריים ולכן מתקבל תחום אפשרי שצורתו מצולע רב-ממדי קמור (מצולע רב-ממדי קמור נקרא "סימפלקס", מכאן שם השיטה).

הוכחה פורמלית של תכונה 3 נמצאת בספר "מודלים דטרמיניסטיים בחקר ביצועים – כרך א'", הוצאת האוניברסיטה הפתוחה, סעיף 5.1.

מסקנות

לפי תכונה 1, מספיק לחפש את הפתרון האופטימלי **רק** בין פתרונות הקדקוד האפשריים; לפי תכונה 2 – מספרם סופי. תכונה 3 מהווה **מבחן אופטימליות** נוח.

שיטת הסימפלקס משתמשת בשלוש התכונות הללו. השיטה בוחנת רק מספר קטן יחסית של פתרונות אפשריים, ועוצרת בשלב שבו אחד הפתרונות האלה מקיים את מבחן (תנאי) האופטימליות. במילים אחרות, השיטה מתקדמת באופן איטרטיבי מהפתרון האפשרי הנוכחי לפתרון אפשרי סמוך טוב ממנו, עד שלא ניתן למצוא פתרון קדקוד אפשרי סמוך טוב יותר. ניתן אפוא לתאר את השיטה כדלקמן:

עקרונות שיטת הסימפלקס

1. **שלב האתחול:** מצא קדקוד אפשרי;
2. **השלב האיטרטיבי:** (חזור על שלב זה כל עוד לא מתקיים תנאי האופטימליות);

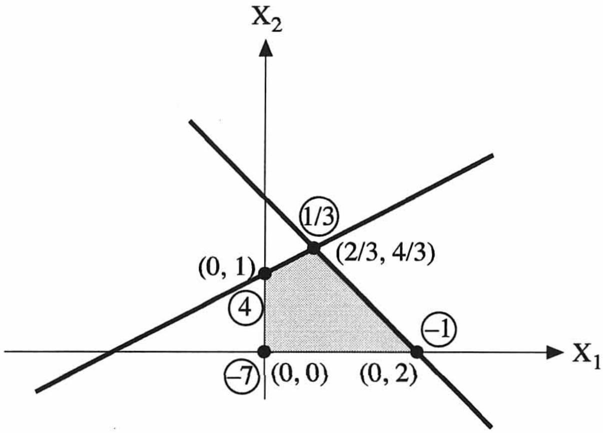
   2.1 **מבחן אופטימליות:** הקדקוד האפשרי הנוכחי הוא אופטימלי, אם אין פתרון קדקוד אפשרי סמוך "טוב" יותר;

   2.2 אם הקדקוד הנוכחי אינו אופטימלי, עבוֹר לקדקוד אפשרי סמוך טוב יותר.

העקרונות הללו מבטאים את מהות שיטת הסימפלקס. בתיאור המפורט של השיטה שיינתן בשני הסעיפים הבאים, נראה דרך נוחה לבחירת הפתרון החדש, הן בשלב האתחול והן בשלב האיטרטיבי.

כדי לממש את השלבים שתוארו בדוגמה 2.6 לעיל, נעשים הצעדים המתוארים להלן:

כדי להקל על המעקב אחר השלבים, נציג באיור הבא את התחום האפשרי של הבעיה בדוגמה 2.6, בתוספת ערך פונקציית המטרה בקדקודים האפשריים (המסומנים בעיגול).



איור 2.11
ערך פונקציות המטרה בקדקודים האפשריים של דוגמה 2.6

1. שלב האתחול : הנקודה (0,0) היא פתרון התחלתי אפשרי;

איטרציה ראשונה	**2.1:**	מבחן האופטימליות אינו מתקיים עבור (0,0) כיוון שקדקוד (0,2) מהווה פתרון טוב יותר;
	2.2:	עבור מ- (0,0) ל- (0,2);
איטרציה שנייה	**2.1:**	מבחן האופטימליות אינו מתקיים עבור (0,2);
	2.2:	עבור מ- (0,2) ל- (2/3,4/3);
איטרציה שלישית	**2.1:**	מבחן האופטימליות אינו מתקיים עבור (2/3,4/3);
	2.2:	עבור מ- (2/3,4/3) ל- (0,1);
איטרציה רביעית	**2.1:**	עצור ! מבחן האופטימליות מתקיים;

פתרונות הקדקוד (0,0) ו- (2/3,4/3) אינם טובים מ- (0,1), לכן עצור. (0,1) הוא הפתרון האופטימלי.

הערה: במימוש השלבים המודגם לעיל לא נבחר הפתרון החדש באופן יעיל, כפי שנלמד בהמשך.

2.2.1 האלגברה של שיטת הסימפלקס

עד כה הצגנו את המושגים הגיאומטריים שעליהם מתבססת שיטת הסימפלקס. ואולם, מאחר שבדרך-כלל קיימים יותר משני משתני החלטה בבעיית תכנון ליניארי, האלגוריתם נפתר בדרך-כלל בדרך אלגברית באמצעות מחשב, ולכן יש צורך לתרגם את ההליך

הגיאומטרי שתואר לעיל להליך אלגברי. בסעיף זה נציג אפוא את **השיטה האלגברית** של שיטת הסימפלקס, ונייחס אותה למושגים שהוצגו בדיון שלעיל.

בהליך אלגברי, נוח יותר לדון באילוצי שוויון מאשר באילוצי אי-שוויון. לפיכך, השלב הראשון בפתרון בשיטת הסימפלקס הוא להמיר את האילוצים הפונקציונליים, הנתונים **כאי-שוויונות**, באילוצי שוויון שקולים. אילוצי האי-שליליות יכולים להישאר בצורתם המקורית, שכן האלגוריתם מתייחס אליהם רק בעקיפין. המרה זו מתבצעת על-ידי הוספת **משתני סרק** (slack variables)**.**

על מנת להדגים זאת, נתבונן באילוץ הפונקציונלי הראשון בדוגמה שלנו :

$$X_1 + X_2 \le 2$$

משתנה הסרק לאילוץ זה הוא :

$$X_3 = 2 - X_1 - X_2$$

שהוא בדיוק ההפרש שבין שני אגפי האי-שוויון. לכן נקבל :

$$X_1 + X_2 + X_3 = 2$$

האילוץ המקורי $X_1 + X_2 \le 2$ מתקיים רק כאשר $X_3 \ge 0$, ולכן האילוץ $X_1 + X_2 \le 2$ **שקול** למערכת האילוצים:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 2$$

$$X_3 \ge 0$$

נשתמש אפוא במערכת זו כתחליף לאילוץ המקורי.

הוספת משתני סרק לכל יתר האילוצים הפונקציונליים במודל התכנון הליניארי המקורי של הדוגמה תיתן את המודל **השקול** שלהלן:

Maximum $Z = 5X_1 + 3X_2 - 7$

Subject to:

1) $X_1 + X_2 + X_3 = 2$

2) $-X_1 + 2X_2 + X_4 = 2$

$X_1 \ge 0 \quad X_2 \ge 0 \quad X_3 \ge 0 \quad X_4 \ge 0$

המודל הזה שקול אמנם למודל המקורי, אך צורתו הנוכחית נוחה יותר לטיפול אלגברי ולזיהוי של פתרונות הקדקוד האפשריים. צורה זו נקראת **הצורה המורחבת** (augmented form) של הבעיה, מאחר שהצורה המקורית הורחבה על-ידי משתנים נוספים, המאפשרים את יישום שיטת הסימפלקס בדרך אלגברית.

שאלה 2.10

מהו מספר משתני הסרק במערכת בעלת n משוואות המתארות את הצורה המורחבת של בעיית תכנון ליניארי?

המונחים שהוזכרו בסעיף 2.1 (לדוגמה פתרונות קדקוד) מתייחסים לצורה המקורית של הבעיה. נגדיר עתה את המונחים המתאימים להגדרת הצורה המורחבת של הבעיה.

פתרון מורחב (augmented solution) הוא פתרון של הצורה המורחבת של הבעיה. הפתרון הזה כולל את ערכי המשתנים המקוריים של הבעיה וגם את הערכים המתאימים למשתני הסרק.

לדוגמה, הפתרון המורחב של (2,0) בדוגמה שראינו הוא (2,0,0,4), המכיל גם את הערכים המתאימים למשתני הסרק, $X_3 = 0$, $X_4 = 4$, נוסף על ערכי המשתנים המקוריים, $X_1 = 2$ ו-$X_2 = 0$.

פתרון בסיסי (basic solution) הוא פתרון קדקוד מורחב.

לדוגמה, נתבונן בפתרון הקדקוד הלא אפשרי (0,2). הרחבתו באמצעות הערכים המתאימים למשתני הסרק, $X_3 = 0$, $X_4 = -2$, תיתן את הפתרון הבסיסי (-2 , 0 , 2 , 0).

מאחר שפתרונות קדקוד (ולפיכך גם פתרונות בסיסיים) יכולים להיות או אפשריים או לא אפשריים, נגדיר:

פתרון בסיסי אפשרי (basic feasible solution) הוא פתרון קדקוד אפשרי **מורחב**.

לפיכך, פתרון הקדקוד האפשרי (0,1) בדוגמה שראינו, שקול לפתרון הבסיסי האפשרי (0,1,1,0) בצורה המורחבת של הבעיה.

שאלה 2.11

נתונה בעיית תכנון ליניארי דו-ממדית.

א. כמה פתרונות בסיסיים **סמוכים** ישנם לפתרון בסיסי אפשרי?

ב. כמה פתרונות בסיסיים **אפשריים סמוכים** ישנם לפתרון בסיסי אפשרי?

פתרון בסיסי ופתרון בסיסי אפשרי הם מונחים מרכזיים בתכנון ליניארי, ולכן יש להבהיר את תכונותיהם האלגבריות. בצורה המורחבת של הבעיה, מספר המשתנים (4) גדול ב-2 ממספר המשוואות (2) של האילוצים הפונקציונליים. פירושו של דבר, שבפתרון המערכת קיימות שתי **דרגות חופש** (degrees of freedom), שכן ניתן לקבוע ערך שרירותי כלשהו לכל שניים מבין המשתנים, ולפתור את שתי המשוואות בשני המשתנים שנותרו.

שיטת הסימפלקס קובעת את הערך השרירותי כאפס. בפתרון הנוכחי, המשתנים שערכם נקבע לאפס נקראים **משתנים לא-בסיסיים** (nonbasic variables), והמשתנים האחרים נקראים **משתנים בסיסיים** (basic variables). הפתרון שמתקבל נקרא **פתרון בסיסי**. אם כל המשתנים הבסיסיים הם אי-שליליים (כלומר מקיימים גם את אילוצי האי-שליליות), אזי הפתרון נקרא **פתרון בסיסי אפשרי**.

להדגמת הגדרות אלה נתבונן שנית בפתרון הבסיסי האפשרי (0,1,1,0). ניתן לקבל פתרון זה על-ידי בחירת X_1 ו-X_4 כמשתנים הלא-בסיסיים, כלומר המשתנים שיקבלו את הערך אפס.

שני פתרונות בסיסיים אפשריים הם **סמוכים** אם כל משתניהם הלא-בסיסיים זהים מלבד משתנה אחד. פירושו של דבר, שניתן לעבור מפתרון בסיסי אפשרי נוכחי לפתרון בסיסי אפשרי סמוך לו על-ידי הפיכה של משתנה לא-בסיסי אחד למשתנה בסיסי ושל משתנה בסיסי אחד למשתנה לא בסיסי.

מעבר מהפתרון (0,0,2,2) לפתרון (0,1,1,0) כרוך בהפיכת המשתנה הלא-בסיסי X_2 למשתנה בסיסי, ובהפיכת המשתנה הבסיסי X_4 למשתנה לא-בסיסי.

מספר **המשתנים הלא-בסיסיים** בפתרון בסיסי הוא כמספר **דרגות החופש** במערכת המשוואות, ומספר **המשתנים הבסיסיים** הוא כמספר **האילוצים הפונקציונליים**.

שאלה 2.12

ערכו מילון למושגים שהכרנו בסעיף זה. כללו במילון את המושגים: **הצורה המורחבת, משתני סרק, משתנים לא-בסיסיים, משתנים בסיסיים, בסיס.**

2.2.2 השלבים של שיטת הסימפלקס

עד-כה עסקנו במהותה של שיטת הסימפלקס ולא פירטנו את דרך ביצועם של שלביה השונים. השאלות הבאות נותרו עדיין ללא תשובה מלאה:

בשלב האתחול – כיצד נבחר את הפתרון הבסיסי האפשרי ההתחלתי?

בשלב האיטרטיבי:

מבחן האופטימליות – כיצד מחליטים שלפתרון בסיסי אפשרי נוכחי אין פתרון בסיסי אפשרי סמוך טוב יותר?

חיפוש אחר פתרון בסיסי אפשרי טוב יותר:

- כיצד נבחר את כיוון התנועה לגבי הפתרונות הסמוכים? (איזה משתנה לא-בסיסי ייבחר למשתנה בסיסי?)
- היכן מופסקת התנועה (איזה משתנה בסיסי הופך ללא-בסיסי)?
- כיצד מזהים את הפתרון הבסיסי החדש?

אלה השאלות שנעסוק בהן בסעיף הזה בעזרת הדוגמה שלהלן:

דוגמה 2.7 – פתרון אלגברי של שיטת הסימפלקס

נתונה הבעיה שלהלן:

$$\text{Max} \quad Z = 5X_1 + 3X_2 - 7$$

Subject to:

1) $X_1 + X_2 + X_3 = 2$

2) $-X_1 + 2X_2 + X_4 = 2$

$X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0 \quad X_3 \geq 0 \quad X_4 \geq 0$

נפתור אותה בדרך אלגברית.

שלב האתחול

שיטת הסימפלקס יכולה להתחיל בפתרון בסיסי אפשרי כלשהו. כדאי לבחור פתרון נוח שבו משתני **הסרק** הם המשתנים **הבסיסיים**. בחירה זו נוחה כיוון שהפתרון הזה מהווה את **נקודת הראשית** (כל המשתנים המקוריים שווים אפס). בדוגמה שלנו, המופיעה באיור 2.11, הבחירה היא $(X_1, X_2) = (0,0)$.

כתוצאה מכך, מקבלים פתרון בסיסי אפשרי התחלתי שבו כל המשתנים המקוריים הם לא-בסיסיים ומשתני הסרק הם המשתנים הבסיסיים. בחירה זו מוצגת להלן בדוגמה שלנו, והמשתנים הבסיסיים מודגשים.

1) $X_1 + X_2 + \mathbf{X_3} = 2$

2) $-X_1 + 2X_2 + \mathbf{X_4} = 2$

מאחר שהמשתנים הלא-בסיסיים שווים אפס, אפשר לקרוא את הפתרון באופן הזה:

$X_3 = 2$, $X_4 = 2$, ושאר המשתנים שווים אפס. כלומר **פתרון בסיסי אפשרי התחלתי הוא** $(0,0,2,2)$.

הפתרון מתקבל כאן בקלות רבה, כי בכל משוואה רק משתנה בסיסי אחד מופיע עם מקדם $+1$, והוא אינו מופיע כלל ביתר המשוואות, ולכן:

$$\mathbf{X_4} = 2 \text{ וגם } \mathbf{X_3} = 2$$

כאשר האילוצים הפונקציונליים אינם מן הסוג $\leq$, אזי יכול להתעורר קושי במציאת פתרון בסיסי אפשרי התחלתי. בספר הזה לא נעסוק במקרים האלה. רק נעיר, שניתן

להשתמש בשיטת הסימפלקס עצמה כדי למצוא פתרון בסיסי אפשרי, או כדי להוכיח שאין פתרון כלל.

השלב האיטרטיבי

ראשית, יש להפעיל את מבחן האופטימליות על הפתרון הנוכחי :

1. מבחן האופטימליות

מבחן האופטימליות הוא מבחן בוליאני, כלומר מבחן המחזיר אחת משתי תשובות אפשריות : true (אמת) או false (שקר). התשובה true מתקבלת כאשר הפתרון שהגענו אליו הוא הפתרון האופטימלי, כלומר הפתרון אשר הצבתו בפונקציית המטרה תיתן את הערך הטוב ביותר. התשובה false מתקבלת כאשר הפתרון שהגענו אליו אינו הפתרון האופטימלי ועלינו לחפש פתרון טוב יותר לבעיית החלטה.

שאלה 2.13

תלמיד הציע את השיטה הבאה לעריכת מבחן האופטימליות : נסרוק את כל הפתרונות הבסיסיים האפשריים הסמוכים לפתרון שהגענו אליו, ונמצא את הערכים המתקבלים מהצבת כל אחד מהם בפונקציית המטרה. אם כל הערכים אינם טובים יותר מערך הפתרון הנוכחי, הרי שהפתרון שקיבלנו הוא הפתרון האופטימלי.

האם שיטה זו יכולה לשמש כמבחן אופטימליות?

על-מנת לקבוע אם הפתרון הבסיסי האפשרי הנוכחי הוא אופטימלי, יש להשתמש במשוואת פונקציית המטרה המבוטאת במונחי המשתנים הלא-בסיסיים הנוכחיים :

$$Z = 5X_1 + 3X_2 - 7$$

הגדלת ערכו של כל אחד מן המשתנים הלא-בסיסיים הללו מאפס (תוך כדי התאמת ערכיהם של המשתנים הבסיסיים כך שימשיכו לקיים את מערכת המשוואות) תגדיל את הערך של פונקציית המטרה (המשתנים הבסיסיים אינם מופיעים במשוואה זו). הגדלת הערך תגרום גם לתזוזה לעבר אחד משני הפתרונות הבסיסיים האפשריים **הסמוכים**. מאחר של- X_1 ול- X_2 יש מקדמים חיוביים, הגדלה של כל אחד מהם (תוך שמירה על המשתנה הלא-בסיסי השני בערך אפס ושינוי ערכי שאר המשתנים כך שיקיימו את מערכת

המשוואות) תוביל לפתרון בסיסי סמוך טוב יותר מהנוכחי ומכאן שהפתרון הנוכחי אינו אופטימלי !

ככלל, הפתרון הבסיסי האפשרי הנוכחי הוא אופטימלי אם ורק אם לכל המשתנים הלא-בסיסיים יש מקדמים **אי-חיוביים** בצורה הנוכחית של פונקציית המטרה.

במהלך האיטרציות של הסימפלקס פונקציית המטרה משנה את צורתה. במבחן האופטימליות יש להשתמש בצורה הנוכחית של פונקציית המטרה ולא בצורתה המקורית, שכן הצורה הנוכחית מכילה את כל **המשתנים הלא-בסיסיים, ואף לא אחד מן המשתנים הבסיסיים**. כל המשתנים הלא-בסיסיים דרושים כאן כדי להשוות את הפתרון הנוכחי עם כל הפתרונות הבסיסיים האפשריים הסמוכים. אסור למשתנים הבסיסיים להופיע בפונקציית המטרה, שכן ערכיהם עשויים להשתנות כאשר יוגדל ערכו של כל אחד מהמשתנים הלא-בסיסיים, ואז המקדם של המשתנה הלא-בסיסי בפונקציית המטרה לא ישקף עוד את שיעור השינוי שחל בערכה, Z. עקב השימוש באילוצי השוויון, הצורה הנוכחית של פונקציית המטרה **שקולה** לצורתה המקורית, ולכן מכילה את כל המידע הדרוש לצורך מבחן האופטימליות.

צורתה של פונקציית המטרה היא :

$$Z = 5X_1 + 3X_2 - 7$$

ויש בה שני משתנים לא-בסיסיים עם מקדם חיובי. המסקנה היא שהפתרון הנוכחי אינו אופטימלי (פתרון טוב יותר לבעיה המקורית יהיה $X_1 = 2$ ו-$X_2 = 0$. פתרון זה נותן $Z = 3$).

שאלה 2.14

מהו מבחן האופטימליות עבור בעיית החלטה הדרושת הבאה למינימום של פונקציית המטרה?

2. חיפוש אחר פתרון בסיסי אפשרי טוב יותר

בכל אחת מהאיטרציות שיטת הסימפלקס מתקדמת מהפתרון הבסיסי האפשרי הנוכחי לפתרון בסיסי אפשרי **סמוך** טוב יותר. תנועה זו כרוכה בהפיכת משתנה לא-בסיסי אחד למשתנה בסיסי, שנקרא **המשתנה הנכנס לבסיס** (entering basic variable), ובו-זמנית בהפיכת משתנה בסיסי אחד למשתנה לא-בסיסי, שנקרא **המשתנה היוצא מהבסיס** (leaving basic variable), ולאחר מכן בזיהוי הפתרון האפשרי הבסיסי החדש שמתקבל.

מהו הקריטריון לבחירת המשתנה הנכנס לבסיס?

המשתנים המועמדים להיכנס לבסיס הם כל אחד מ-n המשתנים הלא-בסיסיים הנוכחיים. ערכו של המשתנה שייבחר לבסיס ישתנה מאפס לערך חיובי כלשהו, וערכם של יתר המשתנים הלא-בסיסיים יישאר אפס. מאחר שהפתרון הבסיסי האפשרי הבא אמור להיות טוב מאשר הפתרון הנוכחי (כלומר, ערך ה-Z שלו אמור להיות גדול יותר), השינוי ב-Z, כתוצאה מהגדלת ערך המשתנה הנכנס, צריך להיות חיובי. אם נבטא את פונקציית המטרה Z באמצעות המשתנים הלא-בסיסיים בלבד, המקדם של כל משתנה הוא שיעור הגידול של Z עם הגדלת אותו משתנה. המשתנה בעל המקדם החיובי הגדול ביותר במשוואת פונקציית המטרה הוא **שיגדיל** את Z **בשיעור ההתחלתי הגדול ביותר**, ולכן הוא שייבחר למשתנה הנכנס לבסיס.

בדוגמה שלנו, שני המשתנים המועמדים להיכנס לבסיס הם שני המשתנים הלא-בסיסיים X_1 ו-X_2. מאחר שפונקציית המטרה מבוטאת רק באמצעות שני המשתנים האלה, ניתן להתייחס אליה כפי שהיא:

$$Z = 5X_1 + 3X_2 - 7$$

מאחר שלשני המשתנים יש מקדמים חיוביים, הגדלת כל אחד מהם תגדיל את Z. אולם כל הגדלה של X_1 ביחידה אחת תגדיל את Z בשיעור של 5, ואילו כל הגדלה של X_2 ביחידה אחת תגדיל את Z בשיעור של 3. כיוון ש- $5 > 3$, ייבחר X_1 להיות **המשתנה הנכנס לבסיס**. לפיכך ערכו של X_1 יהיה עתה גדול מאפס, בעוד ערכו של X_2 יישאר אפס.

כיצד נבחר המשתנה היוצא מהבסיס?

אם נתעלם לרגע ממשתני הסרק, אזי הגדלת X_1, תוך כדי שמירת ערכו של X_2 כאפס, משפיעה על שאר המשתנים; אם ניתן להגדיל את כל האחרים, הפתרון לא חסום. אחרת, הערך של לפחות אחד ממשתני הבסיס יֵרד עד שיגיע לאפס, ואז המשתנה הזה יֵצא מהבסיס ויהפוך למשתנה לא-בסיסי. בדוגמה שלנו, הגדלת X_1, תוך כדי שמירת X_2 בערך אפס, פירושה תזוזה על ציר X_1 ימינה. באיור 2.11 מגיעים אל הפתרון האפשרי הסמוך (0,2) כאשר נעצרים בקו האילוץ: $-X_1 + 2X_2 = 2$.

אשר לבעיה בצורתה **המורחבת**, פתרונות אפשריים חייבים לקיים **הן** את האילוצים הפונקציונליים **והן** את אילוצי האי-שליליות עבור כל המשתנים (המשתנים המקוריים ומשתני הסרק). הגדלת X_1 מאפס, ובו בזמן שמירת ערכו של X_2 (המשתנה הלא-בסיסי) כאפס, פירושה שכל המשתנים הבסיסיים הנוכחיים X_3 ו-X_4, או מקצתם, ישנו את ערכיהם כדי להמשיך ולקיים את מערכת המשוואות. ערכיהם של המשתנים האלה יקטנו כאשר ערכו של X_1 יגדל (או שהפתרון לא חסום). הפתרון הבסיסי האפשרי **הסמוך** מתקבל כאשר המשתנה **הראשון** מבין משתני הבסיס (**המשתנה היוצא מהבסיס**) מתאפס. יש לעצור בשלב הזה כדי למנוע קבלת פתרון לא-אפשרי, המפר את אחד מאילוצי האי-שליליות. כלומר, ברגע שנקבע מהו המשתנה הנכנס לבסיס, אין אפשרות לבחור באופן שרירותי את המשתנה היוצא מהבסיס. המשתנה היוצא הוא זה שערכו מגיע ראשון לאפס כתוצאה מהגדלת ערכו של המשתנה הנכנס לבסיס, כפי שיודגם בהמשך.

בדוגמה שלנו, המשתנה המועמד לצאת מהבסיס הוא אחד המשתנים הבסיסיים X_3, X_4 . החישובים לבחירת המשתנה שיֵצא מהבסיס מתוארים בטבלה 2.1. מאחר ש-X_2 הוא משתנה לא-בסיסי, ערכו בעמודה האמצעית של טבלה 2.1 הוא אפס. מכאן ניתן לקבל כמצוין בעמודה הימנית, כי:

1. X_3 קטן כאשר X_1 גדל והוא מתאפס כאשר $X_1 = 2$.
2. X_4 גדל ויישאר אי-שלילי כל עוד X_1 גדול מ-2–. כיוון שאנו מגדילים את X_1 בכיוון ימין, כלומר יותר מאפס, X_4 אינו מגביל את הגדלת X_1 .

בעמודה הימנית של טבלה 2.1 רשומים אפוא הערכים הגבוהים ביותר האפשריים עבור X_1, כך שכל אחד מהמשתנים הבסיסיים המתאימים בעמודה השמאלית יישאר אי-שלילי. מאחר שהחסם העליון הקטן ביותר מתקבל עבור המשוואה שבה מופיע X_3 (הוא משתנה הסרק לאילוץ $X_1 + X_2 \le 2$), המשתנה היוצא מהבסיס יהיה X_3, ובפתרון הבסיסי האפשרי הבא נקבל: $X_3 = 0$ (משתנה לא-בסיסי) ו-$X_1 = 2$ (משתנה בסיסי).

טבלה 2.1 חישובים לבחירת המשתנה הראשון שיֵצא מהבסיס בדוגמה 2.2

חסם עליון על X_1	משוואה	משתני בסיס
(מינימום) $X_1 \le 2$	$X_3 = 2 - X_1 - X_2$	X_3
לא מוגבל $X_1 \ge -2$	$X_4 = 2 + X_1 - 2X_2$	X_4

לאחר קביעת המשתנה הנכנס לבסיס והמשתנה היוצא מהבסיס (ובכלל זה מציאת ערכו של המשתנה הנכנס לבסיס), יש צורך למצוא את הערכים החדשים של יתר המשתנים הבסיסיים, כדי לקבל את הפתרון הבסיסי החדש. למעשה, ניתן לקבוע את ערכיהם של המשתנים הבסיסיים האחרים ישירות לפי טבלה 2.1. אולם, כדי להתכונן לאיטרציה הבאה, שיטת הסימפלקס ממירה את מערכת המשוואות הנתונה **לצורה הקנונית**. כלומר, בכל משוואה יופיע משתנה בסיסי אחד בלבד, בעל מקדם 1+, והוא לא יופיע כלל ביתר המשוואות. (המרה זו אינה כלולה בחומר הלימוד של הקורס.)

יש להמשיך בביצוע האיטרציות עד שמתקבל פתרון אופטימלי, או עד שמזהים שהפתרון לא חסום. כיוון שמספר הפתרונות הבסיסיים הוא סופי – מספר האיטרציות סופי.

2.2.3 סיכום שיטת הסימפלקס

א. שלב האתחול (בחירת פתרון בסיסי התחלתי)

הוסף משתני סרק. בחר את כל המשתנים המקוריים כמשתנים הלא-בסיסיים (כלומר אפס אותם), ואת משתני הסרק או המשתנים המלאכותיים בחר כמשתנים הבסיסיים (ולכן הם שווים לערכים הנמצאים באגף ימין).

ב. השלב האיטרטיבי

1. מבחן האופטימליות

כדי לקבוע אם הפתרון הנוכחי אופטימלי, בדוק אם קיים משתנה לא-בסיסי שהגדלתו תגדיל את ערך פונקציית המטרה Z. ניתן לעשות זאת על-ידי בדיקת הסימן של מקדמיהם של כל המשתנים הלא-בסיסיים בפונקציית המטרה. אם כל המקדמים שליליים, אזי הפתרון הנוכחי אופטימלי, ויש לעצור. אחרת, יש לחזור לשלב האיטרטיבי.

2. מציאת פתרון בסיסי אפשרי חדש

2.1 : קבע מהו **המשתנה הנכנס לבסיס** : בחר את המשתנה הלא-בסיסי, שהגדלת ערכו תגדיל את Z בשיעור הרב ביותר. לשם כך, השתמש במשוואת פונקציית המטרה הנוכחית, שבה מבוטא Z באמצעות המשתנים הלא-בסיסיים בלבד, ובחר את המשתנה הלא-בסיסי בעל **המקדם החיובי הגדול ביותר**.

2.2 : קבע מהו **המשתנה היוצא מהבסיס** : בחר את המשתנה הבסיסי שמתאפס ראשון כתוצאה מהגדלת ערכו של המשתנה הנכנס לבסיס. מאחר שכל אחד מהמשתנים הבסיסיים מופיע רק במשוואה אחת, קל לבדוק מתי יתאפס המשתנה הבסיסי הנדון כתוצאה מהגדלת ערכו של המשתנה הנכנס לבסיס.

לאחר מכן, יש למצוא את המשוואה שבה מתקבל הערך **הקטן ביותר** של החסם העליון. המשתנה הבסיסי המופיע באותה משוואה הוא המשתנה היוצא מהבסיס.

2.3 : חישוב **הפתרון הבסיסי האפשרי החדש**: באמצעות הבאת מערכת המשוואות לצורה קנונית, פתור את מערכת המשוואות הנוכחית עבור המשתנים הבסיסיים ועבור Z, המבוטא במונחים של המשתנים הלא-בסיסיים. אפס את כל המשתנים הלא-בסיסיים; ערכו של כל משתנה בסיסי וכן של Z שווה לערך הנמצא באגף ימין במשוואה שבה הוא מופיע (עם מקדם +1).

קביעת הפתרון הבסיסי החדש אינה נכללת בחומר הלימוד של הקורס.

שאלה 2.15

נתונה בעיית התכנון הליניארי שלהלן :

$$\textbf{Maximum } Z = a X_1 + 2X_2$$

Subject to:

$X_1 + X_2 \le 5$

$2X_1 + X_2 \le 4$

$X_1\ ,\ X_2 \ge 0$

עבור אילו ערכים של הפרמטר a יהיו לבעיה אינסוף פתרונות אופטימליים?

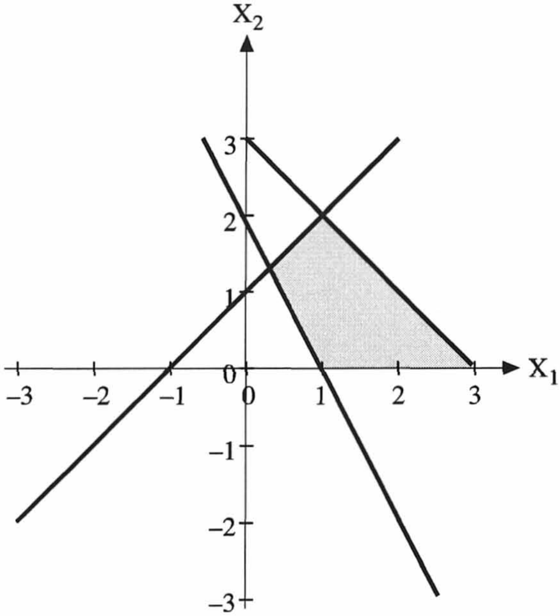
2.3 פתרונות לשאלות נבחרות

פתרון לשאלה 2.1

פונקציית המטרה בדוגמה 1 יורדת לכיוון השלילי של ציר X_1. לפיכך, הנקודה שבה פונקציית המטרה מקבלת את ערכה המינימלי היא הנקודה השמאלית ביותר בתחום הפתרונות האפשריים. כלומר הנקודה $X_1 = 1$, וזהו הפתרון האופטימלי במקרה זה.

פתרון לשאלה 2.2

א. השלב הראשון – הגדרת התחום האפשרי: נצייר את הצירים X_1 ו-X_2, נוסיף את תחום הפתרונות האפשריים על-פי האילוצים על הפתרון (ראו איור 2.12).



איור 2.12
התחום האפשרי

באיור רואים כי האילוץ על הפתרון $X_2 \geq 0$ אינו תורם מידע לגבי תחום הפתרונות האפשריים משום שגם ללא התחשבות באילוץ הזה תחום הפתרונות האפשריים לא היה משתנה. אילוץ על הפתרון אשר אינו תורם מידע לגבי תחום הפתרונות האפשריים נקרא **אילוץ עודף**, וניתן לאתרו לאחר שלב זה על-פי התיאור הגרפי של תחום הפתרונות האפשריים. קיבלנו איפוא **תחום אפשרי חסום.**

ב. השלב השני – מציאת הפתרון האופטימלי:

בתחום האפשרי קיימים ארבעה קדקודים והם:

1. $X_1 = 1 \, , X_2 = 0$
2. $X_1 = 3 \, , X_2 = 0$
3. $X_1 = 1, X_2 = 2$
4. $X_1 = \frac{1}{3} \quad , \; X_2 = \frac{4}{3}$

לשם מציאת קדקוד 4 נבטא את האילוצים על הפתרון בצורת משוואות קו ישר, על-ידי החלפת סימני האי-שוויון בסימני שוויון, ונבודד את X_2:

$$X_2 = X_1 + 1$$

$$X_2 = -2X_1 + 2$$

עתה קיבלנו שתי משוואות עם שני נעלמים, אשר פתרונן הוא:

$$X_1 = \frac{1}{3}$$

$$X_2 = \frac{4}{3}$$

ערכי פונקציית המטרה בכל אחד מארבעת הקדקודים יתקבלו על-ידי הצבת ערכי X_1 ו-X_2 המתאימים לקדקוד בפונקציית המטרה: $Z = 5X_1 - X_2$.

נבצע הצבות אלו ונקבל את ערכי פונקציית המטרה האלה:

1. $Z = 5$
2. $Z = 15$
3. $Z = 3$
4. $Z = \frac{1}{3}$

כלומר, הפתרון האופטימלי הוא: $Z = \frac{1}{3}$ (בעיית מינימום) והוא מתקבל בקדקוד ($X_1 = 3$, $X_2 = 0$).

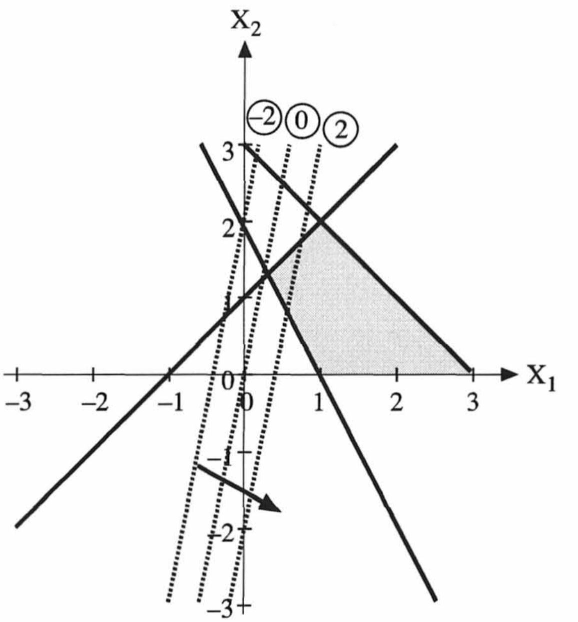
ג. **מציאת הפתרון האופטימלי בשיטת היטלי הגבהים** – נשרטט את היטלי הגבהים של פונקציית המטרה:

עבור הגובה $Z = 0$:

$$0 = -X_2 + 5X_1$$

כלומר: $X_2 = 5X_1$

והוספת ההיטלים של קווי הגובה 2 ו-2– לאיור תיתן (התבוננו באיור הבא):



איור 2.13
התחום האפשרי והיטלי הגובה של פונקציית המטרה (הקווים המקווקווים)

כמו בדוגמה 2.2, החץ בתחתית האיור מתאר את כיוון העלייה של פונקציית המטרה, וניתן לראות זאת גם על-ידי הגבהים של ההיטלים השונים – גובה ההיטל גדל ככל שמתקדמים ימינה בכיוון החיובי של הציר X_1. על-פי ההיטלים, ניתן לזהות שהערך של פונקציית המטרה עולה כאשר נעים בכיוון החיובי של הציר X_1.

ניתוח הפתרון: כיוון שבמודל התכנון הליניארי הנתון נדרשנו למצוא את נקודת המינימום של פונקציית המטרה, **הפתרון הוא הנקודה הקיצונית ביותר של תחום הפתרונות האפשריים בכיוון הירידה של פונקציית המטרה.**

קל לראות כי נקודה זו היא נקודת החיתוך של האילוצים על הפתרון:

$$X_2 - X_1 \le 1$$

$$X_2 + 2X_1 \ge 2$$

לשם מציאת נקודת החיתוך, נבטא את האילוצים על הפתרון בצורת משוואות קו ישר על-ידי החלפת סימני האי-שוויון בסימני שוויון, ונבודד את X_2:

$$X_2 = X_1 + 1$$

$$X_2 = -2X_1 + 2$$

עתה קיבלנו שתי משוואות עם שני נעלמים, אשר פתרונן הוא:

$$X_1 = \frac{1}{3}$$

$$X_2 = \frac{4}{3}$$

וזהו הפתרון האופטימלי לבעיית ההחלטה המתוארת על-ידי מודל התכנון הליניארי. כלומר, זוהי נקודת המינימום של הפונקציה בתוך תחום הפתרונות האפשריים. קיבלנו **פתרון אופטימלי יחיד בקדקוד.**

פתרון לשאלה 2.3

נשרטט את היטלי הגבהים של פונקציית המטרה:

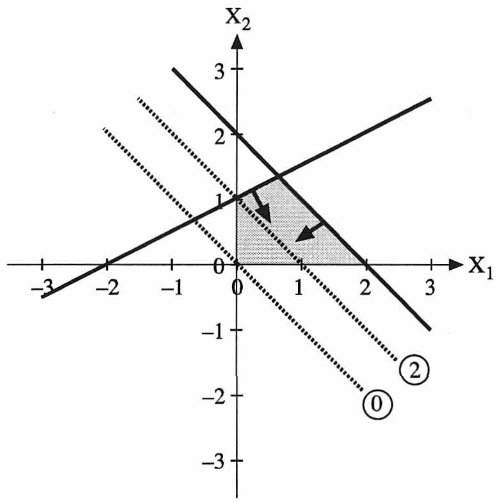
נבחר את הגובה 0.

עבור הגובה $Z = 0$:

$$0 = 2X_2 + 2X_1$$

כלומר: $X_2 = -X_1$

והוספת ההיטלים של קווי הגובה 0, ו-2 לאיור תיתן:



איור 2.14
היטלי הגובה של פונקציית המטרה (הקווים המקווקווים). שימו לב כי היטלי קווי הגובה מקבילים לקו התוחם את תחום הפתרונות האפשריים מימין

כיוון שהפתרון האופטימלי הוא נקודת המקסימום של פונקציית המטרה, הפתרון הוא הנקודה הקיצונית ביותר של תחום הפתרונות האפשריים בכיוון העלייה של פונקציית המטרה (המסומן בחץ).

כבר במבט ראשון ניתן לראות כי בדוגמה זו קיימת תופעה אשר לא נתקלנו בה בדוגמאות קודמות. נשים לב כי היטלי קווי הגובה של פונקציית המטרה מקבילים לישר המתאר את האילוץ על הפתרון $X_1 + X_2 \le 2$, ועל כן גם קו זה הוא אחד מהיטלי הגובה של פונקציית המטרה. כל הנקודות הנמצאות על הקו הישר המתאר את האילוץ על הפתרון $X_1 + X_2 \le 2$ הן נקודות אשר בהן פונקציית המטרה מקבלת את הערך $Y = 4$, ולא ניתן למצוא שום נקודה בתחום הפתרונות האפשריים אשר מעליה פונקציית המטרה מקבלת ערך גדול יותר.

במקרה זה קיימים פתרונות מרובים למודל התכנון הליניארי, וניתן לייצגם על-ידי משוואת הקו הישר:

$$2X_1 + 2X_2 = 4$$

אולם, משוואה זו מתארת קו-ישר אינסופי, ואילו הפתרונות האופטימליים הם הנקודות הנמצאות בתחום הפתרונות האפשריים בלבד, כלומר קטע סופי של הקו הישר התחום על-ידי שני הקדקודים $(X_1 = 2,\ X_2 = 0)$ ו-$\left(X_1 = \frac{2}{3},\quad X_2 = \frac{4}{3}\right)$.

הערה:

שני קווים ישרים הם מקבילים, אם היחס בין מקדמי המשתנים בשתי המשוואות המתארות אותן הוא זהה. כלומר. עבור משוואת הקווים הישרים שלהלן:

$$AX_1 + BX_2 = C$$

$$DX_1 + EX_2 = F$$

התנאי המספיק וההכרחי להיותם מקבילים הוא:

$$\frac{A}{D} = \frac{B}{E}$$

במקרה שלנו, משוואת הקו הישר המתארת את האילוץ על הפתרון היא:

$$X_1 + X_2 = 2$$

ומשוואת הקו הישר המתארת היטל גובה של פונקציית המטרה היא:

$$2X_2 + 2X_1 = Z$$

כאשר Z הוא גובה כלשהו. משוואת הקווים הישרים הללו אכן מקיימות את תנאי ההקבלה, ומשום כך קיימים פתרונות מרובים למודל התכנון הליניארי.

מסקנה:

כאשר היטלי הגובה של פונקציית המטרה מקבילים לקו הישר המתאר את האילוץ על הפתרון בכיוון עלייה או בכיוון ירידה של פונקציית המטרה (בהתאם לדרישה), כל הנקודות הנמצאות על אותו קו ישר, ובתחום הפתרונות האפשריים, הם פתרונות אופטימליים לבעיית ההחלטה.

פתרון לשאלה 2.4

סוגי הפתרונות האפשריים הם:

- **תחום אפשרי ריק**

<u>סוג 1</u> – אין פתרון אפשרי;

- **תחום אפשרי סופי וחסום**

<u>סוג 2</u> – קיים קדקוד יחיד בעל ערך אופטימלי של פונקציית המטרה;

<u>סוג 3</u> – ישנם שני קדקודים סמוכים בעלי ערך אופטימלי של פונקציית המטרה. הפתרונות האופטימליים הם כל הנקודות הנמצאות על הקטע הישר המחבר את שני הקדקודים.

- **תחום אפשרי לא חסום**

<u>סוג 4</u> – יש קדקוד יחיד בעל ערך אופטימלי של פונקציית המטרה; כאשר התחום חסום בכיוון אחד הזהה לכיוון של פונקציית המטרה (עבור פונקציית המינימום, התחום האפשרי יכול להיות חסום מלמטה ולא חסום מלמעלה, ואילו עבור פונקציית המקסימום, התחום האפשרי יכול להיות חסום מלמעלה ולא חסום מלמטה);

<u>סוג 5</u> – ישנם שני קדקודים סמוכים בעלי ערך אופטימלי של פונקציית המטרה; כאשר התחום חסום בכיוון אחד, הזהה לכיוון של פונקציית המטרה (עבור פונקציית המינימום, התחום האפשרי יכול להיות חסום מלמטה ולא חסום מלמעלה, ואילו עבור פונקציית המקסימום, התחום האפשרי יכול להיות חסום מלמעלה ולא חסום מלמטה);

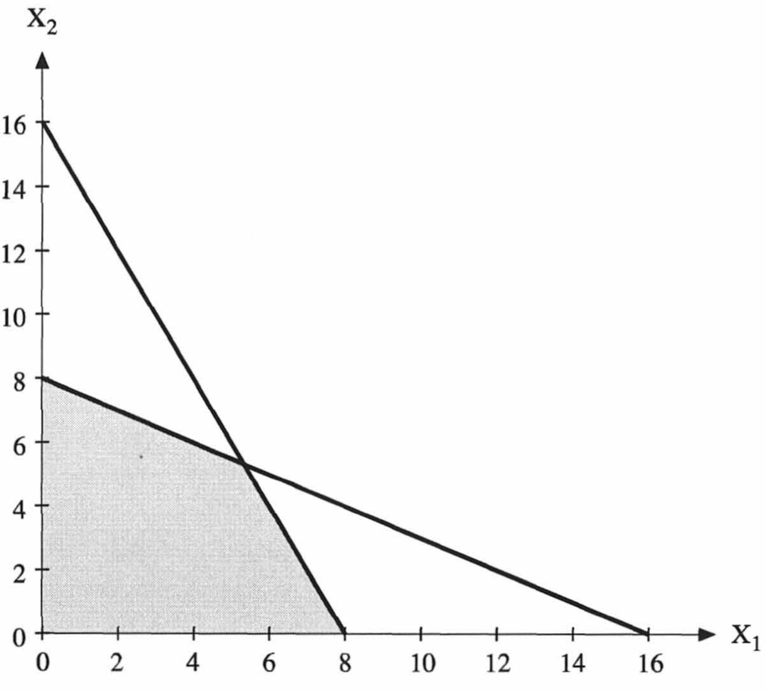
סוג 6 – פתרון לא חסום.

פתרון לשאלה 2.5

הפתרון האופטימלי $Z = 1{,}900{,}000$ מתקבל בקדקוד :

$(X_1 = 60{,}000,\ X_2 = 80{,}000)$

פתרון לשאלה 2.6



איור 2.15

הערך המקסימלי $Z = \$3200$ מתקבל על הצלע בין הקדקודים :

$\left(X_1 = 5\frac{1}{3}\ ,\ \ X_2 = 5\frac{1}{3}\right)$ ו-$(X_1 = 8,\ X_2 = 0)$

פתרון לשאלה 2.7

1. המינימום הוא 4.8 .

2. המינימום הוא -3 .
3. המינימום הוא 2 .

פתרון לשאלה 2.8

1. הערך המקסימלי הוא 6 .
2. הערך המקסימלי הוא 14 .
3. הערך המקסימלי הוא 3 .

פתרון לשאלה 2.9

המינימום הוא 13 .

פתרון לשאלה 2.10

מספר משתני הסרק הוא n (אם בבעיה המקורית היו n אי-שוויונים), משום שבכל משוואה במערכת המשוואות ישנו משתנה סרק אחד, כך שמספר משתני הסרק הוא כמספר המשוואות.

פתרון לשאלה 2.11

א. בבעיית תכנון ליניארי בעלת שני משתני החלטה, לפתרון בסיסי אפשרי ייתכנו שניים עד ארבעה פתרונות בסיסיים סמוכים. להזכירכם, פתרון בסיסי אפשרי הוא נקודת חיתוך של שני קווים ישרים המתארים אילוצים על הפתרון. ניתן לנוע לאורך כל אחד משני הישרים עד לנקודת חיתוך סמוכה עם ישר המתאר אילוץ נוסף על הפתרון. במקרים מסוימים, ניתן למצוא נקודות חיתוך משני הכיוונים של הפתרון הבסיסי האפשרי, ולכן נקבל מכל ישר שני פתרונות בסיסיים סמוכים לכל היותר, כלומר שניים עד ארבעה פתרונות בסיסיים סמוכים בסך-הכול.

ב. בבעיית תכנון ליניארי בעלת שני משתני החלטה, לפתרון בסיסי אפשרי ייתכנו שני פתרונות בסיסיים אפשריים סמוכים בלבד, משום שעלינו לנוע על הישרים המתארים אילוצים על הפתרון רק בכיוון שבו הם עדיין מהווים את הגבול של תחום הפתרונות האפשריים.

פתרון לשאלה 2.12

הצורה המורחבת – צורת הניסוח של בעיית התכנון הליניארי הכוללת שני חלקים: פונקציית המטרה ומערכת משוואות ליניאריות המתארות את האילוצים על הפתרון.

משתני סרק – משתני עזר חיוביים אשר בעזרת הוספתם לאי-שוויונות ניתן לנסחם כשוויונות.

משתנים לא-בסיסיים – המשתנים במערכת המשוואות המוצגת בצורה המורחבת, המקבלים את הערך אפס.

משתנים בסיסיים – המשתנים במערכת המשוואות המוצגת בצורה המורחבת, אשר אינם מקבלים את הערך אפס.

בסיס – הקבוצה הכוללת את המשתנים הבסיסיים.

פתרון לשאלה 2.13

כן. שיטה זו יכולה לשמש כמבחן אופטימליות כיוון שלפי תכונה 3 של שיטת הסימפלקס, אם לפתרון קדקוד אפשרי אין פתרונות קדקוד אפשריים סמוכים שהם טובים ממנו, אזי הוא פתרון אופטימלי.

סריקת כל הפתרונות הבסיסיים האפשריים הסמוכים ובדיקת הערכים המתקבלים מהצבתם בפונקציית המטרה תיתן לנו תשובה אם הפתרון הבסיסי האפשרי שהגענו אליו הוא אופטימלי אם לאו.

ואולם, למעשה, השיטה לעריכת מבחן אופטימליות היא פשוטה יותר ודורשת פחות פעולות מבשיטה שהציע התלמיד. שיטתו של התלמיד החרוץ אינה יעילה.

פתרון לשאלה 2.14

מבחן האופטימליות עבור בעיית החלטה הדורשת הבאה למינימום של פונקציית המטרה הוא אם כל המקדמים של המשתנים הלא-בסיסיים בפונקציית המטרה הם חיוביים. הסיבה לכך היא, שכאשר המקדמים של המשתנים הלא-בסיסיים הם שליליים, ניתן

להקטין את ערכה של פונקציית המטרה על-ידי הצבת ערך שהוא גדול מאפס במשתנים אלה.

פתרון לשאלה 2.15

לבעיה הנתונה יש אינסוף פתרונות כאשר $a = 2$ או $a = 4$.

כאשר $a = 2$ הפתרון האופטימלי הוא $Z = 10$, וכאשר $a = 4$ הפתרון האופטימלי הוא $Z = 8$.

3. בעיית התובלה

לתכנון הליניארי יישומים רבים. בפרק זה נרחיב את אופקינו בנושא באמצעות דיון על סוג חשוב של בעיות תכנון ליניארי והיא בעיית התובלה. לבעיית התובלה יש מספר מאפיינים חשובים. הראשון הוא, שבעיה זו מתעוררת לעתים קרובות בהקשרים מגוונים. כמו-כן, בעיות התובלה כרוכות במספר גדול של אילוצים ומשתנים, ולכן חישוב בשיטת הסימפלקס ידרוש מאמץ חישובי גדול מאוד. עם זאת, המבנה המיוחד של בעיית התובלה מאפשר לפתח גרסה מקוצרת של שיטת הסימפלקס (המותאמת לבעיות תובלה) שמביאה לחיסכון רב במספר החישובים הנדרשים.

3.1 הצגת הבעיה

"גלידות אביב" היא חברה מוכרת וידועה לייצור גלידות ושלגונים. עם השנים התרחבה החברה, ולרשותה עומדים שני מפעלים ליצור גלידות, האחד – בראש-העין והשני – בקריית-גת. את הגלידות מתוצרת חברת "גלידות אביב", ששמן הולך לפניהן, ניתן להשיג רק בשלוש חנויות המפעל של החברה – אחת בתל-אביב, שנייה בחיפה ושלישית בבאר-שבע.

מדי שבוע יוצאים מובילים ומעבירים את הגלידות מן המפעלים לחנויות המפעל, ושם רוכשים אותן הצרכנים להנאתם. בשנים הקודמות התנהלה התובלה מן המפעלים לחנויות ללא תכנון מיוחד, אולם עתה, כשהיקף הפעילות גדל, ביקש מנכ"ל החברה ממנהל מחלקת ההפצה להפעיל שיקולים מתמטיים ולהציע תכנון יעיל של התובלה, כך שהעלות הכוללת של **מחיר ההובלה** בכל שבוע תהיה **מינימלית**.

מנהל מחלקת ההפצה אסף את הנתונים האלה:

1. כמות חבילות הגלידה שמייצר כל מפעל בשבוע.
2. כמות חבילות הגלידה שיש לספק לכל חנות-מפעל בשבוע.
3. עלות ההובלה של חבילת גלידה מכל מפעל לכל חנות מפעל (עלות זו תלויה כמובן במרחק הנסיעה, בחברת ההובלה שעמה עובד המפעל ובגורמים נוספים).

את התוצאות ריכז מנהל המחלקה בטבלאות שלהלן :

1. התוצרת השבועית של המפעלים (בחבילות גלידה) :

המפעל	ראש-העין	קריית-גת	סה״כ
היצור השבועי	230,000	550,000	780,000

2. הצריכה השבועית של חנויות המפעל (בחבילות גלידה) :

החנויות	תל-אביב	חיפה	באר-שבע	סה״כ
הצריכה השבועית	300,000	260,000	220,000	780,000

שימו לב:

סך כול הביקוש (הצריכה השבועית) **שווה** לסך כול ההיצע (התוצרת השבועית).

3. עלות ההובלה של חבילת גלידה (בשקלים) :

החנות / המפעל	תל-אביב	חיפה	באר-שבע
ראש-העין	2	4	5
קריית-גת	3	5	2

שאלה 3.1

א. איזו בעיה תתעורר אם הצריכה השבועית בחנות המפעל בתל-אביב תהיה 330,000 חבילות גלידה, ולא 300,000?

ב. אילו בעיות נוספות עלולות להתעורר אם יהיה שינוי בכמויות הייצור השבועיות של המפעלים ?

מבנה בעיית התובלה

הבעיה שבה מתחבט מנהל המחלקה היא בעיית תובלה קלאסית. בכל בעיה שכזו קיימת קבוצת מקורות המייצרת **מוצר יחיד** וכן קבוצת יעדים הדורשת את המוצר הזה. לכל מקור

כמות ייצור אופיינית, כלומר היצע המאפיין את המקור, ולכל יעד כמות ביקוש אופיינית. הובלת יחידת מוצר ממקור מסוים ליעד מסוים כרוכה בעלות נתונה.

מטרתנו היא לתכנן את התובלה, ובמילים אחרות, להחליט כמה יחידות מוצר יועברו מכל מקור לכל יעד על-פי אילוצי הייצור והצריכה, כך שנספק את כל הביקוש במחיר הובלה כולל מינימלי.

מילון מונחים

להלן המונחים הכלליים עבור בעיית תובלה ותרגומם למרכיבי בעיית התובלה של חברת "גלידות אביב":

נתוני הבעיה:

1. **מקורות** – שני המפעלים.
2. **יעדים** – שלוש חנויות המפעל.
3. **היצע** – התוצרת השבועית של כל מפעל.
4. **ביקוש** – הצריכה השבועית של כל חנות.
5. **עלויות** – מחירי ההובלה של חבילת גלידה מכל מקור לכל יעד.

משתני החלטה:

6. **הקצאות** – מספר ארגזי קירור (אלפי גלידות), שהוחלט להעבירם מכל מקור לכל יעד.

פונקציית מטרה:

7. **מחיר התובלה** – סך כול עלויות התובלה של ההקצאות מהמקורות אל היעדים (שאנו מעוניינים כי יקבלו ערך מינימלי).

ניתן לרכז את נתוני הבעיה בטבלה אחת.

טבלה 3.1 נתוני בעיית התובלה של חברת "גלידות אביב"

	חנויות המפעל				
היצע	באר-שבע	חיפה	תל-אביב		
230,000	5	4	2	ראש-העין	מפעלים
550,000	2	5	3	קריית-גת	
780,000	220,000	260,000	300,000		ביקוש

שאלה 3.2

כיצד תיראה טבלת ההובלה לאור הנתונים החדשים שלהלן:

1. הוספת מקור – מפעל במטולה שתוצרתו השבועית היא 240,000 חבילות גלידה.
2. גידול בצריכה בחנות המפעל בחיפה ל-300,000 חבילות גלידה בשבוע.
3. הוספת יעד – חנות מפעל ברמת-גן, שצריכתה השבועית 200,000 חבילות גלידה.
4. מחירי ההובלה של חבילת גלידה מהמפעל במטולה אל חנויות המפעל השונות הם כדלקמן:
   א. חנות המפעל בתל-אביב – 4 שקלים.
   ב. חנות המפעל בחיפה – 3 שקלים.
   ג. חנות המפעל בבאר-שבע – 7 שקלים.
   ד. חנות המפעל ברמת-גן – 4 שקלים.
5. מחירי ההובלה אל חנות המפעל ברמת-גן מן המקומות האלה:
   א. המפעל בראש-העין – שקל אחד.
   ב. המפעל בקריית-גת – 3 שקלים.

הפתרון הנוכחי

נתבונן עתה בתכנית התובלה הנוכחית בחברה. ניתן לרשום את ההקצאות של מערכת זו בטבלה באופן הזה:

טבלה 3.2 מערכת התובלה הנוכחית של חברת "גלידות אביב"

	חנויות המפעל				
היצע	באר-שבע	חיפה	תל-אביב		
230,000	$\boxed{5}$ 70,000	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ 160,000	ראש-העין	המפעלים
550,000	$\boxed{2}$ 150,000	$\boxed{5}$ 260,000	$\boxed{3}$ 140,000	קריית-גת	
780,000	220,000	260,000	300,000		ביקוש

במצב התובלה הנוכחי על המובילים להעביר:

- **מהמפעל בראש העין**: 160,000 חבילות גלידה לחנות המפעל בתל-אביב ו-70,000 חבילות גלידה לחנות המפעל בבאר-שבע.
- **מהמפעל בקריית-גת**: 140,000 חבילות גלידה לחנות המפעל בתל-אביב, 260,000 חבילות גלידה לחנות המפעל בחיפה ו-150,000 חבילות גלידה לחנות המפעל בבאר-שבע.

בטבלה זו תא ריק פירושו שאין כלל הובלה ממפעל מסוים (מקור) לחנות מסוימת (יעד). למשל, במקרה הזה אין הובלה מן המפעל בראש-העין לחנות המפעל בחיפה.

כדי לקבל את מחיר ההובלה על-פי תכנית התובלה הזו, נכפיל בכל תא את ההקצאה בעלות הובלת יחידה ונסכם את המתקבל בכל התאים. נקבל **מחיר הובלה** כולל שהוא:

160,000*2 + 70,000*5 + 140,000*3 + 260,000*5 + 150,000*2 = 2,690,000 שקלים

מחיר ההובלה הוא אפוא 2,690,000 ש"ח. כיצד נוכל לבדוק שזהו **הפתרון האופטימלי**?

עלינו לבדוק אם קיימת תכנית תובלה אחרת, זולה יותר. אם אין תכנית תובלה אחרת, זולה יותר, אזי זהו הפתרון האופטימלי.

שאלה 3.3

א. חשבו את מחיר ההובלה עבור פתרון התובלה המוצג בטבלה שלהלן:

היצע	חנויות המפעל				
	באר-שבע	חיפה	תל-אביב		
230,000	5	4	2 230,000	ראש-העין	המפעלים
550,000	2 220,000	5 260,000	3 70,000	קריית-גת	
780,000	220,000	260,000	300,000		ביקוש

ב. הציעו שני פתרונות אפשריים נוספים וחשבו את מחיר התובלה שלהם.

בפתרון השאלה נוכחנו לדעת, כי יש לפחות פתרון תובלה אחד זול יותר, ולכן הפתרון שהוצע בטבלה 3.2 אינו הפתרון האופטימלי.

נחזור שוב אל מנהל המחלקה. לאחר שאסף את כל הנתונים הרלוונטיים, נותר לו עתה לקבוע את כמות חבילות הגלידה שיש להוביל מכל מפעל לכל חנות, כפוף לאילוצי ההיצע והביקוש, על-מנת להשיג עלות תובלה אופטימלית.

בסעיף הבא נראה כי בעיה זו מתאימה למודל התכנון הליניארי שהכרנו בפרקים קודמים. בסעיפים הבאים נראה כיצד ניתן להתאים את שיטת הסימפלקס לאלגוריתם ייחודי לפתרון בעיות תובלה.

שאלה 3.4

הנהלת הקיבוץ הארצי החליטה להקים שלושה מפעלים לעיבוד כותנה. התפוקה היומית של שלושת המפעלים תהיה :

המפעל (המקור)	התפוקה היומית (טונות)
א'	12
ב'	14
ג'	10

הכותנה המעובדת תשווק באמצעות ארבעה מרכזי שיווק; מעריכים שהביקוש היומי הצפוי במרכזי השיווק השונים הוא:

מרכז שיווק (היעד)	הביקוש היומי (בטונות)
A	9
B	10
C	11
D	6

מחירי התובלה של טונה כותנה (מעובדת) מהמפעלים השונים למרכזי השיווק השונים מרוכזים בטבלה שלהלן:

		מרכזי השיווק			
		A	B	C	D
המפעל	א	8	7	5	2
	ב	5	2	1	3
	ג	6	4	3	5

בנו את טבלת התובלה של הכותנה, לפי הנתונים שלעיל.

שאלה 3.5

א. מה היה קורה, לו מפעל א' היה מייצר 16 טונות כותנה, במקום 12 טונות?

ב. מה היה קורה, לו מרכז שיווק A היה צורך 10 טונות כותנה, במקום 9 טונות?

3.2 הצגת בעיית התובלה כבעיית תכנון ליניארי

3.2.1 מודל מתמטי לבעיית התובלה

בסעיף הזה נציג מודל מתמטי לבעיית התובלה. בעיה זו דומה לכל בעיית תכנון ליניארי.

לצורך הצגת המודל נשתמש בסימונים האלה :

m – מספר המקורות

n – מספר היעדים

s_i – ההיצע במקור i $(i = 1,2, \ldots, m)$

d_j – הביקוש ביעד j $(j = 1,2, \ldots, n)$

c_{ik} – עלות העברת יחידה אחת ממקור i ליעד j

x_{ij} – הקצאה, מספר היחידות המובלות ממקור i ליעד j

נתבונן שוב בטבלה 3.1 שמכילה את נתוני בעיית התובלה של חברת ״גלידות אביב״, ונוסיף לה את סימני המודל המתמטי :

טבלה 3.3 מודל התכנון הליניארי המתאים לבעיית חברת ״גלידות אביב״

	חנויות המפעל n=3				
היצע	j=3 באר-שבע	j=2 חיפה	j=1 תל-אביב		
s_1=230,000	5	4	2	ראש-העין i=1	המפעלים m=2
s_2=550,000	2	5	3	קריית-גת i=2	
	d_3=220,000	d_2=260,000	d_1=300,000		ביקוש

נציג כעת במשוואות את מודל התכנון הליניארי המתאים לבעיית חברת ״גלידות אביב״ :

I. אילוצי היצע

סך כול ההקצאות ממפעל 1 (ראש-העין) לחנויות המפעל 1,2,3 הוא 230,000 חבילות גלידה:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 230{,}000$$

סך כול ההקצאות ממפעל 2 (קריית-גת) לחנויות המפעל 1,2,3 הוא 550,000 חבילות גלידה:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 550{,}000$$

ניתן לייצג את אילוצי ההיצע בנוסח אלגברי מקוצר. למשל, פעולת הסיכום של כל ההקצאות ממפעל 1, בראש-העין (האילוץ הראשון, כל ה-x_{1j}), נכתבת בדרך אלגברית מקוצרת כך:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = \sum_{j=1}^{3} x_{1j} = 230{,}000$$

האות היוונית הגדולה Σ (סיגמה) מציינת פעולת סיכום. הערכים המושווים לאינדקס (במקרה זה האינדקס הוא האות j) מתחת ומעל לסיגמה מציינים את הגבולות שביניהם אנו אמורים לחבר את ערכי ה- x_{1j} עבור $j = 1,2,3$.

שאלה 3.6

כיצד ננסח את האילוץ השני, פעולת הסיכום של כל ההקצאות ממפעל 2 שבקריית-גת (כל ה-x_{2j}), בצורה אלגברית מקוצרת?

> להבא, בפעולות סיכום נשתמש בנוסח האלגברי המקוצר.

II. אילוצי ביקוש

סך כול הביקוש לגלידה בחנות המפעל 1 שבתל-אביב הוא 300,000 חבילות:

$$x_{11} + x_{21} = \sum_{i=1}^{2} x_{i1} = 300{,}000$$

סך כול הביקוש לגלידה בחנות המפעל 2 שבחיפה הוא 260,000 חבילות:

$$x_{12} + x_{22} = \sum_{i=1}^{2} x_{i2} = 260,000$$

סך כול הביקוש לגלידה בחנות המפעל 3 שבבאר-שבע הוא 220,000 חבילות :

$$x_{13} + x_{23} = \sum_{i=1}^{2} x_{i3} = 220,000$$

III. אילוצי אי-שליליות

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1,2; \quad j = 1,2,3$$

ההקצאות כולן הן גדלים אי-שליליים.

IV. עלות ההובלה (פונקציית המטרה)

$$Z = 2x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + 3x_{21} + 5x_{22} + 2x_{23} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

כזכור, אנו מעוניינים לקבל עלות מינימלית להובלת ההקצאות.

שאלה 3.7

נסחו את המודל המתמטי עבור בעיית תובלה כללית.

לפני שנעבור לתיאור שיטת הסימפלקס המקוצרת לבעיית התובלה, נייחד שני סעיפים לתכונותיהם של הפתרונות האפשריים לבעיית התובלה.

3.2.2 מספר האילוצים הבלתי תלויים

לכל אחד מ-m המקורות יש אילוץ היצע מתאים, ולכל אחד מ-n היעדים יש אילוץ ביקוש מתאים. כלומר, בבעיית תובלה מופיעים $m+n$ אילוצי היצע וביקוש.

שאלה 3.8

מהם מספר המקורות, מספר היעדים ומספר האילוצים בבעיית התובלה של חברת "גלידות אביב"? האם התוצאה תואמת ל-$m+n$ אילוצים?

כמו כן, כפי שהזכרנו בסעיף 3.1, נדרוש כי **סכום היצעים** של כל המקורות $\sum_{i=1}^{m} s_i$ יהיה **שווה לסכום הביקושים** של כל היעדים $\sum_{j=1}^{m} d_j$.

בדוגמה של חברת ״גלידות אביב״:

230,000+550,000= 300,000+260,000+220,000= 780,000

דרישה זו: $\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{m} d_j$ הופכת אילוץ אחד למיותר, כיוון שהוא נובע מן האילוצים האחרים.

שאלה 3.9

הסבירו מדוע הדרישה $\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{m} d_j$ הופכת אילוץ אחד למיותר.

מכאן שמספר האילוצים האמיתי (האילוצים הבלתי-תלויים, כלומר שאינם נובעים מן האילוצים האחרים) הוא למעשה $m + n - 1$.

שיטת הסימפלקס, שהכרנו בפרק הקודם, מבטיחה לנו כי מתוך mn משתני ההקצאה (x_{ij}) רק $m + n - 1$ יהיו (אולי) בעלי ערך חיובי, וערכם של שאר המשתנים, שמספרם $mn - m - n + 1$, יהיה בפתרון האופטימלי 0.

בדוגמה הבאה נראה כיצד ניתן לעבור מפתרון לא-בסיסי (שבו מספר המשתנים בעלי ערך חיובי גדול מ-($m + n - 1$) לפתרון בסיסי, שבו ערך פונקציית המטרה קטן יותר (או שווה לו).

מעבר מפתרון לא-בסיסי לפתרון בסיסי

מערכת התובלה הנוכחית בחברת ״גלידות אביב״, המוצגת בטבלה 3.4, מתארת פתרון לא-בסיסי, שכן מספר המשתנים שערכם שונה מאפס בפתרון זה הוא 5 ($x_{11}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}$). זאת כאשר פתרון בסיסי אמור להכיל 4 משתנים בלבד ($m + n - 1 = 2 + 3 - 1 = 4$).

טבלה 3.4 מערכת התובלה הנוכחית בחברת "גלידות אביב" – פתרון לא-בסיסי

היצע	3 באר-שבע	2 חיפה	1 תל-אביב		
			חנויות המפעל		
230,000	$\boxed{5}$ 70,000	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ 160,000	ראש-העין 1	המפעלים
550,000	$\boxed{2}$ 150,000	$\boxed{5}$ 260,000	$\boxed{3}$ 140,000	קריית-גת 2	
780,000	220,000	260,000	300,000		ביקוש

נראה עתה כי מכל פתרון לא בסיסי אפשר להסיר משתנה, זאת אומרת, לקבוע את ערכו לאפס, ובכך לשפר (או לכל הפחות לא "לקלקל") את הפתרון. לפיכך, הפתרון האופטימלי חייב להיות פתרון בסיסי המכיל $m + n - 1$ משתנים בלבד.

כאשר הפתרון לא-בסיסי ומכיל יותר מ- $m + n - 1$ משתנים, אזי הטבלה של בעיית התובלה המתארת פתרון לא-בסיסי מכילה בהכרח לפחות קבוצה אחת של משתנים גדולים מ- 0, היוצרים מעגל (ניתן לחבר את התאים שבהם הם נמצאים בקווים ישרים : אנכיים או אופקיים) באופן המתואר בטבלה 3.5 באמצעות הקו המקווקו (במקרה זה המעגל מורכב מארבעה תאים).

טבלה 3.5 מערכת התובלה הנוכחית בחברת "גלידות אביב" – פתרון לא-בסיסי

היצע	3 באר-שבע	2 חיפה	1 תל-אביב		
			חנויות המפעל		
230,000	70,000		160,000	ראש-העין 1	המפעלים
550,000	150,000	260,000	140,000	קריית-גת 2	
780,000	220,000	260,000	300,000		ביקוש

נניח עתה, כי אנו מגדילים ביחידה אחת את ערכם של המשתנים x_{11} ו-x_{23} – שייקראו "משתנים מקבלים" – ומקטינים ביחידה אחת את ערכם של x_{21} ו-x_{13}, שיקראו "משתנים תורמים".

שאלה 3.10

א. שרטטו את טבלת התובלה של חברת "גלידות אביב" לאחר שינויים אלו.

ב. האם הפתרון החדש שנקבל שומר על אילוצי ההיצע והביקוש? נמקו את תשובתכם.

ג. אילו בחרנו להגדיל את המשתנים x_{11} ו-x_{13}, ולהקטין את המשתנים x_{21} ו-x_{23}, האם הפתרון שהיינו מקבלים היה שומר על אילוצי ההיצע והביקוש?

לאחר שינויים אלו אנו מקבלים אפוא פתרון חדש השומר על אילוצי ההיצע והביקוש.

פונקציית המטרה משתנה בשיעור הזה:

$$\Delta_Z = c_{11} - c_{13} + c_{23} - c_{21}$$

שאלה 3.11

מהן האפשרויות שייתכנו עבור השינוי Δ_Z ? בכל אחת מן האפשרויות, הסבירו אם הפתרון שקיבלנו טוב מקודמו, אם לאו.

במקרה ש-Δ_Z הוא חיובי, כלומר הגדלנו את ערכה של פונקציית המטרה ולכן קיבלנו פתרון **פחות טוב** מהקודם, נחליף את תפקידי המשתנים. x_{21} ו-x_{13} יהיו המשתנים המקבלים, ולהם נוסיף יחידה, ואילו x_{11} ו-x_{23} יהיו המשתנים התורמים, ומהם נגרע יחידה. כך נקבל $\Delta_Z < 0$ גם עבור אפשרות זו.

לפנינו אפוא תהליך איטרטיבי המשפר (או לא "מקלקל") את הפתרון המבוסס על הגדלת ערכם של זוג משתנים והקטנת ערכם של זוג אחר. נפעיל תהליך זה פעם אחר פעם עד שאחד המשתנים יקבל את הערך אפס. כלומר נקטין את מספר המשתנים הבסיסיים בפתרון תוך כדי שיפור פונקציית המטרה. ניתן להוכיח כי כאשר נגיע לפתרון עם $m + n - 1$ משתנים בסיסיים, ייעצר התהליך כיוון שבכל פתרון אפשרי לבעיה עם $m + n - 1$ משתנים בסיסיים אין מעגל.

שאלה 3.12

א. כמה פעמים אפשר להפעיל את התהליך האיטרטיבי הזה?

ב. בטבלה שלהלן מפורטים נתוני בעיית תובלה מסוימת ונתון פתרון לא-בסיסי (עם 4 משתנים בסיסיים במקום 3). הביאו את הפתרון לפתרון בסיסי. כלומר, הראו כיצד ניתן לוותר על אחד המשתנים (על-ידי הבאתו לערך אפס) באמצעות התהליך האיטרטיבי לעיל.

	יעד 1	יעד 2	ההיצע
מקור 1	$\boxed{2}$ 16	$\boxed{3}$ 10	34
מקור 2	$\boxed{5}$ 2	$\boxed{3}$ 8	28
הביקוש	18	44	

3.2.3 תכונת הפתרונות השלמים

הפתרון האופטימלי של בעיית תכנון ליניארי עשוי להכיל ערכים לא שלמים עבור משתני ההחלטה (לדוגמה $x_{12} = 3\frac{1}{2}$ וכיו"ב). בבעיית תובלה אי-אפשר להרשות זאת שכן ההקצאות אמורות להיות שלמות (בדוגמה של חברת "גלידות אביב", למשל, כל יחידת הקצאה היא ארגז קירור אחד, ולא $3\frac{1}{2}$ ארגזים, וכדומה).

הוספת האילוץ "x_{ij} **שלמים**" לניסוח הבעיה מסווגת אותה כ"**בעיית תכנון ליניארי בשלמים**". קבוצה זו של בעיות (בעיות תכנון ליניארי, שלהן נדרשים פתרונות שלמים) שייכת למחלקת הסיבוכיות NP (שלהן לא נמצא עד כה פתרון בזמן סביר, כמו בעיית הסוכן הנוסע, מציאת מעגל המילטון, צביעת מפה בשלושה צבעים ועוד).

כיוון שבבעיית התובלה ההקצאות צריכות להיות שלמות, יכולנו להימצא בבעיה חמורה. למזלנו, התבנית של הבעיה מבטיחה כי עבור עלויות (c_{ij}) שלמות, ועבור היצעים (s_i)

וביקושים (d_{ij}) שלמים, גם ההקצאות בפתרון האופטימלי יהיו שלמות. לפיכך אין צורך להוסיף את אילוצי השלמות לניסוח הבעיה.

3.3 שיטת סימפלקס מקוצרת לבעיית התובלה

בעיית התובלה, כמו כל בעיית תכנון ליניארי אחרת, ניתנת לפתרון בשיטת הסימפלקס. אולם כיוון שלבעיה תבנית ייחודית, אפשר להגיע אל הפתרון ביתר קלות. בסעיף זה נציג גרסה משופרת של שיטת הסימפלקס המתאימה לבעיית התובלה.

השיטה המשופרת מבוססת על השלבים הבסיסיים של שיטת הסימפלקס.

1. צעד האתחול – יש למצוא פתרון בסיסי אפשרי התחלתי.

2. השלב האיטרטיבי:

א. מבחן האופטימליות – דרושה ידיעה של משוואת פונקציית המטרה הנוכחית (שמתקבלת על-ידי החסרה משורה אפס כפולה מסוימת של שורה אחרת באיטרציה הקודמת). אם קיימים מקדמים שליליים של המשתנים הלא-בסיסיים בפונקציית המטרה, אזי הפתרון הנוכחי אינו אופטימלי, **ויש לעבור לפתרון בסיסי אחר**. אחרת, סיום.

ב. המעבר לפתרון בסיסי אחר מורכב משלושת הצעדים שלהלן:

i. בחירת המשתנה הנכנס לבסיס – יש למצוא את המשתנה שהמקדם שלו בפונקציית המטרה הנוכחית הוא השלילי ביותר.

ii. קביעת המשתנה היוצא מהבסיס – יש לזהות את המשתנה הבסיסי הראשון שמתאפס עקב הגידול במשתנה הנכנס לבסיס.

iii. קביעת הפתרון הבסיסי האפשרי החדש – יש להחסיר כפולות מסוימות של שורה אחת מיתר השורות בטבלת הסימפלקס הנוכחית.

ג. חזור למבחן האופטימליות.

בסעיפים הבאים נתאר כיצד ניתן לבצע כל שלב ושלב בצורה פשוטה יחסית לשיטת הסימפלקס.

3.3.1 שלב האתחול (מציאת פתרון בסיסי אפשרי)

נציג תחילה שיטה פשוטה למציאת פתרון בסיסי התחלי (המכיל $m + n - 1$ משתנים) העונים על האילוצים. שיטה זו נקראת **שיטת הפינה הצפונית-מערבית**.

שיטה זו פשוטה עד מאוד, ובזה יתרונה. אולם כיוון שהשיטה אינה עושה כל שימוש בעלויות התובלה, הפתרון הבסיסי המתקבל עשוי להיות רחוק מן הפתרון האופטימלי, ואז יידרשו איטרציות נוספות כדי להגיע לפתרון האופטימלי.

קיימות שיטות נוספות למציאת פתרון בסיסי התחלתי המביאות לפתרון התחלתי משופר (זאת אומרת למחיר תובלה זול יותר) והן: **שיטת המחיר המינימלי** ו**שיטת הקירוב של ווגל**. הפתרון ששיטות אלו משיגות הוא אמנם משופר ביחס לשיטת הפינה הצפונית-מערבית, אך עדיין אינו אופטימלי. לא נציג שיטות אלו בספר זה.

בהליך לבניית פתרון בסיסי אפשרי התחלתי בוחרים את $m + n - 1$ המשתנים בזה אחר זה. לאחר כל בחירה, נותנים למשתנה שנבחר ערך שיקיים אילוץ אחד נוסף (ועל-ידי כך מבטלים את אילוץ השורה או העמודה, כך שלא נבחן אותן עוד בקשר להקצאות). לאחר $m + n - 1$ בחירות, יש בידינו פתרון בסיסי שלם שנבנה כך שיקיים את כל האילוצים.

כדי להכיר וללמוד את השיטה, נשוב אל טבלה 3.1, המציגה את בעיית התובלה בחברת "גלידות אביב" (ללא העלויות c_{ij}) בעזרת טבלה ריקה (ללא הקצאות).

טבלה 3.6 שיטת הפינה הצפונית-מערבית – מצב התחלתי

	חנויות המפעל			
היצע	3	2	1	הפינה הצפונית-מערבית
230,000				1 **המפעלים**
550,000				2
780,000	220,000	260,000	300,000	**ביקוש**

לצורך העניין נניח, שהטבלה "מוצפנת" (כלומר פניה לכיוון צפון). במצב הזה המשבצת הצפונית-מערבית בטבלה היא המשבצת המתאימה למשתנה x_{11}. המשתנה x_{11} שייך לשורה 1 ולעמודה 1. בשורה 1 ההיצע הוא 230,000 ואילו בעמודה 1 הביקוש הוא 300,000. לפיכך, ההקצאה המקסימלית למשתנה x_{11} היא 230,000. ההקצאה הזאת כוללת את כל ההיצע של מקור 1, ולכן נסמן קו על ההיצע והתאים הנותרים בשורה 1, שמשמעותו – מקור 1 סיפק את כל כמות הייצור שלו. את הביקוש הנותר של יעד 1 נתקן ל-70,000 (300,000 – 230,000). כך נקבל את הטבלה שלהלן:

טבלה 3.7 שיטת הפינה הצפונית-מערבית – לולאה ראשונה

	חנויות המפעל			
היצע	3	2	1	הפינה הצפונית-מערבית
~~230,000~~	–	–	230,000	1 המפעלים
550,000				2
	220,000	260,000	~~300,000~~ 70,000	ביקוש

קיבלנו עתה טבלה ריקה מצומצמת יותר (ללא שורה 1), אשר המשבצת הצפונית-מערבית שלה היא x_{21}. בעמודה המתאימה לתא זה הביקוש (המתוקן) הוא 70,000, ובשורה המתאימה לתא זה ההיצע הוא 550,000. מכאן, ההקצאה המקסימלית לתא זה היא 70,000. הקצאה זאת כוללת את כל הביקוש (שנותר) ביעד 1, ו-70,000 מתוך ההיצע של מקור 2. נעדכן את הנתונים להלן.

טבלה 3.8 שיטת הפינה הצפונית-מערבית – לולאה שנייה

	חנויות המפעל				
ההיצע	3	2	1		
~~230,000~~	–	–	230,000	1	המפעלים
~~550,000~~ 480,000			70,000	2	
	220,000	260,000	~~300,000~~ ~~70,000~~		הביקוש

בחלק הריק של טבלה זו המשבצת הצפונית-מערבית היא x_{22}. בשורה 2, ההיצע הוא 480,000 ובעמודה 2 הביקוש הוא 260,000. לפיכך, ההקצאה המקסימלית לתא זה היא: $x_{22} = 260,000$. לאחר עדכון ההיצע והביקוש הנותרים נקבל את הטבלה:

טבלה 3.9 שיטת הפינה הצפונית-מערבית – לולאה שלישית

	חנויות המפעל				
היצע	3	2	1		
~~230,000~~	–	–	230,000	1	מפעלים
~~550,000~~ 220,000		260,000	70,000	2	
	220,000	~~260,000~~	~~300,000~~ ~~70,000~~		ביקוש

עתה הגענו לשלב האחרון, שבו הטבלה מכילה רק משבצת פנויה אחת. ההיצע במקור 2 שווה לביקוש ביעד 3 (220,000), ולכן $x_{23} = 220,000$. קיבלנו פתרון בסיסי אפשרי.

שאלה 3.13

מהי הסיבה לשוויון בין ההיצע שבמקור 2 לביקוש ביעד 3 בשלב האחרון של פתרון הבעיה בשיטת הפינה הצפונית-מערבית?

טבלה 3.10 הפתרון הבסיסי המתקבל בשיטת הפינה הצפונית-מערבית

	חנויות המפעל			
היצע	3	2	1	
			230,000	המפעלים 1
	220,000	260,000	70,000	2
				ביקוש

קיבלנו פתרון בסיסי אפשרי (התחלתי). הפתרון הזה כולל את המשתנים :

$$x_{11} = 230{,}000,\quad x_{21} = 70{,}000,\quad x_{22} = 260{,}000,\quad x_{23} = 220{,}000$$

כאשר מחוץ לבסיס נמצאים המשתנים : x_{12}, x_{13}, שערכם הוא 0.

פתרון זה עונה על כל אילוצי ההיצע, הביקוש והאי-שליליות, ומחיר התובלה עבורו הוא :

$$Z = 2*230{,}000 + 3*70{,}000 + 5*260{,}000 + 2*220{,}000 = 2{,}410{,}000 \text{ ש״ח}$$

הבסיס מכיל 4 משתנים וזאת בהתאם לקביעה כי כל בסיס יכיל $m + n - 1$ משתנים (בדוגמה $2 + 3 - 1 = 4$). שיטת הפינה הצפונית-מערבית מבטיחה גודל זה, שהרי בכל שלב אנו מוחקים שורה או עמודה, פרט לשלב האחרון שבו נמחקות במקביל השורה והעמודה האחרונות.

שאלה 3.14

מצאו פתרון בסיסי אפשרי התחלתי בשיטת הפינה הצפונית-מערבית לבעיית התובלה שלהלן :

	היעדים				היצע
	1	2	3	4	
המקורות 1					230
2					150
3					540
ביקוש	220	80	280	340	

שאלה 3.15

להלן נתונה טבלה שבה מפורטים חלקית נתוני בעיית תובלה כלשהי (חסרים בה המחירים):

	חנויות המפעל			היצע
	1	2	3	
המפעלים 1				230
2				80
3				200
ביקוש	220	10	280	

א. מצאו פתרון בסיסי התחלתי בשיטת הפינה הצפונית-מערבית.

ב. האם נתקלתם בבעיה בדרך למציאת פתרון בסיסי אפשרי? אם כן, כיצד לדעתכם ניתן לפתור אותה?

סיכום הליך כללי לבניית פתרון בסיסי אפשרי (התחלי) בשיטת הפינה הצפונית-מערבית:

התחלה: בתחילה, כל התאים בטבלת הסימפלקס מועמדים לספק משתנה בסיסי (הקצאה).

צעד 1 : מבין התאים שעדיין באים בחשבון , בחר את התא הצפוני-מערבי ;

צעד 2 : הקצה את הכמות המקסימלית האפשרית לתא הנבחר (הצפוני-מערבי). כמות זו היא המינימום בין ההיצע לביקוש הנותרים המתאימים לתא זה ;

צעד 3 : בטל את השורה או העמודה (לפי השארית הקטנה ביותר של ההיצע או של הביקוש), שתא זה שייך להן ;

צעד 4 : אם נשארה שורה אחת בלבד, או עמודה אחת בלבד, אזי ההליך נשלם על-ידי בחירת כל המשתנים **הנותרים**, השייכים לעמודה או לשורה הזו, למשתנים בסיסיים עם ההקצאה המתאימה. אחרת – חזור לצעד 1.

אלגוריתם לשיטת הפינה הצפונית-מערבית

נסיים סעיף זה בהצגת השגרה : "**מצא בסיס התחלתי בשיטת הפינה הצפונית-מערבית**". שגרה זו מקבלת כקלט את הפרמטרים האלה :

m – מספר המקורות

n – מספר היעדים

$s[1..m]$ – מערך ההיצעים של המקורות

$d[1..n]$ – מערך הביקושים של היעדים

השגרה יוצרת מערך דו-ממדי $x[1..m, 1..n]$ עבור משתני ההקצאה.

השגרה: "מצא בסיס התחלתי בשיטת הפינה הצפונית-מערבית"

נתון מערך $x[i,j]$. יש להניח כי ערכי המערך x אותחלו באפסים.

מצא בסיס התחלתי בשיטת הפינה הצפונית-מערבית (m, n, s, d):

(1) $j \leftarrow 1\ ;\ i \leftarrow 1$

(2) בצע $m + n - 1$ פעמים את הקטע הבא:

(2.1) $x[i,j] \leftarrow \min(s[i],d[j])$

(2.2) אם $s[i] < d[j]$ בצע:

(2.2.1) $d[j] \leftarrow d[j] - s[i]$

(2.2.2) $i \leftarrow i + 1$

(2.3) אחרת, בצע:

(2.3.1) $s[i] \leftarrow s[i] - d[j]$

(2.3.2) $j \leftarrow j + 1$

הסבר: (1) אתחול האינדקסים i ו-j ב-1.

(2) שלב איטרטיבי שבו בכל אחת מ-$m + n - 1$ הלולאות נקבעת ההקצאה של המשתנה הבסיסי $x[i,j]$ כערך המינימלי מבין ההיצע והביקוש הנתונים. בהתאם מעודכנים האינדקסים, ההיצעים והביקושים שנותרו.

שאלה 3.16

מהי סיבוכיות האלגוריתם של השגרה למציאת בסיס אפשרי התחלתי בשיטת הפינה הצפונית-מערבית?

3.3.2 השלב האיטרטיבי

לאחר שמצאנו פתרון בסיסי התחלתי, עלינו לבדוק אם הפתרון הזה הוא הפתרון האופטימלי או שניתן לשפרו.

א. מבחן האופטימליות

מטרת מבחן האופטימליות היא לבדוק אם קיימת אפשרות לבחור משתנים בסיסיים אחרים המשפרים את פונקציית המטרה.

שיפור פונקציית המטרה במקרה של בעיית תובלה הוא הקטנת ערכה. כדי לבדוק את ערכה של פונקציית המטרה, נאפס את מחיריהם של כל המשתנים הבסיסיים, כפי שיוצג בהמשך,

ונחשב מחדש את מחירים של המשתנים הלא-בסיסיים. אם מחירו של אחד המשתנים הלא-בסיסיים יהיה שלילי, או אז המשתנה הלא-בסיסי הזה יכול להקטין את פונקציית המטרה ובכך לשפר אותה, כלומר במקרה הזה הפתרון הנוכחי אינו אופטימלי.

דרך בדיקה זו היא תקינה כיוון ששינוי המחיר בשורה (בעמודה) אינו משנה את הפתרון האופטימלי (כל שכן את הפתרון האפשרי), אלא רק את ערכה של פונקציית המטרה.

לדוגמה, נניח כי נתונה בעיית התובלה שנתוניה מוצגים בטבלה 3.11 (המחירים נקובים באלפי שקלים):

טבלה 3.11 דוגמה של טבלת סימפלקס לתובלה

מפעלים (המקורות)	חנויות (היעדים) 1	2	היצע
1	$\boxed{5}$	$\boxed{2}$	200
2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	100
ביקוש	220	80	

שאלה 3.17

א. כמה משתנים יש בפתרון הבסיסי לבעיה המתוארת בטבלה 3.11?

ב. כמה פתרונות בסיסיים אפשריים קיימים לבעיה שבטבלה 3.11?

ג. מהו הפתרון האופטימלי?

ד. מהו ערך פונקציית המטרה של הפתרון האופטימלי?

הפתרון האופטימלי במקרה זה יינתן אפוא על-ידי המשתנים הבסיסיים האלה:

$x_{11} = 120$, $x_{12} = 80$, $x_{21} = 100$

ערך פונקציית המטרה האופטימלי הוא:

$$5 * 120 + 2 * 80 + 2 * 100 = 960$$

אם נשנה את המחירים בעמודה 1 על-ידי הפחתת יחידה (אלף שקל) מכל מחיר, נקבל את המצב המתואר בטבלה 3.12.

תוצאת השינוי היא שהעלות של כל פתרון אפשרי תקטן ב-220 אלף שקל, כיוון שבכל פתרון אפשרי מובילים 220 יחידות לחנות 1, והמחיר קטֵן ביחידה (אלף שקלים).

טבלה 3.12 שינוי מחיר בעמודה 1

	החנויות 1	החנויות 2	היצע
המפעלים 1	2	4	200
המפעלים 2	3	1	100
ביקוש	80	220	

ולכן הפתרון האופטימלי נשאר זהה:

$$x_{11} = 120 \quad , \quad x_{12} = 80 \quad , \quad x_{21} = 100$$

והשינוי הוא בערך פונקציית המטרה בלבד:

$$4 * 120 + 2 * 80 + 1*100 = 740$$

שקטנה כמובן ב-220 אלף שקל לעומת הערך הקודם.

שאלה 3.18

שנו את המחירים **בשורה 2** של טבלה 3.12, על-ידי הוספת שתי יחידות לכל תא בשורה זו, ובדקו אם הפתרון הבסיסי האופטימלי משתנה. אם הפתרון האופטימלי אינו משתנה, האם יש שינוי בפונקציית המטרה?

מסקנה: נוכל לשנות את המחירים (בסכום קבוע) **בכל שורה** או **בכל עמודה**, מבלי לשנות את הרכב המשתנים הבסיסיים בפתרון הבסיסי האופטימלי; השינוי הוא בערך של פונקציית המטרה בלבד.

כפי שראינו, כדי לבדוק אופטימליות בשיטת הסימפלקס (פרק 2), יש "לאפס" את מחירי המשתנים הבסיסיים בפונקציית המטרה. איפוס מחירי המשתנים הבסיסיים בבעיות תובלה ייעשה על-ידי הפחתת הערך u_i (ערך קבוע המתאים לצורך איפוס מחירי המשתנים הבסיסיים. אופן החישוב של ערך זה יוסבר בהמשך) מכל המחירים בשורה i והפחתת הערך v_j מכל המחירים בשורה j באופן שיתקבל $c_{ij} - u_i - v_j = 0$ עבור כל משתנה בסיסי.

את ערכי u_i ו-v_j נקבל על-ידי פתירת מערכת המשוואות $c_{ij} - u_i - v_i = 0$ עבור כל i ו-j שעבורם x_{ij} הוא משתנה בסיסי.

עבור כל משתנה לא-בסיסי נחשב את המחיר החדש c_{ij} על-ידי הפחתת u_i של השורה שבה הוא נמצא והפחתת v_j של העמודה שבה הוא נמצא. כלומר, נחשב עבור כל משתנה לא-בסיסי את ערך הביטוי $c_{ij} - u_i - v_i$, ואם יימצא משתנה לא-בסיסי שערך זה (מחירו החדש) יהיה שלילי, אז ניתן להוסיפו כמשתנה בסיסי לפתרון, ולהוציא משתנה אחר במקומו. כלומר הפתרון הנוכחי אינו אופטימלי.

המסקנה היא, שהנתונים היחידים הדרושים בשיטת הסימפלקס לתובלה, פרט לנתוני הקלט (ערכי c_{ij}, s_i ו-d_j), הם הפתרון הבסיסי האפשרי הנוכחי, הערכים הנוכחיים של u_i ו-v_j והערכים של $(c_{ij} - u_i - v_j)$ עבור המשתנים הלא-בסיסיים x_{ij}.

בזמן פתירת בעיה בחישוב ידני, נוח לרשום את המידע הזה בכל איטרציה **בטבלת הסימפלקס לתובלה**, כמתואר בטבלה 3.13.

כזכור, הפתרון הבסיסי ההתחלתי (שקיבלנו בשיטת הפינה הצפונית-מערבית) מופיע בטבלה 3.9. פתרון זה כולל את המשתנים:

$$x_{11} = 230{,}000, \quad x_{21} = 70{,}000, \quad x_{22} = 260{,}000, \quad x_{23} = 220{,}000$$

כאשר מחוץ לבסיס נמצאים המשתנים: x_{12}, x_{13}, וערכם הוא 0.

נציג פתרון זה בטבלת הסימפלקס לתובלה :

טבלה 3.13 טבלת סימפלקס לתובלה ההתחלתית (לפני קבלת ערכי $(c_{ij} - u_i - v_j)$)

		היעדים			ההיצע	u_i
		1	2	3		
המקורות	1	$\boxed{2}$ 230,000	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	230,000	
	2	$\boxed{3}$ 70,000	$\boxed{5}$ 260,000	$\boxed{2}$ 220,000	550,000	
הביקוש		300,000	260,000	220,000		Z=2,410,000
v_j						

שימו לב, בטבלה 3.13 הקפנו בעיגול כל x_{ij} שהוא משתנה בסיסי (כלומר שונה מאפס):

$\boxed{c_{ij}}$	
	x_{ij}

מבחן האופטימליות לבעיית התובלה:

פתרון בסיסי אפשרי הוא אופטימלי אם, ורק אם, $(c_{ij} - u_i - v_j) \geq 0$ לכל (i, j) שעבורם x_{ij} הוא משתנה לא-בסיסי.

כלומר, המחירים חייבים להיות אי-שליליים.

לפיכך, החישובים היחידים הנדרשים במבחן האופטימליות הם מציאת ערכי u_i ו-v_j עבור הפתרון הבסיסי האפשרי הנוכחי, ולאחר מכן חישוב $(c_{ij} - u_i - v_j)$. מאחר ש-$(c_{ij} - u_i - v_j)$ צריך להיות אפס עבור כל x_{ij}, שהוא משתנה בסיסי, הרי ש-u_i ו-v_j מקיימים את מערכת המשוואות:

$c_{ij} = u_i + v_j$ לכל (i,j) שעבורם x_{ij} הוא משתנה בסיסי.

המשוואות המתאימות למשתנים הבסיסיים בפתרון ההתחלתי שלנו הם :

עבור x_{11} : $u_1 + v_1 = c_{11} = 2$

עבור x_{21} : $u_2 + v_1 = c_{21} = 3$

עבור x_{22} : $u_2 + v_2 = c_{22} = 5$

עבור x_{23} : $u_2 + v_3 = c_{23} = 2$

קיימים $(m + n - 1)$ משתנים בסיסיים, ולכן יש לנו $(m + n - 1)$ משוואות. מאחר שמספר המשתנים (ה-u_i וה-v_i) הוא $(m + n)$, אפשר לקבוע ערך שרירותי לאחד המשתנים מבלי להפר את המשוואות. (הכלל שנאמץ הוא – יש לקבוע את הערך אפס לאותו u_i שמספר המופעים שלו במשוואות הוא הגדול ביותר – כלומר שיש לו מספר ההקצאות הגדול ביותר בשורה ובעמודה שלו) בשל המבנה הפשוט של המשוואות, קל מאוד לפתרן באופן אלגברי.

נתבונן אפוא במשוואות המתאימות למשתנים הבסיסיים בפתרון הבסיסי האפשרי ההתחלתי שלנו. ל-u_2 מספר המופעים הגדול ביותר, ולכן נבחר $u_2 = 0$.

פותרים את המשוואות בזו אחר זו, ומקבלים את ערכי המשתנים :

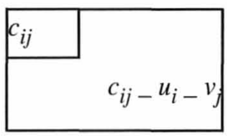
$v_1 = 3$

$v_2 = 5$

$v_3 = 2$

$u_1 = -1$

כדי לקבל את טבלת הסימפלקס לתובלה ההתחלתית השלמה (טבלה 3.16), נוסיף לנתונים שבטבלה 3.13 את הערך $c_{ij} - u_i - v_j$ בתאים שבהם נמצא משתנה לא-בסיסי :



שימו לב שההבחנה בין ערכי x_{ij} לערכי $(c_{ij} - u_i - v_j)$ בטבלאות אלה נעשית על-ידי הקפה בעיגול של x_{ij}, אך לא של הביטוי $(c_{ij} - u_i - v_j)$.

לאחר שנקבל את כל ערכי u_i ו-v_j, נרשום אותם במקומם בטבלה, ובנוסף, נחשב ונמלא את ערכי $(c_{ij} - u_i - v_j)$ עבור כל משתנה x_{ij} שאינו בסיסי (כלומר, עבור כל תא שאין לו הקצאה מוקפת בעיגול):

$$c_{12} - u_1 - v_2 = 4 + 1 - 5 = 0$$

$$c_{13} - u_1 - v_3 = 5 + 1 - 2 = 4$$

ונקבל את טבלה 3.14 שהיא טבלת הסימפלקס עבור האיטרציה הראשונה (לפתרון ההתחלי שמצאנו בשיטת הפינה הצפונית-מערבית).

טבלה 3.14 טבלת סימפלקס לאיטרציה הראשונה

		היעדים			ההיצע	u_i
		1	2	3		
	1	$\boxed{2}$ 230,000	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{5}$ 4	230,000	-1
המקורות	2	$\boxed{3}$ 70,000	$\boxed{5}$ 260,000	$\boxed{2}$ 220,000	550,000	0
הביקוש		300,000	260,000	220,000		Z=2,410,000
v_j		3	5	2		

כעת, אנו יכולים ליישם את מבחן האופטימליות על-ידי בדיקת ערכי $(c_{ij} - u_i - v_j)$ הנתונים בטבלה 3.14. הואיל ושני ערכים אלה הם **אי-שליליים**, הרי **שהפתרון הבסיסי האפשרי הנוכחי הוא אופטימלי**.

בדרך-כלל, לא נגיע אל הפתרון האופטימלי כבר בצעד הראשון, ולכן בכדי להכיר את האלגוריתם השלם לפתרון בעיות תובלה, נבחן את מבחן האופטמליות עבור פתרון בסיסי התחלתי אחר שאינו אופטימלי. באופן הזה נראה כיצד האלגוריתם לפתרון בעיות תובלה מביא אותנו אל הפתרון האופטימלי. תיאורו של הפתרון הבסיסי האחר מופיע בטבלה 3.15:

טבלה 3.15 טבלת סימפלקס חלקית עבור פתרון בסיסי אחר (לא אופטימלי)

u_i	ההיצע			היעדים		
		3	2	1		
	230,000	$\boxed{5}$ 220,000	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ 10,000	1	המקורות
	550,000	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$ 260,000	$\boxed{3}$ 290,000	2	
Z=3,290,000		220,000	260,000	300,000	הביקוש	
					v_j	

ניתן להבחין כי הפתרון הזה פחות טוב מהקודם כיוון שערך פונקציית המטרה Z גבוה יותר. כלומר לפי הפתרון הזה עלות התובלה גבוהה מעלות התובלה שקיבלנו בפתרון הקודם.

נתבונן אם כן במשוואות המתאימות למשתנים הבסיסיים בפתרון שבטבלה 3.15.

המשוואות המתאימות למשתנים הבסיסיים בפתרון ההתחלתי החדש :

עבור x_{11} : $u_1 + v_1 = c_1 = 2$

עבור x_{13} : $u_1 + v_3 = c_3 = 5$

עבור x_{21} : $u_2 + v_1 = c_1 = 3$

עבור x_{22} : $u_2 + v_2 = c_2 = 5$

ניתן לבחור $u_1 = 0$ כיוון של-u_1 ול-u_2 מספר הקצאות זהה.

אם נפתור את המשוואות, נקבל:

$v_1 = 2$

$v_3 = 5$

$u_2 = 1$

$v_2 = 4$

לאחר שנקבל את כל ערכי u_i ו-v_j, נרשום אותם במקומם בטבלה, ובנוסף נחשב את ערכי $(c_{ij} - u_i - v_j)$ עבור כל משתנה x_{ij} שאינו בסיסי:

$$c_{12} - u_1 - v_2 = 4 - 0 - 4 = 0$$

$$c_{23} - u_2 - v_3 = 2 - 1 - 5 = -4$$

וכך נקבל את טבלה 3.16, שהיא טבלת הסימפלקס לתובלה ההתחלתית (השלמה) עבור הפתרון ההתחלתי החדש:

טבלה 3.16 טבלת סימפלקס (שלמה) עבור הפתרון הבסיסי החדש

u_i	ההיצע	היעדים				
		3	2	1		
0	230,000	$\boxed{5}$ 220,000	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 10,000	1	המקורות
1	550,000	$\boxed{2}$ - 4	$\boxed{5}$ 260,000	$\boxed{3}$ 290,000	2	
Z=3,290,000		220,000	260,000	300,000	הביקוש	
		5	4	2	v_j	

כיוון ש- $c_{23} - u_2 - v_3 = -4 < 0$, הרי שהפתרון הבסיסי הנוכחי אינו אופטימלי. יש אפוא למצוא פתרון טוב יותר.

ב. מציאת המשתנה הנכנס לבסיס

מאחר ש-$(c_{ij} - u_i - v_j)$ מציין את שיעור השינוי בפונקציית המטרה עם הגידול במשתנה הלא בסיסי x_{ij}, הרי שהערך של $(c_{ij} - u_i - v_j)$ השייך למשתנה הנכנס לבסיס צריך להיות **שלילי** כדי להקטין את סך כול העלות Z. לפיכך, המועמד לכניסה לבסיס בטבלה 3.16 הוא x_{23}. לו היו מספר מועמדים מבין המשתנים הלא-בסיסיים, היינו בוחרים את המשתנה בעל הערך השלילי הגדול ביותר של $(c_{ij} - u_i - v_j)$ למשתנה הנכנס לבסיס. אם כן, במקרה שלנו ייבחר x_{23} **למשתנה הנכנס לבסיס**.

ג. מציאת המשתנה היוצא מהבסיס

הגדלת המשתנה הנכנס מאפס גורמת לתגובת שרשרת של שינויים במשתנים הבסיסיים (הקצאות) האחרים, כדי להמשיך ולקיים את אילוצי ההיצע והביקוש. המשתנה הבסיסי הראשון שמתאפס הוא **המשתנה היוצא מהבסיס**.

המשתנה הנכנס לבסיס, x_{23}, יוצר מעגל עם חלק מהמשתנים הבסיסיים

(במקרה שלנו x_{23}, x_{21}, x_{13}, x_{11} – ראו טבלה 3.17).

טבלה 3.17 תגובת השרשרת הנגרמת בעקבות הגדלת המשתנה הנכנס לבסיס, x_{23}

		היעדים			היצע	u_i
		1	2	3		
המקורות	1	2 $\oplus$ 10,000	4 0	5 $\ominus$ 220,000	230,000	0
	2	3 $\ominus$ 290,000	5 260,000	2 $\oplus$ -4	550,000	1
הביקוש		300,000	260,000	220,000		Z=3,290,000
v_j		2	4	5		

לפי תנאי האופטימליות, הכנסתו של x_{23} לפתרון הבסיסי החדש תשפר את הפתרון האופטימלי. אם נגדיל את x_{23} ביחידה (שינוי זה יסומן ב-⊕ בתא המתאים (2,3)), עלינו להקטין את x_{13} ואת x_{21} ביחידה, ולהגדיל את x_{11} ביחידה – בכדי לשמור על אילוצי הביקוש וההיצע. שינויים אלה מסומנים בתאים ב-⊕ או ב-⊖, בהתאמה).

כאן נוצרה תגובת שרשרת שכן אילוץ הביקוש עבור יעד 1 הופר, וכדי לשמרו נוסיף 1 למשתנה הבסיסי x_{11} ונסמן זאת ב-⊕. את אילוץ מקור 1 שהופר נתקן על-ידי הפחתת 1 ממשתנה הבסיס x_{13} ונסמן זאת ב-⊖. כך גם נתקן את אילוץ יעד 3 שהופר.

התוצאה היא שהתאים (1,1) ו-(2,3) הופכים לתאים מקבלים. כל אחד מהם מקבל תוספת הקצאה מאחד התאים התורמים (1,3) ו-(2,1). תאים אלו מסומנים בטבלה 3.17 על-ידי הסימנים ⊕ ו- ⊖.

כל תא תורם מקטין את ההקצאה שלו בערך זהה לערך שבו גדל המשתנה הנכנס לבסיס (ותאים מקבלים אחרים). לכן, התא התורם שיש בו ההקצאה הקטנה ביותר, תא (1,3) במקרה שלנו (מאחר ש- 290,000 > 220,000 בטבלה 3.16), יגיע ראשון להקצאה אפס כאשר המשתנה הנכנס לבסיס, x_{23}, גדל. כלומר, מקבלים ש-x_{13} הוא **המשתנה היוצא מהבסיס.**

באופן כללי, ישנה רק תגובת שרשרת **אחת** (בכל אחד מהכיוונים) שאפשר לסיים בה את התהליך בהצלחה וגם לקיים את אילוצי ההיצע והביקוש כאשר מגדילים מאפס את המשתנה הנכנס לבסיס. אפשר לזהות תגובת שרשרת זו על-ידי בחירה מתאימה בין כל התאים המכילים משתנה בסיסי: תחילה, את התא התורם **בעמודה** המכילה את המשתנה הנכנס לבסיס, אחר-כך את התא המקבל בשורה המכילה את התא התורם האמור, ובשלב הבא את התא התורם בעמודה שמכילה את התא המקבל האמור, וכך הלאה, עד אשר תגובת השרשרת מניבה תא תורם **בשורה** המכילה את המשתנה הנכנס לבסיס. כאשר בעמודה או בשורה יש יותר מתא אחד המכיל משתנה בסיסי, יש לבדוק איזה מהם צריך להיבחר כתא תורם או כתא מקבל. (מכולם, למעט תא כזה, נגיע בסופו של דבר למבוי סתום בשורה או בעמודה ללא תאים נוספים עם משתנים בסיסיים.) לאחר זיהוי תגובת השרשרת, התא התורם בעל ההקצאה **הקטנה ביותר** מספק אוטומטית את המשתנה היוצא מהבסיס. (במקרה שיש יותר מתא תורם אחד עם הקצאה מינימלית, בוחרים אחד מהם באופן שרירותי כתא בעל המשתנה היוצא מהבסיס.)

ד. זיהוי הפתרון הבסיסי האפשרי החדש

זיהוי הפתרון הבסיסי החדש מתבצע פשוט על-ידי הוספת ערך המשתנה היוצא מהבסיס (לפני כל שינוי שהוא) להקצאות בכל תא מקבל, והחסרת **אותו ערך** מההקצאות בכל אחד מהתאים התורמים. בטבלה 3.17 ערך המשתנה היוצא מהבסיס x_{23} הוא 220,000, כך שבפתרון הבסיסי האפשרי החדש נקבל את השינויים המתוארים בטבלה 3.18 (מאחר ש-$x_{23} = 0$ איננו משתנה בסיסי בפתרון החדש, אין מציינים את ערכו בטבלה החדשה).

טבלה 3.18 טבלת הסימפלקס עבור האיטרציה השנייה

		היעדים			ההיצע	u_i
		1	2	3		
המקורות	1	$\boxed{2}$ 230,000	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	230,000	
	2	$\boxed{3}$ 70,000	$\boxed{5}$ 260,000	$\boxed{2}$ 220,000	550,000	
הביקוש		300,000	260,000	220,000		Z=2,410,000
v_j						

הפתרון הבסיסי המופיע בטבלה 3.18 הוא הפתרון האופטימלי כפי שהראינו בטבלה 3.13. לפיכך, אין צורך לבצע את האיטרציה השנייה.

שאלה 3.19

להלן פתרון בסיסי אפשרי לבעיית תובלה שנתוניה מוצגים בטבלה הזאת:

		היעדים				ההיצע	u_i
		1	2	3	4		
המקורות	1	$\boxed{5}$ 220	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	230	
	2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$ 70	$\boxed{5}$ 80	$\boxed{3}$	150	
	3	$\boxed{7}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 200	$\boxed{3}$ 340	540	
הביקוש		220	80	280	340		Z= 3350
v_j							

א. האם הפתרון הבסיסי הנוכחי אופטימלי?

ב. המשיכו את האיטרציות הדרושות בשיטת הסימפלקס לתובלה, עד שתגיעו לפתרון האופטימלי.

סיכום – שיטת הסימפלקס לתובלה

לסיכום, נציג טבלה המכילה את התצורה הכללית של טבלת הסימפלקס לתובלה ואת פתרונה של בעיית תובלה בשיטת הסימפלקס בשפה מבנית.

טבלה 3.19 תצורה כללית של טבלת הסימפלקס לתובלה

	היעדים				ההיצע	u_i
	1	2	…	n		
המקורות 1	$\boxed{c_{11}}$	$\boxed{c_{12}}$	…	$\boxed{c_{1n}}$	s_1	
2	$\boxed{c_{21}}$	c_{22}	…	$\boxed{c_{2n}}$	s_2	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
m	$\boxed{c_{m1}}$	$\boxed{c_{m2}}$	…	$\boxed{c_{mn}}$	s_m	
הביקוש	d_1	d_2	…	d_n		Z =
v_j						

סיכום שיטת הסימפלקס לתובלה

(1) **שלב האתחול:**

בנה פתרון בסיסי אפשרי התחלתי לפי שיטת הפינה הצפונית-מערבית (ראו סעיף 3.3.1).

(2) **השלב האיטרטיבי :**

(2.1) **מבחן האופטימליות:** מצא את ערכי u_i ו-v_j על-ידי בחירת השורה בעלת המספר הגדול ביותר של ההקצאות וקביעת $u_i = 0$ עבור שורה זאת, ואז פתור את מערכת המשוואות $c_{ij} = u_i + v_j$ עבור כל (i,j) שעבורם x_{ij} הוא משתנה בסיסי.

אם $(c_{ij} = u_i + v_j) \geq 0$ לכל (i,j) שעבורם x_{ij} הוא משתנה **לא-בסיסי**, אזי הפתרון הנוכחי הוא הפתרון האופטימלי, ולכן עצור. אחרת, עבור לשלב 2.2.

(2.2) **קבע את המשתנה הנכנס לבסיס:** בחר את המשתנה הלא-בסיסי x_{ij} בעל הערך **השלילי הגדול ביותר** ל- $(c_{ij} = u_i + v_j)$.

(2.3) **קבע את המשתנה היוצא מהבסיס:** זהה את תגובת השרשרת הנדרשת כדי לקיים את האילוצים כאשר המשתנה הנכנס גדל בערכו. מבין התאים התורמים, בחר את המשתנה הבסיסי בעל הערך **הקטן ביותר.**

(2.4) **קבע את הפתרון הבסיסי האפשרי החדש:** הוסף להקצאה של כל תא מקבל את ערך המשתנה היוצא. החסר את הערך הזה מההקצאה של כל תא תורם.

(2.5) חזור לשלב 2.1.

3.4 פתרונות לשאלות נבחרות

פתרון לשאלה 3.1

א. אם הצריכה השבועית של חנות המפעל בתל-אביב תגדל ל-330.000 חבילות גלידה, אז כמות הייצור השבועית של המפעלים, שהיא 780.000 חבילות גלידה, לא תספק את דרישות הצריכה השבועית של חנויות המפעל שתגיע ל-810.000 חבילות גלידה (יהיה מחסור בגלידה).

ב. כמות הייצור השבועית של המפעלים יכולה לגדול או לקטון. אם כמות הייצור השבועית הכללית של המפעלים תגדל, אזי יהיה עודף של גלידה שלא ייצרך על-ידי חנויות המפעל. אם כמות זו תקטן, אזי שוב, כפי שמתברר בסעיף א', המפעלים לא ייצרו את הכמות הנצרכת על-ידי חנויות המפעל.

פתרון לשאלה 3.2

לאחר השינויים תיראה טבלת התובלה כך:

ההיצע		חנויות המפעל רמת-גן	 באר-שבע	 חיפה	 תל-אביב	
230,000	ראש-העין	1	5	4	2	המפעלים
550,000	קריית-גת	3	2	5	3	
240,000	מטולה	4	7	3	4	
	הביקוש	200,000	220,000	300,000	300,000	

פתרון לשאלה 3.3

$230,000*2 + 70,000*3 + 260,000*5 + 220,000*2 =$ 2,410,000 שקלים

פתרון לשאלה 3.5

א. לו מפעל א׳ היה מייצר 16 טונות כותנה, במקום 12 טונות, היינו מקבלים עודף היצע של 4 טונות. בעיה של עודף היצע נקראת ״**בעיית תובלה לא מאוזנת**״.

ב. לו מרכז שיווק A היה צורך 10 טונות כותנה במקום 9 טונות, היינו מקבלים עודף ביקוש של טונה אחת. בעייה של עודף ביקוש נקראת גם היא ״**בעית תובלה לא מאוזנת**״.

פתרון לשאלה 3.6

הניסוח האלגברי המקוצר לאילוץ השני הוא:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{2j} = 550,000$$

פתרון לשאלה 3.7

מודל התכנון הליניארי של בעיית התובלה:

$$(1) \qquad Z = \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

subject to:

$$(2)\qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_I \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

$$(3)\qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

$$(4)\qquad x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1,\ldots m \quad ; \quad j = 1,2,\ldots,n$$

הסבר: במודל הזה שורה (1) מציגה את פונקצית המטרה, שהיא מחיר התובלה אשר אנו מחפשים לו ערך מינימלי. המחיר הזה מורכב מסך כול עלות הובלת ההקצאות, והגודל $c_{ij}x_{ij}$ מבטא את עלות הובלת x_{ij} יחידות ממקור i ליעד j (הכמות שמובילים כפול עלות ההובלה של יחידה אחת).

השורות (2), (3) ו-(4) מציגות את אילוצי הבעיה:

שורה (2) – אילוצי היצע: כל מקור i $(i = 1,2,\ldots,m)$ מייצר s_i יחידות. גודל זה שווה לסך כול ההקצאות ממנו לכלל היעדים: $x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in}$.

בדוגמה של חברת "גלידות אביב", מקור 2 (המפעל בקריית-גת), למשל, מייצר 550,000 חבילות גלידה לשבוע, ולכן מתקיים: $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 550{,}000$.

שורה (3) – אילוצי ביקוש: כל יעד j $(j = 1,2, \ldots, n)$ צורך d_j יחידות. גודל זה שווה לסך כול ההקצאות מכלל היעדים אליו: $x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj}$.

בדוגמה של חברת "גלידות אביב" יעד 3 (חנות המפעל בבאר-שבע) למשל צורך 220,000 חבילות גלידה לשבוע, ולכן מתקיים:

$$x_{13} + x_{23} = 220{,}000$$

שורה (4) מבטאת את הדרישה כי ההקצאות צריכות להיות אי-שליליות.

פתרון לשאלה 3.8

בדוגמה של חברת "גלידות אביב" קיימים 5 (3 + 2) אילוצים.

לפיכך מספר המקורות + מספר היעדים שווה למספר האילוצים.

פתרון לשאלה 3.9

אם ידועה כבר יכולת הייצור (ההיצע) של כל המקורות, והדרישה בכל היעדים (הביקוש), למעט אחד, אז בהנחה שהביקוש שווה להיצע, נקבעה כבר הדרישה ביעד האחרון ואין צורך להוסיף אילוץ.

למשל, בדוגמה של חברת "גלידות אביב" ברור כי הדרישה בחנות המפעל 3 בבאר-שבע כבר נקבעת לאחר שידוע סך כול ההיצע (780,000) וידועות הדרישות בשתי חנויות המפעל האחרות:

$$d_3 = 780{,}000 - (d_1 + d_2) = 780{,}000 - (300{,}000 + 260{,}000) = 220{,}000$$

באותו אופן, אם ידועה כבר הדרישה בכל היעדים ויכולת הייצור בכל המקורות, למעט אחד, אזי בהנחה שהביקוש שווה להיצע, נקבע כבר הייצור במקור האחרון, ואין צורך להוסיף אילוץ.

פתרון לשאלה 3.10

א.

ההיצע	חנויות המפעל 3 באר-שבע	2 חיפה	1 תל-אביב		
230,000	$\boxed{5}$ 69,000	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ 161,000	ראש-העין 1	המפעלים
550,000	$\boxed{2}$ 151,000	$\boxed{5}$ ~~260,000~~	$\boxed{3}$ 139,000	קריית-גת 2	
	220,000	260,000	300,000		הביקוש

ב. הפתרון החדש שומר על אילוצי ההיצע כיוון שבאותה שורה הוספנו יחידה אחת אך גם החסרנו יחידה אחת.

הפתרון החדש שומר גם על אילוצי הביקוש כיוון שבאותה עמודה הוספנו יחידה אחת אך גם החסרנו יחידה אחת.

ג. במקרה הזה הפתרון החדש לא היה שומר על אילוצי ההיצע כיוון שההיצע ממפעל 1 היה גדֵל בשתי יחידות, וההיצע ממפעל 2 היה קטֵן בשתי יחידות. אילוצי הביקוש היו נשמרים.

פתרון לשאלה 3.11

ייתכנו שתי אפשרויות עבור גודלו של השינוי: $\Delta_z \leq 0$ או $\Delta_z > 0$. עבור האפשרות הראשונה $\Delta_z \leq 0$ שיפרנו או לא "קלקלנו" את פונקציית המטרה, כיוון שאם ההפרש שלילי, אז העלות של התובלה קטֵנה ביחס לפתרון הקודם, ואילו הפרש 0 פירושו שעלות התובלה לא השתנתה. אולם עבור האפשרות השנייה, $\Delta_z > 0$, הגדלנו את מחיר התובלה ו"קלקלנו" את הפתרון.

פתרון לשאלה 3.12

א. מספר הפעמים שבהם נפעיל את התהליך האיטרטיבי הזה שווה למשתנה התורם בעל הערך הנמוך יותר. ברור כי אי-אפשר להפעיל תהליך זה ללא סוף, משום שמשתני ההחלטה אינם יכולים לקבל ערכים שליליים. בסיום הפעולה האחרונה מקבל המשתנה הזה את הערך 0, ומספר משתני הפתרון השונים מ-0 קטן כצפוי ב-1.

ב. איטרציה ראשונה: נגדיל את ערכם של המשתנים x_{11} ו-x_{22} ביחידה אחת, ואת ערכם של x_{12} ו-x_{21} נקטין ביחידה. נקבל את הטבלה שלהלן:

	יעד 1	יעד 2	היצע
מקור 1	$\boxed{20}$ 6	$\boxed{33}$ 9	34
מקור 2	$\boxed{35}$ 1	$\boxed{30}$ 9	28
הביקוש	18	44	

ערך פונקציית מטרה שמתקבל הוא $Z = 71$. הערך הזה קטן מערך פונקציית המטרה עבור הפתרון הקודם, ולכן הוא פתרון טוב יותר.

נמשיך אפוא לאיטרציה הבאה: נגדיל שוב את ערכם של המשתנים x_{11} ו- x_{22} ביחידה אחת, ואת ערכם של x_{12} ו-x_{21}, נקטין ביחידה. נקבל את הטבלה שלהלן:

	יעד 1	יעד 2	ההיצע
מקור 1	$\boxed{\cancel{70}}$ 7	$\boxed{\cancel{30}}$ 8	34
מקור 2	$\boxed{\cancel{30}}$ 0	$\boxed{\cancel{50}}$ 10	28
הביקוש	18	44	

קיבלנו פתרון בסיסי טוב יותר מהפתרון הלא-בסיסי (בעל שלושה משתנים השונים מאפס). ערך פונקציית המטרה עבור הפתרון הזה הוא: $Z = 68$.

(הסבירו מדוע פונקציית המטרה ירדה ב-3 בכל איטרציה).

פתרון לשאלה 3.13

השוויון בין ההיצע לביקוש באיטרציה האחרונה של שיטת הפינה הצפונית-מערבית נובע מהעובדה ש**סכום ההיצעים** של כל המקורות **שווה לסכום הביקושים** של כל היעדים (בדוגמה של חברת "גלידות אביב" –

$(230,000 + 550,000 = 300,000 + 260,000 + 220,000 = 780,000)$.

פתרון לשאלה 3.14

נניח לצורך העניין כי הטבלה "מוצפנת" (זאת אומרת פניה לכיוון צפון). במצב זה, המשבצת המתאימה למשתנה x_{11} היא המשבצת הצפונית-מערבית שבטבלה. בשורה זו ההיצע הוא 230, ואילו הביקוש הוא 220. ניתן אפוא לספק את כל הביקוש ליעד 1 על-ידי משאביו של מקור 1. במקור 1 תהיה יתרה של 10 יחידות.

נסמן אם כך 220 כהקצאה המתאימה למשתנה – x_{11}. על עמודה 1 נסמן קו, שמשמעותו כי יעד 1 קיבל את מבוקשו; את ההיצע של מקור 1 נתקן ל- 10. כך נקבל את הטבלה הזו:

		חנויות המפעל				ההיצע
			2	3	4	
	1	220				~~230~~ 10
המפעלים	2	–				150
	3	–				540
הביקוש		~~220~~	80	280	340	

קיבלנו עתה טבלה מצומצמת יותר (ללא עמודה 1), אשר הפינה הצפונית-מערבית שלה היא המשבצת המתאימה להקצאה x_{12}. בשורה הזאת ההיצע (המתוקן) הוא 10 והביקוש – 80. נמלא אפוא את מקצת הביקוש בעזרת היתרה ממקור 1, ונקבע את ההקצאה ל-10. עתה נסמן קו מעל השורה הראשונה, שהרי מקור 1 התכלה, ואילו את הביקוש בעמודה 2 נתקן ל-70. הטבלה שתתקבל:

		חנויות המפעל				ההיצע
		1	2	3	4	
	1	220	10	–	–	~~230~~ ~~10~~
המפעלים	2	–				150
	3	–				540
הביקוש		~~220~~	~~80~~ 70	280	340	

בטבלה זו המשבצת הצפונית-מערבית מתאימה להקצאה – x_{22}. בשורה זו ההיצע הוא 150 והביקוש הוא 70. אפשר אפוא לענות על כל הביקוש $x_{22} = 70$; נתקן את מקור 2 ל-80.

	חנויות המפעל				ההיצע
	1	2	3	4	
1	220	10	–	–	~~230~~ ~~10~~
המפעלים 2	–	70			~~150~~ 80
3	–	–			540
הביקוש	~~220~~	~~80~~ ~~70~~	280	340	

בשלב הבא נפעל בדרך דומה ונקבע כי $x_{23} = 80$. כך נקבל:

	חנויות המפעל				ההיצע
	1	2	3	4	
1	220	10	–	–	~~230~~ ~~10~~
המפעלים 2	–	70	80		~~150~~ 80
3	–	–			540
הביקוש	~~220~~	~~80~~ ~~70~~	~~280~~ 200	340	

בשלב שאחריו $x_{33} = 200$, ומצב הטבלה:

	חנויות המפעל				ההיצע
	1	2	3	4	
1	220	10	–	–	~~230~~ ~~10~~
המפעלים 2	–	70	80	–	~~150~~ ~~80~~
3	–	–	200		~~540~~ 340
הביקוש	~~220~~	~~80~~ ~~70~~	~~280~~ 200	340	

עתה הגענו לשלב האחרון שבו הטבלה מכילה רק משבצת פנויה אחת. ההיצע במקור 3 שווה לביקוש ביעד 4 – 340.

נקבע אפוא כי $x_{34} = 340$, ונקבל את הטבלה הסופית.

	חנויות המפעל				ההיצע
	1	2	3	4	
1	220	10			
המפעלים 2		70	80		
3			200	340	
הביקוש					

קיבלנו פתרון בסיסי התחלתי. הפתרון הזה כולל את המשתנים:

$$x_{11} = 220, x_{12} = 10, x_{22} = 70, x_{23} = 80, x_{33} = 200, x_{34} = 340$$

כאשר מחוץ לבסיס נמצאים המשתנים: $x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{24}, x_{31}, x_{32}$, וערכם הוא 0.

פתרון לשאלה 3.15

נתונה הטבלה שלהלן:

	חנויות המפעל			ההיצע
	1	2	3	
1				230
המפעלים 2				80
3				200
הביקוש	220	10	280	

ההקצאה הראשונה תהיה $x_{11} = 220$. **הקצאה זו שווה לביקוש בעמודה 1** (ולכן ניתן לסמן קו על הביקוש בעמודה 1).

באיטרציה הראשונה הזאת נשאר היצע של 10 בשורה 1, כך שהבחירה הבאה של משתנה בסיסי היא: x_{12} . מאחר שההיצע שבשורה 1 אינו גדול מהביקוש 10 שבעמודה 2, כל ההיצע מוקצה כעת, כלומר $x_{12} = 10$, והשורה הזו מתבטלת כעת ואין מקצים ממנה עוד. הבחירה הבאה היא אפוא x_{22} . מאחר שהביקוש הנותר בעמודה 2, שהוא 0, קטן מההיצע 80 שבשורה 2, אזי ההקצאה היא $x_{22} = 0$, ומסמנים קו על הביקוש בעמודה 2. נמשיך בדרך זו ונקבל לבסוף פתרון שלם, שהוא בסיסי אפשרי והתחלתי, כפי שמתואר בטבלה שלהלן:

	חנויות המפעל			ההיצע
	1	2	3	
1	220	10	–	~~230~~ ~~10~~
המפעלים 2	–	0	80	~~80~~
3	–	–	200	~~200~~
הביקוש	~~220~~	~~10~~	~~280~~ ~~200~~	

בדוגמה זו ראינו כי בשיטת הפינה הצפונית-מערבית קיים מצב של תיקו שלעתים מצביע על **משתנה מנוון** (משתנה בסיסי שערכו אפס).

לסיכום, כאשר אנו מצויים בפינה צפונית-מערבית כלשהי, ייתכן מצב שבו בלולאה מסוימת ההיצע שווה לביקוש (או שהביקוש הוא אפס). זהו מצב של תיקו. במקרה זה נרשום כהקצאה את הערך המשותף, אולם נעביר קו אחד בלבד לאורך השורה או העמודה לפי רצוננו, שאם לא כן הבסיס יכיל פחות מ- $m + n - 1$ משתנים. עתה נמשיך את התהליך באופן רגיל, והמשתנה הבסיסי הבא יהיה שווה 0, כלומר הוא משתנה בסיסי מנוון.

פתרון לשאלה 3.16

הסיבוכיות היא: $O(m + n)$

פתרון לשאלה 3.17

א. מספר המשתנים בפתרון בסיסי הוא 3 .

$$m + n - 1 = 2 + 2 - 1 = 3$$

ב. הפתרונות הבסיסיים האפשריים הם : $x_{21} = 100$, $x_{12} = 80$, $x_{11} = 120$ או

$$x_{22} = 80 \quad , \quad x_{21} = 100 \quad , \quad x_{11} = 200$$

ג. הפתרון האופטימלי במקרה זה יינתן על-ידי המשתנים הבסיסיים שלהלן :

$$x_{21} = 100 \quad , \quad x_{12} = 80 \quad , \quad x_{11} = 120$$

ד. ערך פונקציית המטרה האופטימלי שיתקבל יהיה : $5*120 + 2*80 + 2*100 = 960$

פתרון לשאלה 3.18

	החנויות		ההיצע
	1	2	
המפעלים 1	$\boxed{5}$	$\boxed{2}$	200
המפעלים 2	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	100
הביקוש	220	80	

גם במקרה של שינוי מחירים, **בשורה**, כמו **בעמודה**, הפתרון האופטימלי נשאר זהה :

$$x_{21} = 100 \quad , \quad x_{12} = 80 \quad , \quad x_{11} = 120$$

השינוי הוא בערך פונקציית המטרה בלבד :

$$5 * 120 + 2 * 80 + 4*100 = 1,160$$

הערך גדל ב-200, כיוון שעלות ההובלה לכל יחידת מוצר שיוצאת מן המפעל (סה"כ 200 יחידות) גדלה ב-2.

פתרון לשאלה 3.19

כדי להחליט אם הפתרון הבסיסי הנוכחי אופטימלי, נמצא את ערכי u_i ו- v_j עבור הפתרון הזה.

המשוואות המתאימות למשתנים הבסיסיים בפתרון ההתחלתי שלנו :

x_{11} :	$u_1 + v_1 = 5$	בחירת	$u_1 = 0$	$\Leftarrow$	$v_1 = 5$
x_{12} :	$u_1 + v_2 = 2$	בחירת	$u_1 = 0$	$\Leftarrow$	$v_2 = 2$
x_{22} :	$u_2 + v_2 = 3$	ידוע ש-	$v_2 = 2$	$\Leftarrow$	$u_2 = 1$
x_{23} :	$u_2 + v_3 = 5$	ידוע ש-	$u_2 = 1$	$\Leftarrow$	$v_3 = 4$
x_{33} :	$u_3 + v_3 = 3$	ידוע ש-	$v_3 = 4$	$\Leftarrow$	$u_3 = -1$
x_{34} :	$u_3 + v_4 = 3$	ידוע ש-	$u_3 = -1$	$\Leftarrow$	$v_4 = 4$

בוחרים $u_1 = 0$ (במקרה הזה מספר ההקצאות המקסימלי הוא 2), ואז פותרים את המשוואות בזו אחר זו, ומקבלים את ערכי המשתנים כפי שמופיעים משמאל למשוואות.

לאחר שנקבל את כל ערכי u_i ו-v_j, נרשום אותם במקומם בטבלה, ובנוסף נחשב ונמלא את ערכי $(c_{ij} - u_i - v_j)$ עבור כל משתנה x_{ij} שאינו בסיסי (כלומר, עבור כל תא שאין לו הקצאה מוקפת במעגל). כתוצאה, נקבל באיטרציה הראשונה את הטבלה הבאה, שהיא כאמור טבלת הסימפלקס לפתרון ההתחלתי.

טבלת הסימפלקס לפתרון ההתחלתי

	היעדים				ההיצע	u_i
	1	2	3	4		
המקורות 1	$\boxed{5}$ 220	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ −2	230	0
2	$\boxed{2}$ -4	$\boxed{3}$ 70	$\boxed{5}$ 80	$\boxed{3}$ −2	150	1
m	$\boxed{7}$ 3	$\boxed{4}$ 3	$\boxed{3}$ 200	$\boxed{3}$ 340	540	-1
הביקוש	220	80	280	340		Z= 3350
v_j	5	2	4	4		

כעת, אנו במצב המאפשר ליישם את מבחן האופטימליות על-ידי בדיקת ערכי

$(c_{ij} - u_i - v_j)$ הנתונים בטבלה שלעיל. הואיל ושלושה מערכים אלה הם שליליים:

$$c_{14} - u_1 - v_4 = -2$$

$$c_{21} - u_2 - v_1 = -4$$

$$c_{24} - u_2 - v_4 = -2$$

הפתרון הבסיסי האפשרי הנוכחי אינו אופטימלי. לפיכך, עלינו למצוא פתרון בסיסי טוב יותר.

איטרציה ראשונה

מציאת המשתנה הנכנס לבסיס

מאחר ש-$(c_{ij} - u_i - v_j)$ מציין את שיעור השינוי בפונקציית המטרה עם הגידול במשתנה הלא בסיסי x_{ij}, הרי שהמשתנה הנכנס לבסיס צריך להיות בעל $(c_{ij} - u_i - v_j)$ **שלילי** כדי להקטין את סך כול העלויות Z, כך שהמועמדים בטבלת התובלה ההתחלתית השלמה של

האיטרציה הראשונה הם : x_{14}, x_{21} ו- x_{24}. נבחר את המשתנה בעל הערך **השלילי הגדול ביותר** של $(c_{ij} - u_i - v_j)$ **כמשתנה הנכנס לבסיס**, שהוא במקרה שלנו x_{21}.

מציאת המשתנה היוצא מהבסיס

הגדלת המשתנה הנכנס מאפס גורמת תגובת שרשרת של שינויים מקזזים במשתנים הבסיסיים (הקצאות) האחרים, כדי להמשיך ולקיים את אילוצי ההיצע והביקוש. המשתנה הבסיסי הראשון שמתאפס הוא **המשתנה היוצא מהבסיס**.

המשתנה הנכנס לבסיס, x_{21}, יוצר תגובת שרשרת בטבלת התובלה ההתחלתית של האיטרציה הראשונה. איטרציה זו פשוטה למדי ומסוכמת בטבלה שלהלן :

טבלת הסימפלקס, המראה את <u>תגובת השרשרת</u> שנגרמת בעקבות הגדלת המשתנה הנכנס לבסיס x_{21}:

המקורות	היעדים 1	2	3	4	ההיצע	u_i
1	5 ⊖ 220	2 ⊕ 10	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ -2	230	0
2	2 ⊕ -4	3 ⊖ 70	5 80	$\boxed{3}$ -2	150	1
m	7 3	4 3	3 200	3 340	540	-1
הביקוש	220	80	280	340		Z= 3350
v_j	5	2	4	4		

נקבע כי $x_{21} = 1$. שינוי זה יסומן ב-⊕ בתא המתאים (2,1). עתה, כדי לשמור על אילוץ ההיצע של מקור 2 שנותר – 150, נאזן את השינוי הזה על-ידי הפחתת 1 ממשתנה הבסיס x_{22}. השינוי הזה יסומן ב- ⊖ בתא (2,2).

כאן נוצרה תגובת שרשרת, שכן אילוץ הביקוש עבור יעד 2 – 80 – הופר, וכדי לשמרו נוסיף 1 למשתנה הבסיסי x_{12}, ונסמן זאת ב-⊕. את אילוץ מקור 1 שהופר נתקן על-ידי הפחתת 1 ממשתנה הבסיס x_{11}, ונסמן זאת ב-⊖, וכך גם נתקן את אילוץ יעד 1 שהופר.

התוצאה נטו היא שהתאים (1,2) ו-(2,1) הופכים לתאים מקבלים. כל אחד מן התאים מקבל תוספת הקצאה מאחד התאים התורמים (1,1) ו-(2,2). תאים אלו מסומנים בטבלה שלמעלה על-ידי הסימנים + ו- –.

כל תא תורם מקטין את ההקצאה שלו בערך זהה לערך שבו גדל המשתנה הנכנס לבסיס (ותאים מקבלים אחרים). לכן, התא התורם שיש בו ההקצאה הקטנה ביותר, במקרה שלנו תא (2,2) (מאחר ש- $220 > 70$), יגיע ראשון להקצאה אפס כאשר המשתנה הנכנס לבסיס, x_{21}, גדל. כלומר, מקבלים ש-x_{22} הוא **המשתנה היוצא מהבסיס.**

זיהוי הפתרון הבסיסי האפשרי החדש

זיהוי הפתרון הבסיסי החדש נעשה על-ידי הוספת ערך המשתנה היוצא מהבסיס (לפני כל שינוי שהוא) להקצאות בכל תא מקבל, והחסרת **אותו ערך** מההקצאות בכל אחד מהתאים התורמים. בטבלה המציגה את תגובת השרשרת באיטרציה הראשונה, ערך המשתנה היוצא מהבסיס x_{22} הוא 70, כך שבפתרון הבסיסי האפשרי החדש נקבל את השינויים המתוארים בטבלה הבאה, המציגה את הפתרון הבסיסי לבעיית התובלה באיטרציה השנייה (מאחר ש-x_{22} איננו משתנה בסיסי בפתרון החדש, אין מציינים את ערכו החדש, אפס, בטבלה החדשה).

להלן טבלת הסימפלקס המראה את השינויים בפתרון הבסיסי האפשרי לאחר האיטרציה הראשונה:

	היעדים				ההיצע	u_i
	1	2	3	4		
המקורות 1	5 150	2 80	4	2	230	
2	2 70	3	5 80	3	150	
m	7	4	3 200	3 340	540	___
הביקוש	220	80	280	340		
v_j						Z= 2620

נחשב את ערכי u_i v_j ו-$(c_{ij} - u_i - v_j)$ עבור הפתרון החדש המופיע בטבלה שלמעלה (טבלת התובלה המציגה את הפתרון הבסיסי באיטרציה השנייה).

המשוואות המתאימות למשתנים הבסיסיים בפתרון זה הן:

x_{11} : $u_1 + v_1 = 5$ בחירת $u_1 = 0$ $\Leftarrow$ $v_1 = 5$

x_{12} : $u_1 + v_2 = 2$ בחירת $u_1 = 0$ $\Leftarrow$ $v_2 = 2$

x_{21} : $u_2 + v_1 = 2$ ידוע ש- $v_1 = 5$ $\Leftarrow$ $u_2 = -3$

x_{23} : $u_2 + v_3 = 5$ ידוע ש- $u_2 = -3$ $\Leftarrow$ $v_3 = 8$

x_{33} : $u_3 + v_3 = 3$ ידוע ש- $v_3 = 8$ $\Leftarrow$ $u_3 = -5$

x_{34} : $u_3 + v_4 = 3$ ידוע ש- $u_3 = -5$ $\Leftarrow$ $v_4 = 8$

נוסיף את ערכי u_i v_j ו-$(c_{ij} - u_i - v_j)$ עבור הפתרון החדש בטבלה שלהלן:

טבלת הסימפלקס הכוללת את ערכי u_i v_j ו-$(c_{ij} - u_i - v_j)$ עבור הפתרון החדש

	היעדים				ההיצע	u_i
	1	2	3	4		
המקורות 1	$\boxed{5}$ $\ominus$ 150	$\boxed{2}$ 80	$\boxed{4}$ -4	$\boxed{2}$ $\oplus$ -6	230	0
2	$\boxed{2}$ $\oplus$ 70	$\boxed{3}$ 4	$\boxed{5}$ $\ominus$ 80	$\boxed{3}$ -2	150	-3
m	$\boxed{7}$ 7	$\boxed{4}$ 7	$\boxed{3}$ $\oplus$ 200	$\boxed{3}$ $\ominus$ 340	540	-5
הביקוש	220	80	280	340		
v_j	5	2	8	8		Z=2620

הפתרון המתואר בטבלה זו אינו אופטימלי כיוון שקיימים משתנים לא-בסיסיים שערך ה- $(c_{ij} - u_i - v_j)$ שלילי.

המשתנה הנכנס לבסיס יהיה המשתנה הלא-בסיסי x_{14} בעל הערך **השלילי הגדול ביותר** ל- $(c_{ij} - u_i - v_j) = -6$.

המשתנה היוצא מהבסיס יהיה המשתנה הבסיסי x_{23}, שהוא המשתנה הבסיסי בעל הערך **הקטן ביותר** מבין התאים התורמים.

הפתרון החדש מתואר בטבלה הבאה:

<u>**איטרציה שנייה**</u> טבלת הסימפלקס לתובלה השלישית, הכוללת את ערכי u_i v_j ו-$(c_{ij} - u_i - v_j)$ עבור הפתרון החדש

	היעדים				ההיצע	u_i
	1	2	3	4		
1	$\boxed{5}$ 70	$\boxed{2}$ 80	$\boxed{4}$ 2	$\boxed{2}$ 80	230	0
המקורות 2	$\boxed{2}$ 150	$\boxed{3}$ 4	$\boxed{5}$ 6	$\boxed{3}$ 4	150	-3
m	$\boxed{7}$ 1	$\boxed{4}$ 1	$\boxed{3}$ 280	$\boxed{3}$ 260	540	1
הביקוש	220	80	280	340	920	
v_j	5	2	2	2		Z=2590

נחשב את ערכי u_i v_j ו-$(c_{ij} - u_i - v_j)$ עבור הפתרון החדש המופיע בטבלה שלמעלה.

המשוואות המתאימות למשתנים הבסיסיים בפתרון זה :

x_{11} : $u_1 + v_1 = 5$ בחירת $u_1 = 0$ $\Leftarrow$ $v_1 = 5$

x_{12} : $u_1 + v_2 = 2$ בחירת $u_1 = 0$ $\Leftarrow$ $v_2 = 2$

x_{14} : $u_1 + v_4 = 2$ בחירת $u_1 = 0$ $\Leftarrow$ $v_4 = 2$

x_{21} : $u_2 + v_1 = 2$ ידוע ש- $u_1 = 5$ $\Leftarrow$ $v_2 = -3$

x_{34} : $u_3 + v_4 = 3$ ידוע ש- $v_4 = 2$ $\Leftarrow$ $u_3 = 1$

x_{33} : $u_3 + v_3 = 3$ ידוע ש- $u_3 = 1$ $\Leftarrow$ $v_3 = 2$

ניתן לראות כי ערכי $(c_{ij} - u_i - v_j)$ חיוביים עבור כל המשתנים הלא-בסיסיים, ולכן זהו הפתרון האופטימלי. ערכיו הם :

$$x_{11} = 70,\ \ x_{12} = 80,\ \ x_{14} = 80,\ \ x_{21} = 150,\ \ x_{33} = 280,\ \ x_{34} = 260$$

הערך Z של פונקציית המטרה עבור פתרון זה הוא:

$$70 * 5 + 80 * 2 + 80 * 2 + 150 * 2 + 280 * 3 + 260 * 3 = 2590$$

המחיר האפשרי הנמוך ביותר בבעיית התובלה שבתרגיל הזה הוא 2590 ש״ח.

3.5 שאלות נוספות

שאלה 3.20

לפניכם נתונים של בעיית התובלה בחברת ״מתוק בפה״, המייצרת סוכריות בשני מפעלים (A ו-B), והשולחת אותם לאחסון בשני מרכזי אחסון (אלפא וביתא).

	חנויות המפעל			
ההיצע	ביתא	אלפא		
450	12	10	A	המפעלים
300	9	13	B	
	400	350		הביקוש

א. הציגו פתרון אפשרי לא בסיסי.

ב. שפרו את הפתרון מסעיף א׳ לפתרון בסיסי.

ג. ללא קשר לסעיפים קודמים, מצאו פתרון בסיסי התחלתי בשיטת הפינה הצפונית-מערבית.

ד. בהמשך לסעיף ג׳, מצאו פתרון אופטימלי לבעיה.

שאלה 3.21

בבעיית חברת ״גלידות אביב״ השתנו עלויות ההובלה באופן הזה: $c_{13} = 1$ ו- $c_{23} = 4$. מצאו פתרון אופטימלי לבעיה כאשר הפתרון הבסיסי ההתחלתי נמצא בעזרת שיטת הפינה הצפונית-מערבית.

שאלה 3.22

חשבו את סיבוכיות השגרה: "מצא פתרון בסיסי התחלתי בשיטת המחיר המינימלי".

שאלה 3.23

התפוקה היומית של שלוש מחצבות חצץ היא:

המחצבה	התפוקה היומית (טונות)
א	12
ב	14
ג	4

החצץ ישווק באמצעות שלושה מרכזי שיווק. מעריכים כי הביקוש היומי הצפוי במרכזי השיווק השונים הוא:

מרכז השיווק	הביקוש היומי (טונות)
A	9
B	10
C	11

מחירי התובלה של טונה חצץ מהמחצבות למרכזי השיווק מרוכזים בטבלה שלהלן:

מרכזי שיווק / מחצבות	A	B	C
א	5	1	8
ב	2	4	0
ג	3	6	7

כמה טונות של חצץ יש לשלוח מדי יום מכל מחצבה לכל מרכז שיווק כדי שהוצאות ההובלה יהיו מינימליות ?

שאלה 3.24

חברה להשכרת רכב בארצות הברית צריכה לערוך חלוקה מחודשת של צי הרכב שלה כדי לתקן מצבים של חוסר בכלי רכב להשכרה בסניפים השונים. כיום, לחברה כלי רכב רבים מדי בסניף בניו-יורק (10 מכוניות עודפות) ובסניף בשיקגו (12 מכוניות עודפות), ואילו בסניף בפיטסבורג חסרות 6 מכוניות, בסניף בלוס אנג'לס חסרות 9 מכוניות ובסניף במיאמי חסרות 7 מכוניות.

העלות של העברת המכוניות בין הערים השונות מתוארת בטבלה להלן :

	מיאמי	לוס-אנג'לס	פיטסבורג
ניו-יורק	100	250	50
שיקגו	125	200	25

כיצד תבוצע העברת המכוניות בעלות המינימלית ?

שאלה 3.25

חברה מייצרת מוצר יחיד. לרשות החברה שלושה מפעלים, והיא מוכרת לארבעה לקוחות. שלושת המפעלים עומדים לייצר במשך תקופת הזמן הבאה 6, 8 ו-4 יחידות בהתאמה. החברה התחייבה למכור 4 יחידות ללקוח 1, 6 יחידות ללקוח 2, ולפחות 2 יחידות ללקוח 3. לקוחות 3 ו- 4 מעוניינים לקנות כמות רבה ככל האפשר מן המוצר. הרווח הנקי המתקבל מהובלת יחידת מוצר ממפעל i ללקוח j נתון בטבלה הבאה :

		לקוח			
		1	2	3	4
מפעל	1	8	7	5	2
	2	5	2	1	3
	3	6	4	3	5

ההנהלה מעוניינת לדעת כמה יחידות למכור ללקוחות 3 ו-4, וכמה יחידות להוביל מכל מפעל לכל לקוח כך שהרווח יהיה מקסימלי.

א. נסחו את הבעיה כבעיית תובלה על-ידי בניית טבלת עלויות וביקושים מתאימה.

ב. לפתרון הבעיה שבסעיף א׳ היעזרו בשיטת הפינה הצפונית-מערבית, ולאחר מכן בשיטת הסימפלקס לתובלה.

שאלה 3.26

תאגיד של ארבעה מפעלים המייצרים סוכר משווק את המוצר באמצעות חמישה מרכזי שיווק. התפוקה השבועית של כל מפעל (בטונות), ועלויות התובלה (בשקלים לק״מ) מכל מפעל לכל מרכז שיווק מסוכמים בטבלה שלהלן:

מרכז שיווק / מפעל	1	2	3	4	5	היצע
1	7	0	6	3	2	25
2	9	3	5		8	40
3	8	4	4	4	5	60
4	2	3	4	9	6	15
ביקוש	25	25	40	30	20	

פירוש המשבצת הריקה: לא ניתן להוביל סוכר ממפעל מסי 2 למרכז שיווק מסי 4 (סיבות אפשריות: אין כביש או מסילת ברזל המקשרים בין שתי הנקודות הללו). מטרת התאגיד היא להביא למינימום את עלות התובלה.

כיצד ניתן ליישם את אלגוריתם התובלה בבעיה זו?

שאלה 3.27

בחברה המתקנת מוצרי חשמל קיימות ארבע דרגות הסמכה של טכנאים: א׳, ב׳, ג׳ ו-ד׳. בחברה זו מועסקים 10 טכנאים בדרגת הסמכה א׳, 15 טכנאים בדרגת הסמכה ב׳, 20 טכנאים בדרגת הסמכה ג׳ ו-25 טכנאים בדרגת הסמכה ד׳.

חברה זו מתקנת תקלות במכשירי חשמל הממוינות לפי חמש דרגות קושי. בממוצע שבועי יש 10 תקלות בדרגת קושי 1, 15 תקלות בדרגת קושי 2, 30 תקלות בדרגת קושי 3, 5 תקלות בדרגת קושי 4 ו- 10 תקלות בדרגת קושי 5.

כל טכנאי מסוגל לתקן את כל סוגי התקלות (בכל דרגות הקושי), למעט טכנאי בדרגת הסמכה א׳ שאינו מסוגל לתקן תקלה בדרגת קושי 5.

בטבלה שלהלן מוצגים התעריפים לשעת עבודה שהמפעל משלם לכל טכנאי תמורת התיקון של התקלות השונות:

דרגת קושי / דרגת הסמכה	1	2	3	4	5
א	4	5	6	8	
ב	6	7	10	13	15
ג	8	10	14	16	20
ד	10	14	18	20	26

כיצד יש להקצות את הטכנאים למשימות התיקון השבועיות כך שסה״כ עלות העבודה תהיה מינימלית?

שאלה 3.28

בעיית השמה. חברת "גלידות אביב" רכשה עבור המפעל בקריית שמונה שלוש מכונות חדשות: מכונה לייצור גביעים, מכונה לייצור גלידה ומכונת אריזה. לשם הפעלת הציוד החדש גייסה החברה שלושה פועלים חדשים: בני, אלי ויוסי, שכל אחד מהם אמור להפעיל אחת מן המכונות.

כיוון שהפועלים אינם מכירים את המכונות החדישות, יש להכשירם לתפקיד. עלות הכשרת כל פועל לצורך הפעלת המכונות השונות נתונה בטבלה הבאה (היחידות הם ימי הכשרה אשר עלותם קבועה, ללא תלות במכונה):

מכונה / פועל	ייצור גביעי גלידה	ייצור גלידה	אריזה
בני	8	6	4
אלי	10	7	3
יוסי	11	10	5

מנהל המפעל צריך להחליט כיצד לייעד את הפועלים למכונות, כך שעלות ההכשרה שלהם תהיה מינימלית.

בעיה זו המוצגת לפניכם נקראת בעיית ההשמה, וקיים עבורה אלגוריתם ייחודי המתאים למבנה המיוחד של הבעיה. למרות זאת, ניתן להציג את בעיית ההשמה כמקרה פרטי של בעיית התובלה, ולפתרה בעזרת אלגוריתם הסימפלקס לתובלה.

א. הציגו את מודל התכנון הליניארי לבעיית ההשמה בחברת "גלידות אביב".

ב. מצאו את ההשמה האופטימלית בעזרת אלגוריתם הסימפלקס לתובלה.

פרק 4. מודלים של זרימה אופטימלית ברשתות

בפרק הקודם הכרנו את מרכיבי בעיית התובלה, וראינו כי המבנה הייחודי של הבעיה מאפשר לפתרה בשיטת הסימפלקס לתובלה, שהיא גרסה מקוצרת ויעילה יותר של שיטת הסימפלקס הכללית. בפרק הזה נכיר מודלים ובעיות נוספות, המבוססים על **זרימה ברשתות**.

4.1 דוגמאות של בעיות זרימה ברשתות

מודלים של רשתות מופיעים בצורות שונות ובמגוון רחב של יישומים בחקר ביצועים, במדעי המחשב וכמעט בכל שטחי המדע. למשל:

בתחום התחבורה: רשת כבישים ארצית או עירונית.

בתחום התכנון: תכנון תעבורת סחורות (בעיות תובלה, שהכרנו בפרק הקודם), רשתות תקשורת, ניהול משאבים ותכנון פיננסי, השמת עובדים, תכנון פרויקטים וכיוצא באלה.

בתחום התקשורת: רשת קווי טלפון, רשת קווי שידור וכיוצא באלה.

בתחום המים: רשת קווי מים, רשת ארצית, רשת עירונית, רשת ביתית ורשת חקלאית.

בתחום התעופה: רשת קווי התעופה.

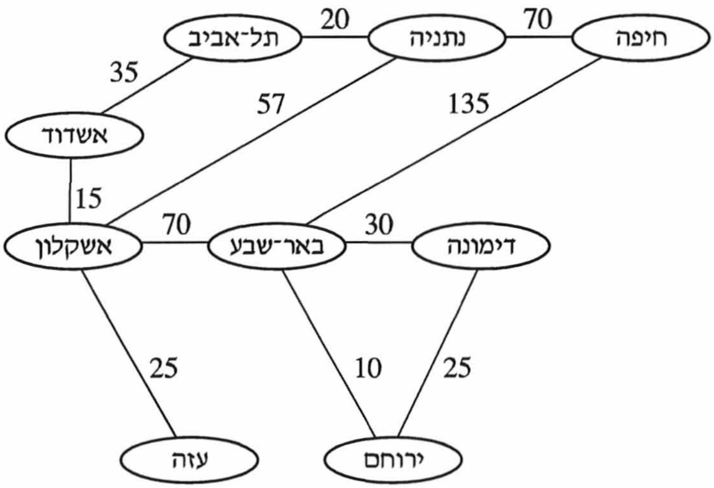
ההיקף הרב של השימוש במודלים של רשתות הוא בזכות תכונותיהם אלה:

א. ניתן למדל באמצעותם בעיות מעשיות רבות.

ב. האלגוריתם לפתרון הבעיות פשוט ויעיל יותר לעומת שיטת הסימפלקס.

בעיית התובלה שהכרנו בפרק הקודם היא בעיית זרימה אופיינית. הזרימה ממקור ליעד כרוכה בעלות מסוימת האופיינית לכל מקור ויעד. בבעיית התובלה המטרה היא לתכנן את הזרימה, זאת אומרת לקבוע כמה יחידות יועברו בין כל מקור ליעד כך שהעלות הכוללת תהיה מינימלית.

בעיה אופיינית נוספת, הניתנת לתיאור באמצעות זרימה ברשתות, היא בעיית **המסלול הקצר ביותר** (שנדון בה בהרחבה בפרק 5). למשל, לפנינו רשת הכבישים העירונית שלהלן :



איור 4.1
רשת כבישים

הרשת הזאת מספקת מידע על מיקומן של ערים שונות ועל המרחקים בין זוגות ערים. יש למצוא את הדרך הקצרה ביותר מעיר אחת לאחרת (מבחינת סך הכול הקילומטרים).

4.2 מונחים לדיון בבעיות זרימה ברשתות

רשימת מונחים ארוכה למדי נוצרה לצורך תיאור הסוגים השונים של רשתות ומרכיביהן. אף-על-פי שניסינו להימנע מריבוי מונחים בפתיחה, אנו נאלצים להציג אי אלו מונחים שיהיו בשימוש בהמשך הפרק. אנו מציעים לכם לקרוא את הסעיף הזה פעם אחת כדי להבין את ההגדרות, ולחזור לסעיף הזה בכל פעם שתתקלו במושג חדש.

אף-על-פי שמבחינה פיסית הרשתות עשויות להיות שונות זו מזו, יש להן תכונות משותפות רבות. נגדיר להלן שני מושגים חשובים, המשותפים לכל הרשתות :

א. **צמתים**. למשל, ברשת הכבישים נוצר צומת במקום המפגש של לפחות שני כבישים; ברשת המים נוצר צומת במקום החיבור של הצינורות; ברשת הטלפונים, הצומת הוא המרכזייה, כי שם נפגשים קווי הטלפון.

ב. **קשתות**. אמצעי לחיבור שני צמתים. למשל: קטע כביש המחבר שני צמתים הוא קשת (של רשת הכבישים); קטע צינור המעביר מים בין שני חיבורים הוא קשת (של רשת המים) וכו'.

באופן מופשט ניתן לתאר אפוא כל רשת פיסית כאוסף של צמתים, ואוסף של קשתות המחברות צמתים אלו. תיאור מופשט שכזה של רשת מכונה **גרף**.

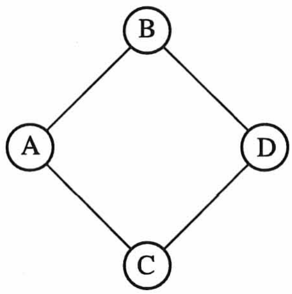
4.2.1 גרף

גרף (graph) מורכב מקבוצה סופית לא ריקה של **צמתים** (nodes) או קדקודים (vertices) ומקבוצת **קשתות** (arcs) או צלעות (edges).

סימון הגרף: $G = (V, E)$

כאשר G מציין גרף, V מציין את קבוצת הצמתים (קדקודים) ו-E את קבוצת הקשתות (צלעות).

להלן איור המתאר גרף:



איור 4.2
גרף $G = (V, E)$

בגרף $G = (V, E)$

$$V = \{A, B, C, D\}$$

$$E = \{(A, B), (A, C), (B, D), (C, D)\}$$

שימו לב: כל קשת (הקו המקשר בין שתי צמתים בגרף) מיוצגת על-ידי שני הצמתים.

הזוג (A, B) מציין קשת המחברת את הצמתים A ו-B.

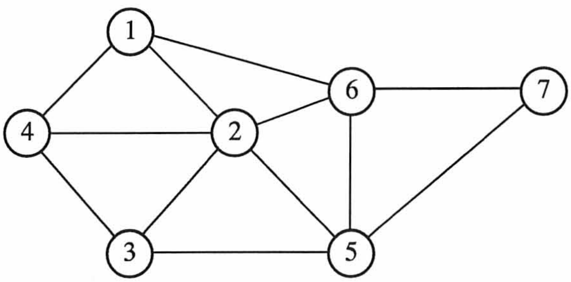
הזוג (C, A) מציין קשת המחברת את הצמתים A ו-C.

שאלה 4.1

מה מייצגים הזוגות (B, D) ו- (C,D) ?

שאלה 4.2

נתון הגרף $G = (V, E)$



קבעו מהן הקבוצות V ו- E בגרף הזה.

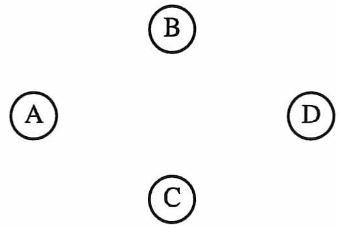
שאלה 4.3

בנו את הגרף $G = (V, E)$ לפי הנתונים האלה:

$V = \{A, B, C, D, E, F\}$

$E = \{(A, B), (A, C), (B, D), (C, D), (A, F), (B, F), (E, F)\}$

לפי ההגדרה של גרף, גם האיור שלהלן מתאר גרף, אלא שבגרף הזה **קבוצת הקשתות ריקה**: $V = \{A, B, C, D\}$ $E = \phi$

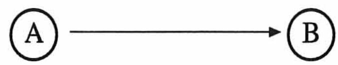


איור 4.3
גרף שבו קבוצת הקשתות ריקה

שימו לב, בכל הגרפים שהצגנו עד כה הזוגות אינם זוגות סדורים (ordered paires), כלומר אין חשיבות לסדר הצמתים המייצגים את הגרף.

למשל, באיור 4.2 שלעיל במקום הזוג (A, B) יכולים לציין (B, A).

נתבונן בקשת שלהלן:



הקשת הזאת יוצאת מהקדקוד A ונכנסת לקדקוד B, ותצוין על-ידי **זוג סדור** $<A, B>$.

באופן כללי, הקדקוד הראשון בזוג הקדקודים הסדור מציין את מקור הקשת (מאיזה קדקוד יוצאת הקשת), והקדקוד השני בזוג הקדקודים הסדור מציין את היעד של הקשת (לאיזה קדקוד נכנסת הקשת).

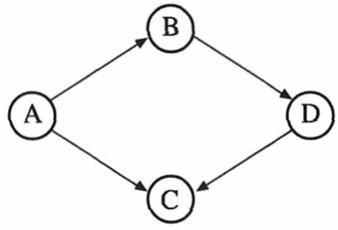
קשת המתוארת באמצעות זוג סדור היא **קשת מכוונת**. קשת מכוונת היא קשת שהזרימה בה אפשרית רק בכיוון אחד.

שימו לב להבדל בסימון: **קשת לא מכוונת** תסומן בסוגריים עגולים **( )**

קשת מכוונת תסומן בסוגריים משולשים <>

גרף מכוון (directed graph) – גרף שבו כל הקשתות מכוונות.

האיור שלהלן מתאר גרף מכוון.



איור 4.4
גרף מכוון

הגרף שבאיור 4.4 מכיל את קבוצות הצמתים והקשתות האלה:

V={A,B,C,D}

E={<A,B>,<A,C>,<B,D>,<D,C>}

בהמשך, המונח **גרף** יציין גרף <u>לא</u> מכוון בלבד.

נתון הגרף $G = (V, E)$.
מספר הצמתים בגרף מסומן כ- $|V|$, **ומספר הקשתות** בגרף מסומן כ- $|E|$.

צומת *a* **סמוך (או עוקב)** (adjacent) לקדקוד *b* אם יש קשת לא מכוונת בין הקדקוד *a* לקדקוד *b*, או אם יש קשת מכוונת מהקדקוד *b* לקדקוד *a*.

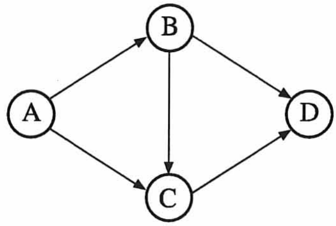
בגרף שבאיור 4.4:

הצומת *B* <u>סמוך</u> לצומת *A* מאחר שיש קשת מכוונת מהקדקוד *A* לקדקוד *B*.

הצומת *C* <u>סמוך</u> לצומת *A* מאחר שיש קשת מכוונת מהקדקוד *A* לקדקוד *C* וכו'.

דרגת הכניסה (indegree) **של קדקוד** – מספר הקשתות הנכנסות לקדקוד.
דרגת היציאה (outdegree) **של קדקוד** – מספר הקשתות היוצאות מקדקוד.
דרגה (degree) **של קדקוד** – מספר הקשתות הנוגעות בו.

באיור שלהלן מוצגת דוגמה נוספת של גרף מכוון :



איור 4.5
דוגמה נוספת לגרף מכוון

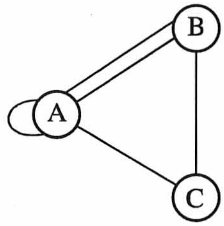
באיור הזה, הדרגה של הקדקוד D היא 2, דרגת הכניסה שלו היא 2 ודרגת היציאה היא אפס.

הדרגה של הקדקוד C היא 3, דרגת הכניסה שלו היא 2, ודרגת היציאה שלו היא 1.

משפט 4.2.1

בכל גרף פשוט $G = (V, E)$ מתקיים $\sum_{v \varepsilon V} d(v) = 2|E|$ כאשר $d(v)$ מציין את דרגתו של הצומת v בגרף. כלומר, סכום הדרגות של הקדקודים בגרף שווה למספר הקשתות באותו גרף מוכפל פי שניים, כיוון שכל קשת נכנסת לקדקוד אחד ויוצאת מקדקוד אחד.

לולאה – קיימים גרפים שבהם יותר מקשת אחת מחברת בין שני צמתים, או קיימת לולאה – קשת המחברת צומת מסוים לעצמו.



איור 4.6
גרף עם שני צמתים המחוברים על-ידי יותר מקשת אחת ולולאה

הגרפים שנעסוק בהם במהלך לימודנו יהיו גרפים פשוטים.

גרף פשוט (simple graph) גרף שבו כל זוג צמתים יכול להיות מחובר על-ידי קשת אחת בלבד, ואילו כל קשת מחברת בין שני צמתים שונים (ללא לולאות).

שאלה 4.4

בכל אחד מן הסעיפים שלפניכם נסו לבנות גרף בהתאם לתכונה שמצוינת בו. אם אי-אפשר לבנות גרף, הסבירו את הסיבה.

א. 6 קדקודים ולכל קדקוד דרגה 3.

ב. 4 קדקודים ולכל קדקוד דרגה 3.

ג. 6 קדקודים ולכל קדקוד דרגה 1.

ד. 6 קדקודים ו- 4 קשתות.

ה. 4 קשתות, 4 קדקודים שיש להם דרגות 1,2,3,4.

ו. 4 קדקודים בעלי דרגות 1,2,3,4.

ז. 5 קדקודים בעלי דרגות 2,3,3,4,4.

ח. 4 קדקודים בעלי דרגות 2,2,4,4,4.

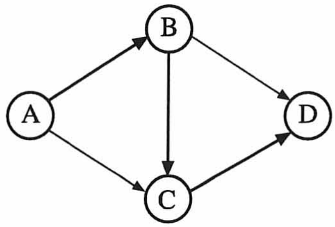
מסלול (path) באורך k מקדקוד a לקדקוד b הוא סדרה של $(k + 1)$ קדקודים בגרף:

$n_1\ n_2\ n_3\ n_4\ n_5\ \dots\ n_i\ n_{i+1}\ \dots\ n_k\ n_{k+1}$

המקיימים:

1. $n_1 = a$ צומת מוצא.
2. לכל $1 \le i \le k$ קדקוד n_{i+1} סמוך לקדקוד n_i בגרף.
3. $n_{k+1} = b$ צומת יעד.

לדוגמה, נציג שוב את איור 4.5:



איור 4.7
דוגמה למסלול בגרף

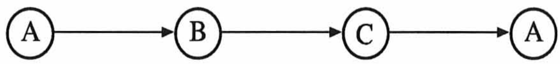
באיור 4.7 קיים מסלול באורך 3 מקדקוד A לקדקוד D. מאחר שישנה בגרף סדרה של 4 קדקודים, A, B, C, D, כאשר:

ישנה קשת מהקדקוד A לקדקוד B

ישנה קשת מהקדקוד B לקדקוד C

ישנה קשת מהקדקוד C לקדקוד D.

תיאור המסלול:



איור 4.8
תיאור המסלול

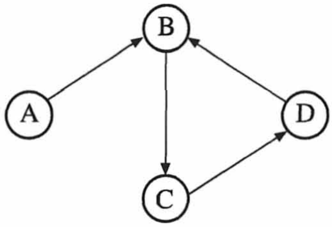
כאמור, אורך המסלול הוא 3, כמספר הקשתות שעוברים דרכן בכדי להגיע מהקדקוד A לקדקוד B.

קדקוד נגיש (accessible) – הקדקוד b ייקרא קדקוד נגיש, אם קיים מסלול באורך כלשהו בגרף מהקדקוד a לקדקוד b.

באיור 4.7, לדוגמה, הקדקוד D נגיש מהקדקוד A, מאחר שיש מסלול באורך 3 מהקדקוד A לקדקוד D.

מעגל (cycle) – מסלול בגרף מקדקוד כלשהו לעצמו.

לדוגמה:

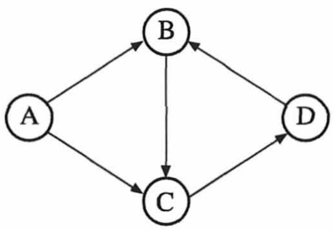


איור 4.9
מעגל בגרף

באיור 4.9 יש מעגל מהקדקוד B ל- B, והמסלול הנו: $B \to C \to D \to B$.

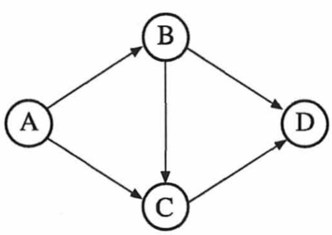
גרף מעגלי (cycle graph) הוא גרף שבו יש לפחות מעגל אחד – ולא, הגרף הוא **גרף לא מעגלי** (acycle).

באיור 4.10 מוצגת דוגמה לגרף מעגלי:



איור 4.10
דוגמה לגרף מעגלי

באיור 4.11 מוצגת דוגמה לגרף לא מעגלי:



איור 4.11
דוגמה לגרף **לא** מעגלי

מסלול פשוט (simple path) – מסלול שאין בו אף מעגל.

שאלה 4.5

האם ההגדרה הבאה שקולה להגדרה של מסלול פשוט ? נמקו את תשובתכם.

מסלול פשוט הוא מסלול שבו אף קדקוד של הגרף לא מופיע יותר מפעם אחת.

באיור 4.10 לעיל ישנם מסלולים שונים מהקדקוד A לקדקוד B.

מסלול 1 : $A \to B$

מסלול 2 : $A \to C \to D \to B$

מסלול 3 : $A \to B \to C \to D \to B$

מסלול 4 : $A \to B \to C \to D \to B \to C \to D \to B$

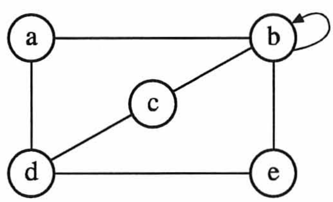
שלושת המסלולים הראשונים נקראים מסלולים פשוטים, אך מסלול 4 אינו מסלול פשוט. קל לראות כי אם קיים מסלול (כגון מסלול 4) בין שני קדקודים בגרף, אז קיים ביניהם גם מסלול פשוט.

באופן אנלוגי ניתן להגדיר כך גם מעגל פשוט (אף קדקוד אינו מופיע יותר מפעם אחת, חוץ מהקדקוד הראשון).

הערה: מעתה נעסוק במסלולים (מעגלים) פשוטים, אלא אם יצוין במפורש אחרת.

שאלה 4.6

נתון הגרף הזה :



בכל סעיף בחר את התשובה הנכונה מבין התשובות שלהלן:

א. מסלול ב. מסלול פשוט

ג. מעגל ד. מעגל פשוט

א. (b, b)

ב. (e, d, c, b)

ג. (a, d, c, d, e)

ד. (d, c, b, e, d)

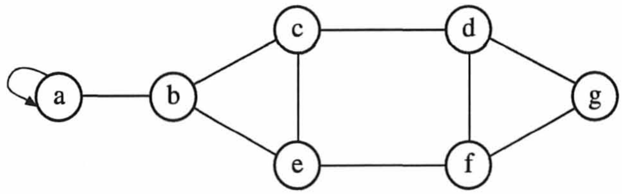
ה. $(b, c, d, a, b, e, d, c, b)$

ו. (b, c, d, e, b, b)

ז. (a, d, c, b, e)

שאלה 4.7

נתון הגרף הזה:

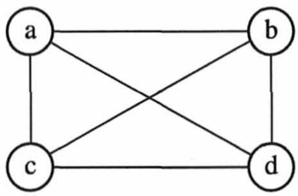


א. מצא את כל המעגלים הפשוטים בגרף.

ב. מצא את כל המסלולים הפשוטים מ- a ל-e.

גרף שלם (או מלא) (complete graph) – גרף שבו כל קדקוד מחובר לשאר קדקודי הגרף. גרף מלא שבו n קדקודים יסומן ב- K_n.

דוגמה ל K_4–:



איור 4.12
דוגמה לגרף שלם בעל 4 קדקודים

4.2.2 רשת

רשת (network) – גרף שבו מיוחסות תכונות לצמתים ולקשתות. ערכי התכונות מבוטאים במספרים הרשומים ליד הקשתות. המספרים המיוחסים לקשת נקראים **משקלות** (weight) **הקשת.** רשת מכונה גם **גרף משוקלל.**

לכל קשת בגרף ניתן לייחס תכונות (מספרים), אשר מייצגות אותה, כגון מחיר, מרחק, מקסימום כמות הזרם שניתן להזרים מקדקוד אחד לקדקוד אחר וכו'.

באותו אופן, לכל קדקוד בגרף ניתן לייחס תכונות (מספרים) מייצגות, כגון: קיבולת מקסימלית, קיבולת מינימלית וכו'.

בבעיות התובלה שהכרתם בפרק הקודם, נתוני הביקוש וההיצע היו תכונות של צמתים. צומת המקור אופיינה בתכונת ההיצע, ואילו צומת היעד אופיינה בתכונת הביקוש.

באיור 4.1 מוצגת רשת כבישים. המספרים הרשומים סמוך לכל קשת מציינים את המרחק בין הערים הנמצאות בצמתים שמחברת הקשת, כלומר לכל קשת מיוחסת תכונה – המרחק בין הערים. ללא ציון התכונה היינו מקבלים גרף רגיל (לא משוקלל) המורכב מצמתים וקשתות, ללא מספרים.

שאלה 4.8

מה מיצגת רשת הכבישים ללא המשקלות של הקשתות?

שאלה 4.9

ציינו שתי דוגמאות נוספות לתכונות שניתן לייחס לקשתות בתוך רשת.

רשת היא בעצם גרף משוקלל, לכן כל המושגים שהגדרנו בסעיף הקודם עבור גרף רגיל מתאימים גם עבור רשת. ההבדל בין גרף משוקלל לגרף רגיל הוא שבגרף משוקלל מיוחסות תכונות לקשתות, ואילו בגרף רגיל הקשתות חסרות תכונות.

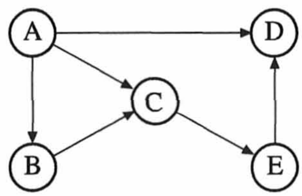
במקרים רבים בקשתות הרשת ישנה זרימה של עצמים כלשהם. למשל, זרימת מכוניות ברשת כבישים, זרימת שיחות בקווי טלפון וזרימת מים בצינורות המים. טבלה 4.1 מציגה כמה דוגמאות של זרימה ברשתות אופייניות.

טבלה 4.1 המרכיבים העיקריים של רשתות נבחרות

צמתים	קשתות	העצמים הזורמים
הצטלבות	דרכים	כלי רכב
שדות תעופה	קווי תעופה	כלי טיס
תחנות דלק	צינורות	נוזל (דלק)
מאגרי מים	צינורות	מים
מקורות/יעדים	דרכי תחבורה ביבשה, באוויר ובים	סחורות

שאלה 4.10

נתון הגרף הזה:



א. מצאו בגרף הנתון שני מסלולים פשוטים מכוונים ושני מסלולים פשוטים לא-מכוונים.

ב. מה המסלול הפשוט המכוון הארוך ביותר (בעל המספר הרב ביותר של קשתות) בין שני צמתים שונים בגרף הנתון?

ג. כמה מסלולים פשוטים מכוונים שונים קיימים בין A ל-D? כמה מסלולים פשוטים **לא**-מכוונים שונים קיימים בין A ל-D?

שאלה 4.11

להלן המסלולים מתוך הגרף הנתון בשאלה 4.10:

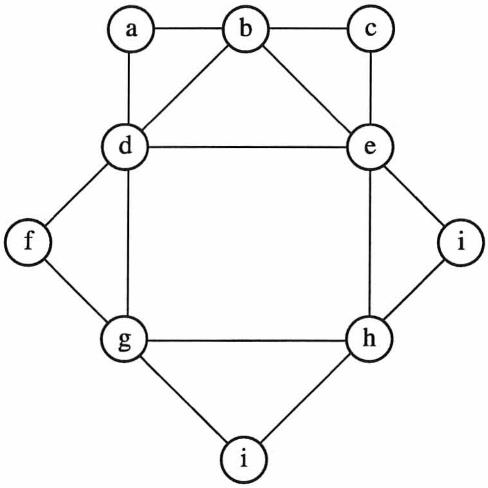
$$A \rightarrow D \leftarrow E \leftarrow C \leftarrow B \leftarrow A$$

$$C \leftarrow A \rightarrow D \leftarrow E \leftarrow C \leftarrow A$$

האם מסלולים אלה מתארים מעגל מכוון, מעגל לא-מכוון או שאינם מתארים מעגל כלל ?

4.2.4 תרגילים לסיכום סעיף 4.2

1. נתון הגרף הזה :

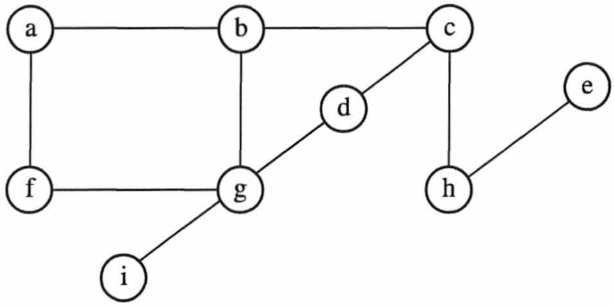


א. מצאו שני קדקודים בעלי דרגה אי-זוגית.
האם יתר הקדקודים בעלי דרגה זוגית?

ב. מצאו מסלול העובר דרך כל קשת פעם אחת בלבד.
רמז : התחילו את הסריקה מהקדקוד d.

ג. מצאו מסלול מ- d ל-e המכיל את כל הקשתות.

2. נתון הגרף הזה :



א. מצאו את כל הקדקודים בעלי דרגה אי-זוגית.

ב. מצאו שני מסלולים המכילים את כל קשתות הגרף כך שכל קשת של הגרף שייכת לאחד המסלולים בלבד.

3. האם מסלול שאינו פשוט חייב להכיל מעגל?

4. **(רשות)** בגרף G יש n קדקודים, וכל זוג קדקודים שונים מחוברים על-ידי צלע אחת בלבד.

א. עבור $n = 4$, ציירו את הגרף ומנו את מספר הצלעות.

ב. עבור $n = 5$, ציירו את הגרף ומנו את מספר הצלעות שבו.

ג. הוכיחו כי מספר הצלעות בגרף עם n קדקודים הוא :

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

5. שתי קבוצות של תלמידים קיימו ביניהן תחרות דמקה באופן הבא :

כל תלמיד מקבוצה אחת שיחק משחק אחד נגד כל שחקן מהקבוצה האחרת.

לא התקיימו משחקים בין שחקנים מאותה קבוצה.

א. בקבוצה אחת היו 3 שחקנים, ובקבוצה השנייה 4 שחקנים.

1. סרטטו את הגרף המתאר את המשחקים בין השחקנים של שתי הקבוצות.

2. קבעו את הדרגה של כל קדקוד בגרף.

3. מהו מספר המשחקים שנערכו בתחרות?

ב. בקבוצה אחת היו m שחקנים, ובקבוצה השנייה n שחקנים.

1. סרטטו גרף דומה לגרף שציירתם בסעיף א1.

2. קבעו את הדרגה של כל קדקוד בגרף.

3. מהו מספר המשחקים שנערכו בתחרות?

ג. מצאו את הקשר בין דרגות הקדקודים למספר השחקנים בשתי הקבוצות.

6. חברו כל קדקוד ב-K_2 על-ידי צלע לכל קדקוד ב-K_3.
מה נתקבל?

7. חברו כל קדקוד ב-K_n על-ידי צלע לכל קדקוד ב-K_m.
מה נתקבל?

8. הוכיחו כי בכל גרף G מספר הקדקודים בעלי דרגה אי-זוגית הוא מספר זוגי.

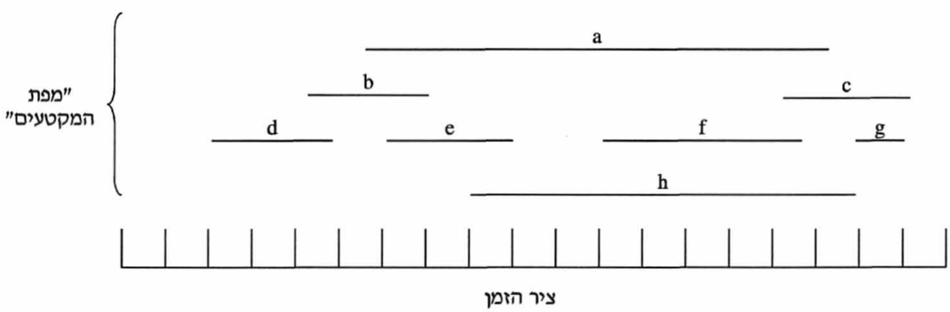
שאלה 4.12 (רשות)

משחקי ספורט המתקיימים ביום מסוים מיוצגים על-ידי "מפת מקטעים" באופן הזה:

כל משחק מיוצג על-ידי מקטע אחד שמציג את מועד תחילת המשחק ואת מועד סיומו.

מקטעים יוגדרו כמקטעים "חופפים חלקית", אם הם מייצגים משחקים שונים המתקיימים בזמן משותף (חלקי או מלא).

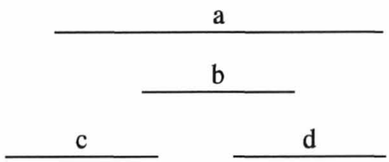
לפניכם דוגמה של "מפת מקטעים" המתארת זמנים של 8 משחקים:



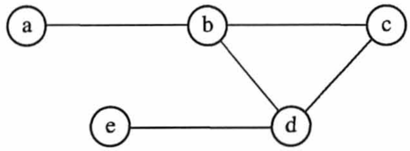
אפשר לייצג "מפת מקטעים" על-ידי גרף באופן הזה:

כל מקטע מיוצג על-ידי צומת בגרף. בין שני צמתים תהיה קשת, אם שני המקטעים תאימים "חופפים חלקית".

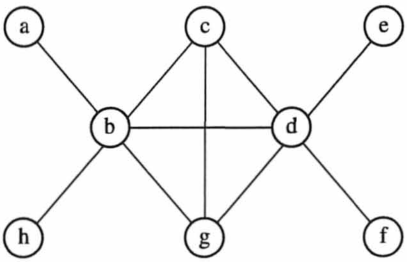
א. סרטטו את הגרף המייצג את "מפת המקטעים" שלפניך :



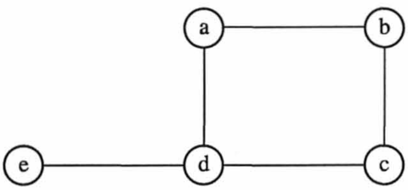
ב. לפניכם שלושה גרפים : (1), (2), (3) :



(1)



(2)



(3)

עבור כל אחד מן הגרפים (1)-(3), בדקו אם אפשר לבנות "מפת מקטעים" מתאימה. אם כן – סרטטו אותה ; אם לא – הסבירו מדוע לא.

ג. האם אפשר לבנות "מפת מקטעים" לגרף לא קשיר? הסבירו את תשובתכם.

4.3 סקירת מבני נתונים שונים לייצוג גרפים ורשתות

בסעיף הקודם למדנו כי מרכיביו של גרף הם קשתות וצמתים, ואילו רשת היא למעשה גרף שהקשתות והצמתים שלו בעלי תכונות. בכדי להשתמש באלגוריתמים לפתרון בעיות זרימה ברשתות, שראינו להן דוגמאות בסעיף 4.1, יש להכיר תחילה מבני נתונים לייצוג גרפים ורשתות. סעיף זה יעסוק במבני (טיפוסי) נתונים שונים לייצוג גרפים ורשתות. הגדרה של מבנה נתונים דורשת, בנוסף על המודל המתמטי (מרכיבי הגרף והרשת) שסקרנו בסעיף הקודם, מידע על הפעולות שיש לבצע על גרף או על רשת בכדי לבנותם או בכדי להשתמש בהם באלגוריתמים שונים לפתרון בעיות זרימה ברשת.

הפעולות הדרושות על-מנת לבנות גרף או רשת או להשתמש בהן הוא הנושא של סעיף 4.3.1 להלן.

4.3.1 הפעולות שיש לבצען על גרף ועל רשת

כאמור, רשת היא גרף שלצמתים ולקשתות שלו יש תכונות. כלומר, יש לבצע את כל הפעולות הדרושות על הגרף וגם על הרשת. נתחיל אם כן ברשימת הפעולות הדרושות לביצוע על גרף, ובהמשך, נוסיף אליהן את רשימת הפעולות הדרושות לביצוע על רשת.

הפעולות הבסיסיות המוגדרות על מבנה הנתונים **גרף**:

- אתחול גרף.
- הוספת קשת.
- הסרת קשת.
- הוספת צומת.
- הסרת צומת.
- בדיקת שכנות (סמיכות) של צמתים.
- איתור צומת.
- בדיקת גרף ריק.

הפעולות הנוספות שתידרשנה לבניית רשת :

- הוספת קשת משוקללת.

* הסרת קשת משוקללת.
* הוספת צומת משוקלל /הסרת צומת משוקלל.

בטבלה 4.1 מוצג הממשק של מבנה הנתונים גרף, שמספר צמתיו ידוע מראש, כולל הפעולות של גרף משוקלל, כלומר רשת (למעט הוספת צומת משוקלל/הסרת צומת משוקלל):

טבלה 4.1: ממשק של מבנה הנתונים גרף (גרף משוקלל – רשת)

שם הפעולה בעברית	שם הפעולה באנגלית	פירוט הפעולה
אתחל-גרף (n)	initialize (n)	פעולה המחזירה גרף בעל n צמתים (בין 0 ל- $n-1$) שהוא ריק מקשתות. הנחה: $n > 0$.
הוסף-קשת (G,x,y)	join (G,x,y)	פעולה המוסיפה קשת מצומת x לצומת y בגרף G. הנחות: $0 \le x, y < n$. הגרף G מאותחל. אין קשת מצומת x לצומת y.
הסר-קשת (G,x,y)	remv (G,x,y)	פעולה המסירה קשת מצומת x לצומת y בגרף G. הנחות: $0 \le x, y < n$. הגרף G מאותחל. קיימת קשת מצומת x לצומת y.
צמתים-סמוכים? (G,x,y)	adjacent (G,x,y)	פעולה המחזירה TRUE אם צומת y סמוך לצומת x בגרף G, ו-FALSE אחרת. הנחות: $0 \le x, y < n$. הגרף G מאותחל.
גרף-ריק? (G,n)	graph_is_empty(G,n)	פעולה המחזירה TRUE אם הגרף G ריק מקשתות ו-FALSE אחרת. הנחה: הגרף G מאותחל.
הוסף-קשת-משוקללת (G,x,y,w)	joinw (G,x,y,w)	פעולה המוסיפה קשת, שמשקלה w, מצומת x לצומת y בגרף G, שהוא גרף משוקלל (כלומר רשת). הנחות: $0 \le x, y < n$. הגרף G מאותחל. אין קשת מצומת x לצומת y.
הסר-קשת-משוקללת (G,x,y)	remvw (G,x,y,w)	פעולה המסירה קשת מצומת x לצומת y בגרף G, שהוא גרף משוקלל (רשת), ומחזירה את משקלה. הנחות: $0 \le x, y < n$. הגרף G מאותחל. קיימת קשת מצומת x לצומת y.

דוגמה לשימוש בפעולות שבממשק

__בנה-גרף (n)__

הפעולה מחזירה גרף המתאים לקשתות הנקראות מהקלט.

G הוא משתנה מטיפוס גרף. x, y הם משתנים מטיפוס שלם.

הנחה: הקלט תקין.

(1) **אתחל-גרף (n)** $\leftarrow G$:

(2) כל עוד לא הגעת לסוף הקלט, בצע:

(2.1) קרא x, y;

(2.2) **הוסף-קשת (G, x, y)**.

(3) החזר G.

כזכור, המטרה שלנו היא לממש את המודל המתמטי עבור גרפים ורשתות, ולבצע את הפעולות הנדרשות שתוארו לעיל. בהינתן המודל המתמטי והפעולות שיש לבצע בו, אפשר לבנות עבורו מימושים שונים. זאת משום שבדרישות הבעיה לא נקבעו פרטי הפתרון של בעיה מסוימת או מימוש המודל המתמטי עבורה.

בבואנו לממש ייצוג גרפים ורשתות, נבחין בין שני מקרים:

מקרה 1: מספר הצמתים בגרף ידוע מראש.

מקרה 2: מספר הצמתים בגרף אינו ידוע מראש.

בשלושת הסעיפים שלהלן נכיר שיטה לייצוג גרפים עבור מקרה 1, שבו מספר הצמתים בגרף ידוע מראש.

4.3.2 ייצוג גרף באמצעות מטריצת סמיכות

השיטה הראשונה לייצוג גרף שנכיר משתמשת ב"מטריצת סמיכות" (שכנות/קישוריות).

מאחר שמספר הצמתים בגרף ידוע מראש (נניח – n), אזי כל צומת בגרף מיוצג על-ידי מספר שלם בין 0 ל- (n–1).

בשיטה זו ניתן לייצג **גרף בלבד ולא רשת**, כלומר, אין כל מידע המיוחס לצמתים, אלא רק מידע על קיום קשתות בגרף.

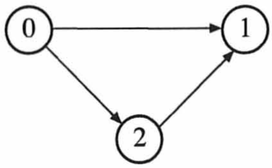
שאלה 4.13

לאור האמור לעיל, מהו מבנה הנתונים שנשתמש בו להצגת גרף?

נכנה את המערך הדו-ממדי מסדר $n \times n$ כ-G.

מערך דו-ממדי (מטריצה ריבועית) מייצג כל זוג אפשרי של צמתים שניתן להעביר ביניהם קשת.

דוגמה, נתון הגרף המכוון הזה:



כדי לייצג אותו נשתמש במטריצה הריבועית שלהלן:

$$\begin{array}{c|c} G & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

השורות הן צמתים מהם יוצאות הקשתות, והעמודות הן הצמתים אליהם הקשתות נכנסות.

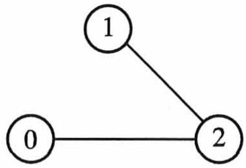
במטריצה זו נרשום 1 (או הערך TRUE) או 0 (או הערך FALSE). אם הקדקוד j סמוך לקדקוד i (קיימת קשת $<i, j>$), אזי ערכו של $G[i][j]$ יהיה 1 (TRUE) ואם הקדקוד j אינו סמוך לקדקוד i (כלומר לא קיימת קשת $<i, j>$), אזי ערכו של $G[i][j]$ יהיה 0 (FALSE).

בדוגמה שלנו $G[0][1] = 1$ מאחר שקיימת קשת מקדקוד 0 לקדקוד 1. כמו כן, $G[1][0] = 0$ מאחר שלא קיימת קשת מקדקוד 1 לקדקוד 0.

הערה: עבור הגרף הלא מכוון G, המערך הדו-ממדי יוגדר כדלהלן:

$$g[i][j] = \begin{cases} 1 & \text{אם קיימת קשת לא מכוונת } (i, j) \\ 0 & \text{אם } i = j \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

לדוגמה, בהינתן הגרף הזה:



נייצג את הגרף בעזרת המטריצה הריבועית הזו :

$$\begin{array}{c|ccc} G & 0 & 1 & 2 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \end{array}$$

$G[0][2] = G[2][0] = 1$ מאחר שקיימת קשת לא מכוונת בין הצמתים 0 ו- 2.

ניתן לשים לב שהמטריצה הריבועית המייצגת את הגרף הלא מכוון G היא מטריצה סימטרית ביחס לאלכסון הראשי.

לאור האמור לעיל, נוכל להגדיר את הגרף, בעל 20 צמתים, כדלהלן :

בשפת C:

```
#define n 20
typedef int adjmat[n][n]
adjmat G;
```

בשפת פסקל:

```
CONST
   n = 20;
TYPE
  adjmat = ARRAY[1.. n , 1.. n]   OF   INTEGER ;
VAR
   G  : adjmat ;
```

כאמור, כל צומת בגרף מיוצג על-ידי מספר שלם בין 0 ל-19.

המערך הדו-ממדי G מייצג כל זוג סדור אפשרי של צמתים.

אם $G[i][j]=1$, אזי ניתן לומר שקיימת קשת מקדקוד שמספרו I, לקדקוד שמספרו j, ואם ערכו 0, אזי לא קיימת הקשת $<i, j>$.

מאחר שהחלטנו לממש את הגרף (באפשרות הראשונה) על-ידי שימוש במערך דו-ממדי (מטריצה ריבועית), נציג כעת את השגרות/פונקציות למימוש הפעולות הבסיסיות שהזכרנו קודם במפרט.

מימוש אלגוריתמי של פעולות הממשק כאשר הגרף מיוצג כמטריצת סמיכויות:

<u>אתחל-גרף (n)</u>

{ פעולה המחזירה גרף בעל n צמתים ריק מקשתות $n > 0$.

G משתנה מהטיפוס גרף. $0 \le x, y < n$. }

(1) עבור x מ-0 עד $n-1$ בצע:

(1.1) עבור y מ-0 עד $n-1$ בצע:

(1.1.1) $[x,y] \leftarrow 0$

(2) החזר G

<u>הוסף-קשת (G, x, y)</u>

{ פעולה המוסיפה קשת מצומת x לצומת y בגרף G.

הגרף G מאותחל. $0 \le x, y < n$. אין קשת מצומת x לצומת y. }

(1) $G[x, y] \leftarrow 1$

<u>הוסף-קשת-משוקללת (G, x, y, w)</u>[*]

{ פעולה המוסיפה קשת, שמשקלה w, מצומת x לצומת y בגרף G.

הגרף G מאותחל. $0 \le x, y < n$. אין קשת מצומת x לצומת y. }

(2) $G[x, y] \leftarrow w$

---

[*] ניתן לאחסן בתא $[i, j]$ של המטריצה את המשקל של הקשת (i, j), בתנאי שהמשקל של כל קשת שונה מאפס.

הסר-קשת (G, x, y)

{ פעולה המסירה קשת מצומת x לצומת y בגרף G.

הגרף G מאותחל. $0 \le x, y < n$. קיימת קשת מצומת x לצומת y. }

(1) $G[x, y] \leftarrow 0$

הסר-קשת-משוקללת (G, x, y)

{ פעולה המסירה קשת מצומת x לצומת y בגרף G, ומחזירה את משקלה.

w מהטיפוס שלם.

הגרף G מאותחל. $0 \le x, y < n$. קיימת קשת מצומת x לצומת y. }

(1) $w \leftarrow G[x, y]$

(2) $G[x, y] \leftarrow 0$

(3) החזר w

צמתים-סמוכים? (G, x, y)

{ פעולה המחזירה TRUE אם צומת y סמוך לצומת x בגרף G, ו-FALSE – אחרת.

הגרף G מאותחל. $0 \le x, y < n$. }

(1) החזר $G[x, y] = 1$

גרף-ריק? (G, n)

{ פעולה המחזירה TRUE אם הגרף G ריק מקשתות, ו-FALSE – אחרת.

G מאותחל.

x, y הם משתנים מהטיפוס שלם. }

(1) עבור x מ-0 עד $n-1$ בצע:

(1.1) עבור y מ-0 עד $n-1$ בצע:

(1.1.1) אם **צמתים-סמוכים?** (G, x, y), אזי

החזר FALSE.

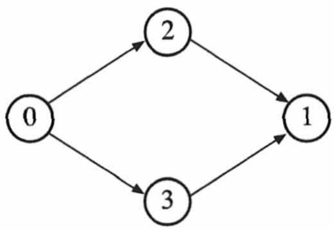
(2) החזר TRUE.

כיצד ייראה הקלט לבניית הגרף?

בשיטה הזאת מספר הצמתים בגרף ידוע מראש (נניח n).

הקלט חייב לכלול אך ורק קשתות שבגרף. כל קשת תיוצג בקלט על-ידי זוג סדור.

דוגמה: נתון הגרף שלהלן:



מבנה הקלט הוא:

(0, 2)

(0, 3)

(2, 1)

(3, 1)

(−1, −1)

קודם מקצים מטריצה ריבועית של אפסים מסדר 4×4.

עם קריאת הקלט, בכל פעם שנקרא בקלט זוג מספרים $<a, b>$ מוכנס הערך 1 (TRUE) באיבר המתאים במטריצה (בשורה a ובעמודה b של המטריצה).

(−1, −1) משמש כזקיף לסיום קלט.

בתום קריאת הקלט, המטריצה המייצגת את הגרף היא:

	0	1	2	3
0	0	0	1	1
1	0	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	1	0	0

להלן אלגוריתם לבניית הגרף:

- צור מטריצה G של אפסים מסדר $n \times n$.
- כל עוד קיים קלט, בצע:
  - קלוט זוג צמתים (a, b)
  - בצע: $G[a][b] = 1$
- סוף הלולאה.

4.3.3 ייצוג רשת באמצעות מטריצה ריבועית

השיטה השנייה לייצוג גרף שנכיר משמשת גם לייצוג גרף משוקלל (בעל משקל לקשתות), כלומר לייצוג **רשת**. השיטה הזאת משתמשת במטריצה ריבועית.

מאחר שמספר הצמתים בגרף ידוע מראש (נניח n), אזי כל צומת בגרף מיוצג על-ידי מספר שלם בין 0 ל- $(n-1)$.

בשיטה הזאת נניח שאין כל מידע המיוחס לצמתים. כמו כן, נרצה לדעת אם קיימות קשתות עבור הגרף, וגם את המידע המיוחס להן (בשיטה הזאת ניתן לייחס תכונה אחת בלבד לכל קשת).

לאור זאת, הדרך הטבעית להצגה של גרף היא מערך דו-ממדי (מטריצה ריבועית) מסדר $n \times n$. הנקרא **מטריצת המשקלות**. נסמן אותה ב-G.

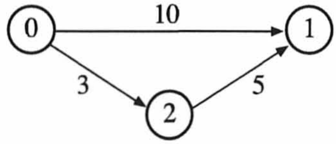
מערך דו-ממדי מייצג כל זוג סדור אפשרי של צמתים.

לגבי כל אלמנט במטריצה זו נשמור מספר מאפיינים:

א. האם קיימת קשת בין זוג סדור של צמתים.

ב. אם קיימת קשת בין זוג סדור של צמתים, נרצה לדעת מהו המידע המיוחס לה.

לדוגמה, נתון הגרף המכוון הזה:



נייצג את הגרף בעזרת המטריצה הריבועית שלהלן:

G	0	1	2
0	0 	1 10	1 3
1	0 	0 	0
2	0 	1 5	0

האלמנט שנמצא במטריצה זו בשורה מספר 2 ובעמודה מספר 1 הוא:

1
5

כאשר 1 מציין שקיימת קשת מצומת 2 לצומת 1, והמידע שמיוחס לה הוא 5.

שאלה 4.14

נניח שמעוניינים לייצג n תכונות (משקלות) עבור כל קשת. כיצד ייראה מבנה הנתונים במקרה זה?

לאור זאת, על גרף משוקלל עם מספר קבוע של צמתים אפשר לקבוע זאת:

בשפת C:

```
#define n 20
typedef struct keshet
  {
      int adj
     int mishkal;
  } arc;
typedef arc arcs[n][n]
arcs G;
```

בשפת פסקל:

```
CONST
          n = 20;
TYPE
  Keshet = RECORD
             adj ,
             mishkal : INTEGER
           END ;
  arcs = ARRAY[1.. n , 1.. n]   Keshet ;
VAR
   G  : arcs ;
```

כאמור, כל צומת בגרף מיוצג על-ידי מספר שלם בין 0 ל- 19.

המערך הדו-ממדי, G, מייצג כל זוג סדור אפשרי של צמתים.

אם $G[i][j]$.adj שווה 1, אזי ניתן לומר שקיימת הקשת $<i, j>$, והמידע המיוחס לה נמצא ב-$G[i][j]$.mishkal.

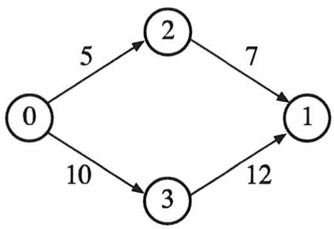
כיצד ייראה הקלט לבניית הגרף בשיטת מטריצת המשקלות?

שיטה זו משתמשת במטריצת המשקלות, שנסמנה ב-G.

כאמור, בשיטה זו מספר הצמתים בגרף ידוע מראש (נניח n).

הקלט חייב לכלול אך ורק קשתות עם המשקלות המיוחסים להן בגרף.

דוגמה: נתון הגרף שלהלן:



מבנה הקלט הוא:

משקל	צומת יעד	צומת מקור
5	2	0
0	3	0
7	1	2
2	1	3
−1	−1	−1

תחילה מקצים מטריצה ריבועית של אפסים מסדר 4×4.

עם קריאת הקלט, בכל פעם שנקרא בקלט שלושה מספרים $<a, b, w>$ מוכנס הערך 1 (TRUE) והמשקל באיבר המתאים במטריצה (בשורה a ובעמודה b של המטריצה).

בתום קריאת הקלט, המטריצה המייצגת את הגרף היא :

	0	1	2	3
0	0	0	1 5	1 10
1	0	0	0	0
2	0	1 7	0	0
3	0	1 12	0	0

להלן אלגוריתם לבניית הגרף:

– צור מטריצה G של רשומות, כך שכל איבר במטריצה המשתנה $G[i][j]$.adj יהיה בעל ערך 0.

– כל עוד קיים קלט :

– קלוט שלישייה (מסודרת) (a , b, w).

– בצע השמות

```
G [a][b] . mishkal = w ;
G [a][b] . adj = 1 ;

/*
```

במקום שני המשפטים האחרונים, ניתן לזמן את השגרה

joinw (G , x , y , w)   */

– סוף הלולאה.

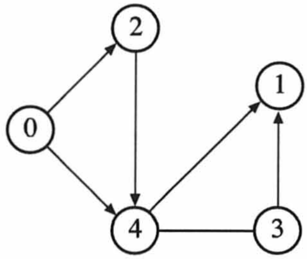
4.3.4 ייצוג גרף באמצעות רשימת סמיכות

בדומה לשיטה השנייה לייצוג גרף, גם השיטה השלישית שנכיר משמשת לייצוג גרף משוקלל (משקל לקשתות), כלומר לייצוג **רשת**.

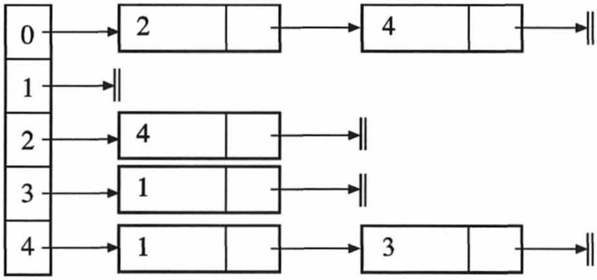
בשיטה הזאת אנו עדיין מניחים שמספר הצמתים בגרף ידוע מראש (נניח n), וכל צומת בגרף מיוצג על-ידי מספר שלם בין 0 ל-$(n-1)$.

שוב, בשיטה זו עדיין איננו מייחסים מידע לצמתים, אבל מאפשרים לייחס מידע לקשתות. עתה, נציג את הגרף בעזרת מערך של רשימות, כאשר גודל המערך הוא n.

נבהיר את השיטה החדשה בעזרת הגרף שלהלן:



נייצג את הגרף בעזרת מערך של רשימות:

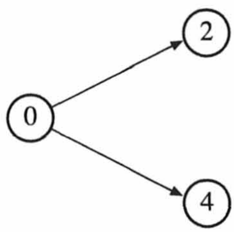


הצמתים של הגרף מיוצגים על-ידי מערך. כל אינדקס של המערך מייצג צומת (קדקוד) בגרף. הקשתות של הגרף מיוצגות על-ידי רשימה הנקראת **רשימת סמיכות** (שכנות/ קשירות).

כל צומת ברשימת סמיכות מייצג קשת בגרף.

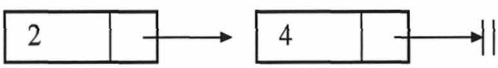
כל כניסה במערך, אשר מייצגת קדקוד כלשהו x של הגרף, מצביעה לרשימת סמיכות של צמתים, המייצגת את הקשתות היוצאות מקדקוד – גרף (x) זה.

בגרף הנתון, מהקדקוד, שמספרו 0, יוצאות שתי קשתות: האחת נכנסת לקדקוד שמספרו 2, והאחרת נכנסת לקדקוד שמספרו 4.



צומת 0 מיוצג על-ידי הכניסה 0 של המערך.

הקשתות של הגרף (היוצאות מצומת זה – 0) מיוצגות על ידי רשימת הסמיכות הבאה:



כל צומת ברשימת סמיכות כאמור מייצגת קשת בגרף (קשתות <0, 4> , <0, 2>). כמו כן, הכניסה מספר 0 (המייצגת קדקוד בגרף שמספרו 0) מצביעה לרשימת סמיכות של צמתים, המייצגת את הקשתות היוצאות מהקדקוד 0 בגרף.

שאלה 4.15

מתי כדאי לייצג את הגרף בשיטה חלופית זו ?

לאור האמור לעיל, נוכל להגדיר את הגרף בעל 20 הקדקודים כדלהלן :

כאמור, כל צומת בגרף מיוצג על ידי מספר שלם בין 0 ל- 19.

המערך החד-ממדי (G), שגודלו 20, מייצג את צומתי הגרף. כמו כן, כניסה מספר x (המייצגת קדקוד שמספרו x בגרף) מצביעה לרשימת סמיכות של צמתים המייצגת את הקשתות היוצאות מהקדקוד x בגרף.

לאור זאת, כל צומת ברשימת סמיכות מכיל שני שדות : next ו-info.

אם P מצביע לצומת (ברשימת סמיכות) המייצג את הקשת $<x, y>$, אזי next (P) (או בכתיב של שפת C next ← P) מצביע לצומת המייצג את הקשת הבאה היוצאת מקדקוד x בגרף (אם ישנה כזו), ו-info (P) (או בכתיב של שפת C info ← P) מכיל את y.

mishkal (P) (או בכתיב של שפת C mishkal ←P) מכיל את המשקל שעל הקשת$<x, y>$.

לאור האמור לעיל, נוכל להגדיר את הגרף בעל 20 הצמתים כדלהלן :

בשפת C :

```
#define  n  20
typedef  struct  kodkod
{
          int  info ;
          int  mishkal ;
          struct  node  *next ;
} list_node , *list_ptr ;
list_ptr  G [n] ;
```

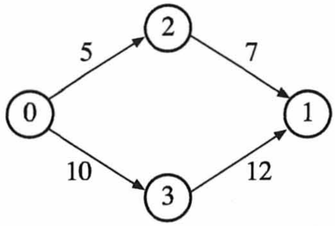
בשפת פסקל:

```
CONST
            n = 20;
TYPE
   NODE_PTR ^ NODE ;
  Kodkod = RECORD
             info    ,
             mishkal : INTEGER;
      node       NODE_PTR
            END ;
  List_ptr = ARRAY[1.. n]   Kodkod ;
VAR
   G  : List_ptr ;
```

כיצד ייראה הקלט לבניית הגרף באמצעות מבנה מקושר ?

כידוע, גם בשיטה הזאת מספר הצמתים בגרף ידוע מראש (נניח n). הקלט חייב לכלול אך ורק קשתות ואת המשקלות המיוחסים להן בגרף.

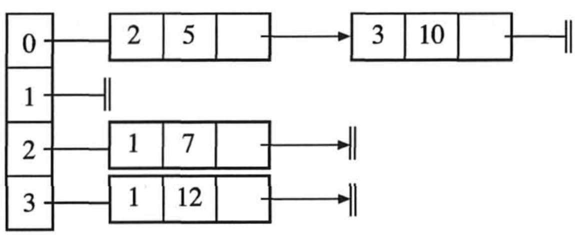
דוגמה : נתון הגרף שלהלן :



מבנה הקלט הוא –

משקל	צומת יעד	צומת מקור
5	2	0
0	3	0
7	1	2
2	1	3
–1	–1	–1

קודם מקצים מערך שגודלו n, מאחר שהצמתים של הגרף מיוצגים על-ידי מערך עם קריאת הקלט. בכל פעם שנקרא בקלט שלושה מספרים $<a, b, w>$, נצרף צומת חדש לכבוד הקשת החדשה $<a, b>$ לרשימת הסמיכות של הצומת a.
בתום קריאת הקלט המבנה המקושר ייראה כך :



להלן אלגוריתם לבניית המבנה המקושר :

– צור מערך G (שגודלו n), כאשר כל תא במערך $G[i]$ יקבל את הערךNULL .
– כל עוד קיים קלט, בצע :

– קלוט שלישייה (מסודרת) $(a\ ,b\ ,w)$

– בצע: $\mathrm{joinw}\ (G, x, y, w)$

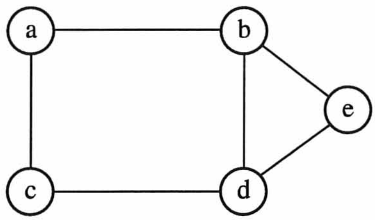
– סוף הלולאה.

4.3.5 שאלות לסיכום סעיפים 4.3.2-4.3.4

שאלה 4.16

נתון גרף לא מכוון $G = (V, E)$.

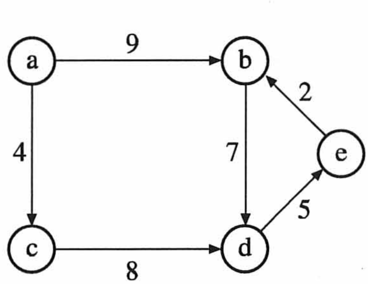
א. מהי מטריצת הסמיכות המייצגת את הגרף G?



ב. יצגו את הגרף באמצעות רשימת סמיכות.

שאלה 4.17

נתון גרף מכוון משוקלל $G = (V, E)$:

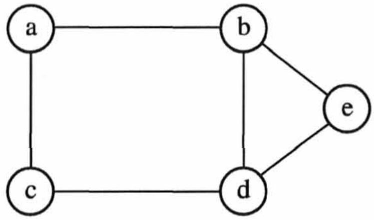


א. יצגו את הגרף באמצעות מטריצת סמיכות.

ב. יצגו את הגרף באמצעות רשימת סמיכות.

שאלה 4.18

א. נתון גרף לא מכוון $G = (V, E)$:



1. יצגו את הגרף G באמצעות רשימות סמיכות.
2. חשבו את סכום האורכים של כל רשימות הסמיכות.
3. מהו הקשר בין התוצאה שקיבלתם בסעיף הקודם לבין מספר הקשתות שבגרף G?

ב. בנו גרף מכוון עם 4 צמתים.

1. הראו את הייצוג של הגרף G באמצעות רשימות סמיכות.
2. חשבו את סכום האורכים של כל רשימות הסמיכות.
3. מהו הקשר בין התוצאה שקיבלתם בסעיף הקודם לבין מספר הקשתות שבגרף G?

שאלה 4.19

נתון הגרף G אשר מיוצג באמצעות רשימות סמיכות.

א. אם הגרף G הוא גרף מכוון, מהו סכום האורכים של כל רשימות הסמיכות? נמקו את תשובתכם.

ב. אם הגרף G הוא גרף לא מכוון, מהו סכום האורכים של כל רשימות הסמיכות?

ג. הראו כי כמות הזיכרון הדרושה לייצוג גרף G באמצעות רשימות סמיכות היא: $O(\max(|V|, |E|)) = O(|V| + |E|)$

שאלה 4.20

מהי כמות הזיכרון הדרושה לייצוג גרף G באמצעות מטריצת סמיכות? נמקו את תשובתכם.

שאלה 4.21

נתון גרף מכוון $G = (V, E)$ המיוצג באמצעות רשימות סמיכות.

א. כתבו אלגוריתם, בעל סיבוכיות זמן ריצה $O(|E| + |V|)$, המחשב את דרגת היציאה של כל קדקוד.

ב. כתבו אלגוריתם המחשב את דרגת הכניסה של כל קדקוד.

ג. מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעתם בסעיף ב׳. נמקו את תשובתכם.

שאלה 4.22

נתון: **המטריצה המוחלפת** (transpose) של מטריצה A מסומנת כ-A^T ומוגדרת כך:

השורה הראשונה של A תהיה העמודה הראשונה של A^T.

השורה השנייה של A תהיה העמודה השנייה של A^T.

השורה השלישית של A תהיה העמודה השלישית של A^T, וכדומה.

לדוגמה: עבור המטריצה הזאת:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 8 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה המוחלפת היא:

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

א. נתון גרף לא מכוון G, המיוצג באמצעות מטריצת סמיכות A. האם $A^T = A$ תמיד? נמקו את תשובתכם.

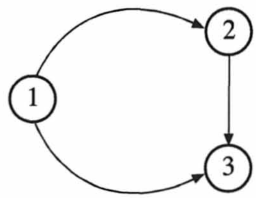
ב. נתון גרף מכוון G, המיוצג באמצעות מטריצת סמיכות A. האם $A^T = A$ תמיד? נמקו את תשובתכם.

שאלה 4.23

נתון הגרף המכוון $G(V, E)$. **הגרף המוחלף** של G מסומן ומוגדר כ: $GT = (V, E^T)$, כאשר בקבוצת הקשתות E^T נמצאות אותן הקשתות שב-E אבל כיווניהן הפוכים.

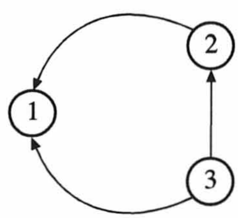
כלומר, אם $(u, v) \in E$, אזי $(u, v) \in E^T$.

למשל, עבור הגרף G שמתואר להלן:



הגרף המוחלף G^T הוא כדלקמן:

א. אם הגרף מיוצג באמצעות מטריצת סמיכות,



1. תארו אלגוריתם לחישוב G^T.
2. מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעתם בסעיף 1?

ב. אם הגרף מיוצג באמצעות רשימות סמיכות,

1. תארו אלגוריתם לחישוב G^T.
2. מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעתם בסעיף 1?

שאלה 4.24

נתון הגרף K_5. מצאו את המטריצה A^2, כאשר A מייצגת מטריצת סמיכות. תנו משמעות לאברי המטריצה A^2.

שאלה 4.25

נניח שמטריצת הסמיכות שמתארת את הגרף היא:

$$A = \left(\begin{array}{c:c} & A' \\ \hdashline A'' & \end{array}\right)$$

כאשר כל האלמנטים במטריצות A' ו-A'' שווים אפס.

מהו מספר תת-הגרפים שאין להם אף קדקוד משותף?

שאלה 4.26

כידוע, מטריצת סמיכות מתארת גרפים פשוטים שאין בהם קשתות כפולות (למשל מהקדקוד a יכולות לצאת שלוש קשתות מקבילות וכולן נכנסות ל-b). איך הייתם משנים את ההגדרה של מטריצת הסמיכות במקרה הזה?

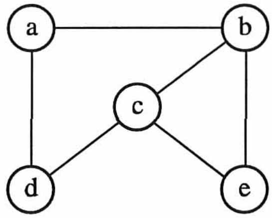
4.4 מטריצת מסלולים

נתון הגרף $G = (V, E)$ אשר מיוצג בעזרת מטריצת סמיכות. אין מידע על הקשתות (כלומר הגרף אינו משוקלל).

נניח כי האורך של כל קשת הוא 1.

האם קיים מסלול כלשהו בין צומתי הגרף?

נתבונן בגרף שלהלן:



מטריצת הסמיכות המייצגת אותו היא:

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1 – מייצג את הערך הלוגי TRUE.

0 – מייצג את הערך הלוגי FALSE.

$A[a, b] = 1$, כלומר קיימת קשת (מסלול באורך 1) מ-a ל-b.

$A[a, c] = 1$, כלומר קיימת קשת (מסלול באורך 1) מ-b ל-c.

נתבונן כעת בביטוי הזה: $A[a, b]$ and $A[b, c]$.

לביטוי ערך 1 (TRUE) אם ורק אם ל-$A[b, c]$ ערך 1 (TRUE) וגם ל-$A[a, b]$ ערך 1 (TRUE).

כלומר, קיימת קשת מ-a ל-b וגם קיימת קשת מ-b ל-c.

$$a \xrightarrow{1} b \wedge b \xrightarrow{1} c$$

כלומר, לביטוי $A[a, b]$ and $A[b, c]$ ערך 1 (TRUE) אם ורק אם קיים מסלול באורך 2 מהקדקוד a לקדקוד c העובר דרך הקדקוד b.

באופן כללי, ניתן להסיק שלביטוי $A[x, y]$ and $A[y, z]$ ערך 1 (TRUE) אם ורק אם קיים מסלול באורך 2 בדיוק מהקדקוד x לקדקוד z העובר דרך הקדקוד y.

עתה נתבונן בביטוי הזה:

$$(A[a, b] \text{ and } A[b, e]) \text{ OR } (A[a, c] \text{ and } A[c, e]) \text{ OR } (A[a, d] \text{ and } A[d, e])$$

ביטוי זה שקול ל-

$$(1 \text{ and } 1) \text{ OR } (0 \text{ and } 1) \text{ OR } (1 \text{ and } 0) = 1$$

מתוך הביטוי קל לראות כי:

- קיים מסלול באורך 2 מהקדקוד a לקדקוד e, העובר דרך הקדקוד b.

- אין מסלול באורך 2 מהקדקוד a לקדקוד e, העובר דרך קדקוד c.
- אין מסלול באורך 2 מהקדקוד a לקדקוד e, העובר דרך הקדקוד d.
- לביטוי הנתון ערך 1 (TRUE) אם ורק אם קיים מסלול באורך 2 מהקדקוד a לקדקוד e דרך לפחות אחד הקדקודים b או c או d.
- כלומר, לביטוי הנתון ערך 1 (TRUE) אם ורק אם קיים מסלול באורך 2 מהקדקוד a לקדקוד e דרך לפחות אחד מקדקודי הגרף.

עתה נתבונן במטריצת הסמיכות A, המייצגת את הגרף, ונסתכל על אברי השורה a ועל אברי העמודה e, ונכפיל את שני הווקטורים (כפל סקלרי).

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ (0 & 1 & 0 & 1 & 0) \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}$$

מאחר שהערכים שמופיעים במטריצה הם בוליאניים ($1 = \text{TRUE}$, $0 = \text{FALSE}$), והכפל המספרי שקול לפעולה הלוגית AND והחיבור המספרי שקול לפעולה הלוגית OR, נסיק כי המכפלה הסקלרית של שני הווקטורים a ו-e מחזירה ערך 1 (TRUE), אם ורק אם קיים מסלול באורך 2 מהקדקוד a לקדקוד e דרך לפחות אחד מקדקודי הגרף.

מסקנה זו נכונה לכל זוג וקטורים במטריצה.

עתה, נכפיל את המטריצה A בעצמה ונקבל:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

לאור מה שהראינו קודם, עבור הגרף הנתון G, המיוצג על-ידי המטריצה A, A^2 היא מטריצת מסלולים באורך 2 מכל קדקוד בגרף לכל קדקוד אחר בגרף.

מאחר ש:

$A^2[a, b] = 1$, אז קיים מסלול באורך 2 מהקדקוד a ל-c,

$A^2[a, e] = 1$, אז קיים מסלול באורך 2 מהקדקוד a ל-e,

$A^2[a, d] = 0$, אז לא קיים מסלול באורך 2 מהקדקוד a ל-d

וכדומה.

שימו לב, מהקדקוד a לקדקוד d קיים מסלול באורך 1 (ראה במטריצה A את $A[a, d]$), אך לא קיים מסלול באורך 2 (ראה במטריצה A^2 את $A^2[a, d]$).

בנוסף, נתבונן במסלולים מהקדקוד a לקדקוד c.

אין מסלול באורך 1 (כי $A[a, c] = 0$), אך קיים מסלול באורך 2 (כי $A^2[a, c] = 1$).

מסקנה:
A^2 היא מטריצת מסלולים באורך 2, עבור הגרף הנתון מכל קדקוד לכל קדקוד אחר בגרף. כלומר, הערך של $A^2[i, j]$ הוא 1 (TRUE) אם ורק אם קיים מסלול באורך 2 מהקדקוד i לקדקוד j בגרף.

באופן דומה, אם נתבונן במטריצות A, ו-A^2 ונסתכל על אברי השורה a (הראשונה) במטריצה A^2 ועל אברי העמודה d (הרביעית) במטריצה A, ונכפיל את שני הווקטורים הבוליאניים (כפל סקלרי) נוכל לראות כי:

קיים מסלול (לא פשוט) באורך 3 מהקדקוד a לקדקוד d, העובר דרך a,

לא קיים מסלול באורך 3 מהקדקוד a לקדקוד d, העובר דרך b,

קיים מסלול באורך 3 מהקדקוד a לקדקוד d, העובר דרך c,

לא קיים מסלול באורך 3 מהקדקוד a לקדקוד d, העובר דרך d,

ולא קיים מסלול באורך 3 מהקדקוד a לקדקוד d, העובר דרך e

תוצאת הכפל הסקלרי היא 1 (TRUE), אם ורק אם קיים מסלול באורך 3 מהקדקוד a לקדקוד d דרך הקדקודים a או b או c או d או e.

מסקנה זו נכונה לכל זוג וקטורים במטריצות A^2 ו-A, בהתאמה.

עתה, נכפיל את המטריצה A^2 במטריצה A ונקבל:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} &
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
\bullet
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
=
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} &
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

מסקנה:

A^3 – היא מטריצת מסלולים באורך 3 עבור הגרף הנתון מכל קדקוד לכל קדקוד אחר בגרף.

כלומר, הערך של $A^3[i, j]$ הוא 1 (TRUE) אם ורק אם קיים מסלול (לא בהכרח פשוט) באורך 3 מהקדקוד i לקדקוד j בגרף.

באופן כללי: $A^m = A^{m-1} \cdot A$

כלומר, אם אנו מעוניינים למצוא מטריצת מסלולים באורך m, נחשב קודם את מטריצת המסלולים באורך $m - 1$ (A^{m-1}) ונכפיל אותה בוליאנית במטריצת הסמיכות (A).

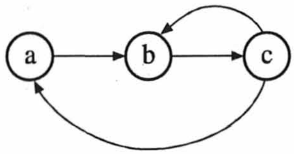
לדוגמה:

$$
A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

כמו כן:

$$A^5 = A^4 \cdot A$$

עתה נתבונן בגרף שלהלן:



מטריצת הסמיכות המתאימה לגרף זה היא:

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

נחשב:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

אם ברצוננו לדעת אם קיים מסלול באורך של **לכל היותר** 2 בין שני קדקודים כלשהם בגרף, אזי נמצא אותו בעזרת חיבור בוליאני של מטריצות.

$$A^{\leq 2} = A + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A[i,j] = 1$ אם ורק אם קיים מסלול באורך 1 מהקדקוד i לקדקוד j. כמו כן, $A^2[i,j] = 1$ אם ורק אם קיים מסלול באורך 2 בדיוק מהקדקוד i לקדקוד j.

אך $A[i,j] + A^2[i,j] = 1$ אם ורק אם קיים מסלול באורך 1 או שקיים מסלול באורך 2, כלומר אם קיים מסלול באורך של לכל היותר 2.

בדומה לשאלה הקודמת, אם ברצוננו לדעת אם קיים מסלול באורך של 3 לכל היותר בין שני קדקודים בגרף, אזי נמצא אותו בעזרת חיבור בוליאני של מטריצות:

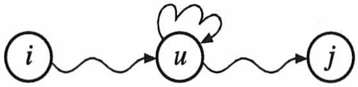
$$A^{\leq 3} = A + A^2 + A^3$$

כלומר, קיים מסלול באורך 3 או פחות אם קיים מסלול באורך 1 או באורך 2 בדיוק או באורך 3 בדיוק.

הערה: ייתכן שיהיה מסלול באורך 1 וגם באורך 2 וגם באורך 3. כיוון שהחיבור הוא בוליאני, אזי $A^{\leq 3}[i, j] = 1$.

טענה:
נתון הגרף $G = (V, E)$ כאשר $|V| = n$ (n קדקודים בגרף). אם קיים מסלול באורך m מהקדקוד i לקדקוד j כאשר $m > n$, אז תמיד נוכל למצוא מסלול אחר מהקדקוד i לקדקוד j באורך של לכל היותר n.

תהליך מציאת המסלול הקצר ביותר:
אם בגרף G, $|V| = n$ קדקודים, ואורך המסלול מ-i ל-j הנו m, ומתקיים $m \geq n$, אז לפחות קדקוד אחד u מופיע במסלול פעמיים.
כלומר, קיים מסלול מהקדקוד i לקדקוד u. בנוסף, קיים מסלול מעגלי מהקדקוד u לקדקוד u, וקיים מסלול מהקדקוד u לקדקוד j כמתואר באיור להלן:

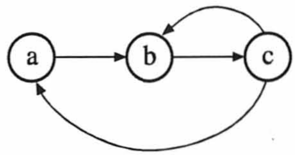


אם נסיר את המסלול המעגלי מהצומת u לצומת u, אזי עדיין קיים מסלול מ-i ל-j.
נחזור על התהליך הזה עד שנגיע למסלול מ-i ל-j, המכיל כל צומת בגרף לכל היותר פעם אחת.
לכן, אורכו של המסלול מכל קדקוד i לכל קדקוד j הוא לכל היותר n.

מסקנה:
אם ברצוננו לדעת אם קיים מסלול כלשהו בין קדקודים כלשהם בגרף, עלינו למצוא את $A^{\le n}$, כאשר:

$$A^{\le n} = A + A^2 + \ldots + A^n$$

בהמשך לגרף האחרון:



ראינו כי:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

אם ברצוננו לדעת אם קיים מסלול מקדקוד כלשהו לכל קדקוד אחר בגרף, נמצא את:

$$A^{\le 3} = A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת, נכתוב פונקציה בשפת C, אשר מקבלת כפרמטר את מטריצת הסמיכות A ומחשבת את מטריצת המסלולים ($A^{\le 3}$).

תחילה, יש לכתוב שגרה בשם *kefel* אשר מקבלת שתי מטריצות a, b והמחשבת את המכפלה הבוליאנית שלהן לתוך מטריצה c.

אחרי כן, יש לכתוב שגרה בשם *chibur*, אשר מקבלת שתי מטריצות a, b והמחשבת את החיבור הבוליאני שלהן לתוך מטריצה c.

אחרי כן, יש לכתוב שגרה בשם *Hazev*, המציבה במטריצה b את המטריצה a. השגרה מקבלת כפרמטר את a ומחזירה את המטריצה b.

עתה, נסביר כיצד נוכל למצוא את המטריצה P, אשר תכיל את $A^{\le n}$.

נתונה מטריצת הסמיכות A.

P	Mat	temp	i	
A		A		**באיטרציה 0**
			1	**באיטרציה 1 בצע :**
	A^2			$Mat \leftarrow temp*A$
$A + A^2$				$P \leftarrow P + Mat$
		A^2		$Temp \leftarrow Mat$
			2	**באיטרציה 2 בצע:**
	A^3			$Mat \leftarrow temp*A$
$\sum_{i=1}^{3} A^i$				$P \leftarrow P + Mat$
		A^3		$Temp \leftarrow Mat$
			2	**באיטרציה 3 בצע :**
	A^4			$Mat \leftarrow temp*A$
$\sum_{i=1}^{4} A^i$				$P \leftarrow P + Mat$
		A^4		$Temp \leftarrow Mat$
			$n-1$	**באיטרציה $n-1$ בצע:**
$\sum_{i=1}^{n} A^i$	A^n			$Mat \leftarrow temp*A$
				$P \leftarrow P + Mat$
		A^n		$Temp \leftarrow Mat$

שימו לב, באיטרציה 2 המטריצה P מכילה את $\sum_{i=1}^{3} A^i$

באיטרציה 3 המטריצה P מכילה את $\sum_{i=1}^{4} A^i$

באיטרציה ה-j המטריצה P תכיל את $\sum_{i=1}^{j+1} A^i$

מאחר שמטרתנו היא למצוא את $\sum_{i=1}^{n} A^i$, אזי נצטרך לבצע $n-1$ איטרציות.

שימו לב! בתום האיטרציה ה-k-ית :

המטריצה $temp$ תכיל מטריצת מסלולים באורך $k+1$ בדיוק.

המטריצה Mat תכיל מטריצת מסלולים באורך $k + 1$ בדיוק.

המטריצה P תכיל מטריצת מסלולים באורך $k + 1$ לכל היותר.

להלן השגרה בשם *Maslul*, המקבלת את המטריצה A והמחשבת ומחזירה את $A^{\leq n}$ לתוך המשתנה P:

```
void maslul (matrix  A , matrix  P)
{
  matrix temp, Mat ;

   Hazev ( A , temp) ;  /* temp ◄──A */
   Hazev (A,P) ;          /* p ◄──A      */

   for (   i=1 ; i<=n-1 ; i++)
    {
      kefel (temp , A , Mat) ;
      Chibur (P , Mat , P) ;
      Hazev (Mat , temp) ;
    }
}
```

מטריצת המסלולים מכונה בספרות גם **סגור טרנזיטיבי**.

ניתוח היעילות של האלגוריתם למציאת מטריצת מסלולים

אם בגרף n קדקודים, אזי במטריצת הסמיכות $n \times n = n^2$ איברים.

פעולת hazev מבצעת השמה של מטריצה אחת בשנייה, וסיבוכיות זמן הריצה של השגרה הזאת היא: $O(n^2)$.

פעולת kefel מכפילה שתי מטריצות, וסיבוכיות זמן הריצה של הפעולה הזאת היא: $O(n^3)$.

פעולת chibur מחברת שתי מטריצות, ולכן סיבוכיות זמן הריצה של הפעולה הזאת היא: $O(n^2)$.

הפעולה	**סדר הגודל של זמן הריצה**
$temp \Leftarrow A$ (*Hazev*) (מחוץ ללולאה)	$O(n^2)$
$P \Leftarrow A$ (*Hazev*) (תתבצע פעם אחת בלבד)	$O(n^2)$
לולאת *for*	$O(n)$
kefel	$O(n^2)$

chibur	$O(n^2)$
Hazev	$O(n^2)$

וביחד סיבוכיות זמן הריצה היא מסדר גודל:

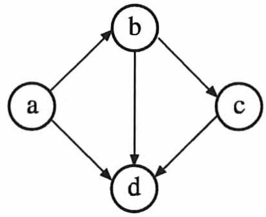
$$O(n^2) + O(n^2) + O(n)[O(n^3) + O(n^2) + O(n^2)] =$$
$$=O(n^2) + O(n^4) + O(n^3) + O(n^3) = O(n^4)$$

כלומר, סיבוכיות זמן הריצה היא מסדר גודל $O(n^4)$

שאלות לסיכום סעיף 4.4

שאלה 4.27

נתון הגרף הזה:



מצאו עבורו:

א. מטריצת סמיכות.

ב. מטריצת מסלולים תוך שימוש בחזקות של מטריצת הסמיכות.

שאלה 4.28

בשיטה חדשה לחישוב מטריצת המסלולים משתמשים בהגדרה שלהלן:

$P_K[i][j]$ הוא בעל ערך (TRUE) אם ורק אם קיים מסלול מהקדקוד i לקדקוד j שאינו עובר דרך קדקוד כלשהו שמספרו גבוה מ-K.

א. אם עבור i ו-j מסוימים $P_K[i][j]$ הוא בעל ערך TRUE, האם גם $P_{K+1}[i][j]$ בעל ערך TRUE? נמקו את תשובתכם.

ב. נתון כי עבור i ו-j מסוימים $P_K[i][j]$ בעל ערך FALSE, כלומר לא קיים מסלול מ-i ל-j שאינו עובר דרך קדקוד כלשהו שמספרו גבוה מ-K.

אם קיים מסלול מ-i ל-j העובר דרך הקדקוד $K+1$, כלומר קיים מסלול מ-i ל-$(K+1)$ ומ-$(K+1)$ ל-j, ומסלולים אלו אינם עוברים דרך הקדקודים שמספרם גבוה מ-K, אזי מה יהיה ערכו של $P_{K+1}[i][j]$?

ג. האם $P_o[i][j]$ שווה למטריצת הסמיכות שמייצגת את הגרף הנתון G?

ד. כתבו אלגוריתם בעל סיבוכיות זמן ריצה $O([V]^3)$ לקבלת מטריצת המסלולים.

ה. כתבו פונקציה / שגרה בשפה עילית לחישוב מטריצת המסלולים, כך שסיבוכיות זמן הריצה של השגרה היא : $O([V]^3)$.

שאלה 4.29

במדינת קום יש N ערים. קיימת מערכת כבישים ישירים המחברת בין הערים. אורכו של כל כביש ישיר הוא 1.

מערכת הכבישים תיקרא זוג-פרד אם קיימות במערכת הכבישים שתי ערים המחוברות על-ידי מסלול באורך זוגי וגם על-ידי מסלול באורך אי-זוגי.

כתבו תכנית אשר תקלוט מערכת כבישים ותחזיר :

א. את המילה "כן" אם מערכת הכבישים היא מסוג זוג-פרד. אחרת, תודפס המילה "לא".

ב. אם התשובה לסעיף א' שלילית, אזי התכנית תמצא תת-קבוצה X של מספר מקסימלי של ערים המקיימת את התנאי שלהלן :

בין כל שתי ערים ב-X, קיים מסלול שאורכו זוגי.

מבנה הקלט :

בשורה הראשונה N – מספר הערים ($N < 300$)

לאחר מכן שורות המכילות זוגות של מספרים שלמים i, j המסמנת שיש כביש ישיר בין עיר i לבין עיר j.

לדוגמה, עבור הקלט הזה :

5

(1, 2)

(2, 3)

(3, 4)

(4, 5)

(5, 1)

(−1, −1)

יודפס – "כן".

לעומת זאת, עבור הקלט הזה:

3

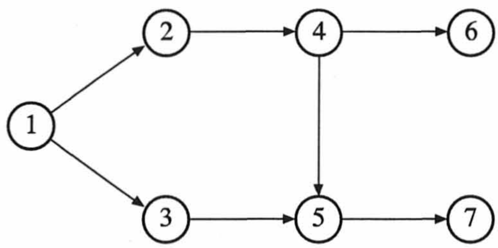
(1, 2)

(−1, −1)

יודפס – "לא".

שאלה 4.30

אפשר לחלק מטלה מסוימת למספר תת-מטלות. כך למשל ניתן לחלק מטלה מסוימת באופן המתואר באיור הזה:



החצים באיור מתארים את סדר הקדימות בין תת-המטלות. למשל:

תת-המטלה 1 צריכה להיות קודמת לתת-המטלות 2 ו-3,

תת-המטלה 2 צריכה להיות קודמת לתת-המטלה 4,

תת-המטלה 3 צריכה להיות קודמת לתת-המטלה 5,

תת-המטלה 4 צריכה להיות קודמת לתת-המטלות 5 ו-6,

ותת-המטלה 5 צריכה להיות קודמת לתת-המטלה 7.

המטרה היא לבצע את כל תת-המטלות מהר ככל האפשר. בכל יחידת זמן נתון ניתן לבצע מספר בלתי מוגבל של תת-מטלות. המטרה היא שהמטלה כולה תושלם בזמן הקצר ביותר.

נתון גרף G מכוון, <u>לא מעגלי</u>, המייצג את סדר הקדימות בין תת-המטלות.

נניח שאפשר לבצע כל תת-מטלה ביחידת זמן אחת.

א. מאחר שהגרף G אינו מכיל מעגל, האם חייב להיות לפחות קדקוד אחד ב-G שאין לו קדקוד קודם? נמקו את תשובתכם.

ב. בתרשים הנתון מהי תת-המטלה שאין לה תת-מטלה קודמת?

ג. איזו תת-מטלה ניתן לבצע ביחידת הזמן הראשונה?

ד. ברגע שתת-מטלה 1 תושלם, הצע תהליך ביצוע של פעולות כזה שלאחריו יתקבל גרף חדש שבו תת-המטלות 2 ו-3 מיוצגות בעזרת קדקודים שאין להם קדקודים קודמים.

ה. אילו תת-מטלות ניתן לבצע ביחידת הזמן השנייה?

ו. איזו תת-מטלה ניתן לבצע ביחידת הזמן השלישית?

ז. אילו תת-מטלות ניתן לבצע ביחידת הזמן הרביעית?

ח. איזו תת-מטלה ניתן לבצע ביחידת הזמן החמישית?

ט. לאור האמור לעיל, כתבו אלגוריתם מילולי בעברית מבנית לפתרון הבעיה הנתונה.

י. מה צריך הקלט לכלול?

יא. נניח שמספר התת-מטלות אינו ידוע.

1. באיזה ייצוג של גרף תשתמשו? נמקו את תשובתכם.
2. כיצד אפשר לקבוע בכל צעד של האלגוריתם לאיזה קדקוד אין קדקוד קודם?
3. כיצד אפשר לקבוע אילו תת-מטלות ניתן לבצע באותה יחידת זמן?
4. איזה מידע יש לשמור בכל צומת בגרף?
5. לאור האמור לעיל, כתוב אלגוריתם הקובע אילו תת-מטלות ניתן לבצע בעת ובעונה אחת בכל יחידת זמן.

יב. האם ייתכן שגרף זה, המתאר את סדר הקדימות בין תת-המטלות, יכיל מעגל? נמקו את תשובתכם.

יג. כיצד ניתן לגלות, בעזרת האלגוריתם שהצעתם בסעיף הקודם, אם הגרף G מכיל מעגל?

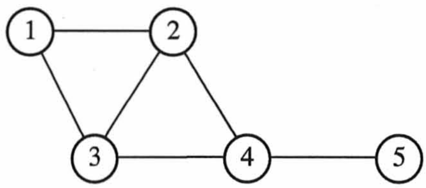
יד. כתבו תכנית בשפה עילית אשר קולטת זוגות סדורים של תת-המטלות, כאשר תת-המטלה הראשונה בזוג סדור זה צריכה להתבצע לפני תת-המטלה השנייה בזוג סדור זה. התכנית תדפיס את מספר יחידות הזמן הקטן ביותר שבו ניתן

לבצע את המטלה, ובכל יחידת הזמן היא תדפיס את תת-המטלה/ות שצריכות להתבצע.

שאלה 4.31

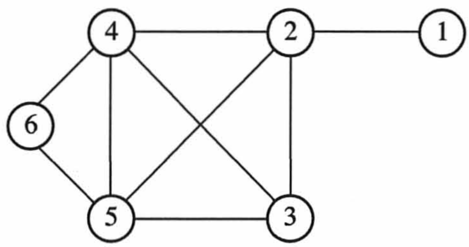
עבור הגרף G נגדיר קבוצה A המכילה N קדקודים מתוך G כ״תת-גרף מלא״ מגודל N, אם לכל זוג קדקודים i, j, הנמצאים בקבוצה A, יש בגרף G צלע (i, j).

דוגמה: נתון הגרף G:



כל קבוצה מבין הקבוצות: $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}$ מהווה ״תת-גרף מלא״ מגודל 3 של G, אך לא קיים ב-G ״תת-גרף מלא״ מגודל 4.

א. נתון הגרף G שלהלן:



מהו ״תת-הגרף המלא״ הגדול ביותר ב-G?

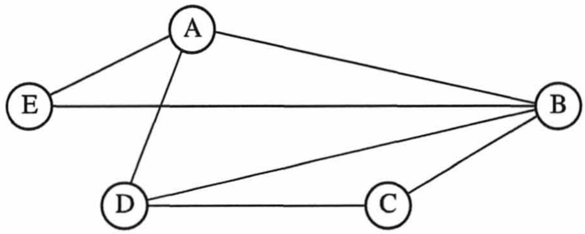
ב. כתבו אלגוריתם המקבל כקלט את הגרף G וקבוצת קדקודים A, ובודק אם A הוא ״תת גרף מלא״ של G.

הניחו שהגרף G מיוצג על-ידי מטריצת שכנויות M, המקיימת $M(i, j) = 1$ אם קיימת קשת בין i ל-j ו-$M(i, j) = 0$ אם לאו, וכן שקבוצת הקדקודים A מיוצגת על-ידי מערך.

ג. כתבו אלגוריתם המקבל כקלט את הגרף G, והבודק אם G מכיל "תת-גרף מלא" מגודל 3. ניתן להשתמש באלגוריתם שכתבתם בסעיף ב'.

שאלה 4.32

נייצג מסלול בגרף על-ידי רשימה L המייצגת את צלעות המסלול לפי סדר. לדוגמה, לגבי הגרף שלהלן:



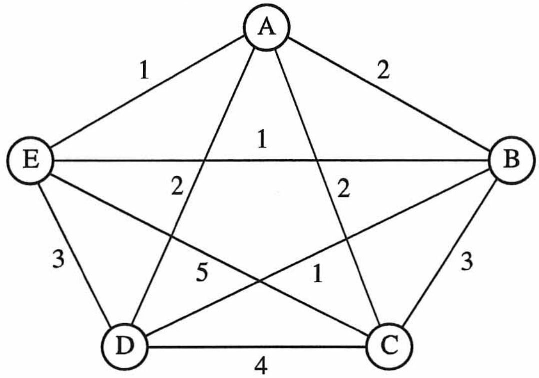
נייצג את המסלול $((A, B), (B, D), (D,))$, המתחיל בקדקוד A, עובר דרך B, אחריו דרך D ואחריו דרך C על-ידי הרשימה $L = (A,B,C,D)$. הרשימה L מכילה ארבעה קדקודים A, B, C, D, ומייצגת שלוש צלעות (לפי סדר המסלול).

נתון אלגוריתם האמור למצוא מסלול מעגלי בעל המשקל המינימלי, העובר בדיוק פעם אחת בכל קדקוד בגרף שלם (זהו גרף שבו כל הקדקודים מחוברים זה לזה).

נסמן ב-L את סדרת הקדקודים המייצגת את המסלול שנבנה. נסמן ב-U את הקדקוד האחרון במסלול שנבנה. תחילה L היא סדרה (רשימה) ריקה.

1. בחר קדקוד כלשהו, שבו מתחיל המעגל, והצב אותו ב-W;
2. הצב את W ב-U;
3. כל עוד L <u>אינה</u> מכילה את כל הקדקודים שבגרף, בצע:
   3.1 בחר צלע (U, V) בעלת משקל מינימלי מבין כל הצלעות היוצאות מ-U כך ש-V אינה ב-L;
   3.2 הוסף את הקדקוד V שבחרת ל-L;
   3.3 הצב את V ב-U.
4. סיים לולאה.
5. הוסף ל-L את הקדקוד W.
6. סיים.

א. לפניכם הגרף השלם הזה :



הפעילו את האלגוריתם על הגרף השלם הנתון, ורשמו את המסלול המעגלי שמתקבל (התחילו את הסריקה מהקדקוד A).

ב. I. האם מן האלגוריתם תמיד מתקבל מעגל העובר פעם אחת בכל קדקוד? נמקו את תשובתכם.

II. האם מן האלגוריתם תמיד מתקבל מעגל בעל משקל מינימלי? נמקו את תשובתכם.

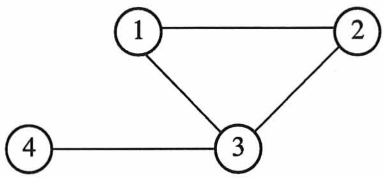
שאלה 4.33

נתון גרף $G = (V, E)$ כאשר קבוצת הקדקודים ו-E קבוצת הצלעות.

קבוצת הקדקודים V' $(V' \subseteq V)$, נקראת "קדקודי כיסוי", אם כל צלע בגרף "מחוברת" מצד אחד לפחות לקדקוד שב-V'. כלומר, אם (a, b) צלע ב-E, אז a או b שייכים ל-V'.

(קבוצת הקדקודים V' "מכסה" את כל צלעות הגרף).

דוגמה :



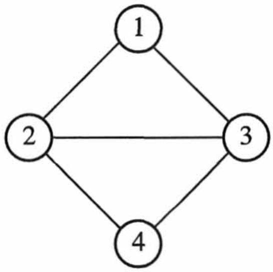
קבוצת הקדקודים $\{2,3\}$ היא קדקודי כיסוי, כיוון שהצלעות $(3,1)$, $(2,3)$, $(4,3)$ מחוברות לקדקוד 3, הצלע $(1,2)$ מחוברת לקדקוד 2, ואין יותר צלעות בגרף.

נתון האלגוריתם שלהלן למציאת קדקודי כיסוי V' לגרף נתון $G = (V, E)$:

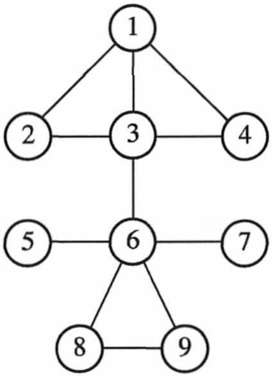
1. אפס את V'.
2. העתק את G ל- R;
3. אם R אינו מכיל צלעות, סיים.
4. מצא את הקדקוד בעל הדרגה הגבוהה ביותר שנמצא ב-R, והוסף אותו ל-V'. (אם יש יותר מקדקוד אחד כזה, בחר אחד כרצונך.)
5. מחק מ-R את הקדקוד שמצאת ב-4, ואת כל הצלעות המחוברות אליו;
6. חזור ל-3.

א. הפעילו את האלגוריתם על כל אחד מהגרפים שלהלן, ורשמו מהם קדקודי הכיסוי שהתקבלו. רשמו את התוכן של V' בכל שלב.

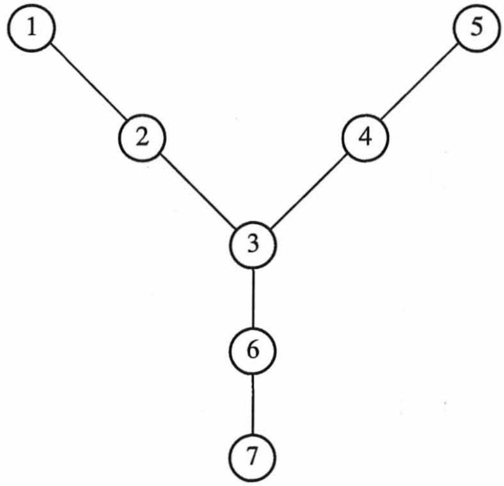
גרף 1:



גרף 2:



גרף 3:

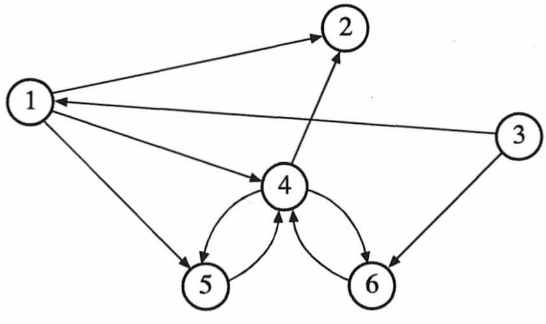


כיסוי קדקודים נקרא "כיסוי קדקודים מינימלי", אם הוא קבוצה קטנה ביותר של קדקודי כיסוי. האם האלגוריתם שהוצג מוצא כיסוי קדקודים מינימלי? נמקו את תשובתכם.

שאלה 4.34

גרף מכוון הוא גרף אשר הכיוון של אחת מקשתותיו מסומן בחץ. בגרף מכוון ייתכנו שתי קשתות בין זוג קדקודים, בעלות כיוונים הפוכים. כאשר מדברים על מסלול בגרף מכוון, מתכוונים למסלול בכיוון החצים.

דוגמה: בגרף המכוון הבא יש מסלול בין 1 ל-6, אך אין מסלול בין 1 ל-3.



נתונה התכנית P בשפת תכנות עילית, כגון שפת בייסיק, שפת פסקל או שפת C.
בונים גרף מכוון G_P, שקודקדיו מתאימים לשגרות המופיעות ב- P.
הגרף מכיל קשת מכוונת מהקדקוד A לקדקוד B אם בגוף השגרה A מופיעה קריאה לשגרה B .

א. האם מספר הקשתות ב-G_P שווה למספר פקודות הקריאה לשגרות המופיעות ב-P? נמקו את תשובתכם.

ב. הסבירו כיצד תוכל לנצל את הגרף G_P כדי לבדוק אם P היא תכנית בעלת פוטנציאל לרקורסיה (כלומר, ישנה אפשרות ששגרה תיקרא בעודה פעילה).

ג. האם הייתם יכולים לבצע אותה בדיקה לו היינו בונים את G_P בתור גרף לא מכוון?

ד. כתבו קטע תכנית אשר קובעת באמצעות גרף G_P אם P היא תכנית בעלת פוטנציאל לרקורסיה. הניחו שהגרף מיוצג באמצעות מטריצת שכנות ושיש בו n צמתים (קדקודים).

4.5 פתרונות לשאלות נבחרות

פתרון לשאלה 4.1

הזוג (B, D) מציין קשת המחברת את הצמתים B ו-D.

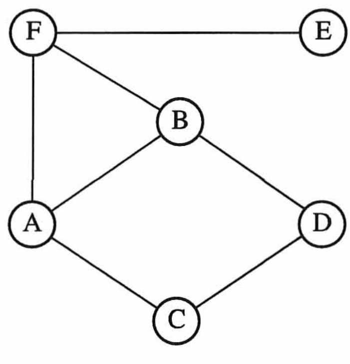
הזוג (C, D) מציין קשת המחברת את הצמתים C ו-D.

פתרון לשאלה 4.2

$V=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$E=\{(1,2),(1,4),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(5,6),(5,7),(6,7)\}$

פתרון לשאלה 4.3



פתרון לשאלה 4.5

ההגדרות שקולות.

פתרון לשאלה 4.8

רשת הכבישים ללא משקלות הקשתות מייצגת את הערים שקיים ביניהן כביש מחבר, אך ללא המרחק ביניהן. כל קשת מייצגת כביש המחבר בין שתי ערים.

פתרון לשאלה 4.9

להלן דוגמאות לתכונות אפשריות של קשתות:

ברשת קווי מים או ברשת תקשורת ניתן לייחס לקשתות את התכונות קיבולת מקסימלית ועומס זרימה קיים.

ברשת תובלה ניתן ליחס לקשתות את התכונות מחירים וכמות.

פתרון לשאלה 4.10

א. מסלולים פשוטים מכוונים:

$A \to C \to E \to D$

$A \to B \to C \to E \to D$

מסלולים פשוטים לא-מכוונים:

$A \to D \to E \to C$

$B \to A \to D \to E$

ב. המסלול המכוון הארוך ביותר באיור 4.5 הוא בעל ארבע קשתות:

$A \to B \to C \to E \to D$

ג. בין A ל-D קיימים שלושה מסלולים פשוטים מכוונים:

$A \to D$

$A \to C \to E \to D$

$A \to B \to C \to E \to D$

בין A ל-D קיימים שלושה מסלולים פשוטים לא-מכוונים, שהם בעצם אותם שלושה מסלולים פשוטים מכוונים שפירטנו לעיל. אין מסלולים נוספים בין A ל-D שבהם הקשתות אינו פונות לכיוון D.

פתרון לשאלה 4.11

המסלול $A \to D \to E \to C \to B \to A$ מתאר מעגל לא מכוון.

המסלול $A \to C \to E \to D \to A \to C$ אינו מתאר מעגל כלל, כיוון שהקשת $A \to C$ נמצאת בו פעמיים.

פתרון לשאלה 4.12

הדרך הטבעית להצגה של גרף היא מערך דו-ממדי מסדר $n \times n$. נכנה אותו g.
מערך דו-ממדי (מטריצה ריבועית) מייצג כל זוג אפשרי של צמתים שניתן להעביר ביניהם קשת.

פתרון לשאלה 4.13

מבנה הנתונים במקרה הזה יהיה גם מערך דו-ממדי (מטריצה ריבועית) מסדר $n \times n$.

פתרון לשאלה 4.15

כידוע, עבור גרף המכיל n צמתים יישמרו n^2 מקומות לקשתות, כאשר אנו מייצגים את הגרף בעזרת מטריצת סמיכות. אף-על-פי שאנו יודעים מראש מהו מספר הצמתים בגרף, איננו יודעים מראש מאומה על מספר הקשתות שבו. אם לגרף מעט מאוד קשתות, אזי מטריצת הסמיכות (במקרה של גרף משוקלל גם מטריצת סמיכות עם משקולות) תהיה דלילה. כדי למנוע בזבוז מקום, נשתמש במערך של רשימות כמתואר לעיל.

פרק 5. בעיית המסלול הקצר ביותר

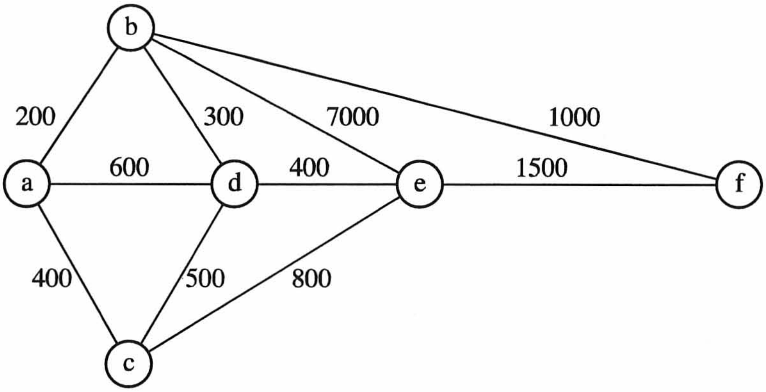
בפרק הקודם הצגנו את בעיית המסלול הקצר באופן בסיסי ביותר. בפרק הזה נציג וננתח שיטות שונות לפתרון בעיות המסלול הקצר ביותר, ונחקור את סיבוכיות זמן הריצה שלהן. בטרם נציג את הפתרונות (אלגוריתמים) השונים לבעייה הנדונה, נראה מספר דוגמאות לבעיית המסלול הקצר ביותר (נוספות על זו שהצגנו בפרק הקודם).

5.1 דוגמאות של בעיית המסלול הקצר ביותר

דוגמה 5.1

נהג רוצה למצוא את הדרך הקצרה ביותר מרחוב אחד לרחוב אחר בעיר מסוימת. לרשות הנהג מפת כבישים של העיר, שבה הוא נמצא, אשר מצוינים בה המרחקים בין כל שתי כתובות. המטרה של הנהג היא לקבוע איזה מסלול נסיעה הוא הקצר ביותר. במקרה הזה, כל צומת יכול להיות קדקוד בגרף. הכבישים הם הקשתות. כביש חד-סטרי יכול להיות קשת מכוונת, וכביש דו-סטרי בין שתי הכתובות A ו-B יכול להיות קשת בלתי מכוונת בין הקדקודים A ו-B או שתי קשתות מכוונות מהקדקוד A לקדקוד B ולהפך, כלומר שתי קשתות מכוונות בין A ל-B בעלות כיוונים מנוגדים .

איור 5.1 מתאר את מפת הכבישים בעיר הזאת. לכל קשת מיוחס מספר אשר מייצג את המרחק (במטרים) ומספרים אלו רשומים בצד הקשתות. הקדקודים של הגרף מייצגים את נקודות ההצטלבות .



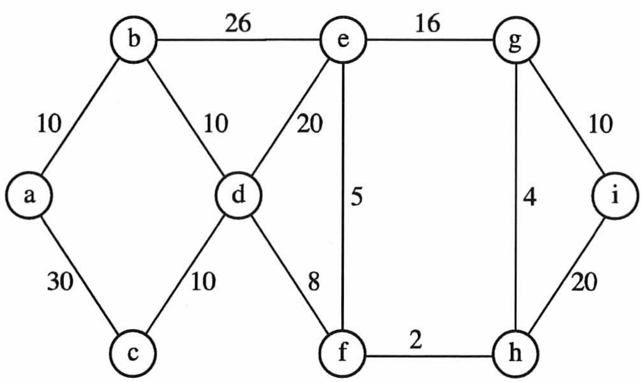
איור 5.1
מפת הכבישים בעיר

נניח שהנהג נמצא בצומת a והוא מעוניין להגיע לצומת f.

המטרה: למצוא את המסלול הקצר ביותר (הסכום המינימלי במטרים) בכדי להגיע מ-a ל-f.

דוגמה 5.2

נתבונן באיור 5.2 המתאר את רשת הכבישים המקשרת מספר יישובים. בצד כל קשת, המתארת את המרחק בין שני יישובים, נרשם האורך שלה בקילומטרים.



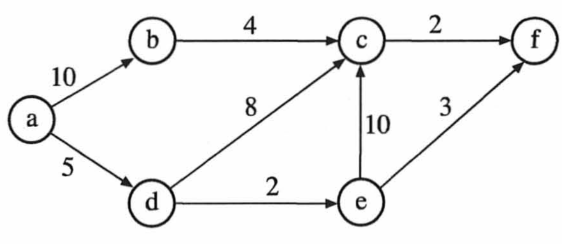
איור 5.2
רשת כבישים המקשרת מספר יישובים

כל קדקוד ברשת הזאת מייצג יישוב, וכל קשת ברשת מייצגת כביש בין שני יישובים. אדם הנמצא ביישוב a מעוניין להגיע ליישוב i. עליו לתכנן את נסיעתו כך שהמרחק שיעבור יהיה הקצר ביותר, כלומר סכום האורכים של הקשתות המהוות מסלול מהקדקוד a לקדקוד i הוא מינימלי.

הערה: המספרים המיוחסים לקשתות אינם מציינים בהכרח מרחקים. קשתות יכולות לייצג פעילויות מסוימות, והערך שנייחס לכל קשת הוא המחיר של אותה הפעילות. לפיכך, באופן כללי המטרה למצוא סדרה של פעילויות אשר משיגה מטרה מסוימת במינימום עלות. כך, למשל, הערכים שמיוחסים לקשתות יכולים להיות המחיר, עלות בניית כביש שיקשר בין שני יישובים, מספר הנתיבים, ממוצע מספר הרכבים העוברים בכביש הבין-עירוני, הקנסות, ההפסדים וכו׳. בנוסף, המספר שבצד הקשת יכול לציין את הזמן הדרוש לביצוע אותה הפעילות. במקרה זה המטרה למצוא סדרת פעילויות שתשיג מטרה מסוימת במינימום הזמן הכולל.

דוגמה 5.3

איור 5.3 מתאר את מספר האפשרויות להגיע מקדקוד מקור a לקדקוד היעד f ברכבת תחתית בפריס. בצד כל קשת, המחברת בין שתי תחנות של רכבת תחתית, נרשם הזמן הממוצע הדרוש כדי להגיע מתחנה אחת לשנייה.



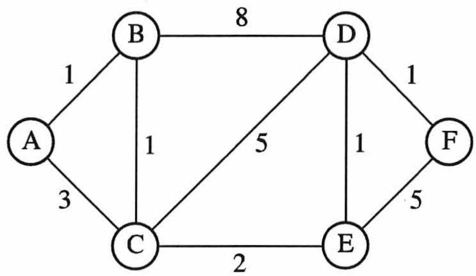
איור 5.3
האפשרויות להגיע מקדקוד a לקדקוד f ברכבת התחתית בפריס

אדם הנמצא בתחנה a מעוניין להגיע לתחנה f . עליו לתכנן את נסיעתו כך שהוא יגיע לתחנה f במינימום של הזמן הכולל הדרוש להגיע מתחנה a לתחנה f .

5.2 גרסאות שונות של בעיית המסלול הקצר ביותר

נתון הגרף $G=(V,E)$ עם פונקציות המשקל $W:E\rightarrow R$

באופן כללי, ישנן ארבע גרסאות שונות של בעיות המסלול הקצר ביותר. נדגים כל גרסה באמצעות הגרף (הרשת) המופיע בתרשים שבאיור. כאמור, המספרים שמעל כל קשת מייצגים את "המרחק" בין שני קדקודים בגרף.



להלן הגרסאות השונות של בעיות המסלול הקצר ביותר:

5.2.1 גרסה 1 - המסלול הקצר בין קדקוד המקור לקדקודים האחרים

בגרסה זו נבחר קדקוד אחד מבין קדקודי הגרף. קדקוד זה ייקרא **קדקוד מקור** (source). בגרסה זו המטרה למצוא מסלול קצר ביותר (להלן: מסלול מינימום) מקדקוד המקור לכל קדקוד אחר בגרף.

נניח שהקדקוד A בגרף שבאיור הוא קדקוד המקור. קל לראות כי:

- משקל המסלול הקצר ביותר מקדקוד המקור לעצמו הוא 0.
- משקל המסלול הקצר ביותר מקדקוד המקור A לקדקוד B הוא 1, והמסלול הוא: $A\xrightarrow{1}B$.
- משקל המסלול הקצר ביותר מקדקוד המקור A לקדקוד C הוא 2, והמסלול הוא: $A\xrightarrow{1}B\xrightarrow{1}C$.

שאלה 5.1

מה יהיו המסלולים הקצרים ביותר ומשקליהם עבור המקרים האלה:

- מקדקוד המקור A לקדקוד היעד E
- מקדקוד המקור A לקדקוד היעד D
- מקדקוד המקור A לקדקוד היעד F

לסיכום:

קדקוד	A	B	C	D	E	F
משקל המסלול המינימלי מקדקוד המקור A	0	1	2	5	4	6

5.2.2 גרסה 2 - המסלול הקצר בין כל הקדקודים לקדקוד היעד

בגרסה הזאת נבחר מבין קדקודי הגרף קדקוד אחד שייקרא **קדקוד היעד** (destination). בגרסה זו המטרה למצוא את המסלול הקצר ביותר מכל קדקוד בגרף אל קדקוד היעד.

נניח שהקדקוד F בגרף שבתרשים הנו קדקוד היעד.

קל לראות כי:

- משקל המסלול הקצר ביותר מהקדקוד D לקדקוד היעד F הוא 1, והמסלול הוא: $E \xrightarrow{1} F$,
- משקל המסלול הקצר ביותר מהקדקוד E לקדקוד היעד F הוא 2, והמסלול הוא: $E \xrightarrow{1} D \xrightarrow{1} F$.

שאלה 5.2

מה יהיו המסלולים הקצרים ביותר ומשקליהם עבור המקרים שלהלן:

- מהקדקוד C לקדקוד היעד F
- מהקדקוד B לקדקוד היעד F
- מהקדקוד A לקדקוד היעד F

לסיכום:

קדקוד (v)	A	B	C	D	E	F
משקל המסלול מקדקוד (v) לקדקוד היעד F	6	5	4	1	2	0

5.2.3 גרסה 3 - המסלול הקצר בין כל הזוגות

בגרסה זו המטרה למצוא את המסלול הקצר ביותר בין **כל** זוג קדקודים בגרף.

נניח שהקדקוד A בגרף שבתרשים שלעיל הוא קדקוד המקור.

קל לראות כי:

קדקוד (v)	A	B	C	D	E	F
משקל המסלול המינימלי מקדקוד המקור A לקדקוד (v)	0	1	2	5	4	6

עתה נניח, שהקדקוד B הוא קדקוד המקור. לכן קל לראות כי:

קדקוד (v)	A	B	C	D	E	F
משקל המסלול המינימלי מקדקוד המקור B **לקדקוד** (v)	1	0	1	4	3	5

(בדקו !)

עתה נניח, שהקדקוד C הוא קדקוד המקור. לכן קל לראות כי:

קדקוד (v)	A	B	C	D	E	F
משקל המסלול המינימלי מקדקוד המקור C **לקדקוד** (v)	2	1	0	3	2	4

(בדקו !)

שאלה 5.3

א. נניח שהקדקוד D הוא קדקוד המקור. מלאו את הטבלה שלהלן:

קדקוד (v)	A	B	C	D	E	F
משקל המסלול המינימלי מקדקוד המקור D לקדקוד (v)						

ב. נניח שהקדקוד E הוא קדקוד המקור. מלאו את הטבלה שלהלן:

קדקוד (v)	A	B	C	D	E	F
משקל המסלול המינימלי מקדקוד המקור E לקדקוד (v)						

ג. נניח שהקדקוד F הוא קדקוד המקור. מלאו את הטבלה שלהלן:

קדקוד (v)	A	B	C	D	E	F
משקל המסלול המינימלי מקדקוד המקור F לקדקוד (v)						

ד. **לסיכום**, ניתן לתאר את משקל המסלול הקצר ביותר בין כל זוג קדקודים בגרף באמצעות המטריצה הבאה. השלימו את הנתונים החסרים:

קדקוד	A	B	C	D	E	F
A	0	1	2	5	4	
B				4	3	5
C	2	1		3		4
D	5		3	0	1	1
E	4	3	2		0	
F		5	4	1	2	0

בהמשך נתמקד בעיקר בגרסאות 1 ו- 3 .

5.2.4 גרסה 4 – המסלול הקצר בין זוג קדקודים נתון

בגרסה זו המטרה למצוא את המסלול הקצר ביותר בין זוג קדקודים **נתונים** בגרף.
גרסה זו היא מקרה פרטי של גרסה 3.

5.3 הגדרה פורמלית של בעיית המסלול הקצר

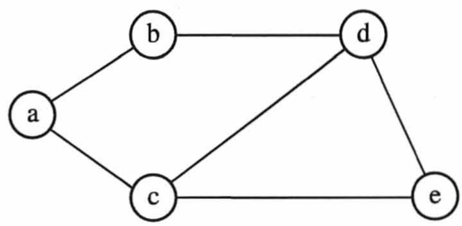
5.3.1 גרף קשיר

לפני שנתאר באופן פורמלי את הבעיה עלינו להגדיר מהו **גרף קשיר** :

רכיב קשיר (connected complete) – קבוצה מקסימלית של קדקודים בגרף לא מכוון שבה יש מסלול פשוט בין כל שני קדקודים בגרף.
קדקוד בודד ללא שכנים ייקרא גם כן רכיב קשיר.

דוגמה 5.5

להלן גרף:

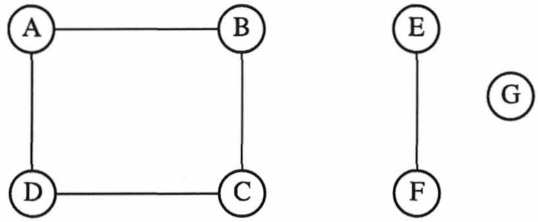


איור 5.5
גרף עם רכיב קשיר אחד

בגרף ישנו רכיב קשיר אחד $\{a, b, c, d, e\}$ מאחר שמכל קדקוד קיים מסלול לכל קדקוד אחר. לעומת זאת, בדוגמה 5.6 מוצג גרף שבו ישנם שלושה רכיבים קשירים.

דוגמה 5.6

להלן גרף:



איור 5.6
גרף עם שלושה רכיבים קשירים

נמנה את הרכיבים הקשירים בגרף:
רכיב קשיר אחד הוא הקבוצה $\{A, B, C, D\}$, מאחר שבקבוצה זו יש מסלול פשוט בין כל שני קדקודים בגרף. לקבוצה הזאת לא ניתן לצרף אף אחד מן הקדקודים E, F, G מאחר שלדוגמה אין מסלול מקדקוד A ל-E או ל-F או ל-G.

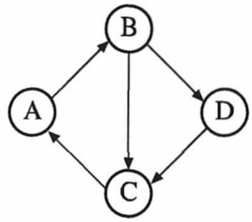
הרכיב הקשיר השני הוא הקבוצה: $\{E, F\}$, והרכיב הקשיר השלישי הוא: $\{G\}$, כיוון שעל-פי ההגדרה, קדקוד בודד יכול להיקרא גם כן רכיב קשיר, בתנאי שהקבוצה הזאת היא מקסימלית, כלומר אי-אפשר להוסיף לקבוצה הזאת צמתים נוספים בגרף כך שבקבוצה החדשה שתתקבל יהיה מסלול בין כל שני קדקודים בקבוצה.

מסקנה: בתרשים ישנם שלושה רכיבים קשירים.

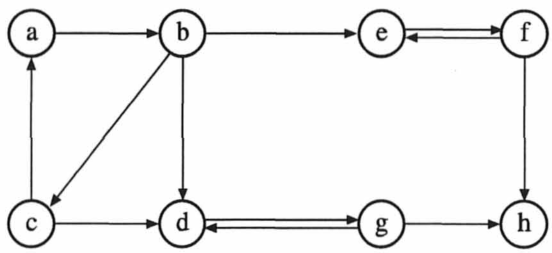
גרף קשיר (connected graph) – גרף לא מכוון בעל רכיב קשיר אחד בלבד. כלומר, קיים מסלול פשוט בין כל שני קדקודים בגרף.

גרף קשיר מכוון בחוזקה (strongly connected directed graph) – גרף מכוון שבו יש מסלול פשוט **ומכוון** בין כל שני קדקודים בגרף.

בתרשים הבא נתון גרף קשיר מכוון בחוזקה, שכן יש מסלול מכוון מכל קדקוד לכל קדקוד אחר בגרף.



בתרשים הבא נתון גרף מכוון שבו ישנם ארבעה רכיבי קשירות חזקה.



הרכיבים הם: $\{a,b,c\}$, $\{d,g\}$, $\{e,f\}$, $\{h\}$

משפט 5.3.1.1 (ללא הוכחה)

נתון גרף קשיר לא מכוון $G = (V, E)$. אם $|V| = n$ ו- $|E| \geq n$ אזי בגרף יש מעגל.

משפט 5.3.1.2 (ללא הוכחה)

התנאים הבאים שקולים:

א. הגרף G הוא עץ (עץ – גרף קשיר ללא מעגלים).

ב. G קשיר ובעל $n-1$ קשתות.

ג. G חסר מעגלים ובעל $n-1$ קשתות.

שאלה 5.4

תנו דוגמה לגרף קשיר עם ארבעה קדקודים שבו הסרה של אחת מקשתות הגרף תהפוך אותו לגרף לא קשיר.

שאלה 5.5

להלן גרפים המיוצגים על-ידי מטריצות סמיכות.

מצאו עבור כל אחד מהם את הרכיבים הקשירים ואת מספרם.

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} \\
\hline
\mathbf{a} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\mathbf{b} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\mathbf{c} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\mathbf{d} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\mathbf{e} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\mathbf{f} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

א'

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} \\
\hline
\mathbf{a} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\mathbf{b} & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\mathbf{c} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\mathbf{d} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\mathbf{e} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\mathbf{f} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

ב'

שאלה 5.6

להלן הגדרה חדשה: הקדקוד v בגרף קשיר G נקרא "נקודת חיתוך" (articulation point) אם כאשר מסירים את v ואת כל הקשתות הנוגעות בו, נקבל גרף חדש G שאינו קשיר.

א. תנו דוגמה לגרף עם שישה קדקודים שיש לו שתי נקודות חיתוך.

ב. תנו דוגמה לגרף עם שישה קדקודים שאין לו נקודות חיתוך כלל.

ג. הראו כי הקדקוד v בגרף קשיר G ייקרא נקודת חיתוך אם ורק אם קיימים שני קדקודים כלשהם x ו-w בגרף G המקיימים את התכונה: כל מסלול מ-w ל-x עובר דרך הקדקוד v.

5.3.2 הגדרה פורמלית של בעיית המסלול הקצר

נתון גרף משוקלל $G = (V, E)$. לכל קשת מיוחס מספר אשר יכול לייצג מחיר, מרחק בין שני יישובים, עלות בניית כביש שיקשר בין שני היישובים, ממוצע מספר הלקוחות העוברים מטרמינל אחד לטרמינל אחר, זמן בכדי להגיע מיישוב אחד ליישוב אחר, ועוד. בלי הגבלת הכלליות נניח שהמספר שמיוחס לקשת יציין את המרחק בין שני יישובים. כל קדקוד ברשת מייצג יישוב, וכל קשת ברשת מייצגת כביש בין שני יישובים, והמספר שעל הקשת

מייצג את האורך של הכביש הזה (המרחק בין שני היישובים). הבעיה היא – מהו אורך המסלול הקצר ביותר מקדקוד מקור (יישוב מסוים) לקדקוד אחר (ליישוב אחר) ברשת, בהתחשב במרחקים בין היישובים השונים. כאמור, בעיות רבות דומות באופיין לבעיה הזאת. למשל, אם המספר שמיוחס לקשת מייצג עלות לבניית כביש בין שני יישובים כלשהם, אז מאחר שלא ניתן לבנות כבישים ישירים מכל ישוב לכל ישוב אחר, עלינו לבנות, במינימום עלות, את הכבישים כך, שתהיה אפשרות להגיע מכל יישוב לכל יישוב אחר.

להלן התיאור הפורמלי של הבעיה:

נתון גרף קשיר $G = (V, E)$ עם קדקודים הממוספרים מ-0 עד $n-1$, כלומר $|V| = n$, עם פונקציית משקל $W : E \to R$, אשר מייחסת לכל קשת מספר שנכנה אותו בשם מרחק, ועם המרחקים E_{ij} לכל קשת (i, j) המחברת את שני קדקודי הגרף i ו-j.

הגדרה: המשקל של המסלול $p = (V_0, V_1, V_2, \ldots\ldots, V_k)$ הוא סכום המשקלות המיוחסות לקשתות (V_{i-1}, V_i), לכל $1 < I < k$. כלומר,

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(V_{i-1}, V_i)$$

$w\ (V_{i-1}, V_i)$ מייצג את המשקל שעל הקשת (V_{i-1}, V_i), $w(p)$ מייצג את המשקל של המסלול p.

נגדיר את $L(u, v)$ = אורך (משקל) המסלול הקצר ביותר (המינימלי) מהקדקוד u לקדקוד v בגרף כך:

אם קיים מסלול כלשהו P מהקדקוד u לקדקוד v ברשת

$$L(u,v) = \begin{cases} \min\limits_{p} w(p) & \\ \infty & \text{אחרת} \end{cases}$$

הגדרה: המסלול הקצר ביותר מהקדקוד u אל הקדקוד v מוגדר כמסלול p כלשהו שעבורו $w(p) = L(u, v)$.

כאמור, לבעיה-מסלולים קצרים גרסאות אחרות, כגון:

גרסה 1

מציאת האורך של המסלול הקצר ביותר מקדקוד מקור לכל קדקוד אחר בגרף.

גרסה 2

מציאת האורך של המסלול קצר ביותר מכל קדקוד בגרף אל קדקוד יעד.

גרסה 3

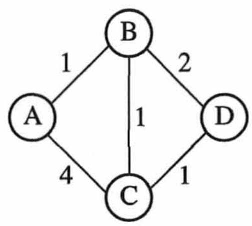
מציאת האורך של המסלול הקצר ביותר בין כל זוג קדקודים בגרף.

גרסה 4

מציאת האורך של המסלול הקצר ביותר ברשת בין קדקוד מקור לקדקוד יעד בגרף.

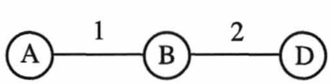
בהמשך נטפל בגרסאות 1 ו-3 של הבעיה. קל לראות שגרסאות 2 ו-4 של הבעיה הן מקרה פרטי של גרסה 1.

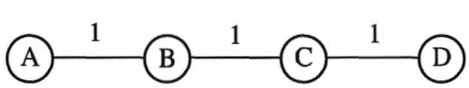
הערה: קל לראות שברשת שלהלן:



אורך המסלול הקצר ביותר מהקדקוד A לקדקוד D הוא 3.

יש לשים לב כי ישנם שני מסלולים שאורכם 3 והם:





ודאו שמסלולים אלה הם הקצרים ביותר, ובדקו שלא קיים מסלול קצר יותר מהקדקוד A לקדקוד D.

מסקנה: יכולים להיות מספר מסלולים קצרים בין שני קדקודים בגרף.

תזכורת: מסלול כלשהו:

$$p = (V_0, V_1, \ldots, V_i, V_{i+1}, \ldots, V_k)$$

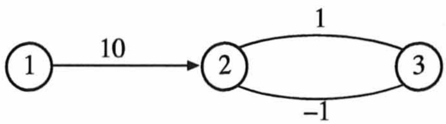
הוא סדרה סופית של k קדקודים ברשת, כאשר לכל $0 \leq i < k-1$ קדקוד $V_i + 1$ סמוך לקדקוד V_i בגרף. כלומר קיימת קשת (V_i, V_{i+1}), והמשקל של הקשת, $w(V_i, V_{i+1})$ יכול להיות חיובי, אפס או שלילי.

שאלה 5.7

מה המשמעות של משקל שלילי על קשת כלשהי בגרף?

הביאו דוגמה.

המשקל של המסלול המעגלי $p = (V_i, \ldots, V_L)$ מסומן כ-$w(p)$ ומוגדר כסכום המשקלות המיוחסות לקשתות בגרף המהוות מעגל באורך 2 מהקדקוד V_i לעצמו.
בתרשים משורטטת רשת (גרף משוקלל):

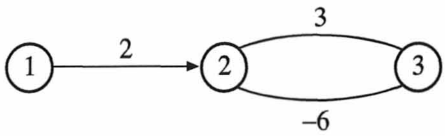


שימו לב לכך שברשת הזאת קיים מעגל שאורכו 0, למשל, מקדקוד 2 ל-3 וחזרה לעצמו.
ברור שברשת הזאת אין פתרון יחיד לאורך המסלול המינימלי מהקדקוד 1 לקדקוד 3, מאחר שברשת קיים מסלול מעגלי שאורכו 0.
דוגמה למסלול כזה:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \ldots$$

וזאת אינה סדרה סופית.

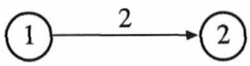
לעומת זאת, אם נתבונן בתרשים שלהלן:

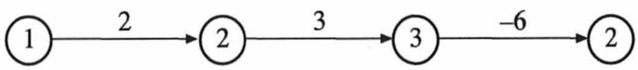


קל לראות שברשת הזאת קיים מסלול מעגלי <u>שאורכו שלילי</u> , למשל מהקדקוד 2 לקדקוד 3 וחזרה לעצמו.

קל לראות שברשת הזאת לא קיים מסלול שהוא המינימלי (סופי) מקדקוד 1 לקדקוד 2 .

אורך המסלול הפשוט מקדקוד 1 ל-2 הנו 2.

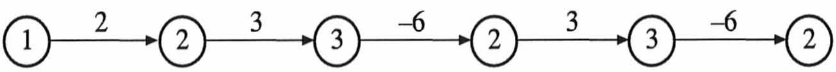




אך עבור המסלול הזה :

אורך המסלול מקדקוד 1 לקדקוד 2 הוא 1–.

ועבור המסלול הזה :



אורך המסלול מקדקוד 1 לקדקוד 2 הוא (4–), וככל שעוברים מספר רב יותר של פעמים במעגל מקדקוד 2 לקדקוד 2, אזי אורך המסלול מקדקוד 1 לקדקוד 2 קטן יותר, ועבור מסלול כלשהו, שהוא סדרה אינסופית של קדקודים, אורך המסלול שואף ל-∞–).

לפיכך, ניתן להסיק, שלא קיים מסלול שהוא סדרה סופית של קדקודים בגרף, אשר בעזרתו ניתן יהיה לקבוע מהו אורך המסלול המינימלי מקדקוד 1 לקדקוד 2.

מכאן נסיק כי :

ברשת שבה אין מעגלים בעלי אורך אי-חיובי קיים מסלול מינימלי.

את התכונה הזאת נוכיח בהמשך.

מאחר שאורך המסלול המעגלי חייב להיות חיובי, אזי אורך המסלול שלהלן:

$V_0V_1......Vi......Vi......V_k$

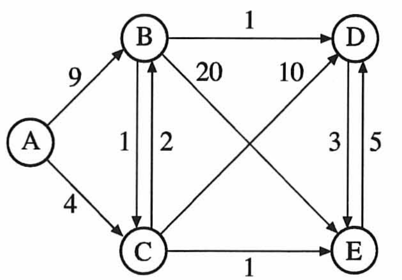
אשר כולל מעגל מהקדקוד i לעצמו $V_0V_1.....V_i.....V_k$

גדול יותר מאורך המסלול $V_0V_1.....V_i.....V_k$ אשר לא כולל מעגלים.

לאור זאת נסיק כי:

> אם קיים מסלול שהוא הקצר ביותר ברשת, אזי המסלול חייב להיות מסלול פשוט, כלומר מסלול שבו אף קשת של הגרף אינה מופיעה יותר מפעם אחת.

נתבונן ברשת הבאה:

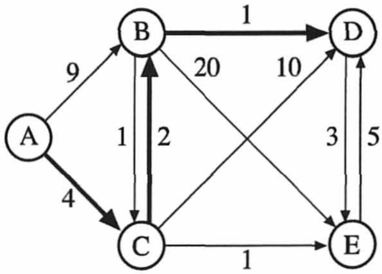


אף-על-פי שעדין לא למדנו אלגוריתמים למציאת מסלולים בעלי אורך מינימלי, קל לראות כי:

- אורך המסלול המינימלי מהקדקוד A לקדקוד C הוא 4, והמסלול הוא
$A \xrightarrow{4} C$
- אורך המסלול המינימלי מהקדקוד A לקדקוד B הוא 6, והמסלול הוא
$A \xrightarrow{4} C \xrightarrow{2} B$
- אורך המסלול המינימלי מהקדקוד A לקדקוד E הוא 5, והמסלול הוא
$A \xrightarrow{4} C \xrightarrow{1} E$

• ואורך המסלול המינימלי מהקדקוד A לקדקוד D הוא 7, והמסלול הוא
$A \xrightarrow{4} C \xrightarrow{2} B \xrightarrow{1} D$

ברשת הבאה נתבונן במסלול המודגש, שהוא המסלול בעל האורך המינימלי מהקדקוד A לקדקוד D:



קל לראות כי במסלול זה:
מספר הקשתות הנכנסות לקדקוד C, הוא 1 (הקשת (AC)).
מספר הקשתות היוצאות מהקדקוד C, הוא גם כן 1 (הקשת (CB)).

באופן אנלוגי, מספר הקשתות הנכנסות והיוצאות מהקדקוד B, שדרכן עוברת הדרך הקצרה ביותר מהקדקוד A לקדקוד D, שווה: קשת אחת נכנסת (C,B) וקשת אחת יוצאת (B,D).

מסקנה: עבור כל קדקוד u במסלול הקצר ביותר, פרט לקדקוד המקור A ולקדקוד היעד D, מתקיים שמספר הקשתות היוצאות מהקדקוד u שווה למספר הקשתות הנכנסות לקדקוד u, שדרכן עוברת הדרך הקצרה מקדקוד המקור A לקדקוד היעד D (קשת אחת נכנסת וקשת אחת יוצאת).
לכן, נגדיר את המשתנים הבאים: לכל קשת (i, j):

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{אם הדרך הקצרה עוברת דרך קשת } (i,j) \\ 0 & \text{אם הדרך הקצרה אינה עוברת דרך קשת } (i,j) \end{cases}$$

אז הביטוי $\sum_{i} X_{ij}$ מתאר את מספר הקשתות היוצאות מהקדקוד i, שדרכן עוברת הדרך הקצרה ביותר, ואילו הביטוי $\sum_{k} X_{ki}$ מתאר את מספר הקשתות הנכנסות לקדקוד i, שדרכן עוברת הדרך הקצרה ביותר.

לאור המסקנה שלעיל, ברור כי לכל קדקוד i, שאינו קדקוד מקור וגם אינו קדקוד יעד, במסלול בעל אורך מינימלי, מתקיים:

$$\sum_{j} X_{ij} = \sum_{k} X_{ki}$$

כלומר:

$$\sum_{j} X_{ij} - \sum_{k} X_{ki} = 0$$

מאחר שכל המסלולים הם פשוטים ואינם מכילים מעגלים, אזי מקדקוד המקור יוצאת רק קשת אחת שדרכה עוברת הדרך הקצרה ביותר, ולא קיימת קשת אשר נכנסת לקדקוד המקור ושדרכה עוברת הדרך הקצרה. לכן מתקיים:

$$\sum_{j} X_{ij} - \sum_{k} X_{ki} = 1$$

בנוסף, קל לראות שבקדקוד היעד נכנסת רק קשת אחת שדרכה עוברת הדרך הקצרה ביותר, ולא קיימת קשת אשר יוצאת מקדקוד היעד ושדרכה עוברת הדרך הקצרה ביותר. לכן מתקיים:

$$\sum_{j} X_{ij} - \sum_{k} X_{ki} = -1$$

ולסיכום, להלן הניסוח של בעיית המסלול הקצר כבעיית תכנון ליניארי:

המטרה היא למצוא מסלול שהוא סכום המרחקים הרשומים על הקשתות המהוות את הדרך הקצרה ביותר מקדקוד המקור לקדקוד היעד.

$$\min \sum_{i} \sum_{j} C_{ij} X_{ij}$$

בהנחה שמתקיימים האילוצים הבאים:

אם בגרף $|V| = n$ קדקודים הממוספרים מאפס עד $n-1$, קדקוד 0 הוא קדקוד המקור, ואילו הקדקוד $n-1$ הוא קדקוד היעד, אז צריך להתקיים:

$$\sum_{j} X_{ij} - \sum_{k} X_{kj} = \begin{cases} 1 & i=0 \text{ קדקוד המקור} \\ 0 & i=2\ldots n \text{ קדקוד שאינו מקור היעד} \\ -1 & i=n-1 \text{ קדקוד היעד} \end{cases}$$

$X_{ij} \in \{0,1\}$ לכל (i, j)

הבעיה הנדונה היא בעיית תכנון ליניארי בשלמים.

בסעיף הבא נתמקד באלגוריתם שבעזרתו נמצא מסלולים אופטימליים מקדקוד המקור לכל קדקוד אחר ברשת.

5.4 מסלולים אופטימליים ברשת מקדקוד המקור ליתר הקדקודים – אלגוריתם דיקסטרה

ישנן מספר שיטות (אלגוריתמים), למציאת מסלולים אופטימליים ברשת מקדקוד המקור ליתר הקדקודים. בסעיף הזה נציג את אלגוריתם דיקסטרה (Dijkstra).

נתונה הרשת $G = (V, E)$ עם פונקציית המשקל $W : E \rightarrow R^+$, כלומר, לכל קשת מתאימים משקל **חיובי**.

להלן מספר הנחות והגדרות לצורך הפעלת האלגוריתם:

א. נניח שהגרף מיוצג בעזרת מטריצת סמיכות A כדלקמן:

$$a_{ij} = \begin{cases} E_{ij} & \text{אם קיימת קשת} (i, j) \\ 0 & \text{אם } i=j \\ \infty & \text{אחרת} \end{cases}$$

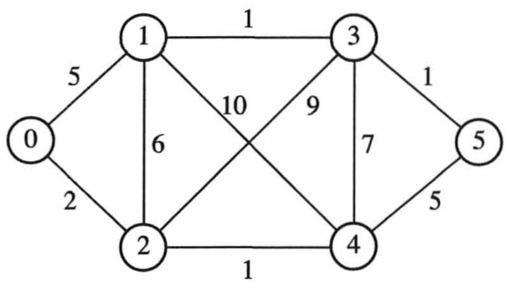
המטריצה A מייצגת את אורך המסלול המינימלי הזמני מהקדקוד i לקדקוד j.

בהנחה שקיימת קשת (i, j), אורך המסלול המינימלי הזמני מהקדקוד i לקדקוד j הוא המספר שמיוחס לקשת (i, j).

אורך המסלול המינימלי מהקדקוד i לעצמו הוא 0, כיוון שלא מאפשרים מעגלים שאורכם שלילי או אפס. הקביעה הזאת הגיונית למדי מאחר שאנו מחפשים מסלולים בעלי אורך מינימלי שהם מסלולים פשוטים וללא מעגלים.

אם לא קיימת הקשת (i, j), לא ברור שבעתיד יהיה מסלול מהקדקוד i לקדקוד j, לכן המרחק המינימלי **הזמני** הקצר ביותר מהקדקוד i לקדקוד j הוא המרחק המינימלי הגרוע ביותר, שהוא ∞ .

לדוגמה, עבור הרשת שלהלן:



מטריצת הסמיכות תהיה:

	0	1	2	3	4	5
0	0	5	2	∞	∞	∞
1	5	0	6	1	10	∞
2	2	6	0	9	1	∞
3	∞	1	9	0	7	1
4	∞	10	1	7	0	5
5	∞	∞	∞	1	5	0

נניח שקדקוד המקור הוא הקדקוד 0.

- קבוצת הקדקודים נחלקת לשתי קבוצות:

האחת – הקבוצה P (קיצור של permanent, כלומר קבוע), אשר תכיל קדקודים, כך שאורך המסלול המינימלי מקדקוד המקור עד אליהם יהיה **קבוע** ולא ישתנה עד סוף האלגוריתם.
השנייה – הקבוצה T (temporaries, כלומר זמניים) אשר תכיל קדקודים כך שאורך המסלול המינימלי מקדקוד המקור עד אליהם יהיה **זמני** ועשוי להשתנות עד סוף האלגוריתם.
מאחר שאין מסלולים מעגליים בעלי אורך אי-חיובי, המסלול בעל האורך המינימלי מקדקוד המקור לעצמו הוא 0, והערך הזה לא ישתנה עד סוף האלגוריתם. לכן, כיוון שהקדקוד 0 הוא קדקוד מקור, בתחילת האלגוריתם ישתייך הקדקוד 0 לקבוצה P ויתר הקדקודים ישתייכו לקבוצה T.

- עבור כל קדקוד u ברשת נרצה לשמור את אורך המסלול הקצר ביותר מקדקוד המקור 0 לקדקוד u ואותו נסמן ב- $d[u]$ (לציון המילה distance, כלומר, מרחק).

בתחילת האלגוריתם, לכל קדקוד u, פרט לקדקוד המקור, נבצע את ההשמה: $d[u] \leftarrow \infty$ ו-$d[0] \leftarrow 0$ מאחר שאורך המסלול הקצר ביותר מקדקוד המקור לעצמו הוא 0.

- כמו כן, נרצה לשמור לגבי כל קדקוד מידע על זהות הקדקוד הקודם לו (ההורה שלו) במסלול הקצר ביותר.

לאור זאת, נשתמש במערך Pa (המציין parent, כלומר, הורה), כך שלכל קדקוד u ברשת $Pa[u]$ מציין קדקוד שממנו הגענו לקדקוד u.

בתחילת האלגוריתם לכל קדקוד u, פרט לקדקוד המקור, נבצע את ההשמה $Pa[u] \leftarrow$ '_' (המציין undefined, כלומר עדיין לא מוגדר). לגבי קדקוד המקור 0 נבצע: $Pa[0] \leftarrow$ nil, המציין שלקדקוד המקור אין הורה.

לאור האמור לעיל, בתחילת האלגוריתם יש לבצע את סדרת ההוראות שלהלן:

– $P \leftarrow \{0\}$ ו-$T = \{1, 2, \ldots\ldots, n-1\}$
– $d[0] \leftarrow 0$
– לכל קדקוד j שאינו קדקוד מקור, כלומר לכל $j = 1 \ldots n-1$

בצע:

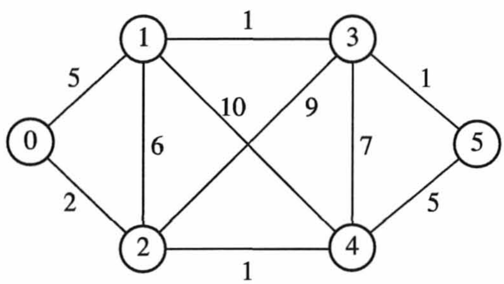
– $d[j] \leftarrow a_{0j}$, מאחר ש-a_{0j} מתאר את אורך המסלול המינימלי הזמני העובר דרך הקשת מקדקוד המקור 0 לקדקוד j
– $p[0] \leftarrow$ nil
– לכל קדקוד שאינו קדקוד מקור, כלומר לכל $j = 1 \ldots n-1$ אם קיימת קשת $(0, j)$

אז בצע: $Pa[j] \leftarrow$ '0'

אחרת – בצע : $Pa[j] \leftarrow$ '–'

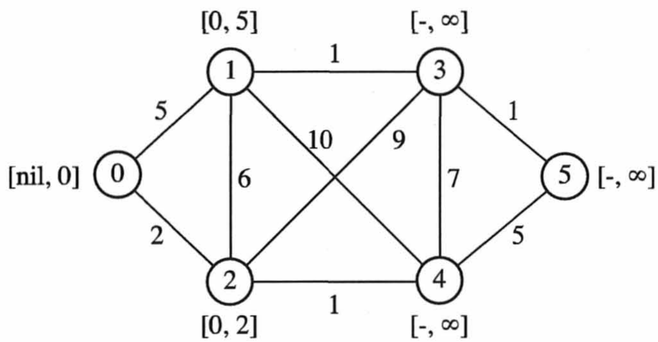
בשלבים הבאים עלינו לשפר את אורכי המסלולים הקצרים d[j] מקדקוד המקור 0 לכל קדקוד אחר j , $1 \le j \le n-1$. שיפור אורכי המסלולים מתבסס על תהליך איטרטיבי של איתור המסלול מקדקוד המקור לקדקוד j , שבעזרתו ניתן לשפר את אורך המסלול המינימלי, עד שלא יהיה מקום לשיפורים נוספים.

לפני שנציג את האלגוריתם, נדגים את אופן הפעולה של האלגוריתם דיקסטרה על הרשת שלהלן :



בתהליך הצגת האלגוריתם, סמוך לכל קדקוד V של הגרף מופיעים שני מספרים : השמאלי מייצג את הקדקוד שהוא הורה של v ($Pa[v]$), והימני מייצג את אורך המסלול הזמני הקצר ביותר מקדקוד מקור 0 לקדקוד v ($d[v]$).

תמונת הרשת בהתחלה היא :



וכן :

$P = \{0\}$ $\qquad$ $T = \{1,2,3,4,5\}$

עתה, השאלה המרכזית היא: כיצד משפרים את המסלולים מקדקוד המקור 0 ליתר הקדקודים, כך שהאורכים שלהם יהיו מינימליים?

בשיטה זו בכל איטרציה נבצע שני צעדים.

איטרציה ראשונה

צעד ראשון

נמצא קדקוד, מבין הקדקודים "הזמניים" שבקבוצה T, בעל אורך המסלול המינימלי הזמני הקטן ביותר מקדקוד המקור עד אליו. נכנה את הקדקוד הזה בשם K.

בדוגמה שלנו $K = 2$, מאחר ש-$d[2] = 2$ ול-$d[2]$ הערך הקטן ביותר מבין כל ה-$d[v]$ עבור $v \in T$.

כעת, נצרף את הקדקוד K לקבוצה P, ונוריד אותו מהקבוצה T, כלומר המרחק המינימלי מקדקוד המקור עד אליו הוא קבוע ואינו משתנה עד סוף האלגוריתם.

אי לכך, בדוגמה שלנו:

$$P = \{0,2\} \qquad T = \{1,3,4,5\}$$

צעד שני

בצעד הזה נבדוק אם ניתן לשפר את האורכים של המסלולים הקצרים בעזרת מסלולים העוברים דרך הקדקוד $K = 2$, שנקבע בצעד הראשון, מקדקוד מקור 0 לכל קדקוד j, כאשר: $j \in T$.

בדוגמה שלנו:

<u>בחינת המסלול 1~~~~~0</u>

$$0 \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{6} 1$$

אורך המסלול מקדקוד המקור 0 לקדקוד 1, העובר דרך הקדקוד $K = 2$, הוא 8 ($6 + 2 =$), לעומת 5 שהוא אורך המסלול מקדקוד המקור 0 לקדקוד 1 שאינו עובר דרך הקדקוד $K = 2$. מאחר ש-$5 < 8$, אין שיפור באורך המסלול מקדקוד המקור 0 לקדקוד 1, העובר דרך הקדקוד 2.

<u>בחינת המסלול 3<~~~~~0</u>

$$\begin{array}{c} \quad 2 \qquad\quad 9 \\ 0\text{~~~~~>}\ 2 \longrightarrow 3 \end{array}$$

אורך המסלול דרך קדקוד 2 הוא 11, וזאת לעומת ∞ – אורך המסלול בשלב הקודם. לכן אורך המסלול המינימלי 0 ~~~> 3 משתנה, וערכו החדש הוא 11 ; ההורה של הקדקוד 3 יהיה הקדקוד 2.

<u>בחינת מסלול 0~~~~~>4</u>

$$0 \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{1} 4$$

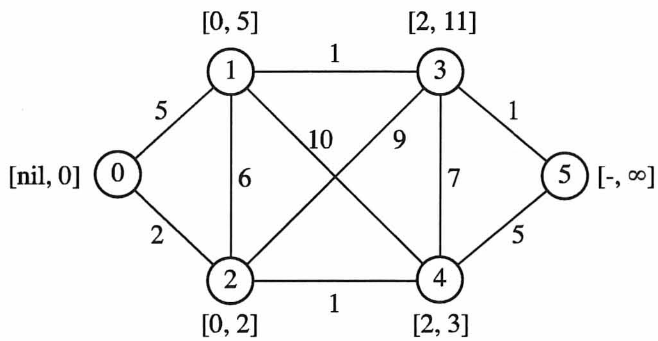
אורך המסלול דרך קדקוד 2 הוא 3. אורך המסלול שהיה עד כה ∞ . לכן אורך המסלול המינימלי מקדקוד 0 לקדקוד 4 משתנה ל-3 וההורה של קדקוד 4 יהיה קדקוד 2.

<u>בחינת מסלול 0~~~~~>5</u>

$$0 \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{\infty} 5$$

מאחר שלא קיימת קשת מהקדקוד 2 לקדקוד 5, אזי אין מסלול מהקדקוד 0 לקדקוד 5, שהקשת האחרונה בו עוברת דרך קדקוד 2, ולכן לא ניתן לשפר את אורך המסלול המינימלי מהקדקוד 0 לקדקוד 5.

לאחר בדיקת כל המסלולים האפשריים מקדקוד המקור 0 לכל קדקוד אחר j, כאשר: $j \in T$, תמונת המצב החדשה היא:



$D = \{0,2\}$

$T = \{1,3,4,5\}$

התהליך ממשיך (כיוון שהקבוצה T אינה ריקה).

איטרציה שנייה

צעד ראשון

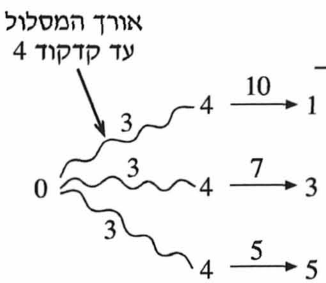
נקבע כי: $K = 4$, כיוון ש-$d[4] = 3$ ולמשתנה הזה הערך הקטן ביותר מלכל משתנה אחר $d[j]$ לכל $j \in T$.

לכן נקבל: $T = \{1,3,5\}$ $\quad P = \{0,2,4\}$.

צעד שני

שיפור מסלולים קצרים מקדקוד המקור 0 לכל קדקוד j, כאשר $j \in T$, מסלולים אלה עוברים דרך הקדקוד $K = 4$.

אורך המסלול המינימלי	אורך המסלול הקודם	אורך המסלול דרך קדקוד 4
5	5	13
10	11	10
8	∞	8

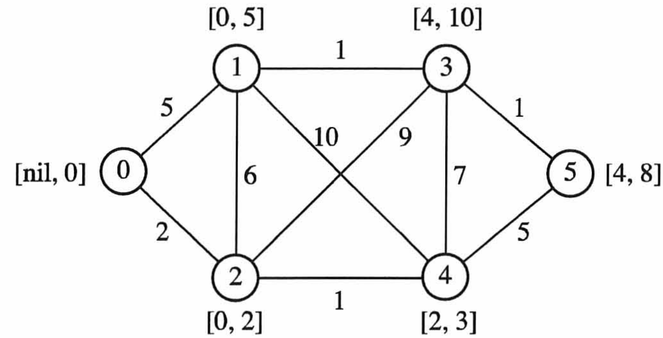


בחינת מסלול 0~~~~~~~~~>1 : רואים שאין שיפור.

בחינת מסלול 0~~~~~~~~>3 : יש שיפור, ולכן ההורה של הקדקוד 3 יהיה הקדקוד 4.

בחינת מסלול 0~~~~~~~>5 : יש שיפור, ולכן ההורה של הקדקוד 5 יהיה הקדקוד 4.

עתה, תמונת המצב היא:



$P = \{0,2,4\} \qquad T = \{1,3,5\}$

התהליך ממשיך.

<u>איטרציה שלישית</u>

צעד ראשון

נקבע כי: $K = 1$, כיוון ש-$d[1] = 5$ ולמשתנה הזה הערך הקטן ביותר מלכל משתנה אחר $d[j]$ לכל $j \in T$.

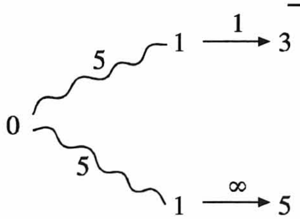
לכן נקבל:

$P = \{0,1,2,4\}$

$T = \{3,5\}$

צעד שני

שיפור מסלולים קצרים מהקדקוד 0 לכל קדקוד j, כאשר: $j \in T$, דרך הקדקוד $K = 1$.

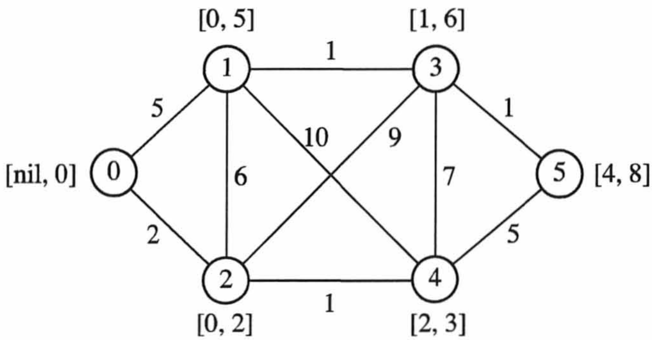


אורך המסלול דרך קדקוד 1	אורך המסלול הקודם	אורך המסלול המינימלי
6	10	6
∞	8	8

בחינת מסלול 0~~~~~~~>3 : יש שיפור, ולכן ההורה של קדקוד 3 יהיה 1.

בחינת מסלול 0~~~~~~~>5 : רואים שאין שיפור.

עתה תמונת המצב היא :



$P = \{0,1,2,4\} \quad T = \{3,5\}$

התהליך ממשיך.

<u>**איטרציה רביעית**</u>

צעד ראשון

נקבע כי : $K = 3$, כיוון ש-6 = $d[3]$ ולמשתנה הזה ערך קטן יותר מלמשתנה $d[6]$ שערכו 8.

לפיכך נקבל :

$P = \{0,1,2,3,4\}$

$T = \{5\}$

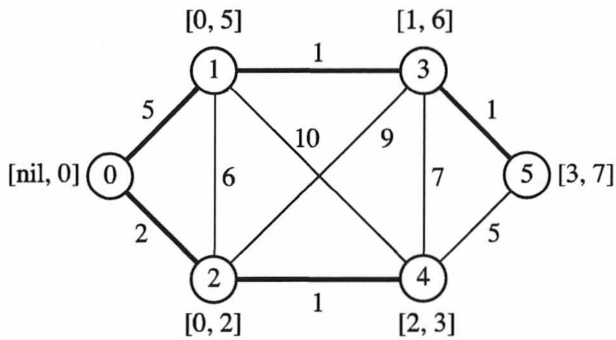
צעד שני

ננסה לשפר את מסלול 0 ~~~~~~~> 5 העובר דרך הקדקוד 3 $K= 3$.

אורך המסלול המינימלי	אורך המסלול הקודם	אורך המסלול דרך קדקוד 3	
7	8	7	$0 \overset{6}{\rightsquigarrow} 3 \xrightarrow{1} 5$

מאחר שיש שיפור באורך המסלול מ-0 לקדקוד 5 דרך הקדקוד 3, אז ההורה של קדקוד 5 יהיה הקדקוד 3.

עתה תמונת המצב היא :



$P = \{0,1,2,3,4\}$ $T = \{5\}$

התהליך ממשיך.

איטרציה חמישית

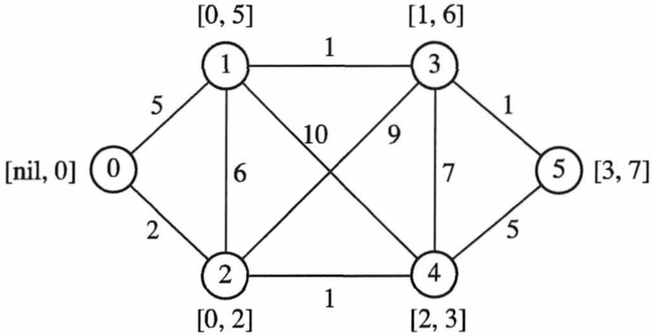
צעד ראשון

נקבע ש-$K = 6$ (ברור!)

לכן נקבל : $T = \phi$ – (קבוצה ריקה)

$P = \{1,2,3,4,5,6\}$

מאחר ש-T היא קבוצה ריקה, אזי כל המסלולים הקצרים נקבעו ואין מה לשפר. לפיכך האלגוריתם הסתיים, ותמונת המצב הסופית היא :



דרך הקשתות המודגשות ניתן לראות את אורך המסלול המינימלי מקדקוד המקור 0 לכל קדקוד אחר ברשת. כמו כן, ניתן לקבוע מהו המסלול עצמו. כך, למשל, עבור המסלול 5 <~~~~~~~ 0 יהיה המסלול (מהסוף להתחלה) כדלקמן: קודם הקדקוד 5, ההורה של 5 הנו 3, וההורה של 3 הוא 1, וההורה של 1 הוא הקדקוד 0, ולקדקוד 0 אין הורה, כיוון שהוא קדקוד המקור. לפיכך המסלול הוא:

$$0 \to 1 \to 3 \to 5$$

עתה נוכל לסכם את האלגוריתם כדלהלן:

אתחול: צעד 0

0.1 $T = \{1,2,\ldots,n{-}1\} \quad P = \{0\}$

0.2 $d[0] \leftarrow 0$

0.3 לכל קדקוד, שאינו קדקוד מקור,
כלומר, לכל $j = 1,\ldots,n{-}1$ בצע:
$d[j] \leftarrow a[0, j]$

0.4 סוף הלולאה.

0.5 $Pa[0] \leftarrow \text{nil}$;

0.6 לכל קדקוד $j = 1, \ldots, n{-}1$ בצע:
אם קיימת קשת $(0, j)$
אז בצע: $Pa\,[j] \leftarrow$ '0'
אחרת – בצע: $Pa[j] \leftarrow$ '-'

0.7 סוף לולאה.

מצא מינימום: צעד 1

1.1 מצא את הקדקוד k מתוך קבוצת הקדקודים

"הזמניים" – T בעל ערך $d[k]$ מינימלי,

כלומר: לכל $j \in T$ $d[k] = \min\{d[j]\}$

1.2 צרף את הקדקוד k לקבוצה p, כלומר $p \leftarrow p + \{k\}$

1.3 הורד את הקדקוד k מקבוצה T, כלומר $T \leftarrow T - \{k\}$

1.4 אם $T = 0$ (T הינה קבוצה ריקה), אזי סיים!

אחרת – עבור לצעד 2.

צעד 2

2.1 לכל צומת $j \in T$ בצע:

2.1.1 $d\,[j] = \min\{d[j],\, d[k] + a[k][j]\}$

2.1.2 אם $d[k] + a[k][j] < d[j]$

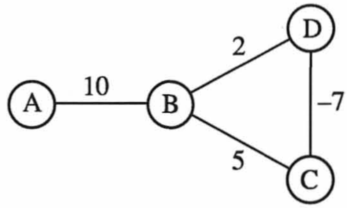
אז בצע: $Pa\,[j] \leftarrow k$

2.2 סוף הלולאה.

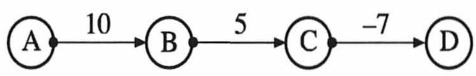
2.3 חזור לצעד 1.

הערה! האלגוריתם דיקסטרה פועל כהלכה בתנאי שכל המשקלות המיוחסים לקשתות הגרף הם חיוביים.

נראה זאת על דרך השלילה. **נניח שאפשר לייחס משקל שלילי לקשת כלשהי**. נתבונן בגרף הזה:

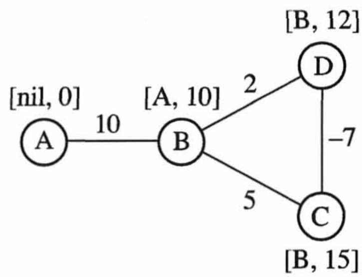


שימו לב שלקשת (C,D) מיוחס מספר שלילי (-7). קל לראות שהמסלול הקצר ביותר מהקדקוד A לקדקוד D הוא:



ואורכו 8.

אך בעזרת אלגוריתם דיקסטרה, לאחר שתי האיטרציות הראשונות נקבל את תמונת המצב שלהלן (בדקו!):



באיטרציה הבאה (מבין הקדקודים הזמניים C, D) נבחר בקדקוד D, כיוון ש: $d[C] = 15 > d[D] = 12$. לפיכך, הקבוצה P תהיה: $P = \{A, B, D\}$

כלומר, אורך המסלול המינימלי (לפי האלגוריתם של דיקסטרה) מקדקוד המקור A לקדקוד D הוא 12.

מאחר שהקדקוד D מצטרף לקבוצה P, אורך המסלול המינימלי מהקדקוד A לקדקוד D הוא קבוע, וערכו לא ישתנה עד סוף האלגוריתם.

ברור שהתוצאה שקיבלנו: $d[D] = 12$ אינה נכונה, כיוון שערכו הצפוי של $d[D]$ הוא 8. זה סותר את הנחתנו.

מסקנה: האלגוריתם של דיקסטרה, מתאים רק לרשתות שבהן המשקלות על הקשתות חיוביים.

ניתוח היעילות של האלגוריתם של דיקסטרה

נתון הגרף $G = (V, E)$.

$|V|$ מציין את מספר הקדקודים בגרף G.

אתחול: צעד 0

0.1 דורש זמן של $O(|V|)$

0.2 דורש זמן של $O(|1|)$

0.3 דורש זמן של $O(|V|)$

0.5 דורש זמן של $O(|1|)$

0.6 דורש זמן של $O(|V|)$

לכן, סיבוכיות זמן הריצה של צעד 0 היא $O(|V|)$.

צעד 1

1.1 נניח שהקבוצה T ממומשת בעזרת מערך.

על כן, צעד זה דורש זמן של $O(|V|)$.

1.2 נניח שהקבוצה P ממומשת בעזרת מערך. על כן צעד זה דורש זמן של $O(1)$.

1.3 בהמשך להנחה שב-1.1 בצעד 1.1 ניתן לשמור מידע על מיקומו של הקדקוד K. על כן, צעד זה דורש זמן של $O(1)$.

כיוון שצעד 1 מתבצע $|V|$ פעמים, הזמן הכולל שצעד 1 דורש הוא $O|V|^2$.

צעד 2

נניח שהגרף מיוצג בעזרת רשימות סמיכות. כידוע, אם הגרף G מכוון, סכום האורכים של כל רשימות הסמיכות הוא $|E|$, וכאשר הגרף G הוא בלתי מכוון, סכום האורכים של כל רשימות הסמיכות הוא $2|E|$. מכל מקום, סכום האורכים של רשימות הסמיכות הוא $O(|E|)$. ברור כי באלגוריתם הנדון, כל קדקוד של גרף מוכנס לקבוצה P פעם אחת, כך שכל קשת ברשימת הסמיכות נבחנת בדיוק פעם אחת במהלך האלגוריתם. לאור האמור לעיל, צעד 2 מתבצע בסך הכל $O(|E|)$ פעמים.

מסקנה: סיבוכיות זמן הריצה של אלגוריתם דיקסטרה היא:
$O|V|^2 + |E| = O(|V|^2)$

הערה: למעשה, ניתן להשיג זמן ריצה של $O(|E|\log|V|)$ כאשר הקבוצה T ממומשת בעזרת מבנה נתונים מסוים הנקרא "ערֵמה (heap) בינרית".

להלן מספר עובדות בקשר לערֵמה הבינרית:

א. בניית ערמה דורשת זמן של $O(|V|)$.

ב. איתור וסילוק האיבר הקטן ביותר שבערמה דורשים זמן של $O(\log)|V|)$.

ג. צעד 2.1 מתבצע בזמן $O(\log)|V|)$.

צעד 1

מתבצע $|V|$ פעמים, ובכל צעד נדרש זמן $O(\log)|V|)$. לכן הזמן הכולל של צעד 1 הוא $O(|V|\log)|V|)$.

צעד 2

עדיין כל קדקוד מוכנס לקבוצה P בדיוק פעם אחת. לפיכך, כל קשת ברשימת הסמיכות נבחנת בדיוק פעם אחת במהלך האלגוריתם. כאמור, מספרן הכולל של הקשתות ברשימת הסמיכות הוא $O(|E|)$. לכן צעד 2 מתבצע $O(|E|)$ פעמים, ובכל צעד נדרש זמן $O(\log|V|)$. מכאן, זמן הריצה של צעד 2 הוא $O(|E|\log|V|)$.

מסקנה: זמן הריצה של האלגוריתם כולו הוא:

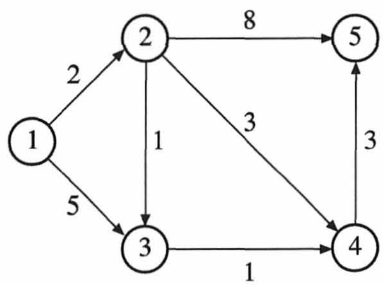
$$O(|E|\log|V|) + |V|\log|V|) = O((|E| + |V|)\log|V|)$$

בגרף קשיר מאחר ש-$|E| \geq |V|$, סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם דיקסטרה היא: $O(|E|)|\log|V|)$.

5.4.1 שאלות לסיכום סעיף 5.4

שאלה 5.8

נתונה הרשת הזאת:



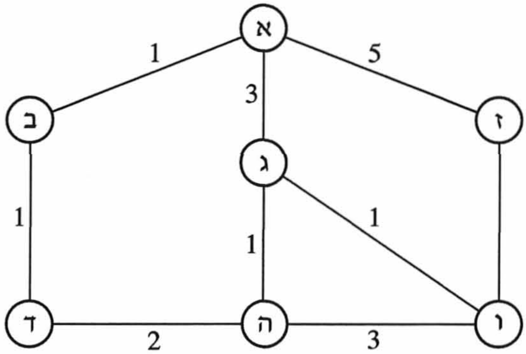
הניחו כי קדקוד המקור הוא 1.

א. הריצו את האלגוריתם של דיקסטרה על הרשת הנתונה.

ב. מצאו מסלול מינימלי מקדקוד המקור ליתר הקדקודים ברשת הזאת.

שאלה 5.9

נתונה הרשת הזאת:



המספרים על הקשתות מבטאים את אורכי הקשתות.

על הגרף הופעל האלגוריתם דיקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר מהקדקוד א לכל יתר הקדקודים. האם סדרת הקדקודים הבאה מהווה מסלול מינימלי?

א – א,ב,ד,ג,ו,ה,ז

ב – א,ב,ד,ג,ה,ו,ז

ג – א,ב,ג,ז,ד,ה,ו

שאלה 5.10

הריצו את האלגוריתם דיקסטרה על הקלט שלהלן:

קלט: רשימות סמיכות של גרף מכוון+המשקל של כל קשת.

(המשקל של קשת מצוין ביו סוגריים עגולים במקום המתאים ברשימת הסמיכות).

A	$E(0)$ $D(1)$
B	$C(1)$
C	$B(2)$ $E(0)$
D	$C(2)$ $F(1)$
E	$B(6)$
F	$C(1)$ $D(3)$

קדקוד המקור הוא A.

טבלת הרצה לשאלה 3

מס' איטרציה	קדקוד מטופל (u)	תוכן התור	$d[A]$	$d[B]$	$d[C]$	$d[D]$	$d[E]$	$d[F]$
לפני 1								
1								
2								
3								
4								
5								
6								

שאלה 5.11

א. הציגו דוגמה שמראה שהאלגוריתם דיקסטרה שוגה על גרף עם משקלות שליליים. הגרף אינו צריך להכיל מעגל שלילי.

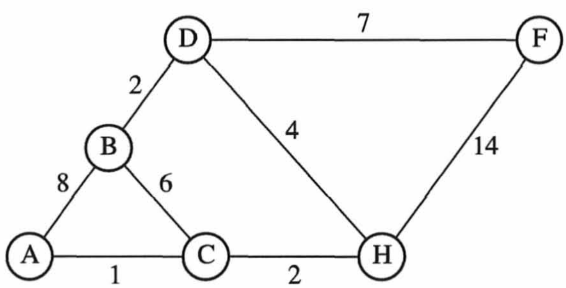
ב. הסבירו למה הוכחת האלגוריתם אינה תקפה במקרה הזה.

שאלה 5.12

נתון הגרף $G = (V, E)$, כאשר V מבטא קבוצת צמתים בגרף, ו-E מבטא קבוצת קשתות בגרף.

פונקציית המשקל $W : E \rightarrow R^+$ קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף G.

לפניכם רשת:



א. מצאו את המסלולים הקצרים ביותר מן הקדקוד A לכל אחד מן הקדקודים האחרים ברשת הנתונה. תארו את המסלולים האלה בצורת עץ.

ב. כל קשת בגרף G צבועה בכחול או באדום. X ו-Y הם קדקודים בגרף ($X \in V$ ו-$Y \in V$). כתבו אלגוריתם מילולי, קצר ויעיל, בעברית מבנית, למציאת אורך המסלול הקצר ביותר מ-X ל-Y, כאשר חלקו הראשון של המסלול יהיה מורכב מקשתות **אדומות בלבד**, וחלקו השני יהיה מורכב מקשתות **כחולות בלבד**.

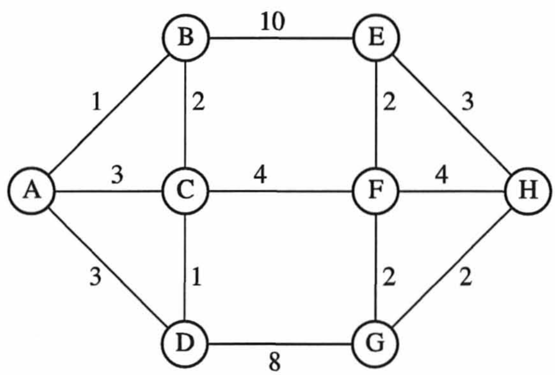
שימו לב: כל אחד משני החלקים יכול להיות ריק.

שאלה 5.13

נתון הגרף G $G(V, E)$, כאשר V מבטא קבוצת קדקודים בגרף ו-E מבטא קבוצת קשתות בגרף.

פונקציית המשקל $W : E \rightarrow R^+$ קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף G.

לפניכם רשת:



א. מצאו את כל המסלולים הקצרים ביותר מן הקדקוד A לקדקוד H ברשת הנתונה.

תארו כל מסלול כזה בנפרד באופן סכמתי, בצורת רשימה ליניארית מקושרת. לדוגמה: $A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow H$.

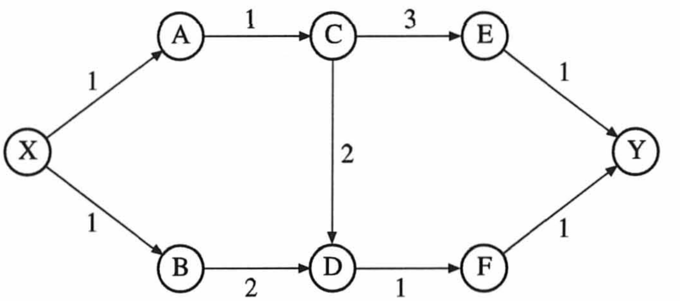
ב. X, Y, Z הם קדקודים בגרף ($Z \in Y, Y \in V, X \in V$).

כתבו אלגוריתם מילולי, קצר ויעיל בעברית מבנית, אשר מחזיר את התשובה TRUE אם כל המסלולים הקצרים ביותר מ-X ל-Y עוברים דרך Z; אחרת, הוא מחזיר את התשובה FALSE.

שאלה 5.14

הגרף G מוגדר על-ידי $G = (V, E)$. פונקציית המשקל $W : E \to R^+$ קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף G.

לפניכם רשת:



א. מצאו את כל המסלולים הקצרים ביותר מן הקדקוד X לקדקוד Y ברשת הנתונה. תארו כל מסלול כזה בנפרד, באופן סכמתי, בצורה של רשימה ליניארית מקושרת.

ב. S הוא קדקוד בגרף ($S \in V$).

נסמן לכל מסלול P מקדקוד S לקדקוד a:

$W(P)$ מסמן את משקל המסלול (כלומר את סכום משקלי הקשתות של מסלול P).

$L(P)$ מסמן את אורך המסלול (כלומר את מספר הקשתות במסלול P).

כתבו אלגוריתם מילולי קצר ויעיל, בעברית מבנית, המוצא לכל קדקוד a ($a \in V$) את הערך המינימלי האפשרי של: $W(P) + L(P)$.

הנחיות: בנו גרף חדש, G', $G' = (V', E')$; מצאו את הערך $W(P) + L(P)$ המינימלי האפשרי ב-G', וציינו מה מכיל V' ומה מכיל E'.

שאלה 5.15

נתון הגרף המכוון $G = (V, E)$. פונקציית המשקל $W : E \to R^+$ קובעת משקל שלם, $W(e)$, המקיים $1 \le W(e) \le 50$ לכל קשת e בגרף.

$s \in V$ הוא קדקוד נתון בגרף.

א. נסמן $|V|$ – מספר הקדקודים בגרף.

$|E|$ – מספר הקשתות בגרף.

כתבו אלגוריתם מילולי קצר ויעיל, בעברית מבנית, בעל סיבוכיות זמן $O(|V| + |E|)$, אשר מוצא לכל צומת $v \in V - \{s\}$ את **משקל** המסלול **הקל** ביותר מ- s ל-v.

ב. הראו כי סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שהצעתם בסעיף א' היא הסיבוכיות הנדרשת, $O(|V| + |E|)$.

שאלה 5.16

נתון הגרף $G = (V, E)$. פונקציית המשקל $W : E \to R^+$ קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף G.

א. כתבו אלגוריתם יעיל, הקובע אם קשת מסוימת e נמצאת על כל המסלולים הקצרים ביותר מקדקוד המקור s לקדקוד היעד t.

ב. נתחו את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעתם בסעיף א'.

שאלה 5.17

נתון הגרף $G = (V, E)$. פונקציית המשקל $W : E \to R^+$ קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף G. כל קשת בגרף צבועה באדום או בלבן. נתונים הקדקודים s ו-t בגרף G.

א. כתבו אלגוריתם יעיל, אשר מוצא מבין המסלולים הקצרים ביותר בין s ל-t (ביחס למשקלות שעל הקשתות) את המסלול שבו מספר הקשתות האדומות הוא מינימלי.

ב. נתחו את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעתם בסעיף א'.

שאלה 5.18

נתון גרף לא מכוון עם משקלות חיוביים על הקשתות. בקשתות חלק הן אדומות וחלק הן כחולות. נתון הקדקוד s.

א. תארו אלגוריתם, המוצא את המסלול המינימלי בעל מספר זוגי של קשתות אדומות מ-s אל כל קדקוד $v \in V$.

ב. נתחו את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעתם בסעיף א' .

ג. תארו אלגוריתם, המוצא את המסלול המינימלי בעל מספר זוגי של קשתות אדומות ומספר אי-זוגי של קשתות כחולות, מהקדקוד s אל כל קדקוד $v \in V$.

שאלה 5.19

נתון הגרף המכוון G, ומספור קדקודיו הוא: $V = \{1, 2, ..., n\}$ (כלומר לכל קדקוד מתאים מספר סידורי **שונה** בין 1 ל-n = $|V|$).

נסמן ב-$R(v)$ את קבוצת הקדקודים שניתן להגיע אליהם מ-v על-ידי מסלול מכוון ב-G. $r(v)$ יהיה קדקוד $w \in R(v)$ שמספרו הסידורי מינימלי.

תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר, המוצא את $r(v)$ לכל $v \in V$.

שאלה 5.20

נתון גרף שמתאר אתרי תיירות בעיר מסוימת (מוזיאון, כנסייה, בית כנסת, כיכר מרכזית, שוק, אזור פיקניק, גן בוטני). לכל אתר מוגדר זמן שהייה מומלץ. הניחו שהאתרים פתוחים 24 שעות ביממה. נתונים גם משכי הנסיעה בין כל שני אתרים ובינם לבין בית המלון.

לרשותו של תייר עומדים X ימים לבקר בעיר. הוא יכול לטייל בעיר עד 12 שעות ביממה, ובכל לילה עליו לחזור למלון ולשהות בו לפחות 12 שעות רצופות.

כתבו תכנית, שתציע לתייר מסלול סיורים כך שיוכל לבקר במקסימום אתרים במסגרת האילוצים והזמן המוקצב.

שאלה 5.21

תארו לעצמכם שטח ריבועי שיש בו מכשולים אקראיים. מכשול יוצג על-ידי פוליגון קמור. הפוליגון נתון על-ידי סדרת קדקודים עם קשתות ביניהם והקדקוד האחרון מחובר גם לראשון .

נשרטט על השטח סריג בין $N*N$ משבצות. כל משבצת בסריג תהיה קדקוד בגרף. בגרף תהיה קשת בין משבצת אחת לאחרת רק אם הישר העובר מאחת לשנייה אינו נתקל במכשול.

כתבו תכנית למציאת המסלול הקצר ביותר (שעוקף מכשולים) בין נקודת המקור לנקודת היעד.

הריצו את התכנית מספר פעמים והכניסו בה נתונים של שטחים בגדלים שונים ופיזור וצפיפות מכשולים משתנה ואקראית. עבור כל ריצה התכנית תדפיס את: השטח, מיקום המכשולים, המקור והיעד וכן את אורך המסלול הקצר שנמצא.

ליודעי גרפיקה ממוחשבת, רצוי גם ללוות את הפתרון בתיאור גרפי של הבעיה ושל הפתרון.

שאלה 5.22

נתון הגרף $G = (V, E)$ עם פונקציית המשקל $W : E \to R^+$.

נתונות שתי קבוצות זרות של הצמתים S ו-T כך ש: $T \subset V$, $T \subset V$, ו-$T \cap S = \phi$.

עליכם לפתח שיטה, הדומה לאלגוריתם דיקסטרה למציאת המסלול הקצר ביותר המחבר קדקוד כלשהו ב-S לקדקוד כלשהו ב-T. כלומר, יש למצוא את המסלול הקצר ביותר מבין כל המסלולים המתחילים ב-S ומסתיימים ב-T.

5.5 סריקת גרף לרוחב (BFS)

פעולה חשובה ושכיחה בגרף היא סריקה של קדקודיו. בעת הסריקה, נעבור על-פני הגרף כך שנבקר בכל קדקוד פעם אחת בלבד ונבצע בו עיבוד כלשהו. קיימות שתי שיטות סריקה שונות הנבדלות זו מזו בסדר שבו מתבצעת הסריקה. השיטות הן: סריקה לרוחב (BFS – Breadth-First Search) וסריקה לעומק (Depth-First Search – DFS). בסעיף הזה נכיר את השיטה הראשונה – סריקה לרוחב, ובסעיף הבא את השיטה השנייה – סריקה לעומק. (בהמשך נראה כיצד הן קשורות לבעיית המסלול הקצר ביותר.)

להלן תיאור שיטת הסריקה לרוחב (BFS):

נתון הגרף $G = (V, E)$. בשיטה הזאת נתחיל את הסריקה מאחד הקדקודים בגרף, הנקרא קדקוד מקור, ונסמן אותו ב-S. המטרה היא לטייל על-פני הקשתות מקדקוד לקדקוד של הגרף כך שנבקר בכל קדקוד של הגרף ונבצע בו עיבוד כלשהו פעם אחת בלבד. שיטת הסריקה הזאת תתבצע כדלהלן:

מחלקים את קדקודי הגרף לשכבות באופן הזה:

בשכבה 1 יהיו קדקודים שניתן להגיע אליהם מקדקוד המקור S, בעזרת מסלול שאורכו 1.

בשכבה 2 יהיו קדקודים שניתן להגיע אליהם מקדקוד המקור S, בעזרת מסלול שאורכו 2.

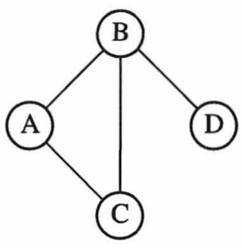
ובאופן כללי: בשכבה i, לכל $i \geq 1$, יהיו קדקודים כך שניתן להגיע אליהם מקדקוד המקור S, בעזרת מסלול שאורכו i.

בשלב הראשון של האלגוריתם הנדון מבקרים בכל הקדקודים השייכים לשכבה הראשונה.

בשלב השני של האלגוריתם מבקרים בכל הקדקודים השייכים לשכבה השנייה. נמשיך בביקור בקדקודי הגרף עד שנבקר בכל קדקודי הגרף פעם אחת בלבד.

נדגיש כי האלגוריתם הנדון מבקר בכל קדקודי הגרף השייכים לשכבה K, לפני שמבקרים (מגלים) קדקוד כלשהו השייך לשכבה $K + 1$.

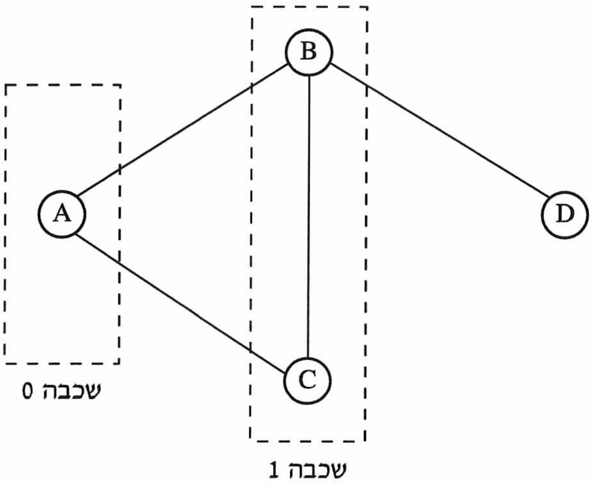
נדגים את התהליך שתואר לעיל על הגרף שלהלן:



נניח שהקדקוד שממנו מתחילים את הסריקה הוא הקדקוד A.

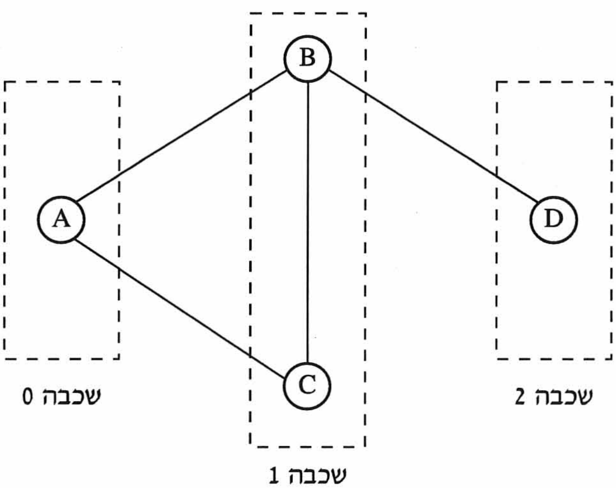
הקדקוד A שייך לשכבה 0, כיוון שאורך המסלול מצומת A לעצמו הוא 0. עתה נבחר בכל הקשתות הנוגעות לקדקוד A והמובילות לקדקודים שעדיין לא ביקרנו בהם. בדוגמה שלנו, הקשת (A, B) מובילה לקדקוד B שעדיין לא ביקרנו בו, והקשת (A, C) מובילה לקדקוד B שעדיין לא ביקרנו בו.

לכן נבחר בשתי הקשתות. תמונת המצב היא:

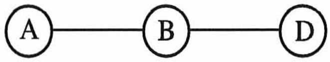


הקדקודים C ו-B שייכים לשכבה 1, שכן ניתן להגיע אליהם מקדקוד המקור A, בעזרת מסלול שאורכו 1. שוב נצטרך לבחור בכל הקשתות הנוגעות לכל הקדקודים השייכים לשכבה 1 והמובילות לקדקודים שעדיין לא ביקרנו בהם.

בדוגמה שלנו, הקשת (B, D) מובילה מהקדקוד B, ששייך לשכבה 1, לקדקוד D, שעדיין לא ביקרנו בו. לעומת זאת, הקשת (B, C) מובילה מהקדקוד B, ששייך לשכבה 1, לקדקוד C, שכבר ביקרנו בו. לכן, בשלב זה נבחר רק בקשת אחת – (B, D), ותמונת המצב היא:



הקדקוד D שייך לשכבה 2 מאחר שניתן להגיע אליו מקדקוד המקור A דרך מסלול שאורכו 2 המתואר להלן:



שוב, נצטרך לבחור בכל הקשתות הנוגעות <u>לכל</u> הקדקודים השייכים לשכבה 2 והמובילות לקדקודים שעדיין לא ביקרנו בהם. בדוגמה שלנו, לשכבה 2 שייך רק קדקוד אחד ויחיד – D, ודרך הקשת היחידה הנוגעת בו (B, D) לא ניתן להגיע לקדקוד שעדיין לא ביקרנו בו (כיוון שבקדקוד B כבר ביקרנו!). בשלב הזה נעצור את הסריקה כיוון שסיימנו את הביקור בכל קדקודי הגרף.

בסוף התהליך, כאשר מסיימים לבקר בכל קדקודי הגרף, השכבה שאליה שייך הקדקוד תציין את אורך המסלול בעל האורך המינימלי (מספר הקשתות הוא מינימלי) מקדקוד המקור עד אליו.

הערות:

1. האלגוריתם פועל על גרפים מכוונים ולא מכוונים כאחד. מאחר שברצוננו לבקר בכל קדקוד פעם אחת בלבד, נשתמש במערך בוליאני used, כך ש- used$[v]$ יציין אם ביקרנו בקדקוד v או לאו. בתחילת האלגוריתם, עדיין לא גילינו את קדקודי הגרף (ביקרנו בהם), ולכן עבור כל קדקוד v בגרף נציב ל- used$[v]$ את הערך FALSE.
כמו כן, נרצה לשמור עבור כל קדקוד מידע על זהות הקדקוד שביקרנו בו קודם. לכן נשתמש במערך P, כך ש- $P[v]$ יציין קדקוד בגרף שממנו הגענו ל-v בעת הסריקה.

2. הסימן P מציין ש-$P[v]$ מייצג הורה של הקדקוד v בעת הסריקה.

בנוסף, נרצה לשמור עבור כל קדקוד u מידע על המרחק מהקדקוד S לקדקוד u. לפיכך, נשתמש במערך dist כך ש- dist$[u]$ יציין את המרחק מקדקוד המקור S לקדקוד u.
בנוסף, נשתמש במבנה הנתונים תור (Q – Queue), אשר ינהל את השכבות. כמו כן, נשתמש בפעולות הבסיסיות המוגדרות על תור, כגון:
Insert(Q, w), המוסיפה את האיבר w לתור Q.
Delete(Q, v), המסירה את האיבר שבחזית התור Q ושמה אותו ב-v.

$\text{Is\_empty}(Q)$, המחזירה את הערך TRUE אם התור Q ריק – ולא, היא מחזירה את הערך FALSE.

$\text{Head}(Q)$, המחזירה את האיבר שבחזית התור Q.

להלן אלגוריתם לשיטת הסריקה לרוחב:

<u>צעד 1</u> לכל קדקוד $v \in V$, פרט לקדקוד המקור (S), בצע:

1.1 $\text{dist}[v] \leftarrow \infty$ (בתחילת האלגוריתם אורך המסלול מקדקוד מקור S לקדקוד כלשהו v הנו ∞)

1.2 $P[v] \leftarrow \text{NIL}$ (בתחילת האלגוריתם לקדקוד v אין הורים)

1.3 $\text{used}[v] \leftarrow \text{FALSE}$

<u>צעד 2</u> 2.1 $\text{dist}[s] \leftarrow 0$ (אורך המסלול מהמקור S ל-S עצמו הוא 0)

2.2 $P[S] \leftarrow \text{NIL}$ (לקדקוד מקור S אין הורה)

2.3 $\text{used}[S] \leftarrow \text{TRUE}$ (בתחילת האלגוריתם מבקרים רק בצומת המקור S)

<u>צעד 3</u> $Q \leftarrow \{S\}$ (אתחול התור)

<u>צעד 4</u> כל עוד התור Q לא ריק, בצע:

4.1 $v \leftarrow \text{Head}(Q)$

4.2 לכל קדקוד w בגרף, שהינו שכן של v, בצע:

4.2.1 אם $\text{used}[w] = \text{FALSE}$?

אז בצע:

4.2.1.1 $\text{used}[w] = \text{TRUE}$

4.2.1.2 $\text{dist}[w] = \text{dist}[v] + 1$

4.2.1.3 $P[w] \leftarrow v$

4.2.1.4 $\text{Insert}(Q, w)$

4.3 $\text{Delete}(Q, v)$

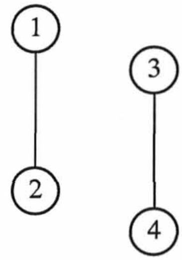
<u>צעד 5</u> סוף האלגוריתם.

להלן הסבר של צעדי האלגוריתם:

<u>**צעד 1**</u>

א. נתבונן בגרף הזה:

נניח שקדקוד המקור הנו $S = 1$.



קל לראות שמקדקוד המקור S לא ניתן להגיע לקדקודים שמספרם 3 ו-4. לכן ברור כי הערך של dist[3] הוא ∞, כיוון שלא קיים מסלול מהקדקוד 1 לקדקוד 3. לאור זאת, נחליט שבתחילת האלגוריתם לכל קדקוד v, פרט למקור, נבצע את ההצבה:

$\text{dist}[v] \leftarrow \infty$, מאחר שלא ידוע מראש אם קיים מסלול באורך כלשהו מקדקוד המקור S לקדקוד כלשהו v. במהלך האלגוריתם נרצה לשפר את אורך המסלול מקדקוד המקור S לקדקוד v, לכל $v \in V$.

ב. אם לא קיים מסלול באורך כלשהו מקדקוד המקור S לקדקוד כלשהו v, אז לקדקוד הזה אין הורה ($P[v] \leftarrow \text{NIL}$ או $P[v] = \phi$). לפיכך, בתחילת האלגוריתם לאף קדקוד אין הורה, כיוון שתהליך הסריקה עדיין לא התחיל.

לכן נבצע את ההצבה הבאה:

לכל קדקוד $v \in V - \{S\}$ $P[v] = \phi$.

ג. ברור כי לכל קדקוד $v \in V - \{S\}$ נבצע את ההצבה:

$\text{Used}[v] \leftarrow \text{FALSE}$, כיוון שבתחילת האלגוריתם עדין לא גילינו את צומתי הגרף (ביקרנו בהם).

<u>**צעד 2**</u>

מיותר להסביר מדוע אורך המסלול מקדקוד המקור S לעצמו הנו 0.

לקדקוד מקור בגרף אין הורה (לכן הוא המקור), ולכן נבצע את ההשמה $P[v] = \phi$. מאחר שהסריקה מתחילה מקדקוד המקור S, אז הקדקוד S מתגלה מיד, ולכן יש לבצע את ההשמה: $\text{Used}[S] \leftarrow \text{TRUE}$.

<u>צעד 3</u>

כאמור, תפקידו של תור (Q) לנהל את השכבות ולקבוע בכל שלב i, לכל $i \geq 0$, מהם הקדקודים ששייכים לשכבה ה-i ית.

ברור כי לשכבה 0 שייך אך ורק צומת המקור S. לכן נבצע את ההשמה: $Q \leftarrow \{S\}$.

בשלב הזה התור Q מכיל קבוצת קדקודים השייכים לשכבה 0.

הערה: בתור Q נמצאים קדקודים אשר נתגלו (ביקרנו בהם תוך כדי סריקה), אך רשימת הסמיכות (שכנים) שלהם טרם נתגלתה.

<u>צעד 4</u>

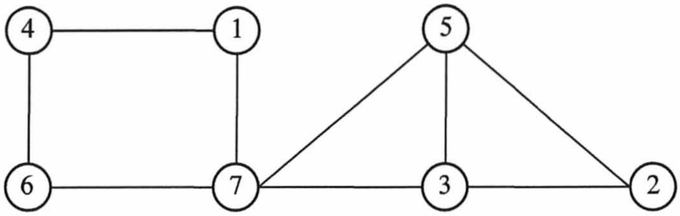
נסתכל על הקדקוד שבחזית התור Q ונכנה אותו בשם v. עתה נבחן את כל השכנים של הקדקוד v. לכל קדקוד w, שהנו שכן של הקדקוד v ושעדיין לא נתגלה, נבצע את הצעדים שלהלן:

1. נבקר בו כעת ($\text{Used}[w] \leftarrow \text{TRUE}$);
2. אורך המסלול מ-S ל-w שווה לאורך המסלול מ-S ל-v ועוד אחת (עקב המעבר על הקשת (v, w));
3. יש לזכור שהקדקוד v הינו הורה של הקדקוד w;
4. נצרף את הקדקוד w לתור Q.

לאחר שנבחנו כל הקדקודים השכנים של v, נסיר מהתור Q את הקדקוד v כיוון שהטיפול בו הסתיים.

כך חוזר התהליך על עצמו עד שמטפלים בכל הקדקודים שניתן להגיע אליהם מ-S (קדקוד המקור). ברגע שהתור Q יתרוקן, יסתיים האלגוריתם, כיוון שכל הקדקודים שנשיגים מ-S נתגלו (וטופלו).

נדגים את צעדי האלגוריתם שתואר לעיל על הגרף שלהלן:



בגרף הנתון 7 קדקודים הממוספרים באופן אקראי מ-1 עד 7.

הערה: לצורך ההדגמה נציין את הערך הבוליאני FALSE במספר 0 ואת הערך הבוליאני TRUE במספר 1.

כאמור, בתחילת האלגוריתם תמונת המערך USED היא:

	1	2	3	4	5	6	7
used	0	0	0	0	0	0	0

במהלך התיאור של האלגוריתם, בכל קדקוד של גרף מופיעים שני מספרים: המספר השמאלי מייצג את השכבה שהקדקוד שייך אליה, והמספר הימני מייצג את ההורה של הקדקוד כפי שנקבע בעת הסריקה.

נניח שקדקוד המקור הוא הקדקוד $S = 1$

צעד (1) – (3)

בטבלה שלהלן מוצגת תמונת המצב לאחר ביצוע שלושת הצעדים הראשונים.

קדקוד	1	2	3	4	5	6	7
Dist	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
P	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
Used	1	0	0	0	0	0	0

$Q = \{1\}$

<u>צעד 4 (איטרציה 1)</u>

4.1 $v \leftarrow 1$

4.2 השכנים של v הם הקודקדים 4 ו-7 (בעזרת המערך Used רואים כי עדיין לא נתגלו הקדקודים 4 ו-7). אורך המסלול מקדקוד 1 לעצמו הוא 0, ומקדקוד 1 לקדקוד 4 הוא 1. לפיכך, אורך המסלול מקדקוד 1 לקדקוד 4 הוא 1. באופן אנלוגי, אורך המסלול

מקדקוד 1 לקדקוד 7 הוא 1. בנוסף, ברור כי ההורה של הקדקודים 4 ו-7 הוא הקדקוד 1 וברור כי Used[4] = Used[7] = TRUE שכן כעת הם נתגלו. בטבלה שלהלן מוצגת תמונת המצב המתקבלת :

קדקוד	1	2	3	4	5	6	7
Dist	0	∞	∞	**1**	∞	∞	**1**
P	ϕ	ϕ	ϕ	**1**	ϕ	ϕ	**1**
Used	1	0	0	**1**	0	0	**1**

הקדקודים 4 ו-7 מתווספים לתור Q, ולכן $Q = \{1,4,7\}$. מאחר שהטיפול בקדקוד 1 הסתיים, נוציא אותו מהתור Q, ולכן $Q = \{4,7\}$. התהליך ממשיך וחוזרים לצעד 4.

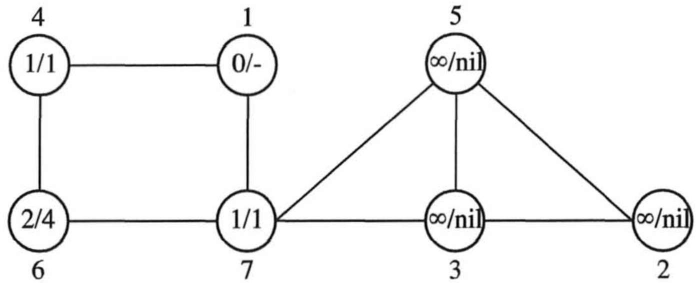
צעד 4 (איטרציה 2)

4.1 $v \leftarrow 4$

4.2 השכנים של v הם הקודקדים 1 ו-6 (בעזרת המערך Used רואים כי כבר ביקרנו בקדקוד 1, אך עדיין לא בקדקוד 6, ולכן נבקר אך ורק בקדקוד 6). אורך המסלול מקדקוד 1 לקדקוד 4 הוא 1, ומקדקוד 4 לקדקוד 6 הוא 1, לכן אורך המסלול מקדקוד 1 לקדקוד 6 הוא 2. ברור כי ההורה של הקדקוד 6 הוא קדקוד 4, ובנוסף, ברור כי Used[6] = True כי כעת מבקרים בקדקוד 6. לפיכך, תמונת המצב היא :

קדקוד	1	2	3	4	5	6	7
Dist	0	∞	∞	1	∞	**2**	1
P	ϕ	ϕ	ϕ	1	ϕ	**4**	1
Used	1	0	0	1	0	**1**	1

כעת, קדקוד 6 מתווסף לתור Q, לכן $Q = \{4,7,6\}$. שימו לב שבתור Q קדקודים השייכים לשכבה 1 (הקדקודים 4 ו-7) וקדקודים השייכים לשכבה 2 (הקדקוד 6). מאחר שהטיפול בקדקוד 4 הסתיים, נוציא אותו מהתור Q ולכן: $Q = \{7,6\}$. ניתן לתאר את תמונת המצב המתקבלת בטבלה בעזרת התרשים שלהלן :



כאמור, בכל קדקוד של גרף מופיעים שני מספרים. המספר השמאלי מייצג את השכבה שאליה שייך הקדקוד, והמספר הימני מייצג את ההורה של הקדקוד, כפי שנקבע בעת הסריקה.

תמונת התור היא:

$Q = \{7,6)$

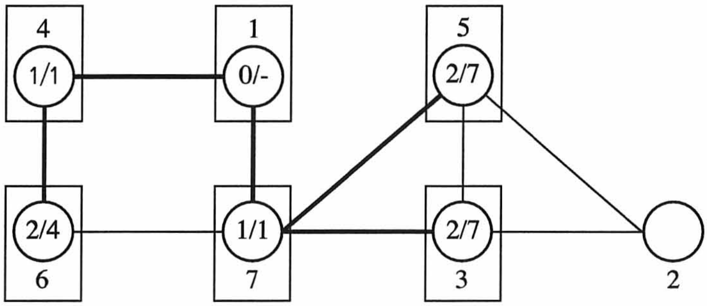
עתה חוזרים שוב לביצוע צעד 4.

צעד 4 (איטרציה 3):

4.1 $v \leftarrow$ **7**. השכנים של הקדקוד 7, שעדיין לא ביקרנו בהם, הם הקדקודים 3 ו-5. אורך המסלול מקדקוד 1 לקדקוד 7 הוא 1, ומקדקוד 7 לקדקוד 3 הוא 1, ולכן אורך המסלול מקדקוד 1 לקדקוד 3 הוא 2.

באופן אנלוגי, אורך המסלול מקדקוד 1 לקדקוד 5 הוא 2. ברור כי ההורה של הקדקודים 3 ו-5 הוא קדקוד 7, ובנוסף, ברור כי: Used[3] = Used[5] = TRUE כיוון שמבקרים בהם כעת. מאחר שהשכבה של קדקוד 7 היא 1, אז ברור שהשכבה של הקדקודים 3 ו-5 היא 2. תמונת המצב מוצגת בטבלה ובתרשים שלהלן:

קדקוד	**1**	2	3	4	5	**6**	7
dist	**0**	∞	2	**1**	2	**2**	**1**
p	ϕ	ϕ	**7**	1	**7**	4	**1**
used	1	0	**1**	1	**1**	1	**1**



כעת, הקדקודים 3 ו-5 מתווספים לתור Q, ולכן $Q = \{7,6,3,5\}$.

שימו לב שבתור Q קדקודים השייכים לשכבה 1 (הקדקוד 7) וקדקודים השייכים לשכבה 2 (הקדקודים 6,3,5)

מאחר שהטיפול בקדקוד 7 הסתיים, נסיר אותו מהתור. תמונת התור היא:

Q	**6**	**3**	**5**
מספר שכבה	2	2	2

התהליך ממשיך, וחוזרים לצעד מספר 4.

צעד 4 (איטרציה 4)

4.1 $v \leftarrow 6$

4.2 קבוצת הקדקודים, שהם שכנים של קדקוד 6 ושעדיין לא ביקרנו בהם, היא קבוצה ריקה. לפיכך אין מטפלים באף קדקוד. כיוון שהטיפול בקדקוד 6 הסתיים, נסיר אותו מהתור Q, ותמונת התור היא:

Q	**3**	**5**
מספר שכבה	2	2

התהליך ממשיך, וחוזרים לצעד מספר 4.

צעד 4 (איטרציה 5)

4.1 $v \leftarrow 3$

4.2 השכן של קדקוד 3, שעדין לא ביקרנו בו, הוא קדקוד 2.

ניתן לתאר את אורך המסלול מקדקוד 1 לקדקוד 2 באופן הזה :

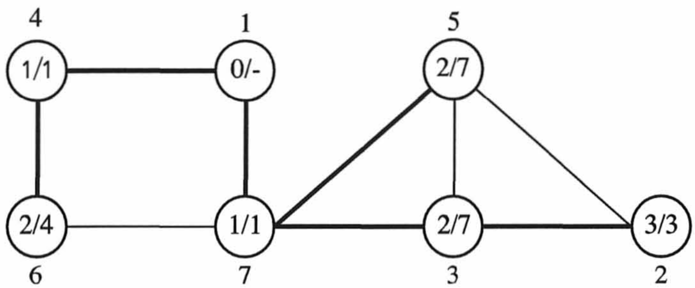
$$1 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{1} 2$$

לכן אורך המסלול מקדקוד 1 לקדקוד 2 הוא 3.

ברור כי ההורה של הקדקוד 2 הוא קדקוד 3, ובנוסף ברור כי : Used[2] = TRUE, כיוון שקדקוד 2 נתגלה זה עתה.

השכבה של קדקוד 3 (הקדקוד ההורה) היא 2, ולכן השכבה של קדקוד 2 היא 3.

תמונת המצב מוצגת בטבלה ובאיור שלהלן :



קדקוד	1	2	3	4	5	6	7
dist	**0**	**3**	**2**	**1**	2	**2**	**1**
p	ϕ	**3**	**7**	1	7	4	**1**
used	1	**1**	1	1	1	1	**1**

כעת, הקדקוד 2 מתווסף לתור Q, ולכן $Q = \{3,5,2\}$.

שימו לב שבתור Q נמצאים הקדקודים השייכים לשכבה 2 (הקדקודים 3 ו-5) והקדקודים השייכים לשכבה 3 (קדקוד 3).

מאחר שהטיפול בקדקוד 3 הסתיים, נסיר אותו מהתור. תמונת התור היא:

2	5	Q
3	2	**מספר שכבה**

התהליך ממשיך, וחוזרים לצעד מספר 4.

צעד 4 (איטרציה 6)

4.1 $v \leftarrow 5$

4.2 קבוצת הקדקודים, שהם שכניו של הקדקוד 5, ושעדיין לא ביקרנו בהם, היא קבוצה ריקה. לפיכך אין מטפלים באף קדקוד. מאחר שהטיפול בקדקוד 5 הסתיים, נסיר אותו מהתור Q ותמונת התור היא: $Q = \{2\}$. התהליך ממשיך, וחוזרים לצעד מספר 4.

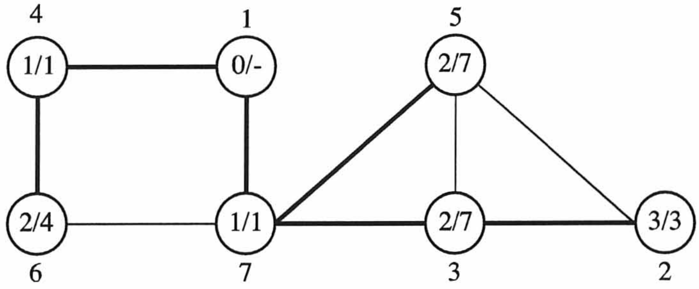
צעד 4 (איטרציה 7)

4.1 $v \leftarrow 5$

4.2 קבוצת הקדקודים, שהם שכניו של הקדקוד 2 ושעדיין לא ביקרנו בהם, היא קבוצה ריקה. לפיכך אין מטפלים באף קדקוד. מאחר שהטיפול בקדקוד 2 הסתיים, נסיר אותו מהתור Q, והוא יישאר ריק. התהליך ממשיך וחוזרים לצעד מספר 4.

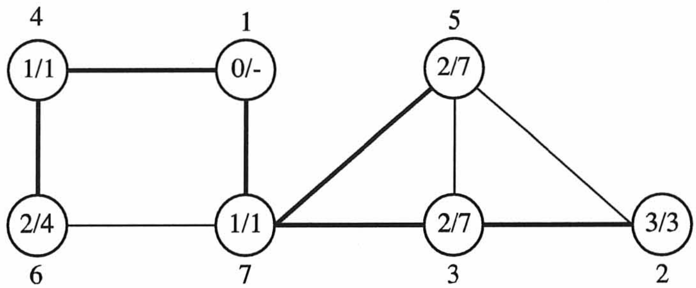
צעד 4 (איטרציה אחרונה)

מאחר שהתור ריק הסתיים האלגוריתם, ותמונת המצב היא:



עץ פורש BFS

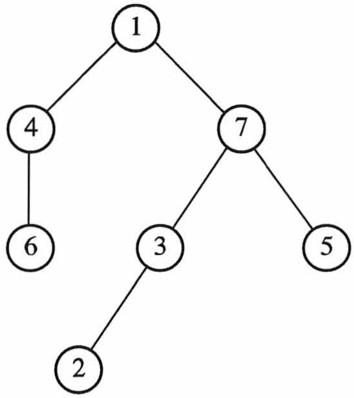
בתום ביצוע האלגוריתם, תמונת המצב היא:



תוך כדי סריקת קדקודי הגרף $G = (V, E)$, נוצר תת-גרף $G' = (V', E')$ כאשר E' היא קבוצת הקשתות שעברנו דרכן בכדי לסרוק את קדקודי הגרף בשיטת BFS. קשתות אלו מסומנות ומודגשות.

G' הוא עץ המכיל את כל הקדקודים הנגישים מקדקוד המקור (S). בהמשך נראה כי לכל צומת v נגיש מ-S, אורך המסלול הקצר ביותר מ-S ל-v נמצא בעץ הזה.

העץ הפורש (BFS) של הגרף שפירטנו בדוגמה הוא:



טענה:

תת-הגרף $G' = (V', E')$ מגדיר עץ T אשר ייקרא העץ הפורש של שיטת הסריקה לרוחב (בקיצור-עץ פורש BFS). הטענה נכונה, כיוון שקל לראות כי $|E'| = |V'| - 1$ והגרף G' הוא גרף קשיר, ולכן, לפי משפט 5.3.1.2, הגרף G' הוא עץ.

ניתוח היעילות של אלגוריתם הסריקה לרוחב (BFS)

לפני שנבדוק את היעילות של האלגוריתם הנדון, ניזכר כי אם G הוא גרף מכוון, והוא מיוצג באמצעות רשימות סמיכות, אזי סכום האורכים של כל רשימות הסמיכות הוא $|E|$. ואם הגרף G לא מכוון, והוא מיוצג באמצעות רשימות סמיכות, אזי סכום האורכים של כל רשימות הסמיכות הוא $2|E|$. מכאן – סכום האורכים של רשימת הסמיכות הוא $O(|E|)$.

<u>צעד 1</u> דורש זמן $O(|V|)$, כיוון שסורקים את כל קדקודי הגרף.

<u>צעד 2</u> דורש זמן $O(|1|)$, כיוון שיש גישה ישירה לאינדקס במערך.

<u>צעד 3</u> דורש זמן $O(|1|)$, כיוון שזוהי פעולה של הכנסת איבר לתור.

<u>צעד 4</u> הפעולות על התור (התייחסות לאיבר שבחזית התור והסרת איבר מהתור) דורשות זמן $O(|1|)$. כל קדקוד נכנס לתור פעם אחת לכל היותר ולכן גם יוצא ממנו פעם אחת לכל היותר. מכאן, הזמן הנדרש לפעולות על התור הוא $O(|V|)$.

רשימת הסמיכות של כל קדקוד v נסרקת רק כאשר מסירים את הקדקוד v מן התור, וברור מתוך האלגוריתם שרשימת הסמיכות של כל קדקוד v נסרקת פעם אחת לכל היותר.

סכום האורכים של רשימות הסמיכות הוא $O(|E|)$, לכן הזמן הכולל הנדרש עבור סריקת רשימות הסמיכות הוא לכל היותר $O(|E|)$. מכאן:

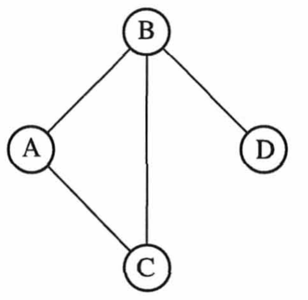
סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הזה היא: $O(|V| + |E|)$

5.6 סריקת גרף לעומק (DFS)

נתון הגרף $G = (V, E)$. בשיטה הזאת מתחילים את הסריקה מאחד הקדקודים בגרף וסורקים את קשתות הגרף מקדקוד לקדקוד, באופן כזה שסורקים כל קדקוד ומבצעים בו עיבוד כלשהו פעם אחת בלבד. שיטת הסריקה הזאת, כשמה כן היא, מבצעת בגרף סריקה לעומק ככל שניתן. על מנת להשיג את המטרה הזאת שיטת הסריקה מתבצעת כדלהלן:

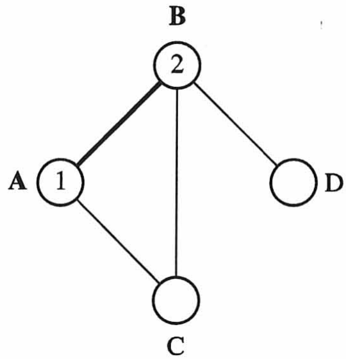
בשיטת הסריקה DFS, כאשר מגיעים לקדקוד כלשהו בגרף $v \in V$, בוחרים באופן שרירותי אחד הקדקודים שהוא שכן של v, שעדיין לא סומן (כלומר בסריקה עדיין לא ביקרו בו), וממנו ממשיכים את תהליך הסריקה. בשלב מסוים של הסריקה, כאשר מגיעים לקדקוד כלשהו v בגרף, שכל שכניו מסומנים, כלומר שסרקנו את כל שכניו, אז נסוגים להורה של הקדקוד v, וממנו ממשיכים את הסריקה. תהליך הסריקה נמשך עד שנתגלו (נסרקו) כל הקדקודים הנגישים מ-S.

נדגים את התהליך שתואר לעיל על הגרף הזה:

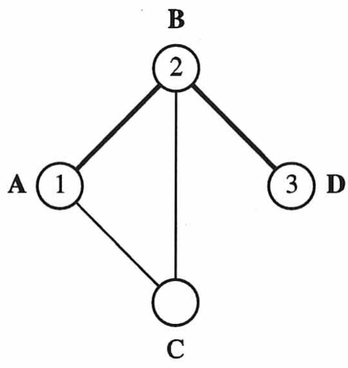


נניח שהסריקה מתחילה מהקדקוד A. נסמן את הקדקוד A, שהוא הראשון שביקרנו בו, במספר 1. עתה, נבחר קשת (באופן אקראי לחלוטין) היוצאת מהקדקוד A, מבין הקשתות המובילות לקדקוד שעדיין לא ביקרנו בו.

נניח שנבחר בקשת (A, B) אשר מובילה לקדקוד B, שעדיין לא ביקרנו בו. נסמן במספר 2 את הקדקוד B, הקדקוד השני שביקרנו בו. תמונת המצב היא :



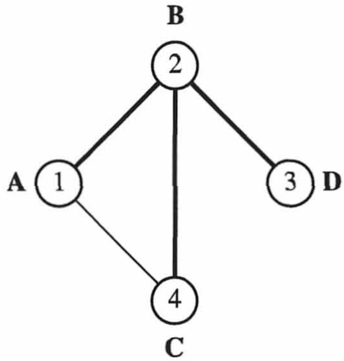
עתה, הקדקוד B הופך להיות נקודת המוצא שממנה ממשיכים את תהליך הסריקה. כעת נבחר (באופן אקראי לחלוטין) קשת היוצאת מהקדקוד B, מבין הקשתות המובילות לקדקוד שעדיין לא ביקרנו בו. נניח שנבחר בקשת (D, B) אשר מובילה לקדקוד D שעדיין לא ביקרנו בו. נסמן במספר 3 את הקדקוד D, הקדקוד השלישי שביקרנו בו. תמונת המצב היא :



עתה, ננסה לבחור קשת היוצאת מהקדקוד D, מבין הקשתות המובילות לקדקוד שעדיין לא ביקרנו בו. קל לראות שבשלב זה אין קשת כזו. לכן ניסוג מיד לקדקוד B, שהיא ההורה של הקדקוד D.

נקודת המוצא הועברה שוב לקדקוד B. כעת נבחר קשת (באופן אקראי לחלוטין) היוצאת מהקדקוד B מבין הקשתות המובילות לקדקוד שעדיין לא ביקרנו בו. ישנה רק קשת אחת

אשר מובילה לקדקוד C שעדיין לא ביקרנו בו והיא הקשת (C, B). נסמן את הקדקוד C, שהוא הקדקוד הרביעי שביקרנו בו, במספר 4. תמונת המצב היא:

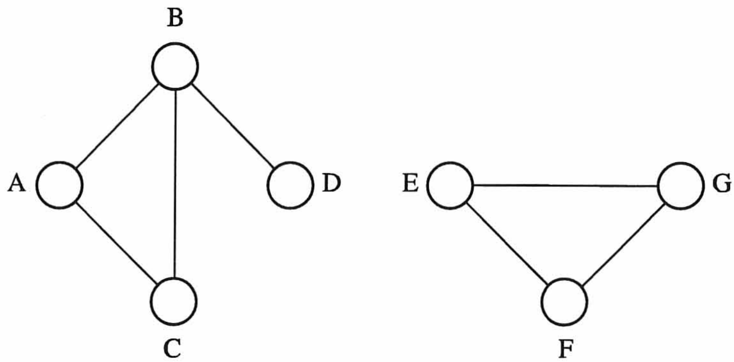


נקודת המוצא הועברה לקדקוד C. מהקדקוד C אף קשת אינה מובילה לקדקוד שעדיין לא ביקרנו בו, ולכן נחזור להורה של הקדקוד C, שהוא הקדקוד B.

מהקדקוד B אף קשת אינה מובילה לקדקוד שעדיין לא ביקרנו בו, ולכן נחזור להורה של הקדקוד B, שהוא הקדקוד A – הקדקוד שממנו התחלנו את הסריקה. מהקדקוד A אף קשת אינה מובילה לקדקוד שעדיין לא ביקרנו בו, ולכן נרצה לחזור להורה של הקדקוד A. ואולם לקדקוד A אין הורה ואין לאן לחזור, ולכן נעצור את הסריקה. בזאת סיימנו את הביקור בכל קדקודי הגרף.

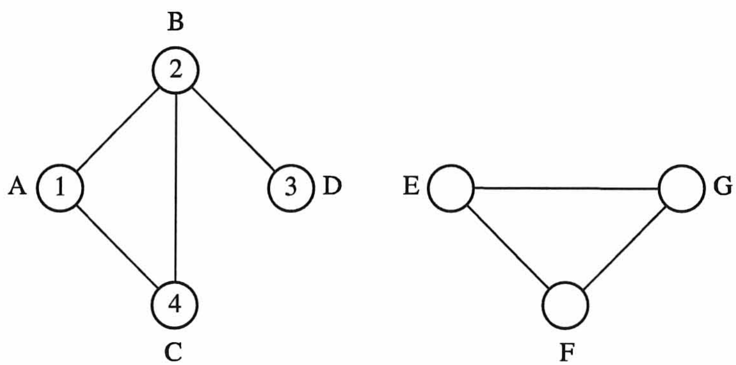
אם בתום הסריקה עדיין נותרו קדקודים שאינם נגישים מקדקוד המקור – S, אזי קובעים מביניהם קדקוד מקור חדש, ומפעילים את שיטת הסריקה DFS, עד שמבקרים בכל קדקודי הגרף.

לדוגמה, נתבונן בגרף הבא (שהיא גרף מורחב יותר מזה שראינו קודם):

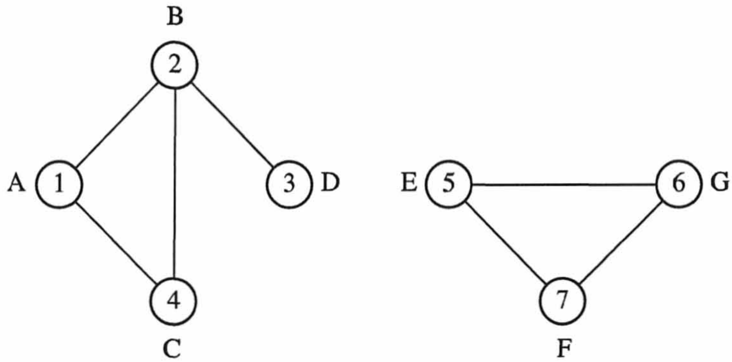


שימו לב! זהו גרף אחד.

נניח שקדקוד המקור הוא קדקוד A. ראינו קודם שבתום הסריקה התמונה שנתקבלה היא :



רואים כי עדיין לא ביקרנו בכל קדקודי הגרף. הקדקודים שעדיין לא ביקרנו בהם הם : $\{E, F, G\}$, לכן נקבע באופן שרירותי כי מבין הקדקודים E, F, G הקדקוד E יהיה קדקוד מקור חדש. עתה, נקודת המוצא עוברת לקדקוד E. מהקדקוד E מפעילים את התהליך שתואר לעיל, וקל לראות שבתום הסריקה תמונת המצב היא :



גם בשיטה זו, בדומה לשיטת הסריקה BFS, נשתמש במערך הבוליאני Used כך ש- Used[v] יציין אם ביקרנו בקדקוד v או לאו.

ברור שבתחילת האלגוריתם לכל קדקוד v בגרף נציב את הערך FALSE ל- Used[v], כיוון שבתחילת האלגוריתם עדיין לא ביקרנו בקדקודי הגרף. לגבי כל קדקוד האלגוריתם חייב לשמור מידע על זהות הקדקוד הקודם לו בסריקה. לפיכך, נשתמש במערך P, כך ש-$P[v]$ ייצג הקדקוד שממנו הגענו ל-v בעת הסריקה.

כמו כן, רצוי, אף כי הדבר אינו הכרחי, למספר את קדקודי הגרף לפי סדר הביקורים בהם (הנקרא גם תיוג). לקדקוד הראשון שבו נבקר נצמיד "תג 1", לקדקוד השני שבו נבקר נצמיד "תג 2", וכן הלאה. לאור זאת, נשתמש במערך בשם C (המציין – count), כך ש-$C[v]$ יציין את המספור שניתן לקדקוד v בגרף בעת הסריקה.

להלן האלגוריתם לשיטת הסריקה לעומק (DFS) לגרף לא מכוון:

<u>צעד 0</u> : $i \leftarrow 0$

$v \leftarrow 1$ (v מכיל קדקוד מקור)

<u>צעד 1</u> : לכל קדקוד v בגרף פרט לקדקוד המקור

FALSE ← Used[v], (* בתחילת האלגוריתם עדיין לא ביקרנו בקדקודי הגרף *)

TRUE ← Used[1], (* מאחר שהסריקה מתחילה מקדקוד 1 *).

<u>צעד 2</u> : $i \leftarrow i + 1$ $\quad$ C[v] $\leftarrow i$ (* מספור של הקדקוד v *).

צעד 3: אם לקדקוד v אין קדקודים שכנים שעדיין לא ביקרנו בהם, אז לך לצעד 5

צעד 4: (* בנקודה זו יש לפחות קדקוד אחד u בגרף, שהוא שכן של v ושעדיין לא ביקרנו בו. לכן נבצע את הצעדים שלהלן :)

4.1 $p[U] \leftarrow v$ ו-$v \leftarrow u$ ו-$\text{Used}[u] \leftarrow \text{TRUE}$

4.2 לך לצעד 2.

צעד 5: (* אם v קדקוד מקור, ואין אף קדקוד שכן שלו בגרף שעדיין לא ביקרנו בו, אז צריך להפסיק את האלגוריתם *).

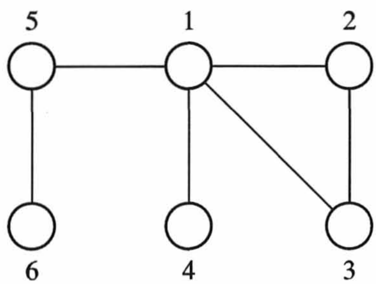
אם $C[v] = 1$, אזי עצור!

צעד 6: (* אם הקדקוד v אינו קדקוד מקור ואין אף שכן של הקדקוד v שעדיין לא ביקרנו בו, אז יש לחזור להורה של v, ולהמשיך ממנו את הסריקה *)

$v \leftarrow P[v]$ ולך לצעד 3.

סוף.

נדגים את התהליך שתואר לעיל על הגרף הזה :



בגרף הנתון 6 קדקודים הממוספרים באופן אקראי מ- 1 עד 6, והם מצוינים בסמוך לצומת.

לפני הפעלת האלגוריתם תמונת המערך Used היא :

(לא ביקרנו עדיין באף קדקוד של הגרף.)

	1	2	3	4	5	6
used	0	0	0	0	0	0

במהלך התיאור של האלגוריתם, בכל קדקוד v של גרף מופיעים שני מספרים: המספר השמאלי מייצג את המספר של הקדקוד לפי הסדר בעת הסריקה, והמספר הימני מייצג את ההורה של v כפי שנקבע בעת הסריקה.

נניח שקדקוד המקור הוא הקדקוד 1.

<u>**צעד 0**</u>:

– (מתחילים את הסריקה מהקדקוד 1) $v \leftarrow 1$

<u>**צעד 1**</u>: $\text{Used}[1] \leftarrow \text{TRUE}$

$$\text{Used}[1] \leftarrow \text{TRUE}$$

	1	2	3	4	5	6
used	1	0	0	0	0	0

$$i \leftarrow 0$$

<u>**צעד 2**</u>:

$i \leftarrow i + 1$

$C[1] \leftarrow 1$

<u>**צעד 3**</u>: לצומת v, שהוא 1, ישנם קדקודים שכנים 2,3,4,5 שעדיין לא ביקרנו בהם.

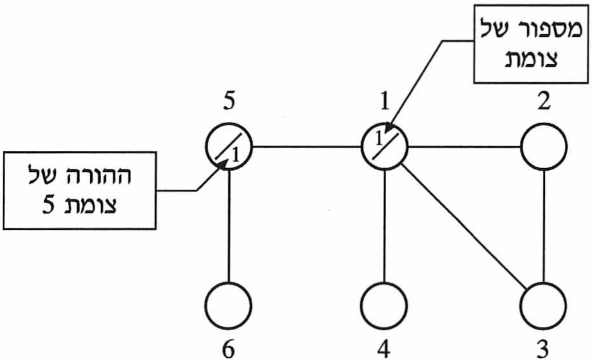
<u>**צעד 4**</u>: נבחר, <u>באופן שרירותי</u> לחלוטין, מבין הקדקודים השכנים 2,3,4,5, את הקדקוד $u = 5$, ונבצע את הצעדים שלהלן:

4.1 $P[5] \leftarrow 1$ (* ההורה של קדקוד 5 על-פי סדר הסריקה הוא הקדקוד 1 *)

$v \leftarrow 5$ (* הסריקה תימשך החל מהקדקוד שמספרו 5 *)

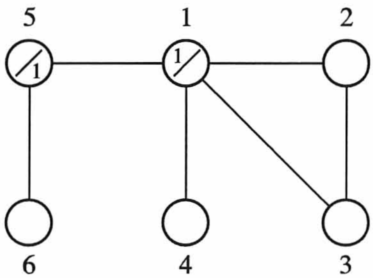
$\text{Used}[5] \leftarrow 1$ (* כעת נתגלה הקדקוד 5 וסרקנו אותו *)

תוצאת המצב מוצגת באיור שלהלן:



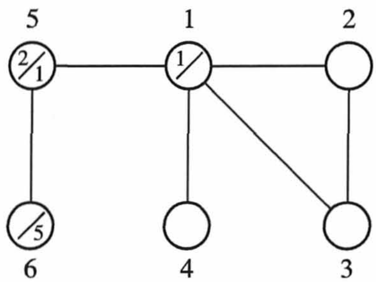
התהליך ממשיך וחוזרים לצעד 2.

האיורים הבאים מתארים את התקדמות אלגוריתם הסריקה לעומק (DFS) של הגרף שקיבלנו עד כה.



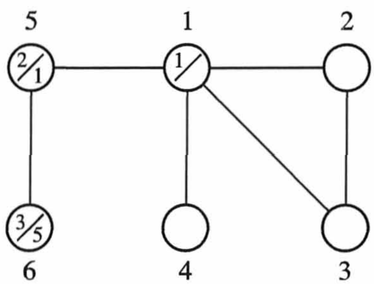
Used	1	2	3	4	5	6
	1	0	0	0	1	0

עתה: $i = 2$, ואז נקבל:



Used	1 2 3 4 5 6
	1 0 0 0 1 1

עתה: $i = 3$, ונקבל:

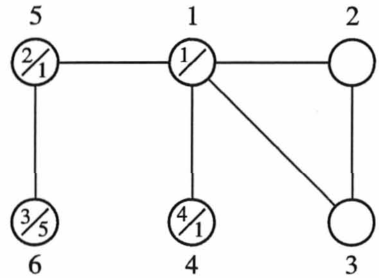


Used	1 2 3 4 5 6
	1 0 0 0 1 1

מאחר שהקדקוד $v = 6$ אינו קדקוד המקור, ואין אף שכן שלו שעדיין לא ביקרנו בו, אז עלינו לסגת להורה של $v = 6$ שהנו 5, ומהקדקוד $v=5$ נמשיך את תהליך הסריקה.

ואולם, הקדקוד $v = 5$ אינו קדקוד המקור, ואין אף שכן שלו שעדיין לא ביקרנו בו, לכן עלינו לסגת להורה של $v = 5$, שהנו הקדקוד 1 ולהמשיך ממנו את תהליך הסריקה.

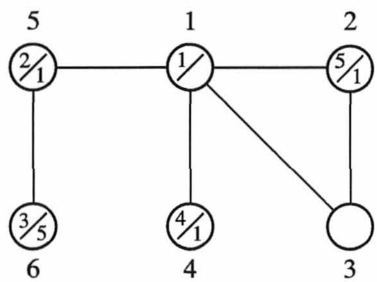
עתה נקבל:



Used	1 2 3 4 5 6
	1 0 0 1 1 1

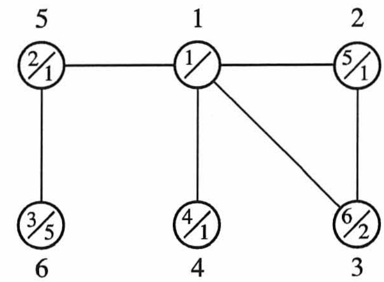
מאחר שהקדקוד $v = 4$ אינו קדקוד המקור, ואין אף שכן שלו עדיין לא ביקרנו בו, עלינו לחזור להורה של $v = 4$, שהנו הקדקוד 1, ולהמשיך ממנו את תהליך הסריקה.

עתה נקבל:



Used	1 2 3 4 5 6
	1 1 0 1 1 1

ובהמשך נקבל:



Used	1 2 3 4 5 6
	1 1 1 1 1 1

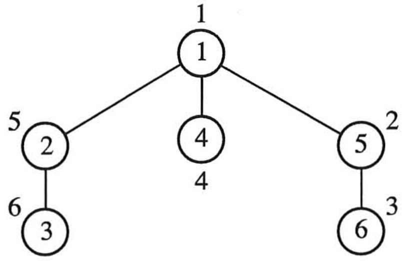
5.6.1 עץ פורש DFS

בתום סריקת קדקודי הגרף $G = (V, E)$, נוצר התת-גרף $G' = (V, E')$, כאשר E' היא קבוצת הקשתות שעברנו דרכן בכדי לסרוק את קדקודי הגרף בשיטת DFS. ניתן להגדיר את E' כדלקמן:

$$E' = \{(P(v), v) \mid v \varepsilon V \text{ and } P(v) \neq \phi \}$$

הערה: תת-הגרף $G' = (V, E')$ עבור הגרף הלא מכוון G מגדיר עץ T אשר ייקרא העץ הפורש של שיטת הסריקה לעומק (ובקיצור: עץ פורש DFS).

העץ הפורש של שיטת הסריקה לעומק של הגרף שראינו בהרחבה בדוגמה הוא:

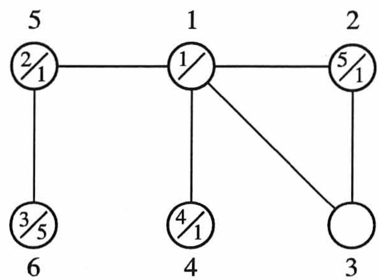


בסמוך לכל צומת מופיע מספרו של הקדקוד, ובכל קדקוד רשום מספר המציין את סדר התיוג של הקדקודים בשיטת DFS.

הערות:

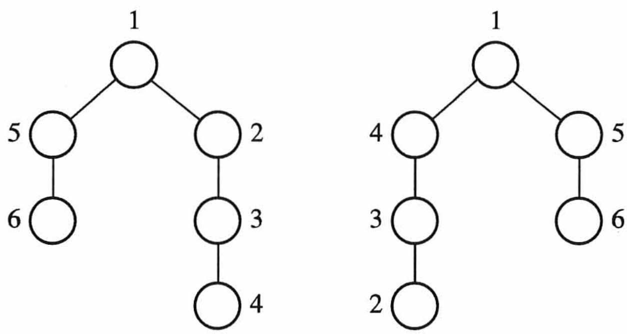
1. שימו לב לכך שבצעד 4 יכולנו לבחור כל קדקוד *u*, מבין השכנים של הקדקוד *v*, שעדיין לא ביקרנו בו. הבחירה היא שרירותית לחלוטין, ולכן סדר התיוג (או הסריקה) אינו בהכרח יחיד. לדוגמה, עבור הגרף הבא, בשיטת DFS אנו יכולים לקבל עצים פורשים שונים, כמתואר באיור:

גרף



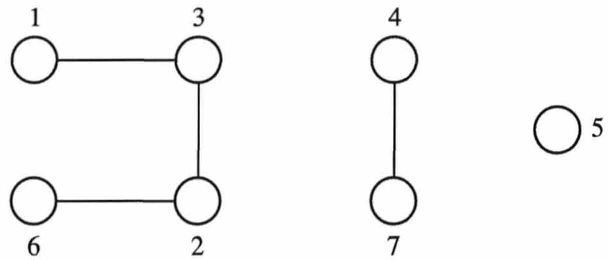
Used	1 2 3 4 5 6
	1 1 0 1 1 1

<u>**עצים פורשים**</u>:



וישנן אפשרויות נוספות.

2. נתבונן בגרף הלא-קשיר שלהלן:



נניח שקדקוד המקור הוא $v = 1$. קל לראות שבעזרת האלגוריתם שתואר לעיל לא נגיע לעולם לקדקודים שמספרם 4, 5 ו-7.

להלן האלגוריתם למציאת עץ פורש DFS (נסמנו ב-T), תוך כדי סריקת קדקודי הגרף וקביעת סדר התיוג של הקדקודים. האלגוריתם נכון לגרף קשיר ולגרף לא קשיר, לגרף מכוון ולגרף לא מכוון.

DFS(G)

1. $T = 0$ (*קבוצה ריקה*)
   (*בהתחלה עץ פורש – ריק*)
2. $i \leftarrow 1$
3. לכל קדקוד v בצע: $\text{Used}[v] \leftarrow \text{FALSE}$
4. סוף הלולאה.
5. כל עוד קיים הקדקוד $v \in V$, שעבורו $\text{Used}[v] = \text{FALSE}$
   אזי בצע: קרא לשגרה $\text{Search\_DFS}(v)$
6. סוף הלולאה.

ולהלן השגרה הרקורסיבית שכותרתה: $\text{Search\_DFS}(v)$:

1. $\text{Used}[v] \leftarrow \text{TRUE}$
2. $C[v] \leftarrow i$
3. $i \leftarrow i + 1$
4. לכל קדקוד w שהוא שכן של קדקוד v בצע:
   4.1 אם $\text{Used}(w) = \text{FALSE}$?
   אז בצע:

4.1.1 הוסף את הקשת (v, w) לקבוצת הקשתות המהוות עץ פורש T

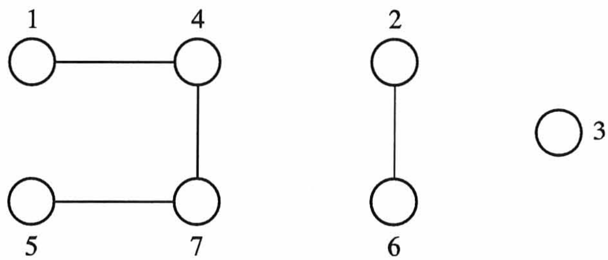
4.1.2 $P[w] \leftarrow v$

4.1.3 Search_DFS(w)

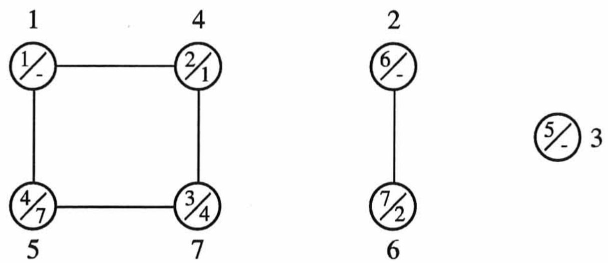
5. סוף הלולאה.

דוגמה:

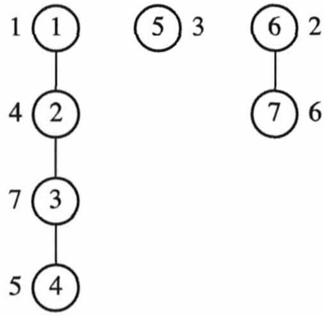
נתון הגרף הלא מכוון G שלהלן:



נפעיל על הגרף הנתון את האלגוריתם הרקורסיבי DFS(G) שתואר לעיל. קל לבדוק שתמונת המצב לאחר הפעלת האלגוריתם היא זאת המוצגת באיור שלהלן (בדקו!):



והעץ הפורש המתאים לסדר התיוג הוא:



קיבלנו יער.

כאמור, סדר התיוג אינו בהכרח יחיד, ולכן גם היער שנקבל אינו בהכרח יחיד.

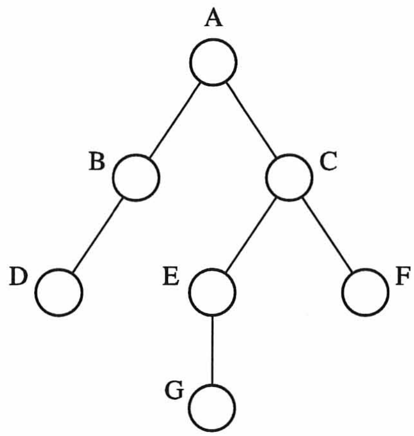
ניתוח היעילות של אלגוריתם הסריקה לעומק (DFS)

כידוע, סכום האורכים של רשימות הסמיכות, המייצגת את הגרף $G = (V, E)$, הוא $O(|E|)$.
הלולאות שבשורות 3 ו-5 של השגרה DFS מתבצעות בזמן $O(|V|)$, לא כולל הזמן הנדרש לביצוע הקריאה לשגרה Search_DFS(v).

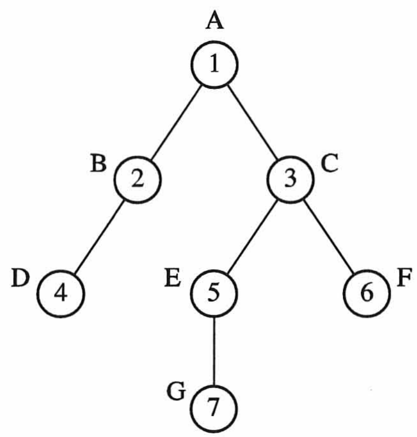
השגרה Search_DFS נקראת בדיוק פעם אחת עבור כל קדקוד $v \in V$. הלולאה המרכזית של Search_DFS(v) מתבצעת כסכום האורכים של רשימות הסמיכות, ולכן השגרה Search_DFS(v) מתבצעת בזמן $O(|E|)$. לפיכך, סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם DFS היא: $O(|V| + |E|)$.

סריקת עץ

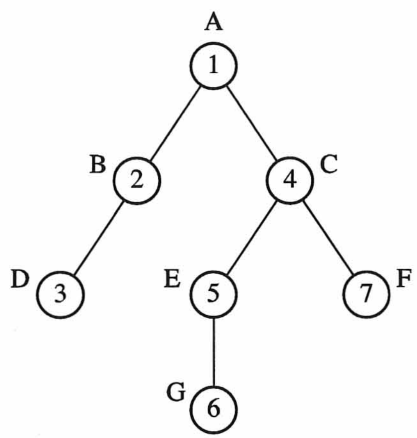
נבצע את תהליך הסריקה על העץ הזה:



לאחר הרצת האלגוריתם BFS על העץ הנתון נקבל את העץ הפורש BFS הזה :



ולאחר הרצת האלגוריתם DFS על העץ הנתון, נקבל את העץ הפורש הזה :



קל לראות, שכאשר מריצים את אלגוריתם ה-DFS או את אלגוריתם ה-BFS על עץ, מקבלים עץ פורש זהה, פרט לסדר הביקור בקדקודיו.

<u>אלגוריתם נוסף לסריקה לעומק</u>

באלגוריתם הזה מתבצעת צביעת הקדקודים כדי לציין את מצבם. כל קדקוד נצבע באחד מבין הצבעים: לבן, שחור ואפור.

בתחילת האלגוריתם כל קדקוד יהיה צבוע בצבע לבן. כאשר קדקוד מתגלה, כלומר מגיעים אליו תוך כדי הסריקה, הוא נצבע בצבע אפור.

כאשר אנו מסיימים את הטיפול בקדקוד (עוזבים אותו ולא חוזרים אליו), אז הקדקוד נצבע בצבע שחור.

נגדיר:

$d[u]$ מציין את מועד הגילוי של הקדקוד u בעת הסריקה.

$f[u]$ מציין את מועד סיום הטיפול בקדקוד u בעת הסריקה.

ברור כי: $d(u) < f(u)$

כמו כן, ברור כי צבע הקדקוד u, לכל קדקוד $u \in V$, יהיה לבן לפני הזמן $d[u]$, אפור בין הזמן $d[u]$ לבין $f[u]$, ושחור אחרי הזמן $f[u]$.

להלן האלגוריתם:

DFS(G)

1. עבור כל קדקוד $u \in V$

   בצע: 1.1 $\text{color}[u] \leftarrow \text{white}$

   1.2 $p[u] \leftarrow \text{NULL}$

   (/* בהתחלה כל הקדקודים צבועים בצבע לבן ולאף */)

   (/* אחד מהם אין הורה */)

2. $\text{time} \leftarrow 0$ (/* השעון מתחיל לתקתק */)

3. עבור כל קדקוד $u \in V$ בצע:

   אם $\text{color}[u]$ הוא צבע לבן

   אז בצע: $\text{DFS\_Visit}(u)$

DFS Visit(u)

1. אפור ← color[u]
2. time ← time + 1
3. $d[u]$ ← time
4. עבור כל קדקוד v שהינו קדקוד סמוך ל-u בצע:

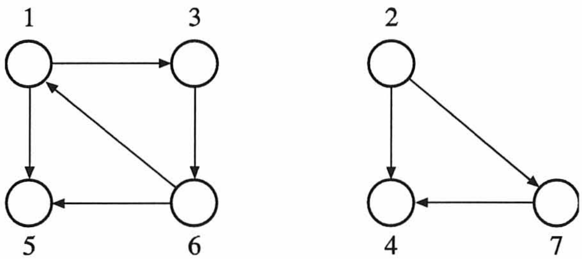
אם color[v] הוא צבע לבן

אז בצע: 4.1 $p[v] \leftarrow u$

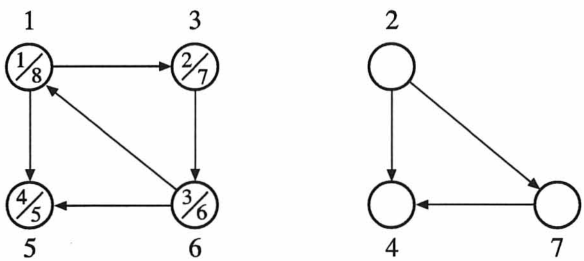
4.2 DFS_Visit(v)

5. שחור ← color[u]
6. time ← time + 1
7. $f[u]$ ← time

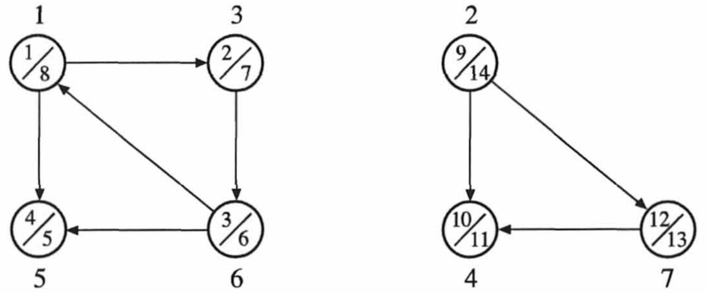
נראה את תוצאת ההרצה של האלגוריתם לחיפוש לעומק על הגרף שלהלן:



אם מתחילים את הסריקה בקדקוד 1, לאחר הפעלת הסריקה על תת-הגרף השמאלי נקבל:



בכל קדקוד u רשומים $d(u)/f(u)$. אם ממשיכים את הסריקה בקדקוד 2 נקבל:



בסוף הפעלת האלגוריתם, כל קדקודי הגרף צבועים בצבע שחור.

5.6.2 אלגוריתם למציאת רכיבים קשירים בגרף לא מכוון בעזרת סריקה לרוחב (BFS)

בגרף הלא מכוון G האלגוריתם DFS(G) מוצא את רכיבי הקשירות, והאלגוריתם BFS(G, a)-ו מוצא את רכיב הקשירות שהרכיב a נמצא בו. אפשר לשכתב בקלות את האלגוריתם BFS(G) כך שנוכל למצוא את כל רכיבי הקשירות.

בתהליך של סריקת צומתי הגרף בשיטת BFS נשתמש במערך הבוליאני Used, כך ש-Used[v] מציין אם ביקרנו בקדקוד v או לא. בנוסף, נשתמש במשתנה count אשר מונה את מספר הרכיבים הקשירים.

להלן האלגוריתם המבוקש :

1. count ← 0
2. לכל קדקוד v בגרף בצע :
   2.1 אם ל- Used[v] ערך FALSE, אז בצע :
      2.1.1 קרא לשגרה BFS[G] כאשר קדקוד המקור הוא v.
      2.1.2 count ← count + 1

הערות :

1. קל לראות שסיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם היא $O(|E| + |V|)$.
2. אם ברצוננו להדפיס את כל הקדקודים שנמצאים באותו רכיב קשיר של V, נוכל לעשות זאת בצורה רקורסיבית, בעזרת פרישת עץ בשיטת inorder או preorder , בזמן $O(|V|)$.

5.6.3 אלגוריתם למציאת רכיבי קשירות חזקה בגרפים מכוונים (Strong Connected Component – SCC)

<u>צעד 1</u> : מריצים אלגוריתם DFS(G), ויוצרים רשימת קדקודים (L) אשר ממוינת בסדר יורד לפי הזמן של סיום הטיפול בהם.

<u>צעד 2</u> : הופכים את הגרף $G = (V, E)$ ומקבלים $G^T = (V, E^T)$
כאשר $E^T = \{(U, V) \mid (V, U) \in E\}$, כלומר הופכים את קשתות הגרף.

<u>צעד 3</u> : מריצים אלגוריתם DFS(G^T), כך שהלולאה המרכזית של DFS עוברת על קדקודי הגרף לפי הסדר , כפי שנקבע בצעד 1 ברשימה L.

העצים הפורשים DFS שמתקבלים בסוף צעד 3 הם רכיבי הקשירות החזקה של הגרף y.

יעילות האלגוריתם :

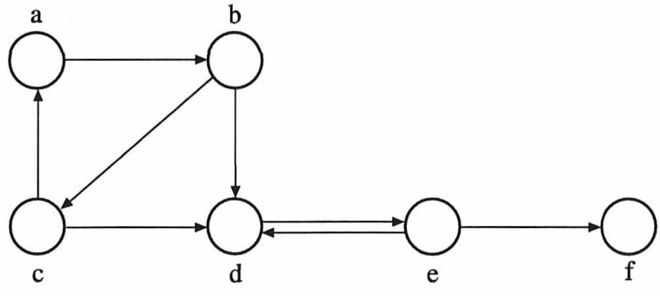
צעד 1 דורש זמן $O(|E|) + |V|)$

צעד 2 דורש זמן $O(|E|) + |V|)$

צעד 3 דורש זמן $O(|E|) + |V|)$

וביחד : סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הנידון היא : $O(|E|) + |V|)$.

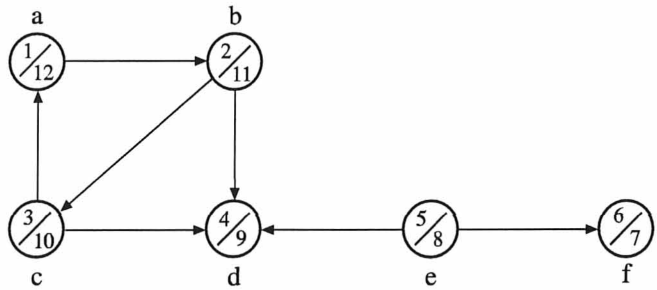
נדגים את אופן הפעולה של האלגוריתם (SCC) שתואר לעיל על הגרף שלהלן :



<u>צעד 1</u>

נריץ את האלגוריתם DFS(G) כאשר קדקוד המקור הוא a.

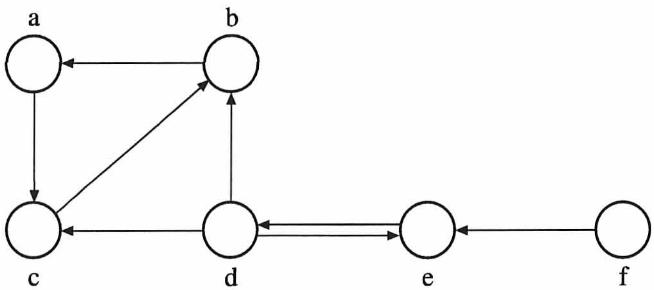
תמונת המצב בסיום השלב הזה מוצגת באיור שלהלן :



(בדקו !) $L = \{a, b, c, d, e, f\}$

<u>צעד 2</u>

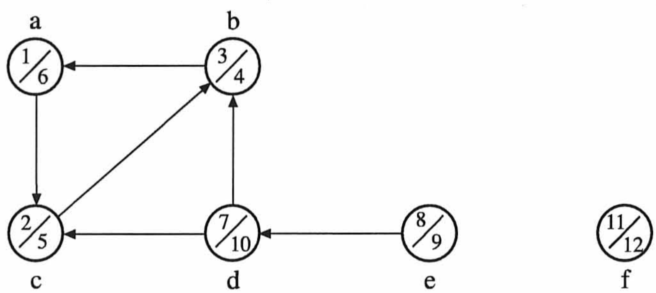
ניצור גרף G^T (שקשתותיו הפוכות). תמונת המצב מוצגת באיור שלהלן :



<u>צעד 3</u>

כעת נריץ את האלגוריתם DFS על הגרף G^T, לפי הסדר, כפי שמופיע ברשימה L אשר התקבלה בצעד 1 .

תמונת המצב בסיום השלב הזה מוצגת באיור שלהלן :



העצים הפורשים DFS שמתקבלים הם :

$$\begin{array}{ccc} a & d & f \\ \downarrow & \downarrow & \\ c & e & \\ \downarrow & & \\ b & & \end{array}$$

לפיכך, בגרף הנתון שלושה רכיבים קשירים, והם (כצפוי):

$\{a, c, b\}$

$\{d, e\}$

$\{f\}$

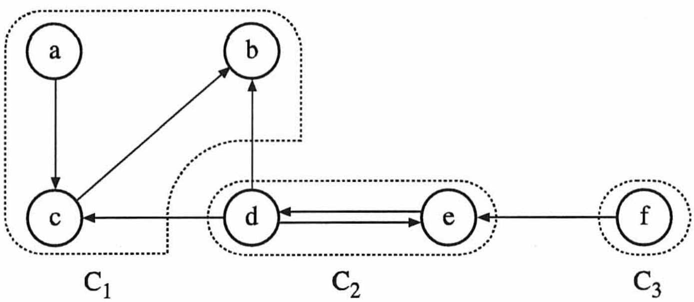
בספר הזה לא נעסוק בהוכחת האלגוריתם המוצע כיוון שהוכחת השיטה אינה נכללת בדרישות הקורס.

בהמשך לדוגמה הקודמת קיבלנו שלושה רכיבי קשירות חזקה (רק"ח) והם:

$C_1 = \{a, c, b\}$

$C_2 = \{d, e\}$

$C_3 = \{f\}$



5.7 מיון טופולוגי

דוגמה ליישום האלגוריתמים שנלמדו בסעיף הקודם היא פתרון לבעיית תכנון פרויקטים. כל הבעיות חוץ מהפשוטות ביותר, ניתנות לחלוקה לתתי-בעיות הנקראות **פעילויות**.

לדוגמה, סטודנט שלומד לקראת תואר במדעי המחשב חייב ללמוד מספר קורסים. במקרה זה **הבעיה** היא לקבל את התואר, **והפעילויות** הן הקורסים שהוא צריך לקחת. בטבלה שלהלן מפורטים כל הקורסים שיש ללמוד כדי לקבל תואר במדעי המחשב, באוניברסיטה מסוימת.

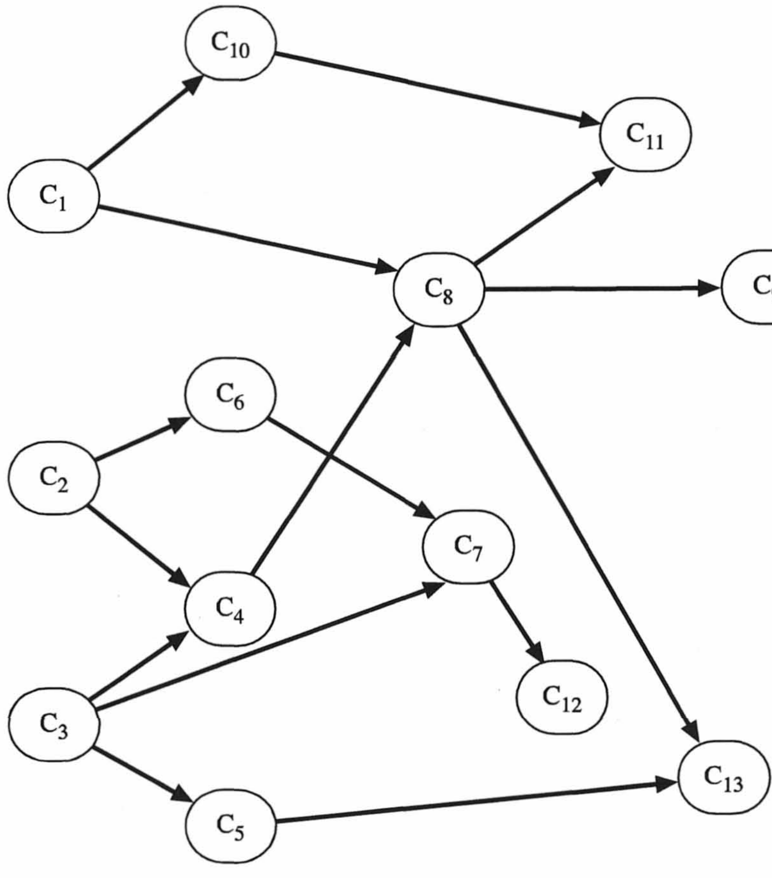
קוד הקורס	***שם הקורס***	***דרישות-קדם***
C_1	מבוא למדעי המחשב	אין
C_2	חדו"א 1	אין
C_3	אלגברה ליניארית 1	אין
C_4	חדו"א 2	C_2, C_3
C_5	אלגברה ליניארית 2	C_3
C_6	מתמטיקה דיסקרטית	C_2
C_7	מבוא להסתברות	C_3, C_6
C_8	מבני נתונים	C_1, C_4
C_9	אלגוריתמיקה מתקדמת	C_8
C_{10}	מבנה מחשבים ותכנות מערכות	C_1
C_{11}	מערכות הפעלה	C_8, C_{10}
C_{12}	סטטיסטיקה	C_7
C_{13}	גרפיקה ממוחשבת	C_5, C_8

לפי דרישות-הקדם של קורס מסוים, שהקוד שלו C_i, הסטודנט חייב ללמוד את כל הקורסים הרשומים בדרישות-הקדם של הקורס C_i לפני שהוא מתחיל ללמוד את הקורס C_i.

חלק מן הקורסים נלמדים בלא תלות בקורסים אחרים, ואילו לחלק מן הקורסים ישנם תנאים מקדימים (דרישות-קדם). כך למשל, סטודנט יכול ללמוד אלגברה לינארית 1 (C_3) ללא תלות בקורסים אחרים, ולעומת זאת הוא יכול ללמוד את הקורס מבני נתונים (C_8) רק לאחר שסיים את לימודיו בשני הקורסים: מבוא למדעי המחשב (C_1) ו חדו״א 2 (C_4).

את יחס הקדימויות ניתן לייצג בגרף מכוון, שקדקודיו מייצגים קורסים והקשתות המכוונות מייצגות את סדר הקדימות. קשת מכוונת (u, v) פירושה שיש ללמוד את הקורס u לפני שמתחילים ללמוד את הקורס v.

להלן גרף המתאר את יחס הקדימויות בין הקורסים השונים שתוארו לעיל:



הגדרות:

- הגרף המכוון G, שקדקודיו מייצגים משימות או פעילויות והקשתות המכוונות מייצגות יחס קדימויות בין המשימות, נקרא רשת AOV ‏(Activity On Vertex).
- קדקוד u ברשת AOV נקרא **קדקוד מקדים** של הקדקוד v אם ורק אם קיים מסלול מכוון מ-u ל-v.
- קדקוד v ברשת AOV נקרא **קדקוד עוקב** של הקדקוד u אם הקדקוד u הוא קדקוד מקדים של הקדקוד v.
- **מיון טופולוגי** (topological sort) של גרף מכוון ללא מעגלים הוא סידור ליניארי של כל קדקודי הגרף כך שאם בגרף יש קשת מכוונת (i, j), אזי i מופיע לפני j בסידור זה.

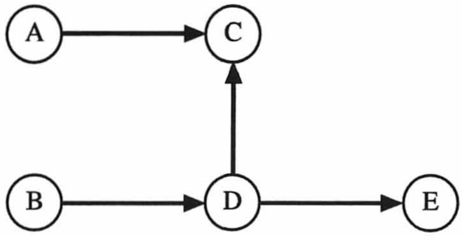
בהמשך לדוגמה שראינו לעיל, להלן שתי אפשרויות למיון טופולוגי, מבין האפשרויות הרבות לסידור טופולוגי, ואלו הן:

1. $C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_6, C_4, C_5, C_8, C_{11}, C_9, C_7, C_{12}, C_{13}$
2. $C_1, C_{10}, C_3, C_2, C_4, C_8, C_9, C_{11}, C_5, C_5, C_{13}, C_7, C_{12}$

הערה: אם בגרף ישנו לפחות מעגל אחד, אזי לא ניתן לסדר את קדקודי הגרף בשום סדר ליניארי שיכול לייצג את המיון הטופולוגי. בדוגמה הנדונה, המשמעות של מעגל היא שקורס כלשהו מהווה דרישת-קדם של אותו קורס, כלומר, הקדקוד u הוא קדקוד מקדים של u. פירושו של דבר – תלמיד חייב לסיים את הקורס u לפני שהוא מתחיל ללמוד את הקורס u. ברור שמצב כזה הוא בלתי אפשרי ולכן מיון טופולוגי מוגדר בגרפים מכוונים ללא מעגלים.
אם מדיניות האוניברסיטה שבדוגמה היא שבכל סמסטר סטודנט יכול ללמוד רק קורס אחד, אז הוא חייב ללמוד אותם על-פי הסדר הטופולוגי.

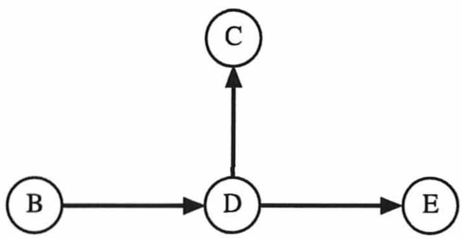
להלן גרסאות שונות של האלגוריתמים הפשוטים שלהלן, אשר יוצרים סידור ליניארי של קדקודים בגרף מכוון ללא מעגלים, כאשר הסידור הליניארי הזה מייצג את המיון הטופולוגי.

בטרם ננסח את האלגוריתם, נתבונן ברשת AOV הזאת:

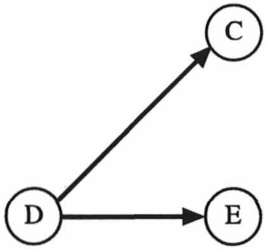


נראה מיון טופולוגי של הגרף הזה כסידור של קדקודיו לאורך קו אופקי כך שכל הקשתות פונות משמאל לימין.

לקדקודים A ו-B אין קדקודים מקדימים, ולכן נבחר אחד מהם באופן מקרי ונצרף אותו לרשימה המייצגת מיון טופולוגי. נניח שבחרנו בקדקוד A מבין הקדקודים A, B שאין להם קדקודים מקדימים. לאחר שהפעילות A בוצעה, אנו מסירים אה הקדקוד A ואת כל הקשתות היוצאות מן הקדקוד הזה בגרף, ולכן תמונת הרשת עתה היא :



בשלב זה לקדקוד B אין קדקוד מקדים (והוא היחיד). עתה נבצע את הפעילות B. נסיר את הקדקוד B מן הגרף, ואת כל הקשתות היוצאות מן הקדקוד הזה בגרף, ולכן תמונת הרשת עתה היא :



בשלב הזה רק לקדקוד D אין קדקוד מקדים. עתה נבצע את הפעילות D ותמונת הרשת היא :

בשלב הזה לשני הקדקודים C ו-E אין קדקודים מקדימים, ולכן נבחר באופן מקרי אחד מהם ונצרף אותו לרשימה המייצגת מיון טופולוגי. נניח שבחרנו בקדקוד C מבין הקדקודים E ו-C.

לאחר שהפעילות C בוצעה, תמונת הרשת היא :

בשלב הזה לקדקוד E אין קדקוד מקדים (והוא היחיד). עתה נבצע את הפעילות E והרשת היא גרף ריק. בזה מסתיים התהליך שקובע את המיון הטופולוגי.

סופית, המיון הטופולוגי שהתקבל הוא :

$$A\ B\ D\ C\ E$$

הערה : ייתכן שבשלב מסוים יהיו יותר מקדקוד אחד שאין לו קדקוד מקדים. ואולם מאחר שבכל שלב ניתן לבצע רק פעילות אחת בלבד, אז בוחרים באופן מקרי קדקוד אחד מבין הקדקודים שאין להם קדקודים מקדימים ומצרפים אותו לרשימה המייצגת מיון טופולוגי. הדבר יוצר מספר סידורים טופולוגיים אפשריים.

מיון טופולוגי נוסף עבור הגרף הנתון הוא :

$$B\ A\ D\ E\ C$$

וקיימות אפשרויות נוספות.

להלן אלגוריתם למיון טופולוגי. באלגוריתם הזה נשתמש במבנה הנתונים תור (queue), שבו נשמור את הקדקודים שאין להם קדקודים מקדימים.

אלגוריתם למיון טופולוגי :

1. איתור קדקודי הגרף שאין להם מקדימים וצירופם לתור (Q).
2. כל עוד התור (Q) אינו ריק, יש לבצע את הצעדים שלהלן :

2.1 הוצא איבר מראש התור וצרף אותו לרשימה המייצגת סדר טופולוגי.

2.2 מחק בגרף את הקדקוד, שיצא זה עתה מהתור, ובנוסף, מחק את כל הקשתות היוצאות מהקדקוד הזה.

2.3 בגרף החדש, שהתקבל בצעד 2.2, יש לצרף כל קדקוד שאין לו קדקודים מקדימים לתור (Q).

3. בשלב הזה, התור ריק והאלגוריתם מסתיים.

לפנינו שלוש שאלות עיקריות:

1. איך מבטאים את סדר הקדימות בין הפעילויות השונות בקלט?
2. כיצד נייצג את הגרף?
3. כיצד אפשר לקבוע לאיזה קדקוד אין קדקוד מקדים?

נענה על השאלות האלו להלן:

איך מבטאים את סדר הקדימויות?

סדר הקדימות מתבטא בקלט באמצעות זוגות סדורים. כל שורה בקלט מכילה שמות של שתי פעילויות המופיעות זו אחר זו, כאשר הראשונה צריכה להתבצע לפני השנייה.

כיצד נייצג את הגרף?

אם מספר הקדקודים בגרף ידוע מראש, אז יש אפשרות לייצג את הגרף באמצעות מטריצת סמיכות או רשימות סמיכות – ולא, נשתמש בייצוג המקושר של גרף. בהמשך נניח שמספר הקדקודים בגרף ידוע מראש, והגרף מיוצג באמצעות רשימות סמיכות.

כיצד אפשר לקבוע לאיזה קדקוד אין קדקוד מקדים?

לשם כך נחזיק מערך בשם indegree כך ש-indegree[*j*] מכיל את מספר הקדקודים הקודמים לקדקוד *j*.

אם indegree[*j*] שווה אפס, פירוש הדבר שלקדקוד *j* אין קדקודים מקדימים וניתן לצרף אותו לתור *Q*. זאת כיוון שבתור *Q* נמצאים קדקודים שאין להם מקדימים והם אמורים לצאת מהתור אחד אחרי השני ולהצטרף לרשימה המייצגת מיון טופולוגי. בכל פעם שהקדקוד *j* יוצא מן התור, יש לעבור על רשימת הסמיכות של הקשתות היוצאות מן הקדקוד *j* ולהפחית את המערך indegree[*k*] של כל צומת *K* הסמוך ל-*j* ב-1.

לסיכום, להלן האלגוריתם למיון טופולוגי בעזרת התור:

```
TP_Sort(Graph G)
{
```

```
  Queue Q;
                    //Find indegree of each vertex/
 for each v ε V do
          indegree[v] = 0;
 for each (u,v) ε E do
          indegree[v] ← indegree[v] + 1;
```

/*איתור כל הקדקודים*/
/*שאין להם מקדימים*/
/*וצירופם לתור Q*/

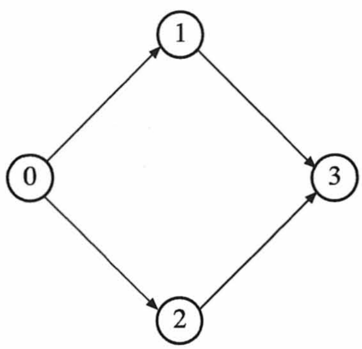
```
for each v ε V do
  if indegree[v] = 0 then
  Insert(Q,v);
  While Q ≠ φ do
     v = Delete(Q);
     print v;
     for each u ε Adj[v] do
     indegree[u] = indegree[u] - 1;
     if indegree[u] = 0 then
     Insert (Q,u);
}
```

ניזכר כי הפעולות הבסיסיות המוגדרות על התור Q הן :

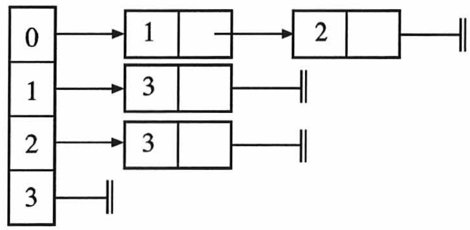
$\text{Insert}(Q, v)$ – פעולה זו מוסיפה את האיבר v לעורף התור Q.

$\text{Delete}(Q)$ – פעולה זו מסירה ומחזירה את האיבר שבחזית התור Q.

נדגים את הרצת האלגוריתם הנדון על הגרף הבא :



הגרף מיוצג באופן הזה :



תמונת המערך indegree, כאשר indegree[i] מציין את דרגת הכניסה של הקדקוד i, הנה:

indegree = [0, 1, 1, 2]

בתור Q רק לקדקוד 0 אין קדקוד מקדים.

$Q = \{0\}$

<u>שלב 1</u>

- מסירים את קדקוד 0 מהתור.
- ניגשים למערך של הרשימות לאינדקס 0 ומגלים את כל הקדקודים הסמוכים לקדקוד 0, שהם הקדקודים 1 ו-2.
- עתה יש לבטל את הקשתות (0,1) ו-(0,2) ולהפחית את indegree[1] ו-indegree[2] ב-1. תוך כדי הפחתה של ה-indegree[1] וה-indegree[2] ב-1.
- אם הערך החדש שווה אפס, אז לקדקוד המתאים אין קדקוד מקדים ומצרפים אותו לתור Q.

במקרה שלנו תמונת המצב היא:

indegree = [0, 0, 0, 2]

$Q = \{1, 2\}$

הערה: סדר הקדימויות בתור הוא משמאל לימין.

<u>שלב 2</u>

- מסירים את הקדקוד 1 מהתור.
- ניגשים למערך של רשימות לאינדקס 1 ומגלים שהקדקוד 3 הוא קדקוד סמוך לקדקוד 1. לפיכך, יש לבטל את הקשת (1,3) ולהפחית את indegree[3] ב- 1.

עתה נקבל:

indegree = [0, 0, 0, 1]

$Q = \{2\}$

הקדקוד 3 לא הצטרף לתור Q כיוון שעדיין יש לו קדקוד מקדים (רואים גם ש indegree[3] שונה מאפס).

<u>שלב 3</u>

- מסירים את קדקוד 2 מהתור.
- ניגשים למערך של רשימות לאינדקס 2 ומגלים שהקדקוד 3 הוא קדקוד סמוך לקדקוד 2. לפיכך, יש לבטל את הקשת (2,3) ולהפחית את indegree[3] ב-1.

עתה נקבל:

indegree = [0, 0, 0, 0]

$Q = \{3\}$

קדקוד 3 הצטרף לתור, כיוון שבשלב הזה אין לו קדקוד מקדים כי indegree[3] שווה אפס.

<u>שלב אחרון</u>

- מסירים את קדקוד 3 מהתור;
- ניגשים למערך של רשימות לאינדקס 3 ומגלים שאין קדקודים סמוכים לקדקוד 3 ואין במי לטפל.

עתה תמונת המצב היא:

indegree = [0, 0, 0, 0]

והתור $\{Q\}$ ריק. כלומר המיון הסתיים.

תוצאת המיון הטופולוגי היא:

$\xrightarrow{0\ \ 1\ \ 2\ \ 3}$

טענה: סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם למיון טופולוגי היא $O(|V| + |E|)$.

הוכחה:

כידוע, עבור גרף G, שהנו גרף מכוון, הסכום של אורכי כל רשימות הסמיכות הוא $|E|$.

- הלולאה הראשונה (for) מתבצעת בזמן $O(|V|)$.
- הלולאה השנייה (for) מתבצעת בזמן $O(|E|)$.
- הלולאה השלישית (for) מתבצעת בזמן $O(|V|)$.
- כיוון שהגישה לאינדקס מסוים במערך אורכת זמן של $O(1)$, וגם הפעולה – הוספת איבר לסוף התור – אורכת זמן של $O(1)$.
- מספר הצעדים בלולאה הרביעית (while) הוא כסכום האורכים של כל הרשימות הסמוכות, שהוא $O(|E|)$.
- הלולאה החמישית (for) מתבצעת בזמן $O(|V|)$.

וביחד, סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הנדון היא:

$$O(|V| + |E|) = O(\max(|V|, |E|))$$

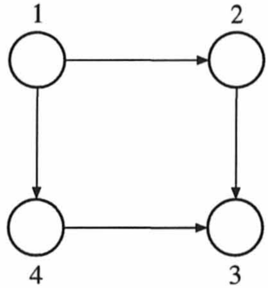
להלן גרסה שנייה של האלגוריתם למיון טופולוגי באמצעות סריקת גרף לעומק:

TP_Sort (Graph G)

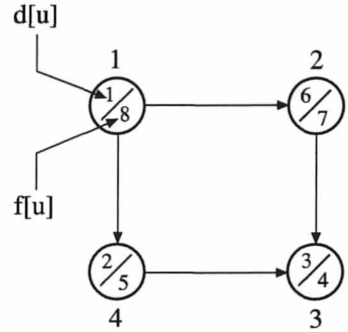
1. קרא לשגרה $DFS(G)$ כאשר השגרה DFS מחשבת את ה-$f[v]$, המציין את מועד הסיום של הקדקוד v, עבור כל קדקוד v; כאשר הטיפול בקדקוד v מסתיים, אז שים אותו בחזית הרשימה המייצגת את המיון הטופולוגי.
2. הדפס את הרשימה המייצגת את המיון הטופולוגי.

קל לראות שסיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הזה היא כסיבוכיות הריצה של השגרה DFS שהיא: $O(|V| + |E|)$.

דוגמה: נתון הגרף שלהלן:



כאשר נפעיל את השגרה DFS על הגרף הנתון, נקבל :



והמיון הטופולוגי של הגרף הוא (משמאל לימין) :

(1, 2, 3, 4)

זאת, כיוון שבשלב הראשון הטיפול הסתיים בקדקוד 3, אחריו הסתיים הטיפול בקדקוד 4, אחריו הסתיים הטיפול בקדקוד 2, ולבסוף הסתיים הטיפול בקדקוד 1 .

5.7.1 שאלות לסיכום סעיף 5.7

שאלה 5.23

נתון המידע הבא עבור המשתנים A, B, C, D, E, F:

$$A < B\ ;\ C < B\ ;\ C < F\ ;\ A < F\ ;\ D < E\ ;\ E < F\ ;\ C < D$$

א. אפשר לייצג את המידע הזה-על ידי גרף מכוון, בדרך הזאת :

כל משתנה מיוצג על-ידי קדקוד בגרף.

כל יחס $X < Y$ מיוצג על-ידי קשת מכוונת מ-X ל-Y.

ציירו את הגרף המייצג את המידע הנתון.

ב. (1) מתוך התבוננות בגרף בלבד, כיצד תוכלו לדעת בכמה יחסים משתתף כל משתנה?

(2) בזיכרון המחשב מאוחסנת המטריצה $N(10, 10)$, המייצגת גרף מכוון, אשר מכיל מידע (אוסף יחסים $X < Y$) על עשרה משתנים $A, B, C, \ldots, J$.

המטרה היא לכתוב שגרה המוצאת את המשתנה שמשתתף במספר מקסימלי של יחסים (אם יש יותר ממשתנה אחד כזה, השגרה תמצא את כולם).

להלן אלגוריתם שהוצע עבור הבעיה :

1. איפוס מערך שורות – Shurot { גודלו (10) Shurot }.
2. איפוס מערך עמודות – Amudot { גודלו (10) Amodot }.
3.

```
for (i = 0 ; i < n , i ++)
for (j = 0 ; j < n , j ++)
Shurot[i]   += M [i][j];
Amudot[j] += M[i][j]
```

4. ________(1)________.
5. ________(2)________.
6. ________(3)________.

באלגוריתם הזה חסרים שלושה ביטויים, המסומנים בספרות בין סוגריים עגולים.

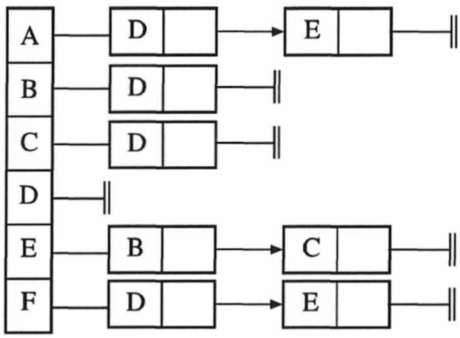
רשמו במחברתכם את מספרי הביטויים החסרים (1)-(3) בלבד, בסדר עולה, וכתבו בצד כל מספר את הביטוי החסר שהוא מייצג.

ג. האם ייתכן שישנו מעגל (מכוון)בגרף כזה ? נמקו את תשובתכם.

שאלה 5.24

בצעו הרצה ידנית של אלגוריתם המיון הטופולוגי על הקלט הנתון להלן, בצורת רשימות סמיכות. התשובה צריכה להינתן בטבלה. הטבלה צריכה לתאר את תוכן התור ואת ערכי ה-*indgree* של הקדקודים בכניסה לכל איטרציה של לולאת ה-*while*, וכן את הפלט. מומלץ לצייר את הגרף, אך שימו לב, על הריצה להראות כיצד יפעל האלגוריתם על **מבנה הנתונים הספציפי הנתון**.

להלן הקלט (שמות הקדקודים מצוינים באותיות):

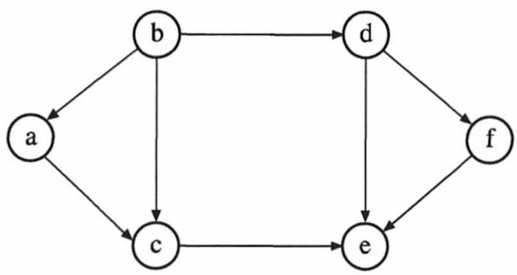


שאלה 5.25

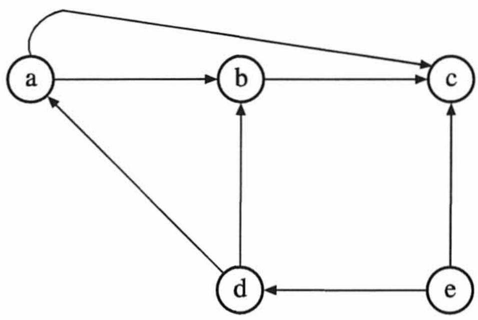
הראו את סידור הקדקודים הנוצר על-ידי אלגוריתם המיון הטופולוגי כאשר מריצים אותו על הגרפים הבאים:

אם לא ניתן למצוא את הסידור המבוקש, ציינו מה הסיבה לכך.

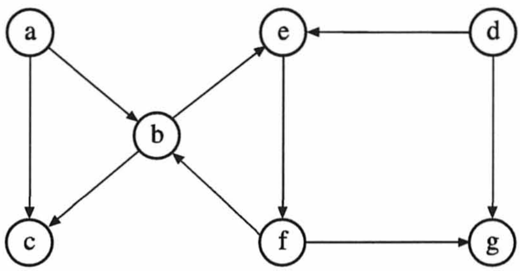
א.



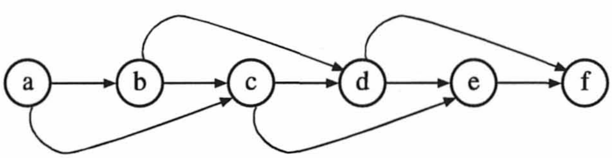
ב.



ג.

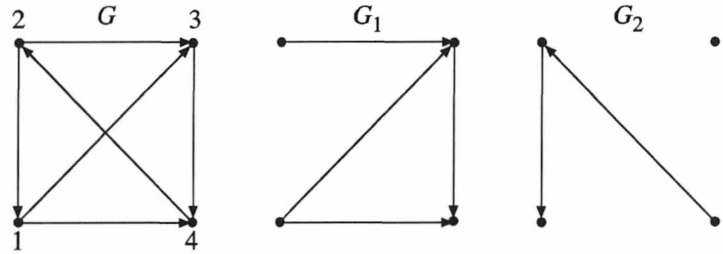


ד.



שאלה 5.26

נתון גרף מכוון פשוט $G = (V, E)$. "פירוק של G לשני גרפים אציקליים" הוא חלוקה של קבוצת הקשתות E לשתי קבוצות E_1 ו-E_2 זרות, כך ששני תת-הגרפים: $G_1 = (V, E_1)$ ו-$G_2 = (V, E_2)$ הם אציקליים (ללא מעגלים).



להלן טענה: אפשר לפרק כך כל גרף מכוון. הוכיחו את הטענה על-ידי הצגת אלגוריתם המבצע זאת. הדגימו אותו על קלט המתאר את הגרף שלמעלה (שימו לב – קיימות אפשרויות נוספות לפירוק הגרף). הוכיחו אותו ונתחו את יעילותו – רצוי להגיע לזמן ליניארי.

שאלה 5.27

הוכיחו כי גרף מכוון לא יהיה גרף מעגלי אם ורק אם ניתן למספר את קדקודי הגרף כך שלכל קשת (i, j) מתקיים $i < j$.

שאלה 5.28

נתון גרף מכוון. להלן אלגוריתם הממספר את הקדקודים של הגרף כך שעבור כל קשת (i, j) מתקיים $i < j$.

הניחו כי הגרף מיוצג באמצעות מטריצת סמיכות.

להלן הסימונים שנשתמש בהם:

$v(k)$ – מציין את המספור החדש של הקדקוד k.

$d[j]$ – מציין את דרגת הכניסה של הקדקוד j, כלומר מספר הקשתות הנכנסות לקדקוד j.

להלן האלגוריתם:

<u>צעד 1</u>

1.1 לכל קדקוד j, $j = 1 \ldots n$,

בצע:

$$d\,[\,j\,] = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

1.2 $N = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

1.3 $m = 1$

<u>צעד 2</u>

2.1 מצא קדקוד k, מבין הקדקודים שבקבוצה N, כך ש-0 = d[k]

2.2 אם אין k כזה, אזי עצור והודע שהגרף המכוון הוא מעגלי

2.3 v(k) = m

2.4 ______(1)______

2.5 ______(2)______

2.6 אם N היא קבוצה ריקה, אז סיים את האלגוריתם.

<u>צעד 3</u>

3.1 עבור כל קדקוד j, כאשר $j \in N$, בצע: $d[j] =$ ______(3)______

3.2 חזור על צעד 2.

בקוד הנתון חסרים שלושה ביטויים המסומנים בספרות בין סוגריים עגולים. השלימו את החסר.

שאלה 5.29

מסלול המילטון הוא מסלול העובר בכל הקדקודים, בכל קדקוד פעם אחת בדיוק. המסלול יכול להתחיל בכל קדקוד שהוא, ולהסתיים בכל קדקוד אחר. בגרף מכוון, גם המסלול צריך להיות מכוון.

א. מצאו מסלול המילטון בגרף G המצויר בשאלה 5.26.

ב. הוכיחו: אם בגרף מכוון אציקלי יש מסלול המילטון, נניח $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, אז יש לו מיון טופולוגי יחיד (כלומר: סידור אחד ויחיד של הקדקודים מהווה מיון טופולוגי חוקי).

ג. אם ידוע שלגרף יש לו מיון טופולוגי יחיד, האם נובע מכך שיש מסלול המילטון? הוכיחו או הראו דוגמאות נגדיות.

ד. כתבו אלגוריתם יעיל למציאת מסלול המילטון בגרף מכוון אציקלי. האלגוריתם נדרש למצוא מסלול כזה, אם ישנו, או להודיע שלא קיים מסלול כזה, אם איננו.

שאלה 5.30 (רשות)

נתון גרף מכוון. כמה זמן דרוש למציאת כל הצמתים שמכל אחד מהם ניתן להגיע אל כל צומתי הגרף? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 5.31 (רשות)

א. הוכיחו כי הגרף המכוון G אינו מכיל מעגלים אם ורק אם DFS(G) אינו מניב קשתות לאחור.

ב. האם האלגוריתם מיון טופולוגי יוצר יחס כזה:
$f[v] < f[u]$ כאשר (u, v) הנה קשת בגרף מכוון ללא מעגלים? נמקו את תשובתכם.

ג. הוכיחו כי "האלגוריתם מיון טופולוגי" יוצר מיון טופולוגי של גרף מכוון ללא מעגלים.

5.8 מציאת המסלולים הקצרים ביותר בין כל הזוגות

עד כה הכרנו שיטות למציאת מסלולים קצרים ביותר מקדקוד מקור יחיד. בסעיף זה נכיר שיטות שונות למציאת מסלולים קצרים ביותר בין כל זוגות הקדקודים בגרף.

אלגוריתם דיקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר בין כל הזוגות:

בפרק הקודם הכרנו את אלגוריתם דיקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר מקדקוד מקור יחיד. עתה נפעיל את אלגוריתם דיקסטרה n פעמים כאשר $n = |V|$, ובהפעלה ה-i-ית קדקוד המקור היחיד יהיה קדקוד i עבור $1 \le i \le n$.

נתון הגרף $G = (V, E)$ וכל המשקלות של הקשתות הם אי-שליליים.

נניח שבגרף $n = |V|$ קדקודים הממוספרים באופן אקראי מ-1 עד n, והגרף G מיוצג בעזרת מטריצת סמיכות כדלהלן (E_{ij} – המשקל שעל הקשת (i, j)):

$$a_{ij} = \begin{cases} E_{ij} & \text{אם קיימת קשת } (i, j) \\ 0 & i = j \\ \infty & \text{אחרת} \end{cases}$$

$d[i][v]$ – מציין את אורך המסלול הזמני הקצר ביותר מקדקוד המקור i לקדקוד v.

ברור כי $d[i][i]$ שווה אפס לכל $1 \le i \le n$, כי כל המשקלות של הקשתות הם אי-שליליים, לכן אורך המסלול הקצר ביותר מקדקוד מקור i לעצמו הוא 0.

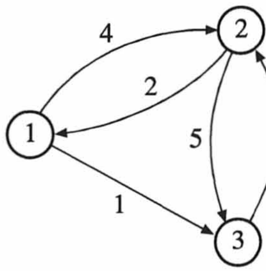
כמו כן $d[i][j] = a_{ij}$ מאחר ש-a_{ij} מתאר את אורך המסלול המינימלי הזמני מקדקוד מקור i לקדקוד j.

לסיכום, האלגוריתם המבוקש הוא:

1. לכל קדקוד i, עבור $i = 1, \dots n$, בצע: $d[i][i] = 0$.
2. לכל קדקוד i, עבור $i = 1, \dots n$, בצע:
   2.1 לכל קדקוד j, עבור $j = 1 \dots n$
   בצע: אם $i \ne j$ אז $d[i][j] = a_{ij}$.
3. לכל קדקוד מקור i, עבור $i = 1 .. n$
   בצע: קרא לשגרה דיקסטרה (G, i, d).

השגרה דיקסטרה מוצאת מסלולים קצרים מקדקוד המקור i ליתר הקדקודים.

עבור הגרף הזה:



באיטרציה הראשונה קדקוד מקור הוא קדקוד 1.

עתה נפעיל את האלגוריתם דיקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר מקדקוד מקור 1 ליתר הקדקודים, ואז נקבל:

קדקוד j	1	2	3
$d[1][j]$	0	2	1

(בדקו!)

באיטרציה השנייה קדקוד המקור הנו קדקוד 2.

עתה נפעיל את האלגוריתם דיקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר מקדקוד המקור 2 ליתר הקדקודים, ואז נקבל:

קדקוד j	1	2	3
d[2][j]	2	0	3

(בדקו!)

באיטרציה השלישית קדקוד המקור הנו קדקוד 3.

עתה נפעיל את האלגוריתם דיקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר מקדקוד מקור 3 ליתר הקדקודים, ואז נקבל:

קדקוד j	1	2	3
$d[3][j]$	3	1	0

(בדקו!)

קיבלנו מטריצת המסלולים הקצרים בין כל הזוגות והיא:

	1	2	3
1	0	2	1
2	2	0	3
3	3	1	0

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ראינו בסעיף 5.4, כי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם דיקסטרה, הפותר את בעיית המסלולים הקצרים ביותר מקדקוד מקור **יחיד**, היא $O(|V|^2)$. לפיכך, סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הנדון היא $O(|V|^3)$, כי:

צעד 1: דורש זמן $O(|V|)$

צעד 2: דורש זמן $O(|V|^2)$

צעד 3: דורש זמן $O(|V| \cdot |V|^2) = O(|V|^3)$

וסיבוכיות זמן הריצה הכללית הנה:

$O(|V|) + O(|V|^2) + O(|V|^3)$

מסקנה: סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הנדון היא $O(|V|^3)$.

האלגוריתם של פלויד-וורשל (Floyd-Warshall) למציאת מסלולים קצרים בין כל הזוגות

נתון גרף מכוון $G = (V, E)$ עם פונקציית משקל $W : E \to R$.

כלומר, לכל קשת מתאימים משקל. להלן מספר דרישות לצורך ביצוע האלגוריתם:

א. הגרף G מיוצג בעזרת מטריצת סמיכות (a_{ij}), אשר מוגדרת באופן הבא:

$$a_{ij} = \begin{cases} E_{ij} & \text{אם קיימת קשת } (i, j) \\ 0 & i = j \\ \infty & \text{אחרת} \end{cases}$$

ב. המשקל על הקשת יכול להיות חיובי או שלילי, אולם הגרף אינו מכיל מעגלים בעלי משקל שלילי.

ג. נגדיר: d_{ij} – משקל המסלול הקצר ביותר מהקדקוד i אל הקדקוד j.

ד. כמו כן, נגדיר $d_{ij}^{(m)}$ – משקל המסלול הקצר ביותר מהקדקוד i אל הקדקוד j כאשר כל קדקודי הביניים במסלול הזה שייכים לקבוצה $\{1, 2, \dots \dots, m{-}1\}$. כלומר המסלול הזה לא יעבור דרך הקדקודים, שמספרם מ-m עד n.

קל לראות כי $d_{ij}^{(1)} = a_{ij}$ כי: $d_{ij}^{(1)}$ הוא משקל המסלול הקצר ביותר מהקדקוד i אל הקדקוד j אשר כל קדקודי הביניים בו היא קבוצה ריקה, כלומר המסלול הזה לא יעבור דרך הקדקודים שמספרם מ-1 עד n. ולכן:

מחד $d_{ij}^{(1)}$ הנו משקל המסלול הקצר מהקדקוד i אל הקדקוד j, כך שהמסלול אינו עובר דרך אף קדקוד אחר של הגרף. מאידך, a_{ij} מתאר את משקל המסלול הקצר **הזמני** כאשר המסלול הזה אינו עובר דרך אף קדקוד אחר של הגרף.

כלומר, המסלול המינימלי הזמני מכיל רק קשת ישירה (אם היא קיימת בכלל) מקדקוד i אל קדקוד j, והמשקל שעל הקשת הזאת רשום במטריצה ב-a_{ij}.

אם הקשת (i, j) לא קיימת, אז ל-$d_{ij}^{(1)}$ ניתן הערך הגרוע ביותר שהוא ∞ (כמו הערך של a_{ji}).

נניח שמספר הקדקודים בגרף הוא $|V| = n$ והם ממוספרים מ-1 עד n.

עתה נתבונן בכל המסלולים הקצרים ביותר מהקדקוד i לקדקוד j:

בהתחלה במסלול הזה אין קדקודי ביניים. אם קיימת קשת מ-i ל-j, אזי משקל המסלול המינימלי מ-i ל-j יהיה המספר שרשום בצד קשת זו, אחרת יהיה ערכו ∞.

<u>באיטרציה הראשונה</u> – נרשה שהמסלול יעבור דרך הקדקוד 1. עתה נתבונן בביטוי: $d_{ij}^{(2)}$, שהנו משקל המסלול הקצר ביותר מהקדקוד i אל הקדקוד j **שאינו עובר** דרך הקדקודים שמספרם מ-2 עד n. כלומר, המסלול הזה **רשאי** לעבור דרך קדקודי הביניים השייכים לקבוצה $\{1\}$. ייתכן שהמסלול הזה יעבור דרך הקדקוד 1, ואז המסלול ייראה כך:

$$i \to 1 \to j$$

או שהמסלול הזה לא יעבור דרך הקדקוד 1, ואז המסלול ייראה כך:

$$i \to j$$

כזכור, $d_{ij}^{(1)}$ מתאר את משקל המסלול $i \to j$.

ו- $d_{j1}^{(1)} + d_{1j}^{(1)}$ מתאר את משקל המסלול $i \to 1 \to j$.

עתה נותר לבצע את הבדיקה הבאה :

אם $d_{ij}^{(1)} < d_{i1}^{(1)} + d_{1j}^{(1)}$

אז בצע : $d_{ij}^{(2)} \leftarrow d_{ij}^{(1)}$

אחרת – בצע : $d_{ij}^{(2)} \leftarrow d_{i1}^{(1)} + d_{1j}^{(1)}$

לסיכום האיטרציה הראשונה:

$$d_{ij}^{(2)} = \min\left\{d_{ij}^{(1)}, d_{i1}^{(1)} + d_{1j}^{(1)}\right\}$$

<u>**באיטרציה השנייה**</u> – נרשה שהמסלול יעבור דרך הקדקוד 2. עתה נתבונן בביטוי : $d_{ij}^{(3)}$ – שהנו משקל המסלול הקצר ביותר מהקדקוד i אל הקדקוד j , שאינו עובר דרך הקדקודים שמספרם מ-3 עד n. כלומר, המסלול הזה **רשאי** לעבור דרך קדקודי הביניים השייכים לקבוצה $\{1,2\}$. ייתכן שהמסלול הזה יעבור דרך הקדקוד 2 ואז המסלול ייראה כך :

$$i \overset{\{1\}}{\sim\sim\sim\sim\sim>} 2 \overset{\{1\}}{\sim\sim\sim\sim\sim>} j$$

או שהמסלול הזה לא יעבור דרך הקדקוד 2, ואז המסלול ייראה כך :

$$i \overset{\{1\}}{\sim\sim\sim\sim\sim>} j$$

המספר הרשום מעל המסלולים מ-i אל – 2, או מ-2 אל -j או מ-i אל j מציין שהמסלולים האלו רשאים לעבור דרך הקדקוד 1.

עתה נותר לבצע את הבדיקה שלהלן :

אם $d_{ij}^{(2)} < d_{i2}^{(2)} + d_{2j}^{(2)}$

אז בצע : $d_{ij}^{(3)} \leftarrow d_{ij}^{(2)}$

אחרת – בצע : $d_{ij}^{(3)} \leftarrow d_{i2}^{(2)} + d_{2j}^{(2)}$

לסיכום האיטרציה השנייה:

$$d_{ij}^{(3)} = \min\left\{d_{ij}^{(2)}, d_{i2}^{(2)} + d_{2j}^{(2)}\right\}$$

<u>באיטרציה השלישית</u> – נרשה שהמסלול יעבור גם דרך הקדקוד 3. עתה נתבונן בביטוי הזה: $d_{ij}^{(4)}$– שהינו משקל המסלול הקצר ביותר מקדקוד i אל קדקוד j שאינו עובר דרך הקדקודים שמספרם מ-4 עד n. כלומר, המסלול הזה **רשאי** לעבור דרך קדקודי הביניים השייכים לקבוצה $\{1,2,3\}$. ייתכן שהמסלול הזה יעבור דרך הקדקוד 3 ואז המסלול ייראה כך:

$$i \overset{\{1,2\}}{\sim\sim\sim\sim\sim>} 3 \overset{\{1,2\}}{\sim\sim\sim\sim\sim>} j$$

או שהמסלול הזה לא יעבור דרך הקדקוד 3 ואז המסלול יראה כך:

$$i \overset{\{1,2\}}{\sim\sim\sim\sim\sim>} 3$$

תחום המספרים הרשומים מעל המסלולים מ-i אל – 3, או מ-3 אל – j מציין שמסלולים אלו רשאים לעבור דרך הקדקודים שהם תת-קבוצה של $\{1,2\}$.

<u>בשלב הראשון</u> נתאר את כל המסלולים שאינם עוברים דרך הקדקוד 3.

אם התת-קבוצה היא קבוצה ריקה, אז המסלול הוא $i \rightarrow j$,

אם התת-קבוצה היא $\{1\}$, אזי המסלול הוא $i \rightarrow 1 \rightarrow j$,

אם התת-קבוצה היא $\{2\}$, אזי המסלול הוא $i \rightarrow 2 \rightarrow j$,

ואם התת-קבוצה היא $\{1,2\}$, אז המסלול ייראה כך:

$$i \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow j$$

או:

$$i \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow j$$

כל המסלולים האלו נכללים בביטוי $d_{ij}^{(3)}$ כך שהמסלול אינו עובר דרך הקדקוד 3.

<u>בשלב השני</u> נתאר את כל המסלולים האפשריים העוברים דרך קדקוד 3.

1. במסלול $i \overset{\{1,2\}}{\rightsquigarrow} 3$ התת-קבוצה של $\{1,2\}$ היא קבוצה ריקה, אז:

אם במסלול $3 \overset{\{1,2\}}{\rightsquigarrow} j$ התת-קבוצה של $\{1,2\}$ היא:

א. קבוצה ריקה אז נקבל $\boxed{i \to 3} \to j$

ב. $\{1\}$ אז נקבל: $\boxed{i \to 3} \to 1 \to j$

ג. $\{2\}$ אז נקבל: $\boxed{i \to 3} \to 2 \to j$

ד. $\{1,2\}$ אז נקבל: $\boxed{i \to 3} \to 1 \to 2 \to j$

או: $\boxed{i \to 3} \to 2 \to 1 \to j$

2. במסלול $i \overset{\{1,2\}}{\rightsquigarrow} 3$ התת-קבוצה של $\{1,2\}$ היא $\{1\}$, אז:

אם במסלול $3 \overset{\{1,2\}}{\rightsquigarrow} j$ התת-קבוצה של $\{1,2\}$ היא:

א. קבוצה ריקה, אז נקבל $\boxed{i \to 1 \to 3} \to j$

ב. $\{1\}$, אז נקבל: $\boxed{i \to 1 \to 3} \to 1 \to j$

ג. $\{2\}$, אז נקבל: $\boxed{i \to 1 \to 3} \to 2 \to j$

ד. $\{1,2\}$, אז נקבל: $\boxed{i \to 1 \to 3} \to 1 \to 2 \to j$

או: $\boxed{i \to 1 \to 3} \to 2 \to 1 \to j$

3. במסלול $i \overset{\{1,2\}}{\rightsquigarrow} 3$ התת-קבוצה של $\{1,2\}$ היא $\{2\}$, אז:

אם במסלול $3 \overset{\{1,2\}}{\rightsquigarrow} j$ התת-קבוצה של $\{1,2\}$ היא:

א. קבוצה ריקה, אז נקבל $\boxed{i \to 2 \to 3} \to j$

ב. $\{1\}$, אז נקבל: $\boxed{i \to 2 \to 3} \to 1 \to j$

ג. $\{2\}$, אז נקבל: $\boxed{i \to 2 \to 3} \to 2 \to j$

ד. $\{1,2\}$, אז נקבל: $\boxed{i \to 2 \to 3} \to 1 \to 2 \to j$

או: $\boxed{i \to 2 \to 3} \to 2 \to 1 \to j$

$\{1,2\}$

4. במסלול 3 <~~~~~ i התת-קבוצה של $\{1,2\}$ היא $\{1,2\}$

מקרה 1:

המסלול מ-i ל-3 הוא $i \to 1 \to 2 \to 3$:

$\{1,2\}$

אם במסלול j <~~~~~ 3 התת-קבוצה של $\{1,2\}$ היא:

א. קבוצה ריקה, אז נקבל	$i \to 1 \to 2 \to 3$	$\to j$
ב. $\{1\}$, אז נקבל:	$i \to 1 \to 2 \to 3$	$\to 1 \to j$
ג. $\{2\}$, אז נקבל:	$i \to 1 \to 2 \to 3$	$\to 2 \to j$
ד. $\{1,2\}$, אז נקבל:	$i \to 1 \to 2 \to 3$	$\to 1 \to 2 \to j$
או:	$i \to 1 \to 2 \to 3$	$\to 2 \to 1 \to j$

מקרה 2:

המסלול מ-i ל-3 הוא $i \to 2 \to 1 \to 3$:

$\{1,2\}$

אם במסלול j <~~~~~ 3 התת-קבוצה של $\{1,2\}$ היא:

א. קבוצה ריקה, אז נקבל	$i \to 2 \to 1 \to 3$	$\to 3 \to j$
ב. $\{1\}$, אז נקבל:	$i \to 2 \to 1 \to 3$	$\to 3 \to 1 \to j$
ג. $\{2\}$, אז נקבל:	$i \to 2 \to 1 \to 3$	$\to 3 \to 2 \to j$
ד. $\{1,2\}$, אז נקבל:	$i \to 2 \to 1 \to 3$	$\to 3 \to 1 \to 2 \to j$
או:	$i \to 2 \to 1 \to 3$	$\to 3 \to 2 \to 1 \to j$

כל המסלולים האלו, שתוארו בשלב השני וכולם עוברים דרך הקדקוד 3, נלקחים בחשבון בחישוב של:

$$d_{i3}^{(3)} + d_{3j}^{(3)}$$

כאשר $d_{i3}^{(3)}$ מתאר את המסלול הקצר 3 <~~~~~ i שאינו עובר דרך הקדקוד 3 ושרשאי לעבור דרך הקדקודים שהם תת-קבוצה של $\{1,2\}$. $d_{3j}^{(3)}$ מתאר את המסלולים

j <~~~~~ 3 שאינם עוברים דרך הקדקוד 3 ושרשאים לעבור דרך הקדקודים שהם תת-קבוצה של $\{1,2\}$.

עתה ניתן לבצע את הבדיקה הבאה :

אם $d_{ij}^{(3)} < d_{i3}^{(3)} + d_{3j}^{(3)}$

אז בצע : $d_{ij}^{(4)} \leftarrow d_{ij}^{(3)}$

אחרת, בצע : $d_{ij}^{(4)} \leftarrow d_{i3}^{(3)} + d_{3j}^{(3)}$

לסיכום האיטרציה השלישית:

$$d_{ij}^{(4)} = \min\left\{d_{ij}^{(3)}, d_{i3}^{(3)} + d_{3j}^{(3)}\right\}$$

כך ממשיכים לבצע את האיטרציות.

<u>באיטרציה ה- m-ית</u>

נרשה שהמסלול מ-i אל j יעבור דרך הקדקוד m. נתבונן בביטוי הזה :

$$d_{ij}^{(m+1)}$$

שהנו משקל המסלול הקצר ביותר מקדקוד i אל קדקוד j , שרשאי לעבור רק דרך קדקודי הביניים השייכים לקבוצה $\{1,2,...,m\}$.

<u>יעילות האלגוריתם של פלויד-וורשל</u>

נתון הגרף $G = (V, E)$, כאשר $|V| = n$.

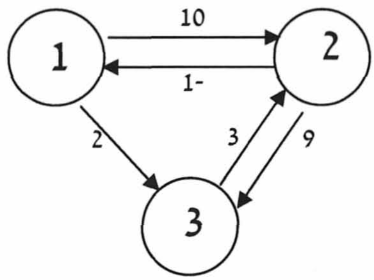
<u>בצעד 1</u> נדרש זמן $O(n^2)$ כיוון שבשלב זה מעתיקים מטריצה אחת לאחרת.

<u>בצעד 2</u> נדרש זמן $O(n^3)$ שכן מבוצעות בו 3 לולאות מקוננות.

<u>בצעד 4</u> נדרש זמן $O(n^2)$, כיוון שבשלב הזה מעתיקים מטריצה אחת לאחרת.

לסיכום : האלגוריתם רץ אפוא בזמן $O(n^3)$, לעומת האלגוריתם של בלמן-פורד, הרץ באותם תנאים בזמן $O(n^4)$.

נדגים את ההרצה של האלגוריתם פלויד-וורשל על הרשת שלהלן :



ניתן ליצג את הגרף על-ידי מטריצת הסמיכות שלהלן :

$$a = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 10 & 2 \\ -1 & 0 & 9 \\ \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

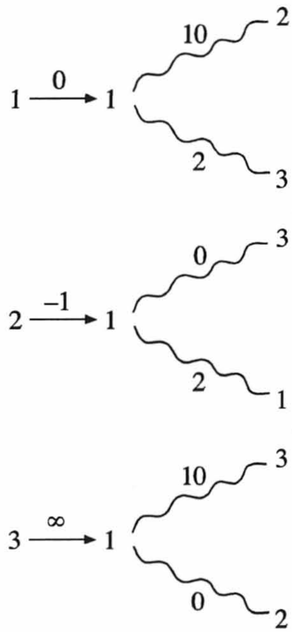
שימו לב : $a_{31} = \infty$ כיוון שלא קיימת הקשת (3,1).

התחלה : לפי ההגדרה $d^{(1)} = a$ ולכן

$$d^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 2 \\ -1 & 0 & 9 \\ \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

באיטרציה הראשונה : בודקים את האפשרות שהמסלולים בין כל הזוגות יעברו דרך הקדקוד 1.

נקבל :



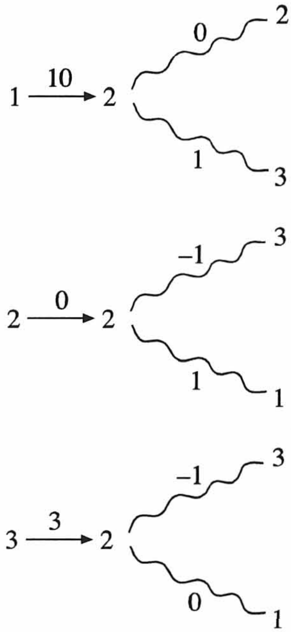
אורך המסלול המינימלי	אורך המסלול הקודם	אורך המסלול דרך K
10	10	10
2	2	2
−1	−1	−1
1	1	9
3	3	∞
∞	∞	∞

לכן נקבל:

$$d^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

שימו לב! שיפרנו רק מסלול אחד מ-2 אל 3.

באיטרציה השנייה: בודקים את האפשרות שהמסלולים בין כל הזוגות יעברו דרך הקדקוד 2. נקבל:



אורך המסלול המינימלי	אורך המסלול הקודם	אורך המסלול דרך K
10	10	10
2	2	11
–1	–1	–1
1	1	1
2	∞	2
3	3	3

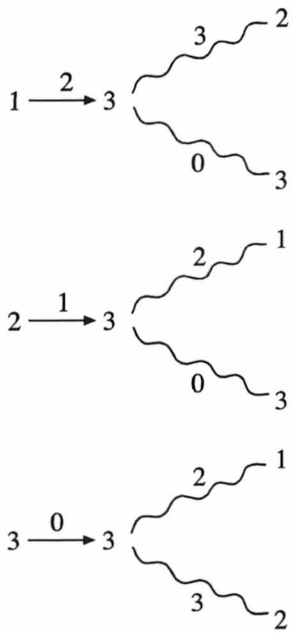
לכן נקבל:

$$d^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

שימו לב! בשלב בזה שיפרנו רק מסלול אחד בלבד מ- 3 אל 1.

באיטרציה השלישית: בודקים את האפשרות שהמסלולים בין כל הזוגות יעברו דרך הקדקוד 3.

נקבל:



אורך המסלול המינימלי	אורך המסלול הקודם	אורך המסלול דרך K
5	10	5
2	2	2
–1	–1	3
1	1	1
2	2	2
3	3	3

לכן נקבל:

$$d^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

שימו לב: בשלב זה שיפרנו מסלול אחד בלבד מ-1 אל 2.

בשלב זה הרצת האלגוריתם הסתיימה ולהלן מטריצה d, המציינת את משקל המסלול הקצר ביותר בין כל זוגות הקדקודים:

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

הערות:

1. באלגוריתם של פלויד-וורשל ניתן לגלות אם בגרף המכוון קיים מעגל שלילי על פי התנאי הזה:
ברשת קיים מעגל בעל משקל שלילי אם ורק אם $d_{ii}^{(m)} < 0$ עבור i כלשהו מ-1 עד n ועבור m כלשהו מ-1 עד n
(חשבו מדוע!)

2. אם ברשת אין מעגל בעל משקל שלילי, אז בעזרת האלגוריתם של פלויד-וורשל ניתן למצוא את המעגל בעל המשקל הקטן ביותר לפי הביטוי הזה:

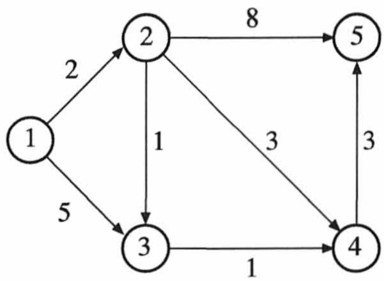
$$\min_{i\in\{1,..,n\}}\left\{d_{ii}^{(n+1)}\right\}$$

5.8.1 שאלות לסיכום סעיף 5.8

שאלה 5.30

נתונה הרשת שלהלן:

המספרים על גב הקשתות מבטאים את אורכי הקשתות.



הניחו כי צומת המקור היא 1.

הריצו את אלגוריתם דיקסטרה על הרשת הנתונה.

מצאו מסלול מינימלי מצומת המקור 1 ליתר הצמתים ברשת זו.

שאלה 5.31

א. הציגו דוגמה שמראה שהאלגוריתם דיקסטרה שוגה על גרף עם משקלות שליליים. (הגרף אינו צריך להכיל מעגל שלילי.)

ב. הסבירו מדוע הוכחת האלגוריתם אינה תקפה במקרה הזה.

שאלה 5.32

רשת תקשורת כלשהי מתוארת על-ידי גרף מכוון, שבו כל קשת מייצגת ערוץ תקשורת, ולכל קשת (u, v) יש "משקל" $r(u, v)$ שהוא מספר בין 0 ל-1, המבטא את אמינותו (reliability) של הערוץ (ולמעשה זו ההסתברות שהוא יעבוד).

בהנחה שמתקיימת אי-תלות הסתברותית בין האמינות של קשתות שונות, אזי האמינות של מסלול כלשהו היא מכפלת ההסתברויות על קשתותיו.

עליכם למצוא אלגוריתם יעיל שמקבל גרף כזה וזוג קדקודים (s, t), ומוצא מסלול אמין ביותר מ-s ל-t.

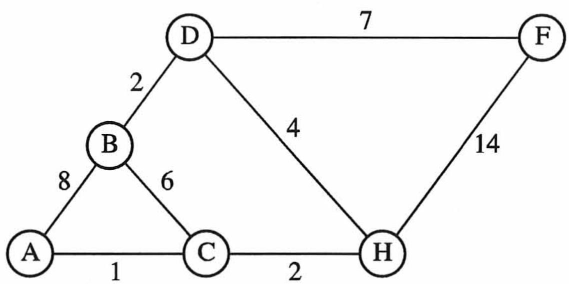
(**הערה**: כדאי להפריד בין הצגת האלגוריתם להוכחה שלו. הצגת האלגוריתם הוא פשוטה יחסית, גם אם ההוכחה שלו דורשת מאמץ מסוים).

שאלה 5.33

הגרף G מוגדר על-ידי $G = (V, E)$, כאשר V מבטא קבוצות צמתים בגרף, ו-E מבטא קבוצת קשתות בגרף.

פונקציית המשקל $W = E \rightarrow R^+$ קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף G.

לפניכם רשת:



א. מצאו את המסלולים הקצרים ביותר מן הצומת A לכל אחד מן הצמתים האחרים ברשת הנתונה. תארו את המסלולים האלה בצורת עץ, באופן סכמתי.

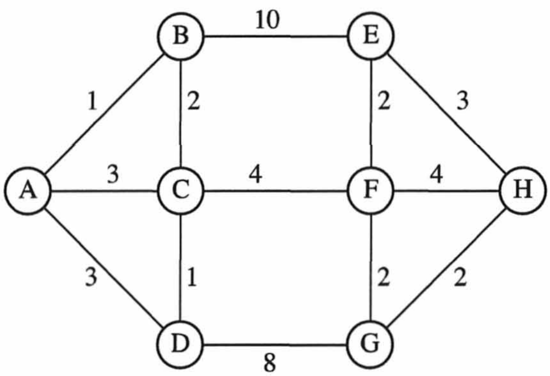
ב. כל קשת בגרף G צבועה בכחול או באדום. X ו-Y הם צמתים בגרף ($X \in V$ ו-$Y \in V$).
כתבו אלגוריתם מילולי, קצר ויעיל, בעברית מבנית, למציאת אורך המסלול הקצר ביותר מ-X ל-Y, כאשר חלקו הראשון של המסלול יהיה מורכב מקשתות **אדומות בלבד** וחלקו השני יהיה מורכב מקשתות **כחולות בלבד.**
שימו לב: כל אחד משני החלקים יכול להיות ריק.

שאלה 5.34

הגרף G מוגדר על-ידי $G(V, E)$, כאשר V מבטא קבוצת צמתים בגרף, ו-E מבטא קבוצת קשתות בגרף.

פונקציית המשקל $W = E \rightarrow R^+$ קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף G.

לפניכם רשת:



א. מצאו את כל המסלולים הקצרים ביותר מן הצומת A לצומת H ברשת הנתונה. תארו כל מסלול כזה בנפרד באופן סכמתי, בצורת רשימה ליניארית מקושרת – לדוגמה: $A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow H$.

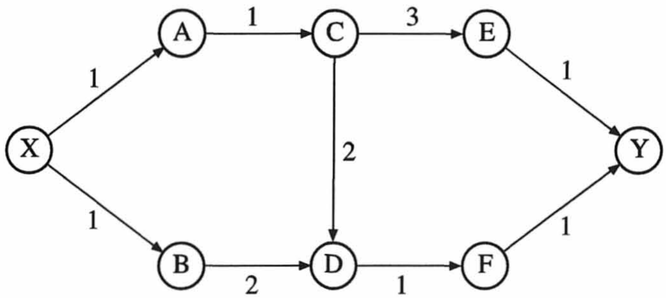
ב. נתונים הצמתים X, Y, Z בגרף $(Z \in V,\ Y \in V,\ X \in V)$.

כתבו אלגוריתם מילולי, קצר ויעיל, בעברית מבנית, אשר מחזיר את התשובה TRUE אם כל המסלולים הקצרים ביותר מ-X ל-Y עוברים דרך Z – ולא, הוא מחזיר את התשובה FALSE.

הגרף G מוגדר על-ידי $G = (V, E)$. פונקצית המשקל $W = E \rightarrow R^+$ קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף G.

שאלה 5.35

לפניכם רשת:



מצאו את כל המסלולים הקצרים ביותר מן הצומת X לצומת Y ברשת הנתונה. תארו כל מסלול כזה בנפרד, באופן סכמתי, בצורת רשימה ליניארית מקושרת.

שאלה 5.36

נתון המסלול P בגרף G.

$W(P)$ מסמן את משקל המסלול (כלומר, את סכום משקלי הקשתות של מסלול P).

$L(P)$ מסמן את אורך המסלול (כלומר, את מספר הקשתות במסלול P).

כתבו אלגוריתם מילולי קצר ויעיל, בעברית מבנית, המוצא את הערך המינימלי של $W(P) + L(P)$ מקדקוד המקור S לכל אחד מהקדקודים האחרים בגרף.

הנחיה: בנו גרף חדש, $G' = (V', E')$, G'; מצאו את הערך $W(P) + L(P)$ המינימלי האפשרי ב-G', וציינו מה מכיל V' ומה מכיל E'.

שאלה 5.37

נתון הגרף $G = (V, E)$ שהוא **גרף מכוון** עם משקל שלם, $E(e)$, המקיים $1 \le W(e) \le 50$ לכל קשת e בגרף.

$s \in V$ הוא צומת נתון בגרף.

א. נסמן $|V|$ – מספר הצמתים בגרף. $|E|$ – מספר הקשתות בגרף.
כתבו אלגוריתם מילולי קצר ויעיל, בעברית מבנית, בעל סיבוכיות זמן $O(|V| + |E|)$, אשר מוצא לכל צומת $v \in V - \{s\}$ את **משקל** המסלול **הקצר** ביותר מ-s ל-v.

ב. הראו כי סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שהצעתם היא הסיבוכיות הנדרשת, $O(|V| + |E|)$.

שאלה 5.38

נתון הגרף $G = (V, E)$. פונקציית המשקל $W = E \to R^+$ קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף G.

א. כתבו אלגוריתם יעיל, הקובע אם קשת מסוימת e נמצאת על כל המסלולים הקצרים ביותר מקדקוד המקור s לקדקוד היעד t .

ב. נתחו את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעתם בסעיף א'.

שאלה 5.39

נתון הגרף $G = (V, E)$. פונקציית המשקל $W = E \to R^+$ קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף G. כל קשת בגרף צבועה באדום או בלבן.

בגרף G נתונים שני צמתים: s ו-t.

א. כתבו אלגוריתם יעיל, אשר מוצא מבין המסלולים הקצרים ביותר בין s ל-t (ביחס למשקלות שעל הקשתות) את המסלול שבו מספר הקשתות האדומות מינימלי.

ב. נתחו את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעתם בסעיף א'.

שאלה 5.40 (רשות)

נתון גרף לא מכוון עם משקלות חיוביים על הקשתות. חלק מהקשתות אדומות וחלק כחולות. נתון הקדקוד s.

א. תארו אלגוריתם המוצא את המסלול המינימלי בעל מספר זוגי של קשתות אדומות מ-s אל כל קדקוד $v \in V$.

ב. נתחו את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעתם בסעיף א' .

ג. תארו אלגוריתם המוצא את המסלול המינימלי בעל מספר זוגי של קשתות אדומות ומספר אי-זוגי של קשתות כחולות מ-s אל כל קדקוד $v \in V$.

שאלה 5.41 (רשות)

נתון גרף מכוון G שצמתיו ממוספרים כך: $V = (1,2,\ldots,n\}$ (כלומר לכל צומת מתאים מספר סידורי **שונה** בין 1 ל-$n = |V|$).

נסמן ב-$R(v)$ את קבוצת הצמתים, שניתן להגיע אליהם מ-V על-ידי מסלול מכוון ב-G.

$r(v)$ יהיה הצומת $W \in R(v)$ שמספרו הסידורי מינימלי.

תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר, המוצא את $r(v)$ לכל $v \in V$.

שאלה 5.42

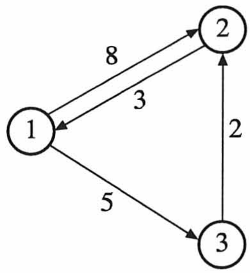
נתון גרף מכוון. **הסגור הרפלקסיבי-טרנזיטיבי** של G הוא גרף G^* שמכיל קשת (u, v), אם ורק אם ב-G יש מסלול מכוון (של אפס קדקודים או יותר) מ-u ל-v. אפשר לנסח זאת במונחים של מטריצת הסמיכות של G^* כדלקמן: מטריצת הסגור C היא מטריצה בוליאנית שבה $C[u, v] = 1$ אם v נגיש מ-u ב-G.

בהינתן מטריצת סמיכות A עבור G, ברצוננו לחשב את מטריצת הסגור C.

ציינו את היתרונות ואת החסרונות של שתי השיטות (שיטת BFS והאלגוריתם של פלויד-וורשל).

שאלה 5.45

לפניכם רשת:



א. מצאו את המסלולים הקצרים ביותר מן הצומת 1 לכל אחד מן הצמתים האחרים ברשת הנתונה, לפי אלגוריתם דיקסטרה.

ב. מצאו את המסלולים הקצרים ביותר מכל קדקוד לכל קדקוד אחר ברשת הנתונה לפי אלגוריתם פלויד-וורשל.

ג. מצאו מסלולים מינימליים מכל צומת לכל צומת על-ידי אלגוריתם פלויד-וורשל.

	1	2	3
1	0	4	11
2	6	0	2
3	3	∞	0

שאלה 5.46

האם הטענות שלהלן הן אמת :

א. על גרף G הופעל אלגוריתם דיקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר מהקדקוד s לכל יתר הקדקודים.

אם המסלול הקצר ביותר מ-s ל-x קצר מן המסלול שמ-s ל-y, אזי האלגוריתם ימצא את המרחק מ-s ל-x לפני שימצא את המרחק מ-s ל-y.

ב. לא ייתכן שאלגוריתם דיקסטרה יעצור אם יופעל על גרף שיש בו מעגל במשקל שלילי (הפסקת הריצה לאחר שהוברר שהאלגוריתם לא ייעצר – ולא, היא אינה נחשבת עצירה).

ג. לא ייתכן שאלגוריתם פורד יעצור אם יופעל על גרף שיש בו מעגל בעל משקל שלילי (הפסקת הריצה לאחר שהוברר שהאלגוריתם לא ייעצר – ולא, היא אינה נחשבת עצירה).

5.9 פתרונות לשאלות נבחרות

פתרון לשאלה 5.1

- משקל המסלול הקצר ביותר מקדקוד המקור A לקדקוד היעד E הוא 4, והמסלול הוא :
$$A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{1} C \xrightarrow{2} E$$
- משקל המסלול הקצר ביותר מקדקוד המקור A לקדקוד היעד D הוא 5, והמסלול הוא :
$$A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{1} C \xrightarrow{2} E \xrightarrow{1} D$$
- משקל המסלול הקצר ביותר מקדקוד המקור A לקדקוד היעד F הוא 6, והמסלול הוא :
$$A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{1} C \xrightarrow{2} E \xrightarrow{1} D \xrightarrow{1} F$$

פתרון לשאלה 5.2

- משקל המסלול הקצר ביותר מהקדקוד C לקדקוד היעד F הוא 4, והמסלול הוא :
$$C \xrightarrow{2} E \xrightarrow{1} D \xrightarrow{1} F$$
- משקל המסלול הקצר ביותר מהקדקוד B לקדקוד היעד F הוא 5, והמסלול הוא :

$B \xrightarrow{1} C \xrightarrow{2} E \xrightarrow{1} D \xrightarrow{1} F$

- משקל המסלול הקצר ביותר מהקדקוד A לקדקוד היעד F הוא 6, והמסלול הוא:

$A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{1} C \xrightarrow{2} E \xrightarrow{1} D \xrightarrow{1} F$

פתרון לשאלה 5.3

א.

קדקוד (v)	A	B	C	D	E	F
משקל המסלול המינימלי מקדקוד המקור D לקדקוד (v)	5	4	3	0	1	1

ב.

קדקוד (v)	A	B	C	D	E	F
משקל המסלול המינימלי מקדקוד המקור E לקדקוד (v)	4	3	2	1	0	2

ג.

קדקוד (v)	A	B	C	D	E	F
משקל המסלול המינימלי מקדקוד המקור F לקדקוד (v)	6	5	4	1	2	0

ד.

הקדקוד	A	B	C	D	E	F
A	0	1	2	5	4	6
B	1	0	1	4	3	5
C	2	1	0	3	2	4
D	5	4	3	0	1	1
E	4	3	2	1	0	2
F	6	5	4	1	2	0

6. עץ פורש מינימלי

בפרק זה נתוודע אל בעיה ממשית בחקר הביצועים ונציג לה פתרונות אפשריים שונים. להלן הצגה של הבעיה ושל פתרונותיה (האלגוריתמים) השונים.

6.1 הצגת הבעיה

נתון גרף **בלתי מכוון קשיר** $G=(V,E)$, כאשר V מבטא קבוצת קדקודים, ו-E – קבוצת קשתות. פונקציית המשקל $w: E \rightarrow R$ קובעת משקל לכל קשת בגרף G, וכל קשת $(u,v) \in E$ היא בעלת משקל $w(u,v)$. המשקל לכל קשת (u,v) יכול לייצג את המרחק בין שני הקדקודים u ו-v, או את ממוצע המכוניות העוברות בין שתי ערים המיוצגות באמצעות שני הקדקודים בגרף, או את העלות של סלילת כביש בין שתי ערים המיוצגות באמצעות שני קדקודי הגרף, וכדומה.

הרשת הזאת יכולה לייצג מערכות קשר ותחבורה, כגון: רשתות כבישים, מערכת כבלי טלפון, מערכות כבלים לחיבור כל תחנות הטלוויזיה לרשת מסוימת או רשת תקשורת מחשבים.

בעיית העץ הפורש המינימלי

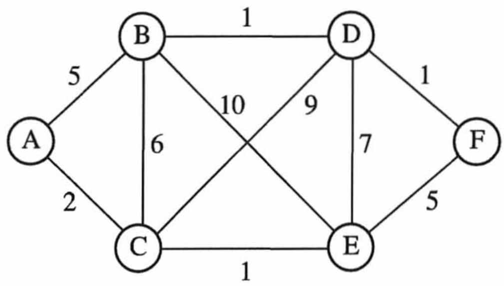
הבעיה: יש למצוא תת-גרף $T=(V,E_T)$ ללא מעגלים של קשתות המחברות את כל קדקודי הגרף הנתון G, ואשר משקלו הכולל $w(E_T)=\sum_{(u,v)\in E_T} w(u,v)$ הוא מינימלי.

גרף קשיר ללא מעגלים נקרא עץ, כיוון ש-E_T מחברת את כל קדקודי הגרף ואינה מכילה מעגלים, התת-גרף T יוצר עץ. עץ כזה נקרא **עץ פורש**.

במילים אחרות, מטרתנו היא למצוא עץ פורש, T, כזה, שסכום המשקלות המיוחסים לקשתות העץ $w(E_T)$, יהיה מינימלי.

עץ פורש (spanning tree) של גרף G קשיר הוא עץ המכיל את כל קדקודי הגרף G.
עץ פורש מינימלי (minimum spanning tree) הנו עץ פורש, שסכום המשקלות הרשומים בצד הקשתות של העץ הוא מינימלי.

נבהיר את הבעיה בעזרת תרשים הרשת שלהלן:

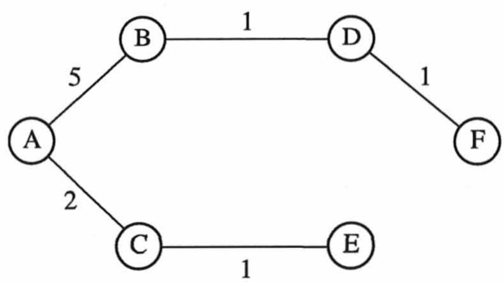


הקדקודים שברשת (A-F) מייצגים את כל היישובים.

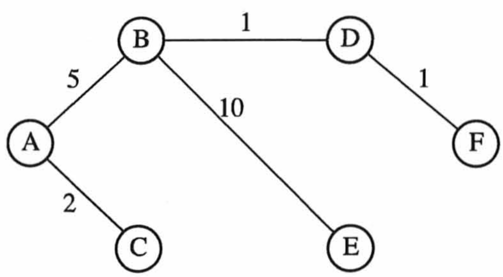
כאמור, $w(U, V)$ מייצג את המשקל שעל הקשת (U, V). נניח ש-$w(U, V)$ מייצג את המימון לסלילת כביש בין היישובים U ו-V. כאמור, הבעיה היא למצוא עץ המייצג את חיבורו של כל יישוב למערכת התחבורתית בעלות מינימלית.

אם נתבונן באיורים שלהלן:

(a)



(b)



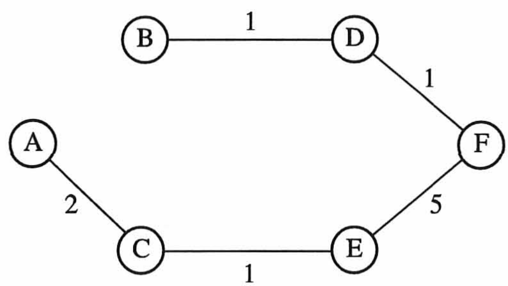
ברור כי התרשימים *(a)* ו-*(b)* מציגים עצים פורשים של הגרף הנתון.

תרשים *(a)* מציג עץ טוב יותר מתרשים *(b)* משום שבתרשים *(a)* ניתן לראות כי סך ההוצאות שווה 10 (=2+5+1+1+1), ואילו בתרשים *(b)* סך ההוצאות שווה 19 (=5+2+1+10+1).

קל לבדוק שלא ניתן למצוא עץ טוב יותר מזה שבתרשים *(a)* מבחינת סך ההוצאות למימון סלילת כבישים המחברים את כל היישובים לרשת. פתרון כזה מכונה בשם **פתרון אופטימלי**. לבעיית העץ הפורש המינימלי יכולים להיות פתרונות אפשריים רבים. (*(a)* ו-*(b)* הם פתרונות אפשריים כי בשניהם כל היישובים מחוברים למערכת הכבישים.)

לכל פתרון יש ערך (בבעיה שלנו הערך הוא סך ההוצאות לסלילת מערכת הכבישים), ואנו רוצים למצוא את הפתרון בעל הערך האופטימלי – המקסימלי או המינימלי (בבעיה שלנו סך ההוצאות לסלילת מערכת הכבישים צריך להיות מינימלי).

פתרון אופטימלי אינו בהכרח **הפתרון האופטימלי**, שכן ייתכנו מספר פתרונות שערכם אופטימלי. כפי שראינו, *(a)* הוא פתרון אופטימלי. התרשים שבאיור הבא מציג פתרון אופטימלי נוסף לבעיה.



סך ההוצאות ברשת זו גם כן שווה 10 (=5+1+1+1+2). ערך הפתרון הזה אינו טוב ואינו גרוע מערך הפתרון *(a)*.

קל לראות שאי-אפשר לשפר את ערך הפתרון שבתרשימים *(a)* ו-*(b)* והפתרון *(a)* או *(c)* הוא פתרון אופטימלי.

התרשימים *(b)*, *(a)* ו-*(c)* מייצגים עצים פורשים, וקל לראות שניתן למצוא עצים פורשים נוספים עבור הרשת הנתונה. אך מבין כל העצים הפורשים רק *(a)* ו-*(c)* הם עצים פורשים מינימליים (בדקו!).

בפרק זה נבחן שני אלגוריתמים הפותרים את **בעיית העץ הפורש המינימלי**: **האלגוריתם של קרוסקל** (Kruskal) **והאלגוריתם של פרים** (Prim).

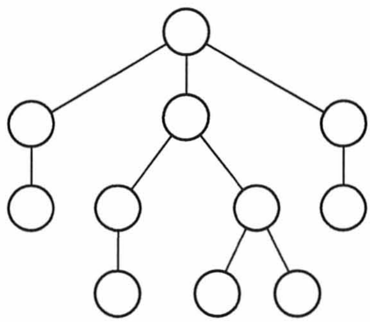
לפני שנכיר את האלגוריתם של קרוסקל ואת האלגוריתם של פרים, נראה את תכונות היסוד של עצים בכלל.

6.2 עצים – הגדרות ותכונות יסוד

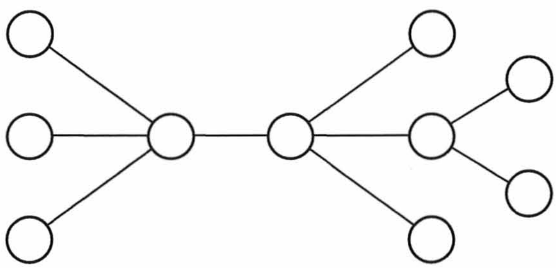
הגדרה: גרף G ייקרא **עץ** אם הוא גרף קשיר וחסר מעגלים.

דוגמאות לגרפים של עצים:

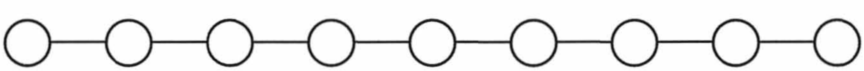
א'



ב'

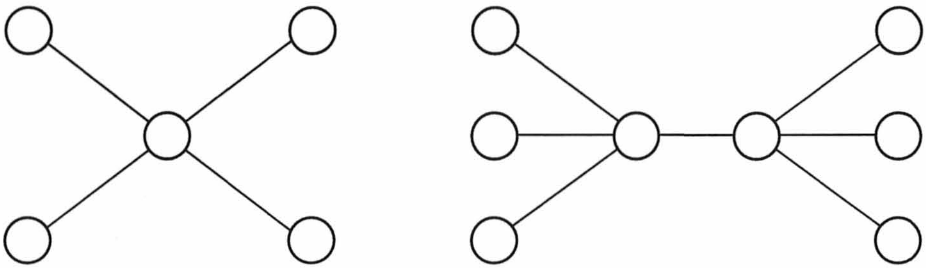


ג'



הגדרה: גרף G ייקרא **יער** אם הוא גרף לא קשיר וכל רכיב בו הוא עץ.

דוגמה :



בגרף הלא-קשיר הנתון שני רכיבים : כל אחד מהם הוא עץ.

להלן מספר משפטים המכילים את התכונות העיקריות של עצים (ללא הוכחה שלהם) :

משפט 6.2.1
בכל עץ T, בין כל שני קדקודים U, V קיים מסלול אחד ויחיד.

משפט 6.2.2
נתון העץ הפורש $T = (V, E_T)$. הגרף $G' = (V, E')$ שבו $E' = E_T - \{e\}$, כאשר $e = (a, b)$ קשת כלשהי, השייכת ל-E_T, הוא יער המכיל בדיוק שני עצים.

משפט 6.2.3
נתון הגרף $G = (V, E)$. עבור העץ הפורש $T = (V, E_T)$ של הגרף G מתקיים: $|E_T| = |V| - 1$, כלומר מספר הקשתות בעץ T קטן ממספר קדקודיו ב-1.

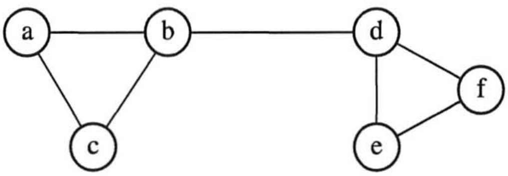
משפט 6.2.4

הגרף G הוא עץ $T = (V, E_T)$, אם, ורק אם, G חסר **מעגלים**, והוספת קשת כלשהי $e = (a, b)$ בין שני הקדקודים לא מחוברים b ו-a ב-G יוצרת מעגל, כלומר, בגרף $G' = (V, E_T \cup (a, b)$, כאשר $\{a, b\} \notin E_T$, קיים מעגל (אחד ויחיד) המכיל את הקשת (a, b).

הגדרה: נתון גרף בלתי מכוון קשיר $G = (V, E)$.
קשת e בגרף G נקראת **קשת מפרידה** אם הסרתה מגרף G תיצור גרף עם שני רכיבים.

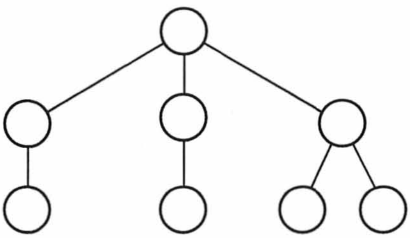
דוגמאות

1. בגרף שלהלן:



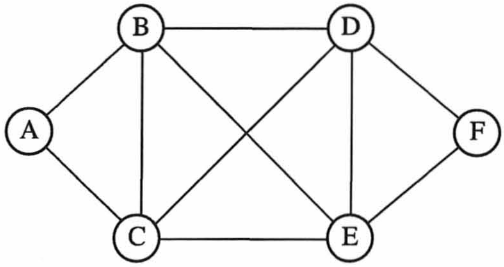
הקשת (b, d) היא קשת מפרידה, ויתר הקשתות שבגרף זה אינן מפרידות.

2. בגרף הבא שהנו עץ:



כל קשת היא קשת מפרידה.

3. בגרף שלהלן:



אין קשת מפרידה.

משפט 6.2.5
נתון גרף בלתי מכוון קשיר $G = (V, E)$.
קשת כלשהי $e \in E$ היא קשת מפרידה אם ורק אם e אינה שייכת לקבוצת קשתות כלשהי המהוות מעגל בגרף G.

6.3 האלגוריתם של קרוסקל (Kruskal) למציאת עץ פורש מינימלי

באלגוריתם של קרוסקל בוחרים בכל פעם את הקשת בעלת המשקל המינימלי מבין הקשתות הקיימות, ובלבד שלא ייווצר מעגל.

6.3.1 האלגוריתם של קרוסקל

אלגוריתם מילולי

צעד 1: בשלב ההתחלי קבוצת הקשתות הנה קבוצה ריקה $(E_T \leftarrow \phi)$

צעד 2: יצור $|V|$ עצים כאשר כל קדקוד בגרף הנתון מגדיר עץ שהנו קבוצה בת איבר אחד.

צעד 3: מיין את קשתות העץ לפי סדר לא יורד, על סמך המשקלות המיוחסים להן.

צעד 4: לכל קשת (u, v), לפי הסדר שנקבע בצעד 3, בצע:

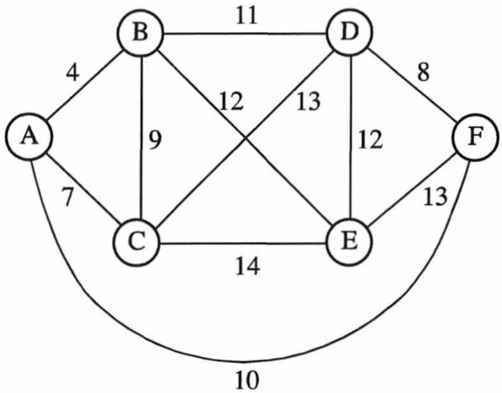
4.1 אם הקבוצה שאליה שייך הקדקוד u שונה מהקבוצה שאליה שייך הקדקוד v, אז בצע:

4.1.1 $E_T \leftarrow E_T \cup \{(u, v)\}$

4.1.2 שני רכיבי הקשירות של u, v מתאחדים לרכיב קשירות אחד (UNION(u, v)).

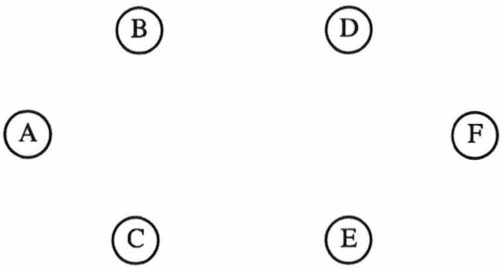
צעד 5: החזר את E_T שהנו עץ פורש.

נדגים את פעולת האלגוריתם של קרוסקל באמצעות הגרף שבתרשים שלהלן:

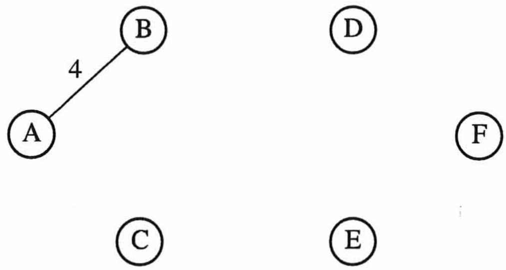


בגרף הזה 6 קדקודים, ולכן בעץ הפורש יהיו 5 קשתות (לפי משפט 6.2.3).

מתחילים עם יער שבו כל הקדקודים אינם מחוברים ביניהם, לכן נקבל:

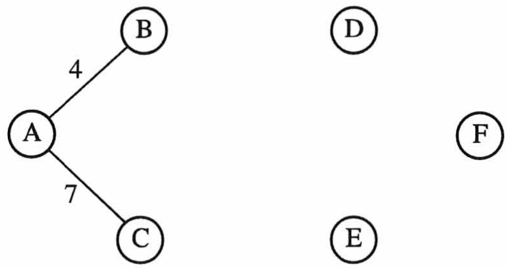


באיטרציה הראשונה מוצאים את הקשת (A, B) שהיא בעלת המשקל הקטן ביותר. לפיכך, בתום האיטרציה הראשונה ייראה היער כך:



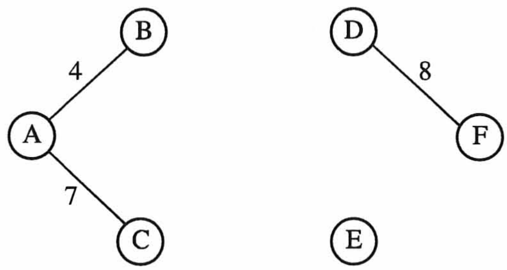
באיטרציה השנייה מוצאים את הקשת (A, C), שהיא בעלת המשקל הקטן ביותר מבין הקשתות שאינן שייכות ליער.

לפיכך, בתום האיטרציה השנייה ייראה היער כך :



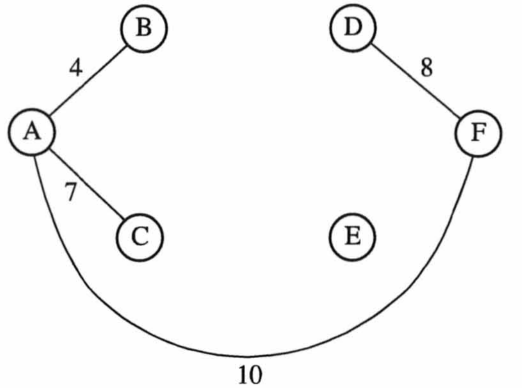
באיטרציה השלישית מוצאים את הקשת (D, F)), שהיא בעלת המשקל הקטן ביותר מבין הקשתות שאינן שייכות ליער.

לפיכך, בתום האיטרציה השלישית ייראה היער כך :

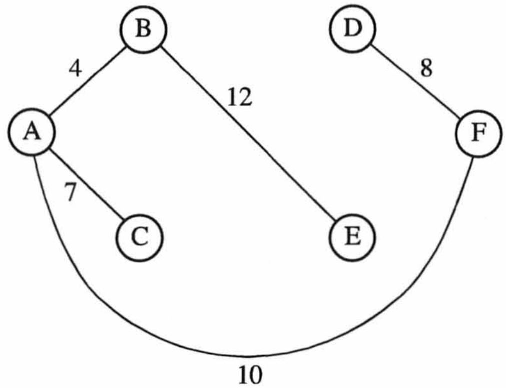


באיטרציה הרביעית מוצאים את הקשת (B, C), שהיא בעלת המשקל הקטן ביותר מבין הקשתות שאינן שייכות ליער. ואולם **לא נוסיף** ליער את הקשת (B, C), **כיוון שהוספתה**

תיצור מעגל. לפיכך, נמצא עתה את הקשת (A, F), שהיא בעלת המשקל הקטן ביותר מבין הקשתות שאינן שייכות ליער, ובתום האיטרציה הרביעית ייראה היער כך:

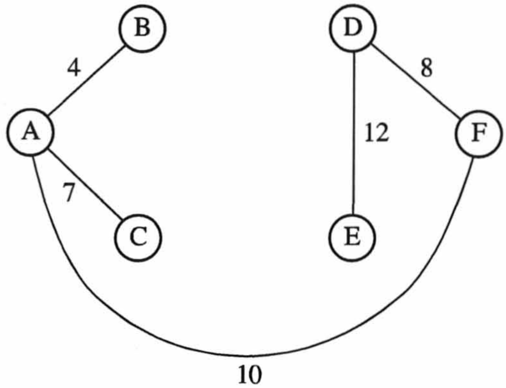


באיטרציה החמישית מוצאים את הקשת (B, D), שהיא בעלת המשקל הקטן ביותר מבין הקשתות שאינן שייכות ליער. ואולם **לא נוסיף** ליער את הקשת (B, D), **כיוון שהוספתה תיצור מעגל**. לכן נמצא עתה את הקשת (B, E), שהיא בעלת המשקל הקטן ביותר מבין הקשתות שאינן שייכות ליער, ובתום האיטרציה החמישית ייראה היער כך:



כמובטח, לאחר חמש איטרציות נקבל עץ פורש מינימלי.

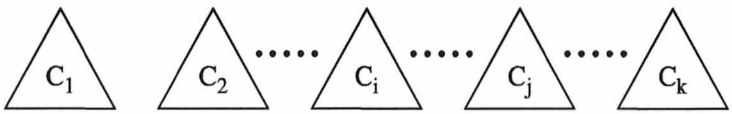
שימו לב לכך, שעץ פורש מינימלי אינו בהכרח אחד ויחיד. לדוגמה, באיטרציה החמישית אפשר לבחור את הקשת (B, E), שמשקלה 12, ולא את הקשת (B, E) שנבחרה ושגם משקלה 12. בתרשים שלהלן מוצג עץ פורש מינימלי אחר עבור הגרף הזה.



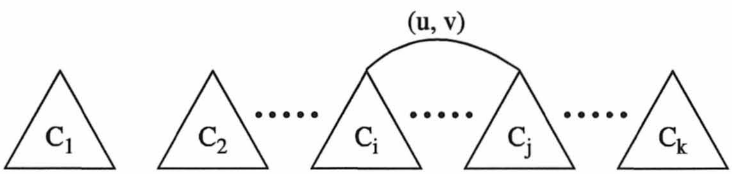
כאמור, בכל צעד האלגוריתם של קרוסקל מוסיף ליער קשת בעלת משקל קטן ככל האפשר בתנאי שהוספתה לא תיצור מעגל.

עתה נשאלת השאלה: כיצד נוכל לקבוע האם הוספה לעץ הפורש של הקשת הנבחנת בעלת המשקל הקטן ביותר לא תיצור מעגל?

כזכור, בהתחלה האלגוריתם של קרוסקל יוצר $|V|$ רכיבי קשירות (יער) עבור הגרף $G = (V, E)$. בכל שלב של האלגוריתם מוסיפים ליער קשת (A, B) שהיא בעלת משקל מינימלי מבין כל הקשתות המחברות שני עצים כלשהם ביער. אם לאחר מספר איטרציות ביער ישנם k עצים "זרים" זה לזה, כפי שמראה האיור שלהלן:



אזי, לאחר הוספת הקשת (U, V) ליער, יהיו $k - 1$ עצים זרים זה לזה.



שימו לב לכך, שאם $u \in c_i$ ו-$v \in c_j$ כאשר $i \neq j$, אזי הוספת הקשת (U, V) לא תיצור מעגל, אך אם $u \in c_i$ וגם $v \in c_i$ בעבור i כלשהו, אזי הוספת הקשת (U, V) תיצור מעגל, לפי משפט 6.2.4.

בכל שלב של האלגוריתם של קרוסקל, פרט לשלב האחרון, אנו מקבלים יער.

כל רכיב הנו קבוצה של קדקודים, והרכיבים הם זרים זה לזה. משום כך יש צורך לייצג את היער באמצעות מבנה נתונים המייצג קבוצות זרות של איברים. כל קבוצה תכיל את קדקודיו של עץ אחד ביער.

על מבנה הנתונים הזה נגדיר את הפעולות הבסיסיות שלהלן:

MAKE-SET(v) – יצירת קבוצה בת איבר אחד.

FIND(v) – פעולה זו מחזירה את מספר הקבוצה (רכיב קשירות) שאליה שייך הקדקוד v.

UNION(u, v) – פעולה זו מקבלת שני קדקודים u ו-v וגורמת לאיחוד שני הרכיבים המכילים קדקודים אלו לרכיב קשירות אחת.

בנוסף, נגדיר את הפעולה הבאה (על קשתות הגרף):

SORT(E) – פעולה זו ממיינת את הקשתות לפי סדר יורד, על סמך המשקלות שעליהן.

לאור האמור לעיל, לפניך המימוש של האלגוריתם של קרוסקל.

נתון הגרף $G = (V, E)$.

המטרה היא לבנות עץ פורש מינימלי $T = (V, E_T)$.

<u>KRUSKAL(G)</u>

//PRE-ALGORITHM

$L \leftarrow$ SORT(E)

for each $v \in V$ do MAKE-SET(v)

$E_T \leftarrow \phi$

    //GROW TREE

    for each $(u, v) \in L$ do

    $u' \leftarrow$ FIND(u)

    $v' \leftarrow$ FIND(v)

  if $u' \neq v'$ then

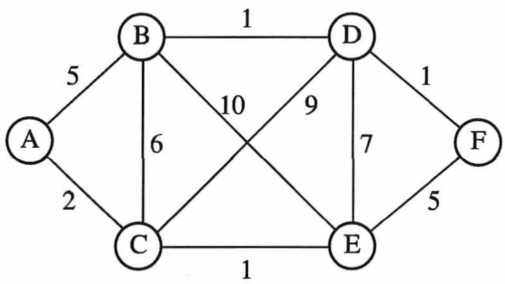
    $E_T \leftarrow E_T \cup \{(u, v)\}$

UNION(u', v')

return $G(V, E_T)$

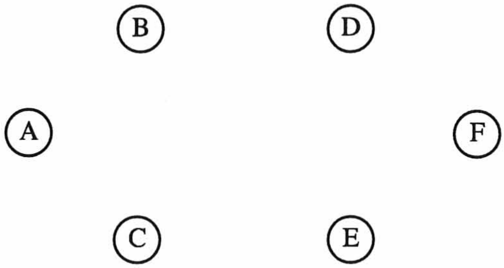
דוגמה למציאת עץ פורש מינימלי בעזרת האלגוריתם של קרוסקל

נדגים את התהליך למציאת עץ פורש מינימלי שתואר לעיל על הרשת (גרף משוקלל) שבאיור שלהלן:



צעד 1+2

העץ הפורש T הוא קבוצה ריקה של קשתות עם שישה רכיבי קשירות. תמונת המצב הנה:



צעד 3

כתוצאה מן המיון של הקשתות, נקבל את הרשימה L:

(B, D)	1
(C, E)	1
(D, F)	1
(A, C)	2
(A, B)	5
(E, F)	5
(B, C)	6

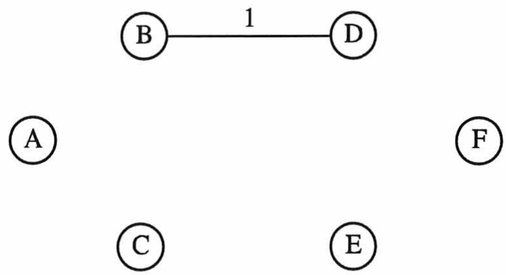
(D, E)	7
(C, D)	9
(B, E)	10

צעד 4

סורקים את הרשימה L מתחילתה עד סופה, לפי הסדר שנקבע בצעד 3 כתוצאה מהמיון, ומטפלים בכל הקשתות שב-L.

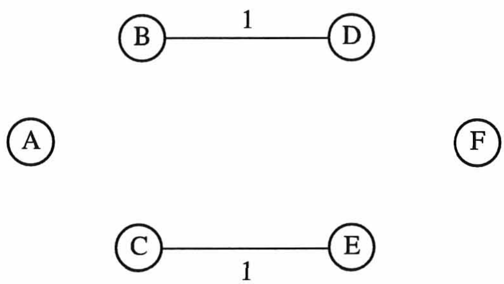
הקשת המטופלת (B, D)

מאחר שהקודקודים B ו-D שייכים לשני רכיבי קשירות זרים, אז B ו-D מתאחדים לרכיב קשירות אחד, ונקבל:



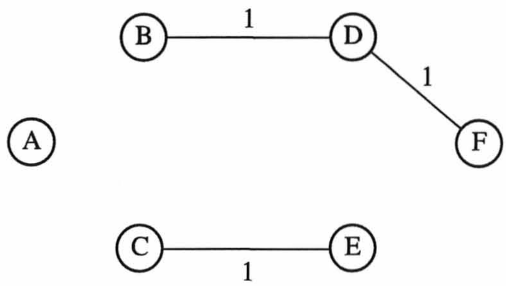
הקשת המטופלת (C, E)

מאחר שהקודקודים C ו-E שייכים לשני רכיבי קשירות זרים, אז C ו-E מתאחדים לרכיב קשירות אחד, ונקבל:

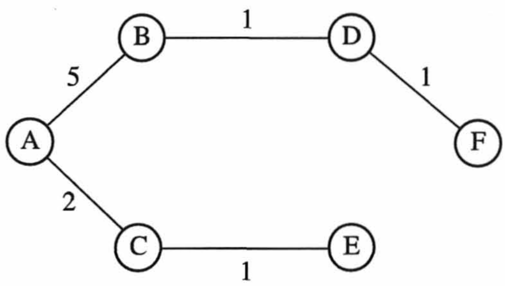


הקשת המטופלת (D, F)

מאחר שהקדקודים D ו-F שייכים לשני רכיבי קשירות זרים, הם מתאחדים לרכיב קשירות אחד ונקבל:

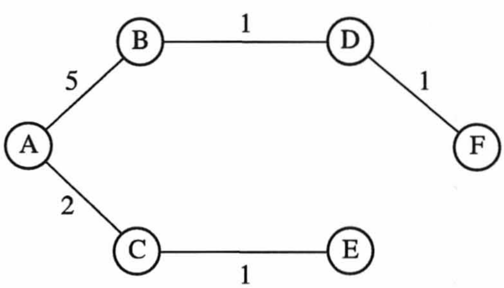


ממשיכים באופן הזה, ולאחר שתי איטרציות נוספות תמונת המצב היא:



כעת, **הקשת המטופלת היא (E, F)**.

מאחר שבשלב זה הקדקודים E ו-F שייכים לאותו רכיב קשיר, **לא** נוסיף את הקשת (E, F) לעץ הפורש T. באופן אנלוגי, הקשתות הבאות שברשימה L, (B, C), (D, E), (C, D), (B, E), לא תתווספנה לעץ הפורש T, והעץ הפורש המינימלי שמתקבל כצפוי הנו:



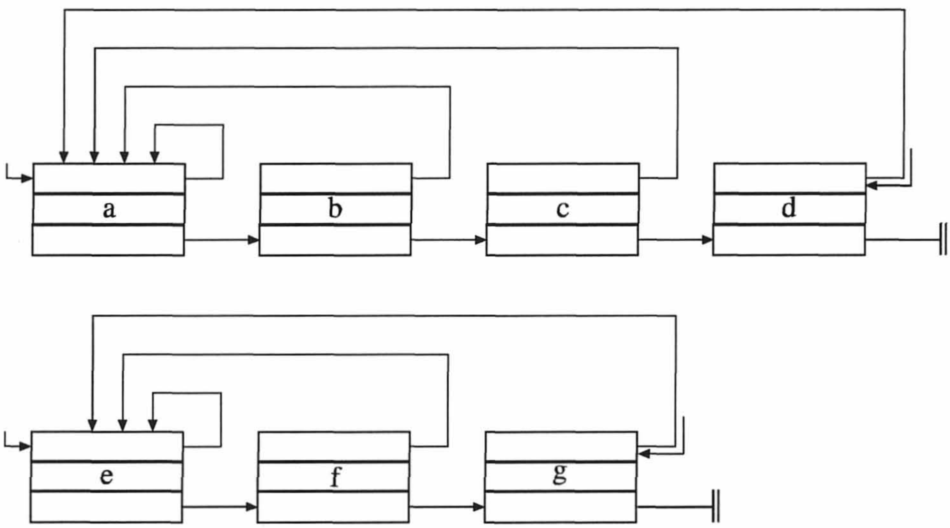
6.3.2 יעילות האלגוריתם של קרוסקל

זמן הריצה של האלגוריתם של קרוקסל, אשר פועל על גרף בלתי מכוון קשיר $G = (V, E)$, תלוי במימוש מבנה הנתונים יער, שהוא קבוצות זרות.

ייצוג קבוצות זרות על-ידי רשימות מקושרות

כל קבוצה מיוצגת על-ידי רשימה מקושרת, והאיבר הראשון בכל רשימה משמש כנציג הקבוצה המיוצגת באמצעות הרשימה.

התרשים שלהלן מתאר את הייצוג של שתי קבוצות זרות על-ידי שתי רשימות מקושרות:



בכל צומת ברשימה שלושה שדות עיקריים:

האחד – מצביע לצומת הבא המכיל איבר כלשהו של אותה קבוצה.

השני – מכיל את שם האיבר.

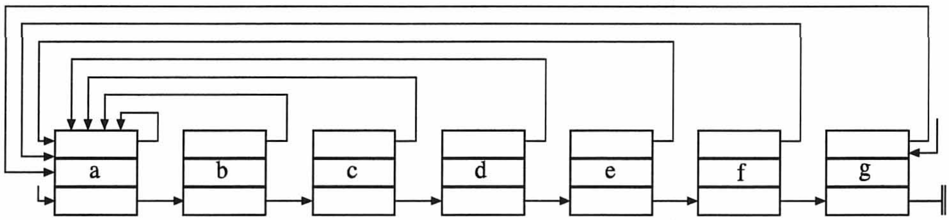
השלישי – מצביע לצומת הראשון ברשימה המכיל איבר שהוא הנציג של הקבוצה.

שימו לב:

1. הרשימה הראשונה מכילה את אברי הקבוצה $\{a, b, c, d\}$, והרשימה השנייה מכילה את איברי הקבוצה $\{e, f, g\}$.

2. לכל רשימה יש מצביע לראשה וגם לסופה.

3. הרשימה המתקבלת מהפעולה Union(b, g) היא:



בייצוג של קבוצות זרות על-ידי רשימות מקושרות סיבוכיות זמן הריצה של הפעולות הבסיסיות המוגדרות על מבנה הנתונים יער היא כדלקמן:

עבור הפעולה	**סיבוכיות זמן הריצה במקרה הגרוע ביותר**
MAKE_SET(v)	$O(1)$
FIND(v)	$O(1)$
SORT(n)	$O(n \log n)$
UNION(x, y)	$O(n^2)$ בדוק!

לאור האמור לעיל, נוכל עתה לחקור את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם של קרוסקל.

צעד	**דורש זמן**
1	$O(1)$
2	$O(\|V\|)$
3	$O(\|E\| \log \|E\|)$
4	$O(\|E\| \cdot (1 + \|V\|^2)) = O(\|V\|^2 \cdot \|E\|)$

לכן, סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם קרוסקל היא $O(|V|^2 \cdot |E|)$.

ניתן לייצג קבוצות זרות באמצעות מבנה נתונים מיוחד הנקרא "עצים מושרשים". לא נדון כאן בנושא עצים מושרשים, כיוון שהנושא חורג מדרישות הקורס. נציין רק את העובדה, שבאמצעות מבנה נתונים זה ניתן לבצע את צעד 4 של האלגוריתם של קרוסקל בזמן $O(|E| \log |E|)$, ולכן סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם היא: $O(|E| \log |E|)$.

6.3.3 אלגוריתם חמדן (greedy)

אלגוריתמים הפותרים בעיות אופטימיזציה מבצעים סדרה סופית של צעדים ובכל צעד מקבלים מספר הכרעות בין אפשרויות שונות.

אלגוריתם חמדן בוחר באפשרות הטובה ביותר ברגע נתון בתקווה שבחירה כזו תוביל לפתרון אופטימלי כולל. באופן כללי, אלגוריתמים חמדנים אינם מספקים בהכרח פתרונות אופטימליים כוללים לבעיות, ואולם בעבור בעיות לא מעטות הם נותנים פתרון אופטימלי כולל. גם במקרה של בעיית העץ הפורש המינימלי, ניתן להראות שאלגוריתמים חמדנים מסוימים מחזירים עץ פורש בעל משקל מינימלי.

האלגוריתם של קרוסקל מוצא, בכל שלב, קשת (a, b) בעלת משקל מינימלי מבין כל הקשתות המחברות שני עצים כלשהם ביער. מכאן נובע, שהאלגוריתם של קרוסקל הוא אלגוריתם חמדן, כיוון שבכל צעד הוא מוסיף ליער קשת בעלת משקל קטן ככל האפשר. במילים אחרות, בחירת הקשת בעלת משקל קטן ככל האפשר היא האפשרות הטובה ביותר בכל שלב, מכיוון שברצוננו למצוא עץ פורש שסכום המשקלות של הקשתות שלו הוא מינימלי.

השאלה המרכזית היא: האם גישה חמדנית כזו נותנת פתרון אופטימלי כולל לבעיית עץ פורש מינימלי?

התשובה לשאלה זו היא חיובית, ונראה בהמשך (משפט 6.3.4.1) כי אסטרטגיה חמדנית, כפי שבאה לידי ביטוי באלגוריתם של קרוסקל, מחזירה עץ פורש בעל משקל מינימלי.

6.3.4 הנכונות של האלגוריתם של קרוקסל

מצד אחד, האלגוריתם של קרוסקל מתבסס על גישה חמדנית, שאינה מבטיחה תמיד פתרון אופטימלי כולל. מצד שני, נאמר שהאלגוריתם של קרוסקל מניב עץ פורש מינימלי. המשפט הבא מראה את הנכונות של הטענה הזאת.

משפט 6.3.4.1
לאחר הרצת האלגוריתם של קרוסקל על הגרף $G = (V, E)$ מתקיים:
א. מספר הצעדים באלגוריתם של קרוסקל הוא $|V| - 1$ לכל היותר.
ב. אם אלגוריתם מסתיים לאחר m איטרציות, אזי:
אם $m = |V| - 1$, אזי $T = (V, E_T)$, הנו העץ הפורש המינימלי של G.
אחרת $(m < |V| - 1)$, הגרף G לא מכיל עץ פורש.
משפט זה ניתן ללא הוכחה.

6.4 האלגוריתם של פרים (Prim)

נתונה הרשת $G = (V, E)$ ומתחילים ליצור עץ פורש מקדקוד כלשהו $r \in V$. בכל שלב נוסיף קשת בעלת משקל מינימלי, המחברת את העץ לקדקוד שלא שייך לעץ. כך גדל העץ הפורש עד שהוא מכיל את כל קדקודי הגרף G.

בדומה לאלגוריתם של קרוסקל, גם האלגוריתם של פרים הוא אלגוריתם חמדן, כי בכל צעד הוא מוסיף קשת בעלת משקל קטן ככל האפשר. ניתן להוכיח שאסטרטגיה כזו של בניית עץ פורש מבטיחה שבתום האלגוריתם, E_T יכיל קשתות המהוות עץ פורש מינימלי.

כאמור, מטרתנו למצוא עץ המכיל את כל קדקודי הגרף. לשם פיקוח על כך נשתמש בתור Q, כך ש: $V - Q$ מייצג את קבוצת הקדקודים אשר טופלו ושנמצאים בעץ הפורש, ואילו Q מייצג את קבוצת הקדקודים שעדיין לא טופלו ושאינם נמצאים בעץ הפורש.

מאחר שבתחילת האלגוריתם אף קדקוד של הגרף הנתון לא טופל, כל הקדקודים יהיו בתור, ובתום האלגוריתם התור Q יישאר ריק, כיוון שכל הקדקודים חייבים להיות בעץ הפורש.

עבור כל קדקוד v, נשמור בתור Q את $K[v]$, אשר יכיל את המשקל המינימלי מבין משקלי הקשתות המחברות את הקדקוד v לקדקודים השייכים לעץ.

ברור כי בתחילת האלגוריתם $K[v] \leftarrow \infty$.

בנוסף, עבור כל קדקוד v נשמור מידע נוסף $P[v]$,* שהנו ההורה של v בעת בניית עץ פורש. כלומר $P[v]$ מציין את ההורה של v.

* הסימן P נבע מהסיבה ש-$P[v]$ מייצג הורה של קדקוד v.

6.4.1 הצגת האלגוריתם של פרים

אלגוריתם $\mathbf{Prim}(G, r)$

האלגוריתם מקבל כקלט את הגרף הבלתי מכוון והקשיר G ואת השורש r של העץ הפורש המינימלי שהאלגוריתם צריך לבנות.

צעד 1

לכל קדקוד v בצע:

1.1 $K[v] \leftarrow \infty$

1.2 הכנס את v לתור Q.

סוף הלולאה.

צעד 2

2.1 $K[r] \leftarrow 0$

2.2 $P[r] \leftarrow \text{nil}$

צעד 3

כל עוד התור Q לא ריק (כלומר לא כל הקדקודים נמצאים עדיין בעץ הפורש T), בצע:

3.1 הוצא את הקדקוד u מהתור Q, כך שלכל קדקוד $v \in Q$ $K[u] = \min_{v}\{K[v]\}$ (כלומר מוציאים מהתור Q את הקדקוד u המקיים $K[v] \geq K[u]$ לכל קדקוד v בתור).

3.2 עבור כל קדקוד v, שהנו שכן של הקדקוד u ושעדיין נמצא בתור Q, בדוק:

אם $w(u, v) < K[v]$ (כלומר הקשת (u, v) היא בעלת המשקל המינימלי מבין משקלי הקשתות המחברות את הקדקוד v לקדקודים שבחרנו עד כה)

אז בצע:

3.2.1 $P[v] \leftarrow u$ (* נקבע הורה חדש *)

3.2.2 $K[v] \leftarrow w(u, v)$ (* נקבע משקל חדש *)

סוף הלולאה.

בכל שלב של האלגוריתם קיים תור של קדקודי הגרף שממנו מוציאים קדקוד אחד u, בעל הערך $K[u]$ הקטן ביותר. לאחר מכן מעדכנים (אם צריך) את הערך של $K[v]$ עבור כל קדקוד

שנשאר בתור. לכן יש צורך לייצג את התור באמצעות מבנה נתונים שעליו מוגדרות הפעולות הבסיסיות שלהלן :

EXTRACT_MIN(Q) – מוציאה מהתור Q את האיבר u בעל הערך ($K[u]$) הקטן ביותר מבין כל האיברים שבתור Q ומחזירה אותו.

DECREASE_KEY(Q, v, $k[v]$) – מעדכנת את הערך של $K[v]$.

לאור האמור לעיל, להלן האלגוריתם של פרים תוך שימוש בפעולות הבסיסיות המוגדרות על מבנה הנתונים תור :

PRIM(*G*, *r*)

//INIT

step 1: for each vertex v do

$K[v] \leftarrow \infty$

$P[v] \leftarrow$ NULL

step 2: $K[r] \leftarrow 0$

$P[r] \leftarrow$ NULL

$PQ \leftarrow V$ //Priority Queue holds the vertices outside the tree//

//GROW TREE

step 3: while $PQ \neq \phi$ do

(3.1) $u \leftarrow$ EXTRACT_MIN(PQ)

(3.2) for each $v \in$ adj[u]* do

(3.2.1) if $v \in PQ$ and $w(u, v) < K[v]$ then

(3.2.1.1) $K[v] \leftarrow w(u, v)$

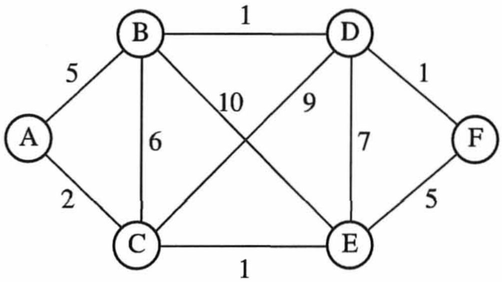
(3.2.1.2) $P[v] \leftarrow u$

(3.2.1.3) DECREASE_KEY(PQ, v, $K[v]$)

נדגים את אופן הפעולה של האלגוריתם של פרים על הרשת שלהלן :

---

* adj[u] מציין קבוצת קדקודים שהם שכנים של הקדקוד u.



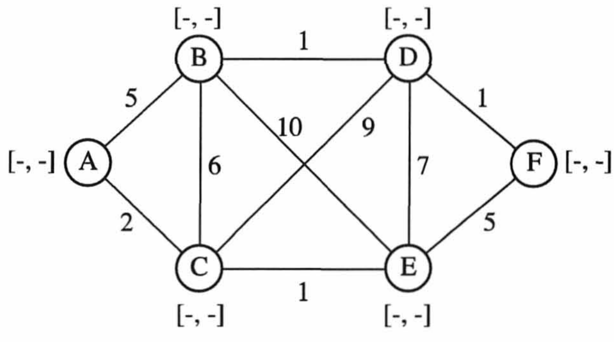
כלומר, בתחילת האלגוריתם תמונת התור Q היא:

קדקוד v	A	B	C	D	E	F
$K[v]$	∞	∞	∞	∞	∞	∞

בתהליך התיאור של האלגוריתם, סמוך לכל קדקוד v של גרף מופיעים שני מספרים. השמאלי מייצג את הקדקוד שהינו הורה של v, והימני מייצג את המשקל המינימלי מבין משקלי הקשתות המחברות את הקדקוד v לקדקודים השייכים לעץ.

נתחיל את בניית העץ מהקדקוד A (הקדקוד A נבחר באופן שרירותי).

תמונת הרשת בהתחלה היא:



בתחילת האלגוריתם לאף קדקוד אין הורה.

נתחיל את בניית העץ מהקדקוד A. לפיכך נבצע את הצעדים שלהלן:

$K[A] \to 0$

$P[A] \to \text{Nil}$

מאחר שהבנייה של עץ פורש תחל מהקדקוד A, אז A יהיה שורש העץ ולכן אין לו הורה. מצב התור Q הוא:

קדקוד v	A	B	C	D	E	F
$K[v]$	0	∞	∞	∞	∞	∞
$P[v]$	Nil	–	–	–	–	–

איטרציה ראשונה

באיטרציה הראשונה נבצע את הצעדים שלהלן:

1. הוצא מהתור Q את u כך ש-$K[u]$ הוא הקטן ביותר. בדוגמה שלנו נוציא מהתור את הקדקוד A.
2. בדוק את השכנים של הקדקוד u מבין הקדקודים הנמצאים בתור Q.
   בדוגמה, השכנים של A הם B ו-C מכיוון ש:

$$w(A, B) = 5 < \infty = K[B]$$

אז נבצע:

$$P[B] \leftarrow A$$

$$K[B] \leftarrow 5$$

בנוסף, מכיוון ש:

$$w(A, C) = 2 < \infty = K[C]$$

אז נבצע:

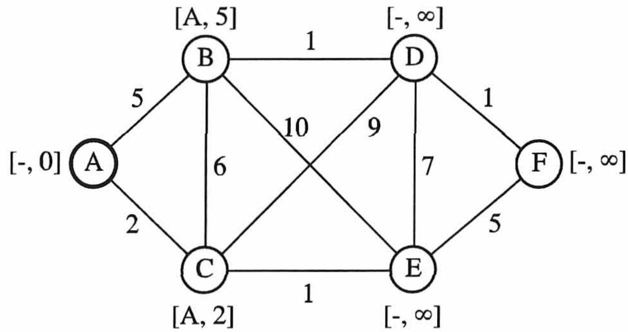
$$P[C] \leftarrow A$$

$$K[C] \leftarrow 5$$

לכן, בתום האיטרציה הראשונה מצב התור Q הוא:

קדקוד v	B	C	D	E	F
$K[v]$	5	2	∞	∞	∞
$P[v]$	A	A	–	–	–

תמונת הביניים של הגרף היא:



בעץ יש רק הקדקוד A.

<u>**איטרציה שנייה**</u>

באיטרציה השנייה נבצע שוב את הצעדים האלה:

1. הוצא מהתור Q את u כך ש-$K[u]$ יהיה הקטן ביותר. בדוגמה שלנו נוציא מהתור את הקדקוד C.

2. בדוק אלו מהשכנים של הקדקוד u נמצאים בתור Q.

מבין קדקודי התור Q, הקדקודים B, C, D הם השכנים של הקדקוד C.

מכיוון ש:

$$w(C,B) = 6 \not< 5 = K[B]$$

אז לא נבצע שום דבר,

מכיוון ש:

$$w(C, E) = 1 < \infty = K[E]$$

אז נבצע:

$$P[E] \leftarrow C$$

$$K[E] \leftarrow 1$$

מכיוון ש:

$$w(C, D) = 9 < \infty = K[D]$$

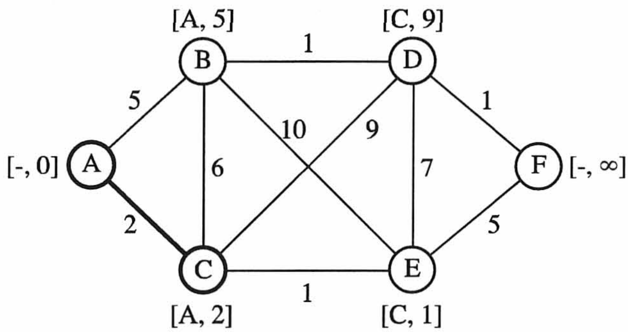
אז נבצע:

$$P[D] \leftarrow C$$

$$K[D] \leftarrow 9$$

לכן, בתום האיטרציה השנייה מצב התור Q הוא :

קדקוד v	B	D	E	F
$K[v]$	5	9	1	∞
$P[v]$	A	C	C	–



<u>איטרציה שלישית</u>

באיטרציה השלישית נבצע שוב את הצעדים שלהלן :

1. נוציא מהתור Q את הקדקוד E, כיוון ש-$K[E]$ הוא הקטן ביותר מבין אברי התור.

2. מבין קדקודי התור Q, הקדקודים B, D, F הם השכנים של הקדקוד E.

   מכיוון ש :

$$w(E, B) = 10 < 5 = K[B]$$

   אז לא נבצע שום דבר.

   מכיוון ש :

$$w(E, D) = 7 < 9 = K[D]$$

   אז נבצע :

$$P[D] \leftarrow E$$

$$K[D] \leftarrow 7$$

   מכיוון ש :

$$w(E, F) = 5 < \infty = K[F]$$

   אז נבצע :

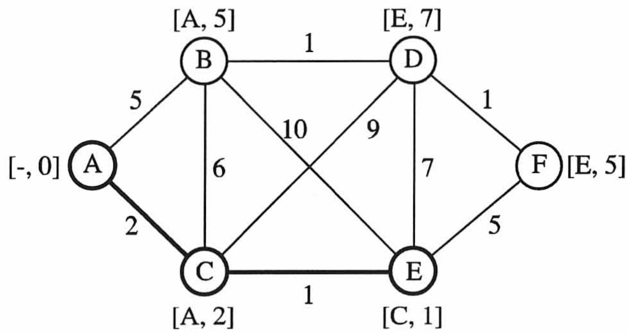
$P[F] \leftarrow E$

$K[F] \leftarrow 5$

לכן, בתום האיטרציה השלישית מצב התור Q הוא:

קדקוד v	B	D	F
$K[v]$	5	7	5
$P[v]$	A	E	E

תמונת הביניים היא:



קבוצת הקשתות המודגשות $\{(A, C), (C, E)\}$ וקבוצת הקדקודים המודגשים $\{A, C, E\}$ שייכות לעץ פורש מינימלי שהאלגוריתם יוצר.

<u>איטרציה רביעית</u>

באיטרציה הרביעית נבצע שוב את הצעדים שלהלן:

1. נוציא מהתור Q את הקדקוד u, כיוון ש-$K[u]$ הוא הקטן ביותר.
   בשלב הזה u יכול להיות הקדקוד B או הקדקוד F.
   נבחר באופן שרירותי את הקדקוד E.
2. מבין קדקודי התור Q, D הוא השכן היחיד של הקדקוד F.
   מכיוון ש:

$w(F, D) = 1 < 7 = K[D]$

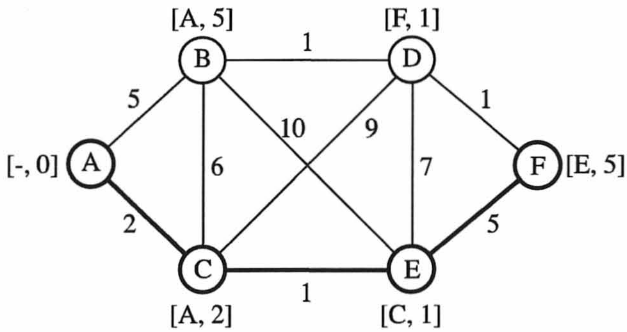
אז נבצע:

$P[D] \leftarrow F$

$K[D] \leftarrow 1$

לכן, בתום האיטרציה הרביעית מצב התור Q הוא:

קדקוד v	B	D
$K[v]$	5	1
$P[v]$	A	F



קבוצת הקשתות המודגשות $\{(A, C), (C, E), (E, F)\}$ וקבוצת הקדקודים המודגשים $\{A, C, E, F\}$ שייכות לעץ הפורש המינימלי שהאלגוריתם יוצר.

איטרציה חמישית

באיטרציה החמישית נבצע שוב את הצעדים שלהלן:

1. נוציא מהתור Q את הקדקוד D, כיוון ש-$K[D]$ הוא הקטן ביותר מבין אברי התור.
2. מבין הקדקודים הנמצאים בתור Q, B הוא השכן היחיד של הקדקוד D.

   כיוון ש:

$w(D, B) = 1 < 5 = K[B]$

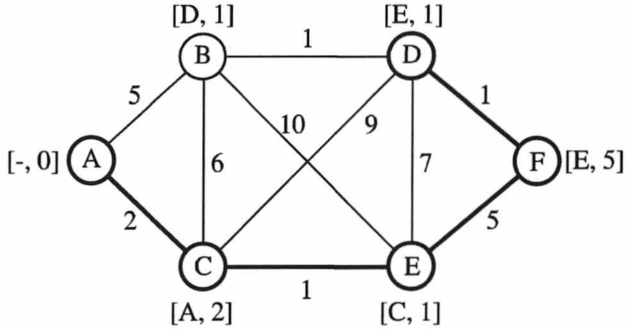
אז נבצע:

$P[B] \leftarrow D$

$K[B] \leftarrow 1$

לכן, בתום האיטרציה החמישית נקבל:

קדקוד v	B
$K[v]$	1
$P[v]$	D

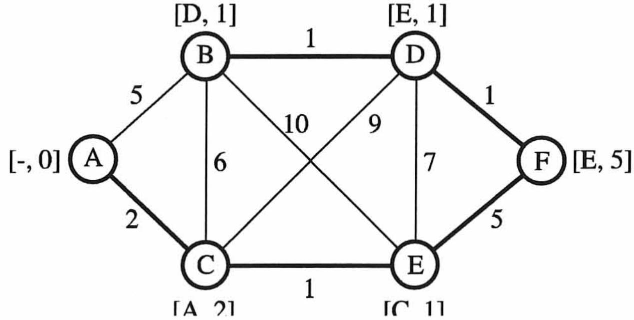


קבוצת הקשתות המודגשות $\{(A, C), (C, E), (E, F), (F, D)\}$ וקבוצת הקדקודים המודגשים $\{A, C, E, F, D\}$ שייכות לעץ פורש מינימלי שהאלגוריתם יוצר.

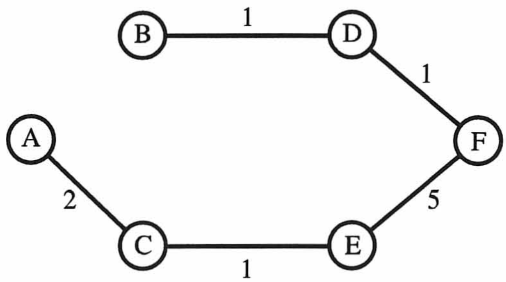
<u>איטרציה שישית</u>

באיטרציה השישית, מאחר שהתור Q איננו ריק, נבצע את הצעדים שלהלן:

1. נוציא מהתור Q את הקדקוד B.
2. כעת, נבדוק את הקדקודים השכנים של הקדקוד B, הנמצאים עדיין בתור Q. בשלב הזה אין קדקודים כאלו, ולכן אין במה לטפל (התור Q ריק).
   המצב שנתקבל עד כה מוצג באיור שלהלן:



מאחר שהתור ריק, הסתיים האלגוריתם, והעץ הפורש המינימלי שנתקבל לבסוף הוא:



הערות:

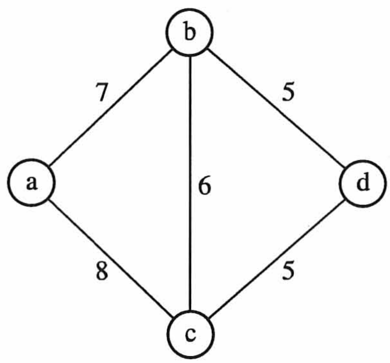
1. האלגוריתם נכון גם כאשר משקלי הקשתות של הגרף הנתון $G = (V, E)$ אינם חיוביים.

2. ניתן למצוא עץ פורש מינימלי בעזרת האלגוריתם שלהלן:

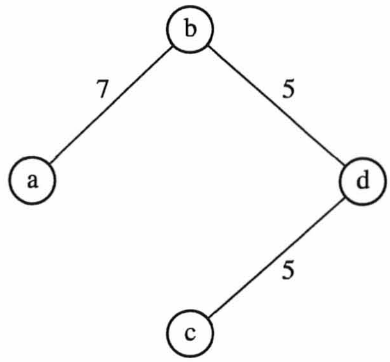
חזור על התהליך שלהלן:

מצא את הקשת בעלת המשקל הגדול ביותר בגרף הנתון והסר אותה מהגרף, בתנאי שהגרף נשאר קשיר.

לדוגמה, בעבור הרשת שלהלן:



העץ הפורש המינימלי הוא:



3. אפשר להמיר את כל האלגוריתמים למציאת עץ פורש מינימלי באלגוריתמים למציאת עץ פורש מקסימלי. לפניכם גרסאות של שני אלגוריתמים למציאת עץ פורש מקסימלי:

גרסה I:

חזור על התהליך הזה:

מצא את הקשת בעלת המשקל **הקטן** ביותר בגרף הנתון, והסר אותו מהגרף בתנאי שהגרף נשאר קשיר.

גרסה II:

ניתן לבנות עץ פורש מקסימלי גם כך: בהתחלה בוחרים את הקשת שעלותה המקסימלית היא הגבוהה ביותר. לאחר מכן בוחרים את הקשת שעלותה הגבוהה ביותר מבין הקשתות הנותרות, וכך הלאה, ובלבד שבכל שלב הקשת שנבחרת אינה יוצרת מעגל.

4. אפשר למצוא עץ פורש מינימלי עם עדיפות לקשתות. כך למשל, נתון גרף קשיר לא מכוון $G = (V, E)$ שפונקציית המשקל שלו $W : E \rightarrow R$. חלק מהקשתות צבועות בכחול, והיתר צבועות בלבן. אנו רוצים למצוא עץ פורש מינימלי עם מספר מקסימלי של קשתות כחולות. כאמור, באלגוריתם של קרוסקל ממיינים תחילה את קשתות הגרף בסדר עולה. לשם כך, בסדרה הממוינת של משקלי הקשתות, כאשר ישנן קשתות בעלות אותו משקל, ניתן עדיפות לקשתות הכחולות. כלומר, קודם נרשום בסדרה הממוינת את הקשת הכחולה ולאחריה את הקשת הלבנה שמשקלה זהה לזה של הקשת הכחולה.

6.5 שאלות לסיכום פרק 6

שאלה 6.1

ציירו את כל העצים השונים בעלי שלושה קדקודים, ומתוכם בחרו את כל העצים שיש בהם בדיוק שני קדקודים בעלי דרגה 1.

שאלה 6.2

א. ציירו את כל העצים השונים בעלי 6 קדקודים.

ב. בכל עץ שמצאתם בסעיף א' מנו את מספר הקדקודים בעלי דרגה 1.

ג. בכל עץ שמצאתם בסעיף א' מצאו את הקשתות המפרידות.

שאלה 6.3

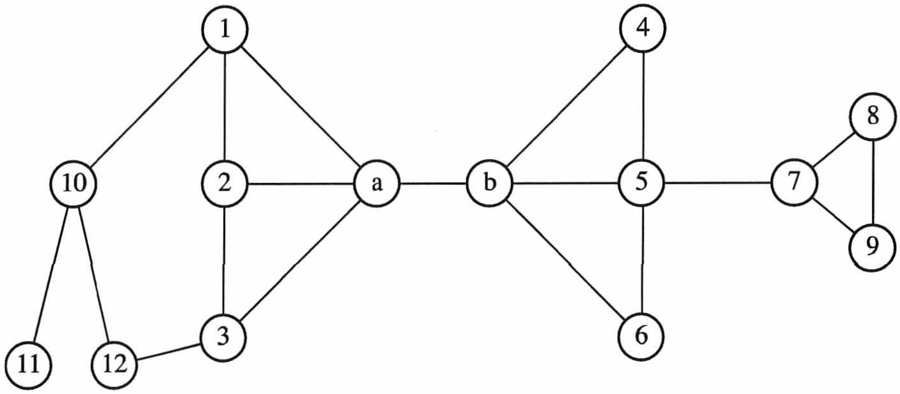
לפניכם טענה: אם בגרף פשוט כלשהו G דרגתו של כל קדקוד היא לפחות 2, אזי בגרף G אין קשת מפרידה. קבעו אם הטענה הזאת נכונה, ונמקו את תשובתכם.

שאלה 6.4

לפניכם טענה: אם בגרף פשוט כלשהו G דרגתו של כל קדקוד זוגית, אזי אין קשת מפרידה. קבעו אם הטענה הזאת נכונה, ונמקו את תשובתכם.

שאלה 6.5

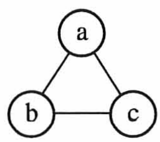
זהו בגרף שלהלן את כל הקשתות המפרידות.



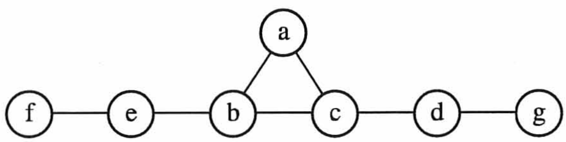
שאלה 6.6

ציירו את כל העצים הפורשים שבגרפים שלהלן:

א'



ב'



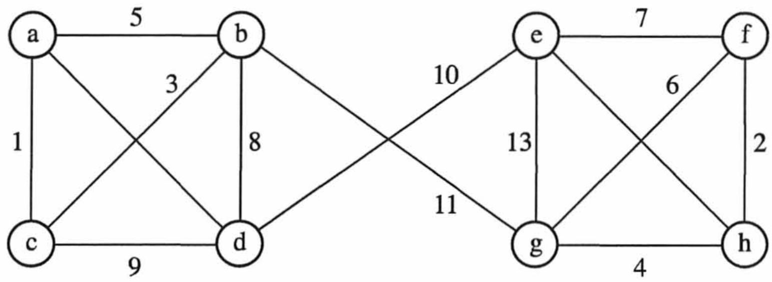
שאלה 6.7

הוכיחו שאם קשת כלשהי $e = (a, b)$ היא קשת מפרידה בגרף G, אזי קשת זו מוכלת בכל עץ פורש של G.

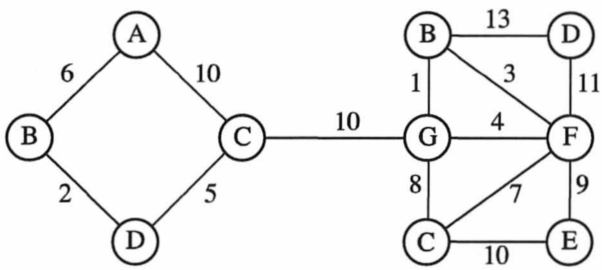
שאלה 6.8

הפעילו את האלגוריתם של קרוסקל על הגרפים שלהלן:

א'



ב'



שאלה 6.9

הפעילו את האלגוריתם של פרים (Prim) על הגרפים שבשאלה 6.8.

שאלה 6.10

נתון גרף לא מכוון $G = (V, E)$, ונתונה פונקציית המשקל $W : E \rightarrow R^+$. כל קשת בגרף צבועה בשחור או בלבן. בהינתן עץ פורש T, נסמן ב-m_1 את מספר קשתותיו השחורות, וב-m_2 את מספר קשתותיו הלבנות. המטרה היא למצוא, מבין העצים הפורשים המינימליים, את העץ שעבורו $|m_1 - m_2|$ מקסימלי.

א. תארו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו לבעיה.

ב. מה סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם? הסבירו את תשובתכם.

שאלה 6.11

נתון גרף לא מכוון וקשיר $G = (V, E)$ ונתונה פונקציית משקל ממשית של קשתותיו. כל קשת בגרף צבועה באחד משלושת הצבעים: כחול, לבן או אדום.

תארו אלגוריתם **יעיל**, המוצא מבין כל העצים הפורשים שעבורם $2k + n - m$ מקסימלי, עץ שמשקלו מינימלי, כאשר k הוא מספר הקשתות הכחולות בעץ, n הוא מספר הקשתות הלבנות בעץ ו-m הוא מספר הקשתות האדומות בעץ.

מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם? הוכיחו את האלגוריתם.

שאלה 6.12

נתון גרף לא מכוון $G = (V, E)$ עם משקל שלם $1 \le w(e) \le 100$ לכל קשת e. לכל קשת e צבע לבן או שחור. הגרף מיוצג על-ידי רשימות שכנות, והמשקל של כל קשת וצבעה מצוינים ברשימות השכנות.

א. כתבו אלגוריתם יעיל, המוצא, מבין כל העצים הפורשים של הגרף G שמכילים את המספר הגדול ביותר האפשרי של קשתות לבנות, את העץ שמשקלו מינימלי.

ב. מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם?

שאלה 6.13

נתונים שני גרפים קשירים ולא מכוונים על אותה קבוצת קדקודים, כלומר $G_2 = (V, E_2)$, $G_1 = (V, E_1)$ ונתונה פונקציית משקל אי-שלילית (על הקשתות) משותפת. כלומר, אם $e \in E_1 \cap E_2$, אז לקשת e משקל זהה בשני הגרפים.

בנו אלגוריתם יעיל, הקובע אם לשני גרפים קיים עץ פורש מינימלי משותף; כלומר, אם קיים עבור הגרף G_1 עץ פורש מינימלי שהוא גם העץ הפורש המינימלי של הגרף G_2. הפתרון צריך להיות בעל סיבוכיות זמן ריצה של $O(|V|^2)$.

שאלה 6.14

נתון גרף $G = (V, E)$ לא מכוון, קשיר, עם פונקציית המשקל: $W : E \to \{1, 3, 10\}$ עבור כל קשת $e \in E$; הגרף מיוצג על-ידי רשימות שכנות.

א. כתבו אלגוריתם יעיל, המוצא קבוצת קשתות שמכילה לפחות קשת אחת מכל מעגל בגרף ושמשקלה הכולל מינימלי.

ב. מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעתם?

שאלה 6.15

א. נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ונתונה פונקציית משקל $W:E\rightarrow R+$, כאשר כל קשת צבועה באחד מן הצבעים – אדום, כחול או לבן.

כתבו אלגוריתם אשר מוצא מבין כל העצים הפורשים המינימליים עבור G את העץ הפורש המינימלי, שבו מספר הקשתות האדומות פחות מספר הקשתות הכחולות הוא מקסימלי.

ב. מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעתם?

שאלה 6.16

א. הציעו אלגוריתם **יעיל**, המקבל גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ושתי פונקציות משקל ממשיות $W_1:E\rightarrow R$ $W_2:E\rightarrow R$, הבודק אם קיים בגרף G עץ פורש, שהוא מינימלי על-פי **כל אחת** משתי פונקציות המשקל, ואם קיים עץ כזה – מצאו אותו. הוכיחו את נכונות האלגוריתם.

ב. מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעתם?

שאלה 6.17

נתון גרף לא מכוון, ממושקל, שמיוצג על-ידי רשימות שכנות, כאשר המשקל של כל קשת מצוין לידה, ונתונה הקשת e בגרף הזה.

א. כתבו אלגוריתם יעיל, הקובע אם ישנו בגרף עץ פורש מינימלי המכיל את הקשת e.

ב. מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעתם?

שאלה 6.18

נתון גרף $G=(V,E)$ לא מכוון וקשיר אשר כל אחת מקשתותיו צבועה בצבע שחור או לבן.

א. כתבו אלגוריתם יעיל ככל האפשר, המוצא בגרף עץ פורש בעל מספר מרבי של קשתות לבנות.

ב. מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעתם?

שאלה 6.19

נתון גרף לא מכוון $G = (V, E)$ עם פונקציית משקל על הקשתות, וידוע שכל המשקלות על הקשתות שונים זה מזה. הוכיחו שקיים עץ פורש מינימלי יחיד בגרף.

שאלה 6.20

נתון גרף $G = (V, E)$ לא מכוון, קשיר, עם פונקציית המשקל: $W : E \rightarrow \{1, 2, \ldots, 9, 10\}$. תארו אלגוריתם עם סיבוכיות זמן ריצה של $O(|E|)$ למציאת עץ פורש מינימלי עבור הגרף G.

שאלה 6.21

להלן אלגוריתם למציאת עץ פורש מינימלי עבור הגרף הנתון $G = (V, E)$.

צעד 1: מיין את הקשתות (E) בסדר יורד, מהקשת בעלת המשקל המקסימלי עד לקשת בעלת המשקל המינימלי.

צעד 2: $A \leftarrow G$ (A – גרף)

צעד 3: לפי הסדר היורד שנקבע בצעד 1, בדוק לכל קשת אם היא נמצאת על מעגל פשוט בגרף A. אם כן, קבעו $A \leftarrow A - \{e\}$.

א. הוכיחו בסיום האלגוריתם כי A הוא עץ פורש מינימלי.

ב. מה סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הנתון?

שאלה 6.22

נתון גרף $G = (V, E)$ לא מכוון, קשיר, ועם פונקציית המשקל:

$W : E \rightarrow \{1, 2, ..., |V|\}$. הציעו אלגוריתם יעיל ככל האפשר, שבהינתן קבוצת קשתות $S \subseteq E$, מחליט אם קיים עץ פורש מינימלי שמכיל את S. אם קיים עץ פורש מינימלי, האלגוריתם מוצא אותו.

מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעתם?

שאלה 6.23

נתון גרף $G = (V, E)$ לא מכוון ונתונה קבוצת הקשתות $S \subseteq E$.

א. הציעו אלגוריתם יעיל, שמוצא את המספר המינימלי של הקשתות מ-S, אשר מופיע בעץ הפורש המינימלי עבור G, כלומר, מהו המספר המינימלי x קשתות מ-S כך שבכל עץ פורש מינימלי יהיו לפחות X קשתות מ-S!

ב. מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעתם?

שאלה 6.24

נתון גרף $G = (V, E)$ קשיר, שפונקציית המשקל שלו : $w : E \rightarrow R$ (שימו לב שהמשקל לקשת כלשהי אינו בהכרח חיובי).

עבור גרף $H = (U, F)$ נסמן ב-$w(H)$ את **משקל** הגרף, כלומר $w(H) = \sum_{e \in F} W(e)$.

א. בנו אלגוריתם יעיל, שמוצא תת-גרף $G' = (V, E')$ קשיר של הגרף G, ופורש את כל קדקודי V, כך ש-$|E'|$ - $W(G')$ יהיה מינימלי.

ב. מהי סיבוכיות זמן ריצה של האלגוריתם שהצעתם?

שאלה 6.25

נתון גרף $G = (V, E)$ לא מכוון, קשיר, שפונקציית המשקל שלו : $w : V \rightarrow R$. שימו לב, פונקציית המשקל מוגדרת על קבוצת קדקודים V, והמשקל לכל קדקוד לא בהכרח חיובי.

א. הציעו אלגוריתם יעיל, המוצא עץ T, המביא למינימום את $\sum_{v \in V} d(v) \cdot w(v)$ כאשר $d(v)$ היא דרגת הקדקוד v בעץ T.

ב. מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעתם?

שאלה 6.26

נתון גרף $G=(V,E)$ לא מכוון, קשיר, שפונקציית המשקל שלו $w:E\to R$, ונתונים שני הקדקודים $u,v\in V$. נגדיר את המשקל של מסלול $\underline{P}$ כמשקל המקסימלי בין המשקלות של הקשתות ב-$\underline{P}$.

א. כתבו אלגוריתם יעיל, אשר מוצא את המסלול בין u ל-v עם המשקל המינימלי.

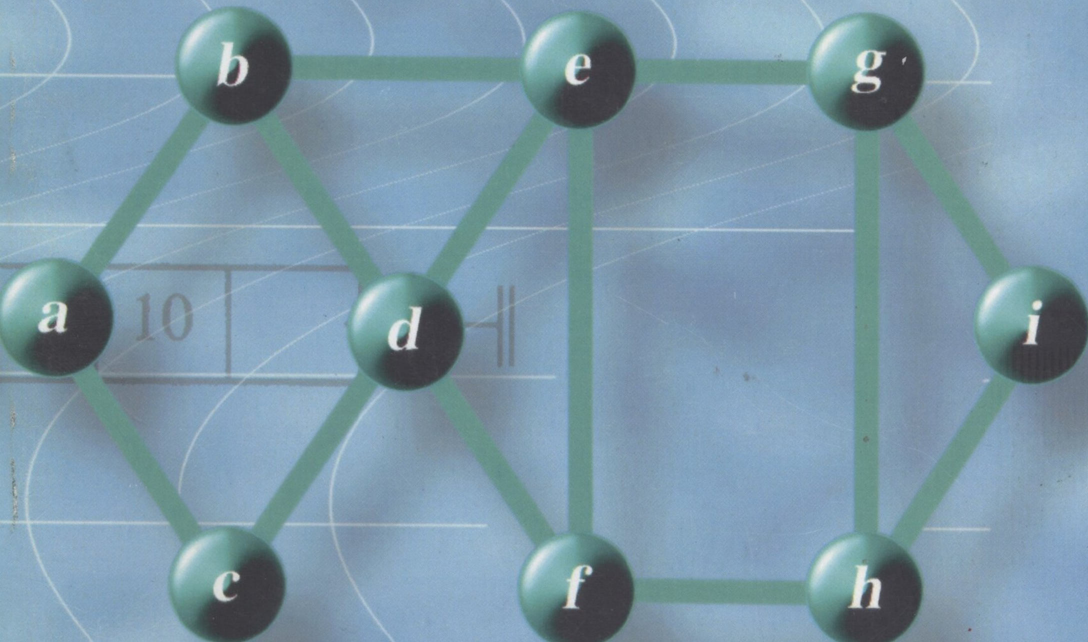
ב. מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעתם?

שאלה 6.27

נתון הגרף הקשיר $G=(V,E)$ ו-$w:E\to R$ היא פונקציית המשקל על קשתותיו.

אם T הוא עץ פורש מינימלי, ו-$e\in T$ היא קשת שאינה מנתקת את G, אז קיימת $e'\in E-\{e\}$ כך ש-$\{T-e\}\cup\{e'\}$ היא עץ פורש מינימלי של $G-\{e\}$.

נוסח אחר: קיים עץ פורש מינימלי של $G-\{e\}$, הנבדל מ-T בקשת אחת בדיוק.



78-1043425 דאנאקוד