Reconstruction d'images radio astronomiques dynamiques en présence de perturbations.

Soutenance de stage

Encadré par I. Vin

Présenté par G. Robert-Dautun

école normale supérieure paris—saclay

université PARIS-SACLAY

Contexte

Very Large Array (VLA), Nouveau Mexique

Fonctionnement

Fonctionnement – Modèle

Modèle étudié :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_k = \mathbf{A}\boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{w}_{k-1} \\ \boldsymbol{y}_k = \mathbf{H}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k \end{cases}$$

x : images réelles
y : observations
A : matrice d'évolution
w : « bruit » d'évolution
v : bruit de mesure
H : FFT des baseline

Calcul de H :

$$\mathbf{H}_{j,q} = \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\boldsymbol{z}_j \cdot \mathbf{l}_q\right)$$

$\Delta\boldsymbol{z}_j$: vecteur des baseline
Iq : vecteur des directions

Autres matrices :

Q : covariance du bruit d'évolution
R : covariance du bruit d'observation

Fonctionnement – Filtre de Kalman

Initialisation :

x_0

$$\mathbf{P}_0 = \mathrm{E}\left[(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{H}}\right] - \mathbf{m}_{\boldsymbol{x}_0}\mathbf{m}_{\boldsymbol{x}_0}^{\mathrm{H}}$$

Prédiction :

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} = \mathrm{A}\widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{m}_{\boldsymbol{w}_k} \\ \widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1} = \mathrm{H}\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \mathbf{m}_{\boldsymbol{v}_k} \end{cases}$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{A}^{\mathrm{H}} + \mathbf{Q}_k$$

Mesures

y

Mise à jour :

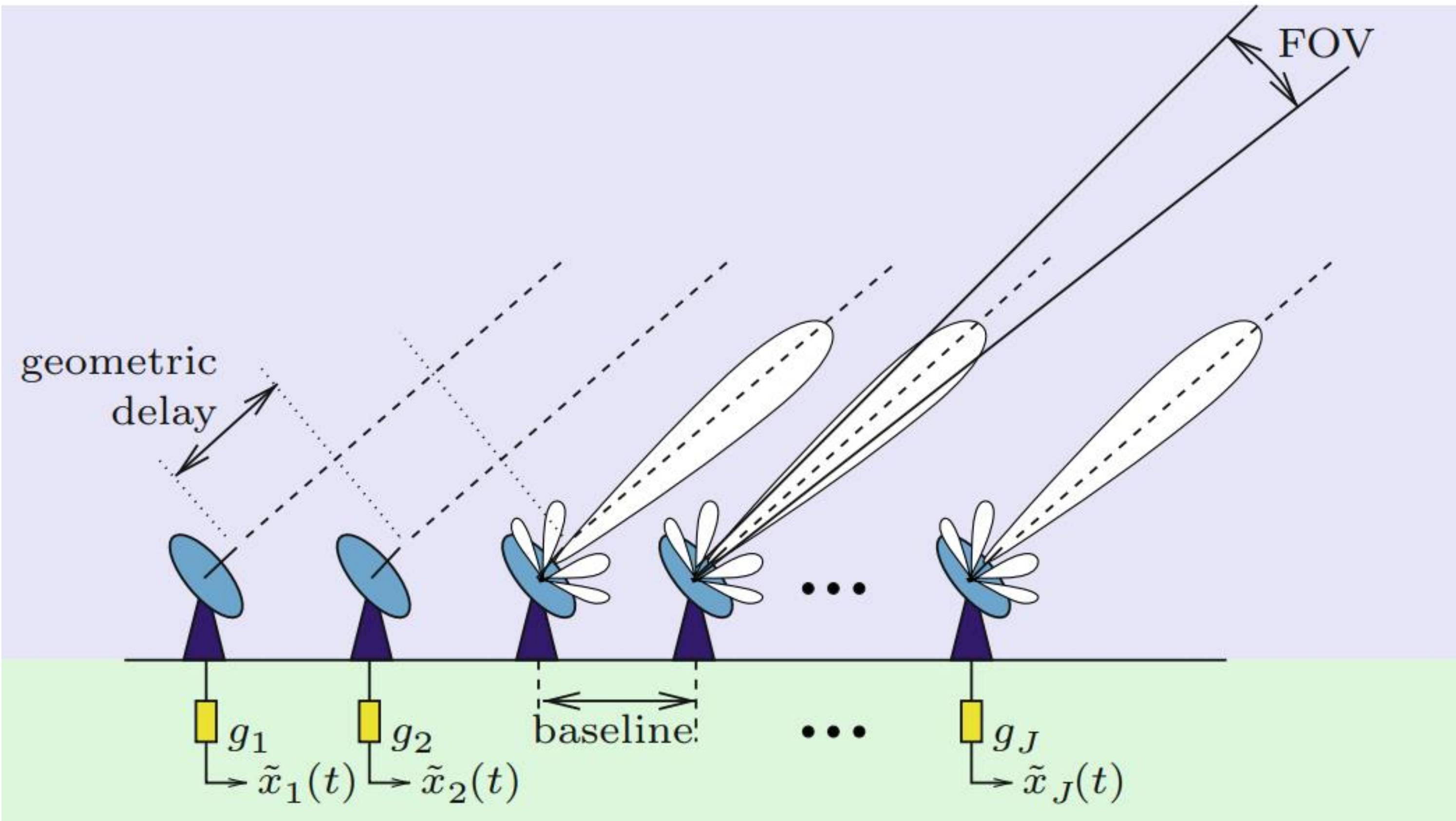
$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \mathrm{K}_k\left(\boldsymbol{y}_k - \widehat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}\right) \\ \mathbf{P}_{k|k} = (\mathbb{I} - \mathrm{K}_k\mathrm{H})\,\mathbf{P}_{k|k-1} \end{cases}$$

$$\mathrm{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathrm{H}^{\mathrm{H}}\left(\mathrm{H}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathrm{H}^{\mathrm{H}} + \mathbf{R}_k\right)^{-1}$$

Simulation de données

Simulation – Choix des paramètres (1/2)

- 36 antennes (grille 6x6)
- Directions observées : quadrillage 10x10
- SNR = 10
- Longueur d'onde 300cm
- Baseline = 1,429m



Simulation – Choix des paramètres (2/2)

Image :

- Fond majoritairement noir ou sombre
- Pas d'effet de convolution visible

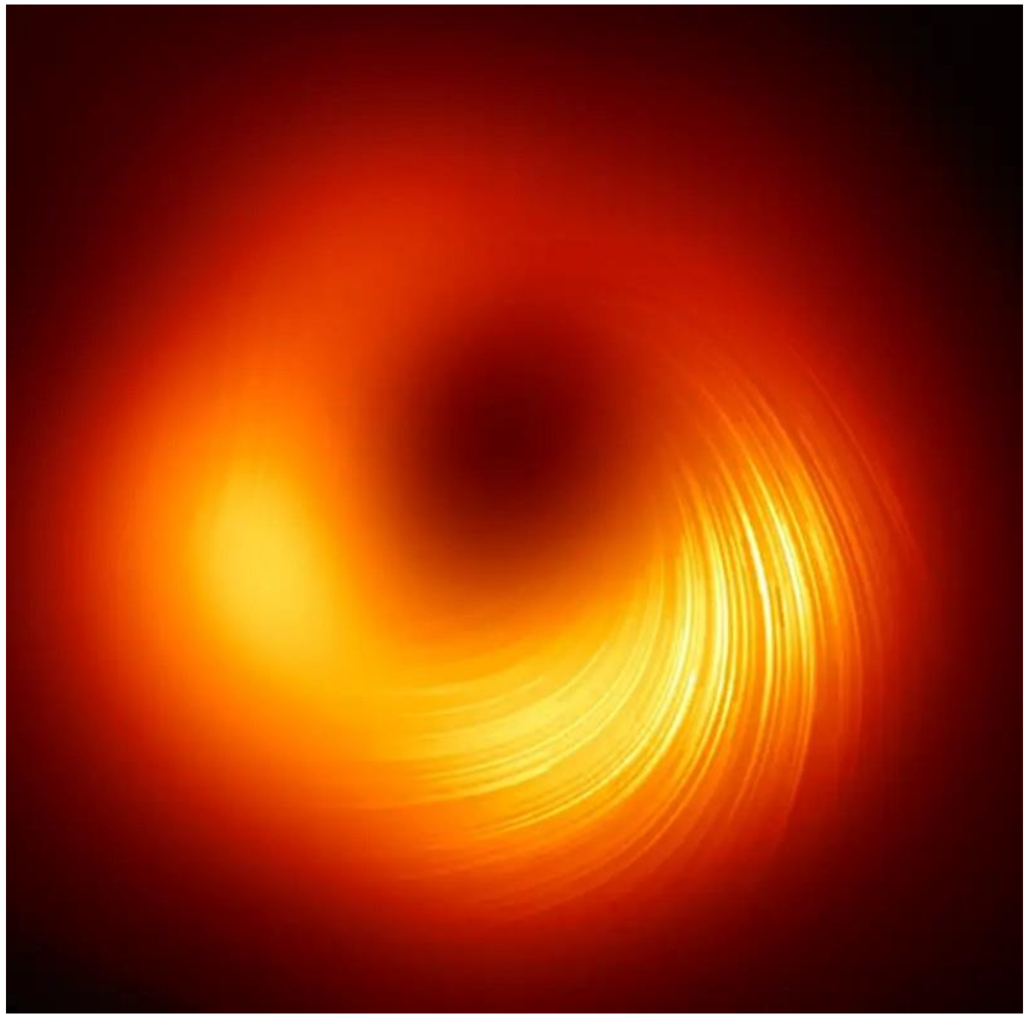


Image sélectionnée

Simulation – Image initiale

La matrice de covariance de l'image initiale est calculée par :

$$y = Hx_0 + v$$

L'image « dirty » est calculée par maximum de vraisemblance (MVDR) :

$$x_D(I_\mathrm{q}) = w_\mathrm{q}^H y w_\mathrm{q}$$

Avec :

$$w_q = \frac{y^{-1} a_\mathrm{q}}{a_\mathrm{q}^H y^{-1} a_\mathrm{q}}$$

Simulations – Images successives

On génère les images et observations successives par le modèle :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_k = \mathbf{A}\boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{w}_{k-1} \\ \boldsymbol{y}_k = \mathbf{H}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k \end{cases}$$

Où x_0 est l'image initiale parfaite

Les matrices Q et R sont calculées :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_k = \mathrm{E}\left[\boldsymbol{w}_{k-1}\boldsymbol{w}_{k-1}^{\mathrm{H}}\right] - \mathrm{E}\left[\boldsymbol{w}_{k-1}\right]\mathrm{E}\left[\boldsymbol{w}_{k-1}\right]^{\mathrm{H}} \\ \mathbf{R}_k = \mathrm{E}\left[\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{H}}\right] - \mathrm{E}\left[\boldsymbol{v}_k\right]\mathrm{E}\left[\boldsymbol{v}_k\right]^{\mathrm{H}} \end{cases}$$

Elles sont en pratiques calculées par méthode « ALS » (*Autocovariance least-squares*)

Performances de reconstruction en présence de perturbations

école normale supérieure paris—saclay

université PARIS-SACLAY

Perturbations – Sources

- Erreur d’initialisation
- Erreur sur les matrices de covariances des bruits
- Imprécisions sur la position des antennes
- Perturbations ionosphériques

Perturbations – Méthodologie

1. Calcul des paramètres initiaux

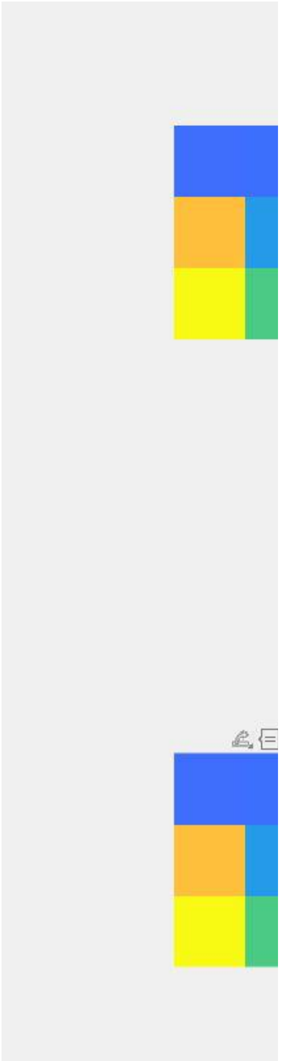
2. Calcul de matrices sans erreur

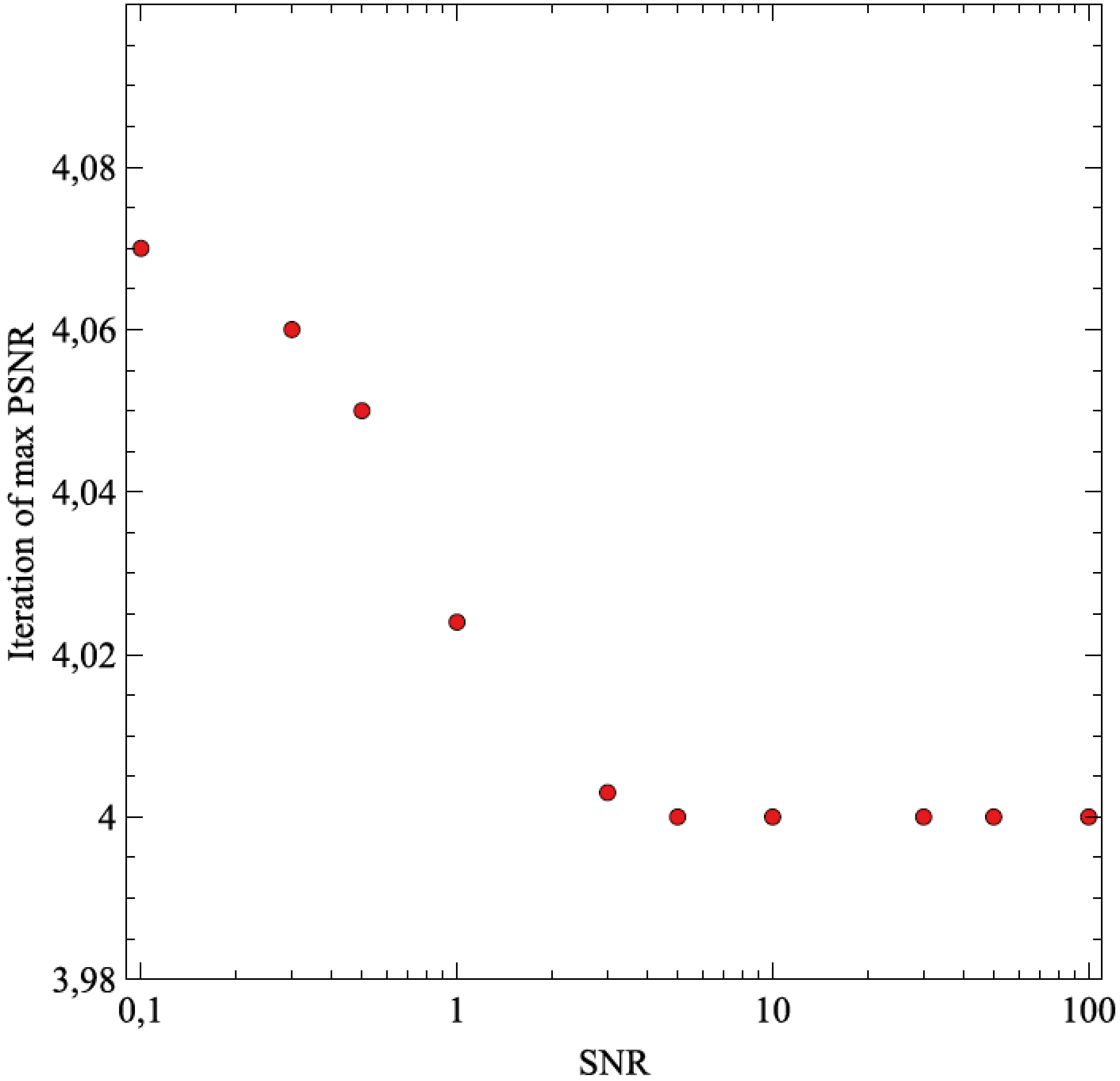
3. Ajout d’erreur sur un paramètre et calcul des matrices affectées

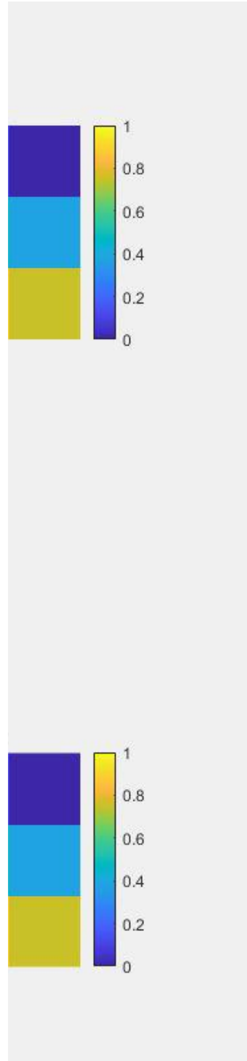
4. Calcul du filtre de Kalman avec chaque matrice

x100

Perturbations – Erreur d'initialisation







Perturbations – Positions (1/3)

Introduction d'une erreur : $\boldsymbol{z}_k^* = \boldsymbol{z}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k$

La matrice des visibilités perturbée est :

$$\mathbf{H}_{j,q}^* = \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\boldsymbol{z}_j^* \cdot \mathbf{l}_q\right) = \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\left(\Delta\boldsymbol{z}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j\right) \cdot \mathbf{l}_q\right) = \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\boldsymbol{z}_j \cdot \mathbf{l}_q\right)\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{\varepsilon}_j \cdot \mathbf{l}_q\right)$$

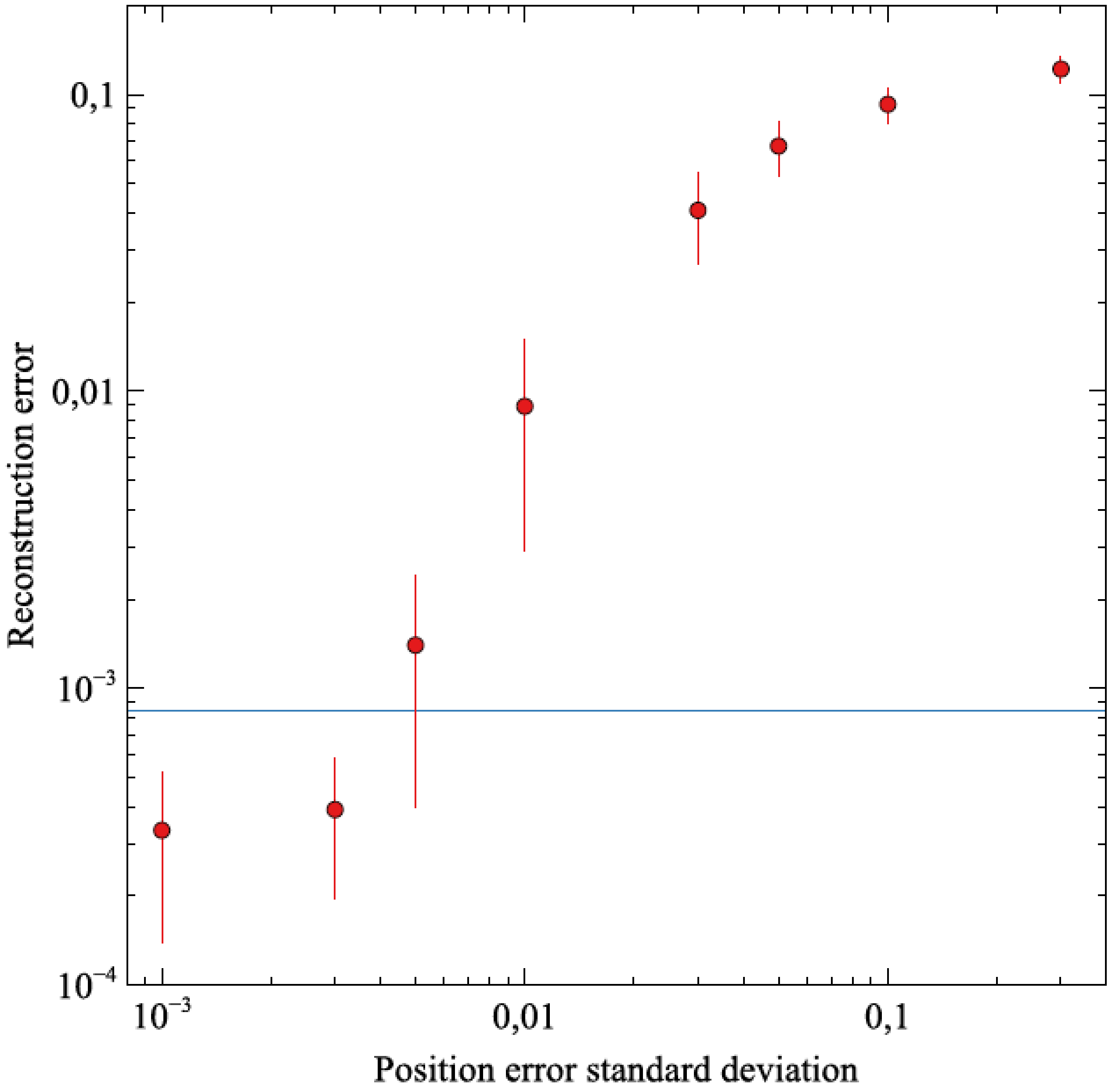
Les équations du filtre restent inchangées.

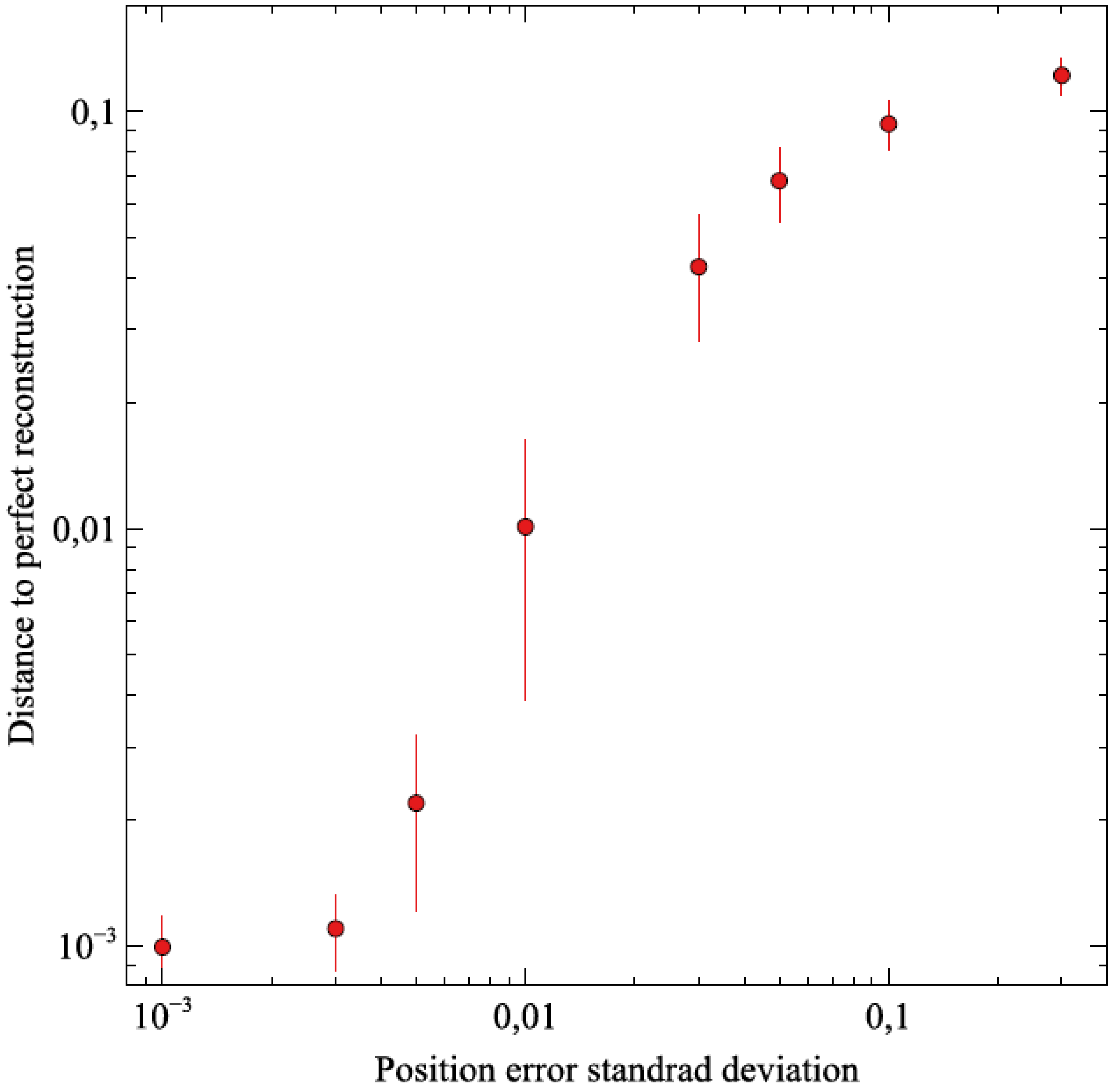
On introduit l'erreur de perturbation : $\boldsymbol{\varepsilon}_k^{\boldsymbol{x}} = \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^* - \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$

Mesurée pour les graphiques : $\varepsilon_k^{\boldsymbol{xx}} = d_1\left(\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^*, \widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k}\right)$

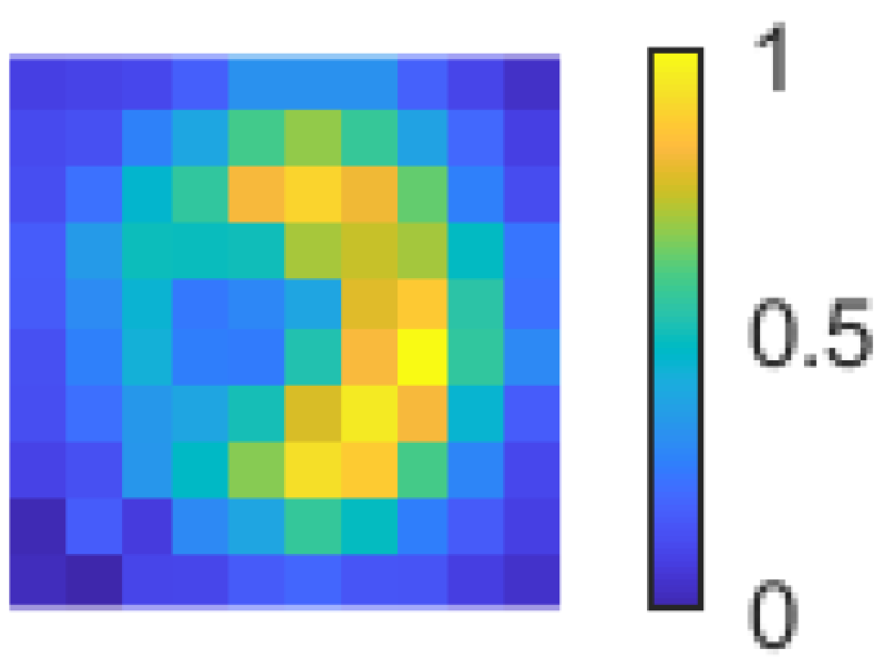
On mesure également l'erreur de reconstruction : $\varepsilon_k^{\boldsymbol{x}} = d_1\left(\widehat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^*, \boldsymbol{x}_k\right)$

Perturbations – Positions (2/3)

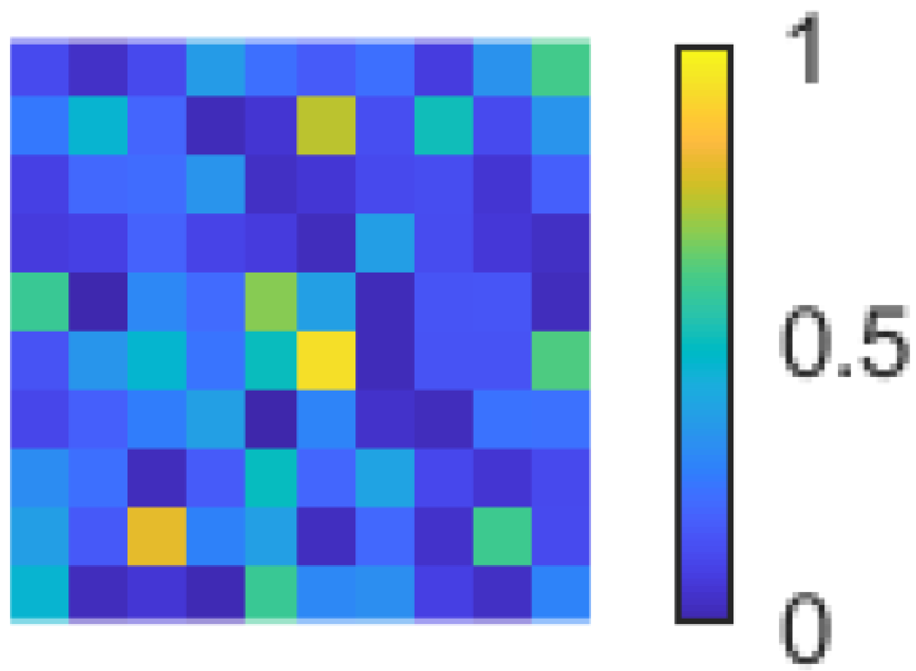




Perturbations – Positions (3/3) – Convergence



Reconstruction sans erreur



Reconstruction à d1=0,1

Convergence vers 0,167

Perturbations – Directions (1/4)

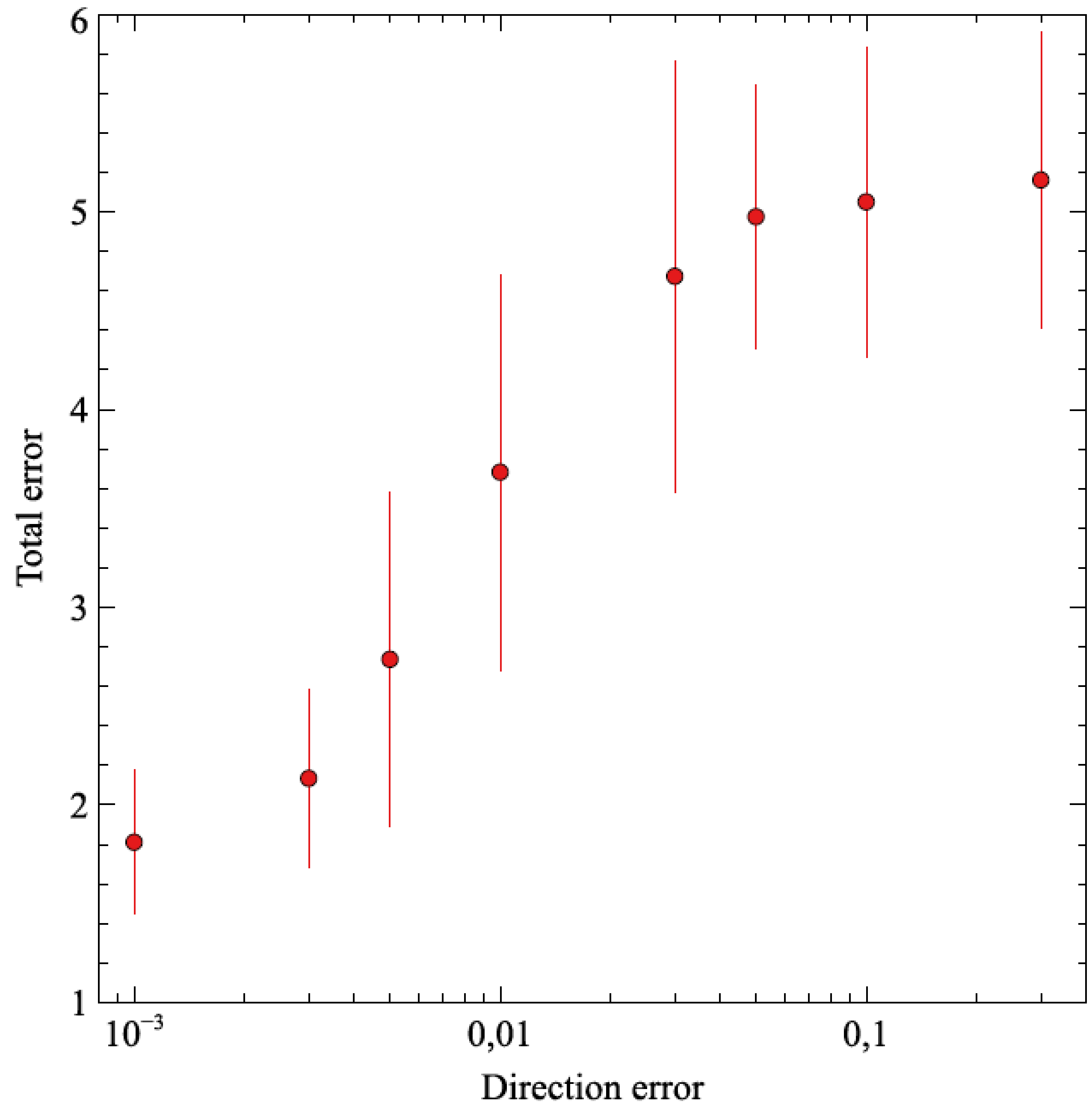
On introduit de même une erreur sur les positions :

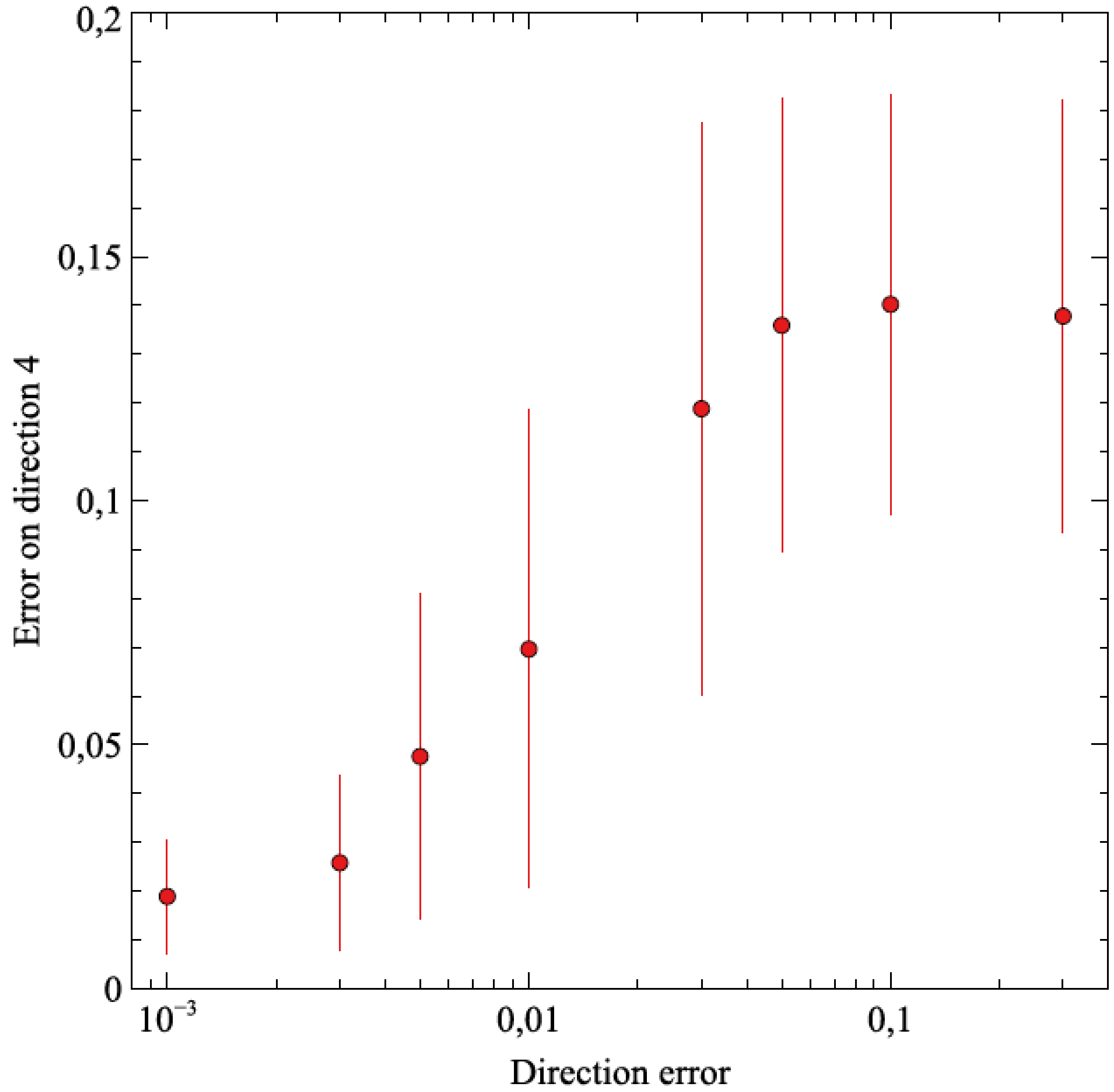
$$\mathbf{l}_q^* = \mathbf{l}_q + \boldsymbol{\varepsilon}_q$$

La matrices des visibilités perturbée devient :

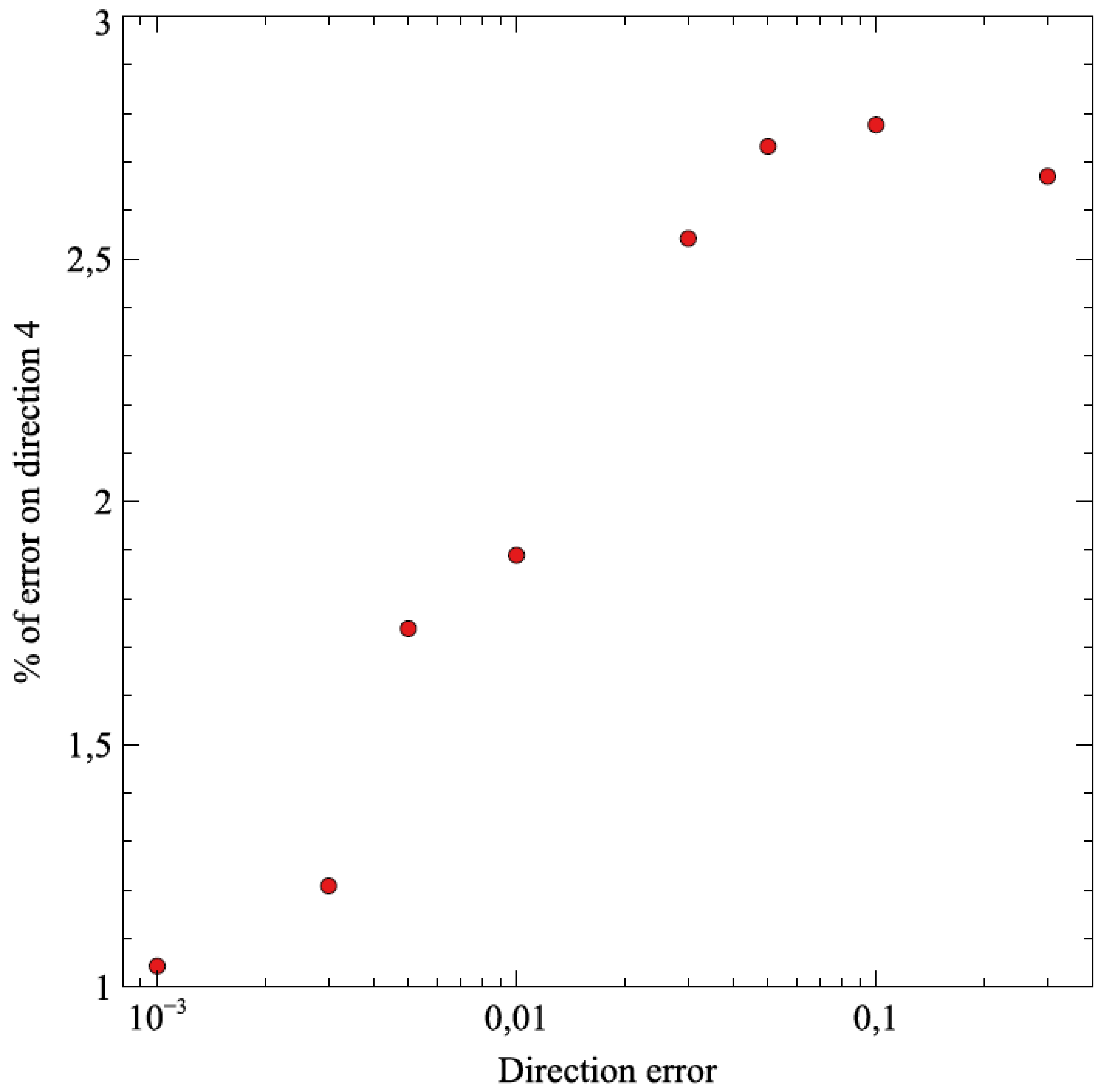
$$\mathbf{H}_{j,q}^* = \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\boldsymbol{z}_j \cdot \mathbf{l}_q^*\right) = \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\boldsymbol{z}_j \cdot \mathbf{l}_q\right)\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\boldsymbol{z}_j \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_q\right)$$

Perturbations – Directions (2/4) – Une direction

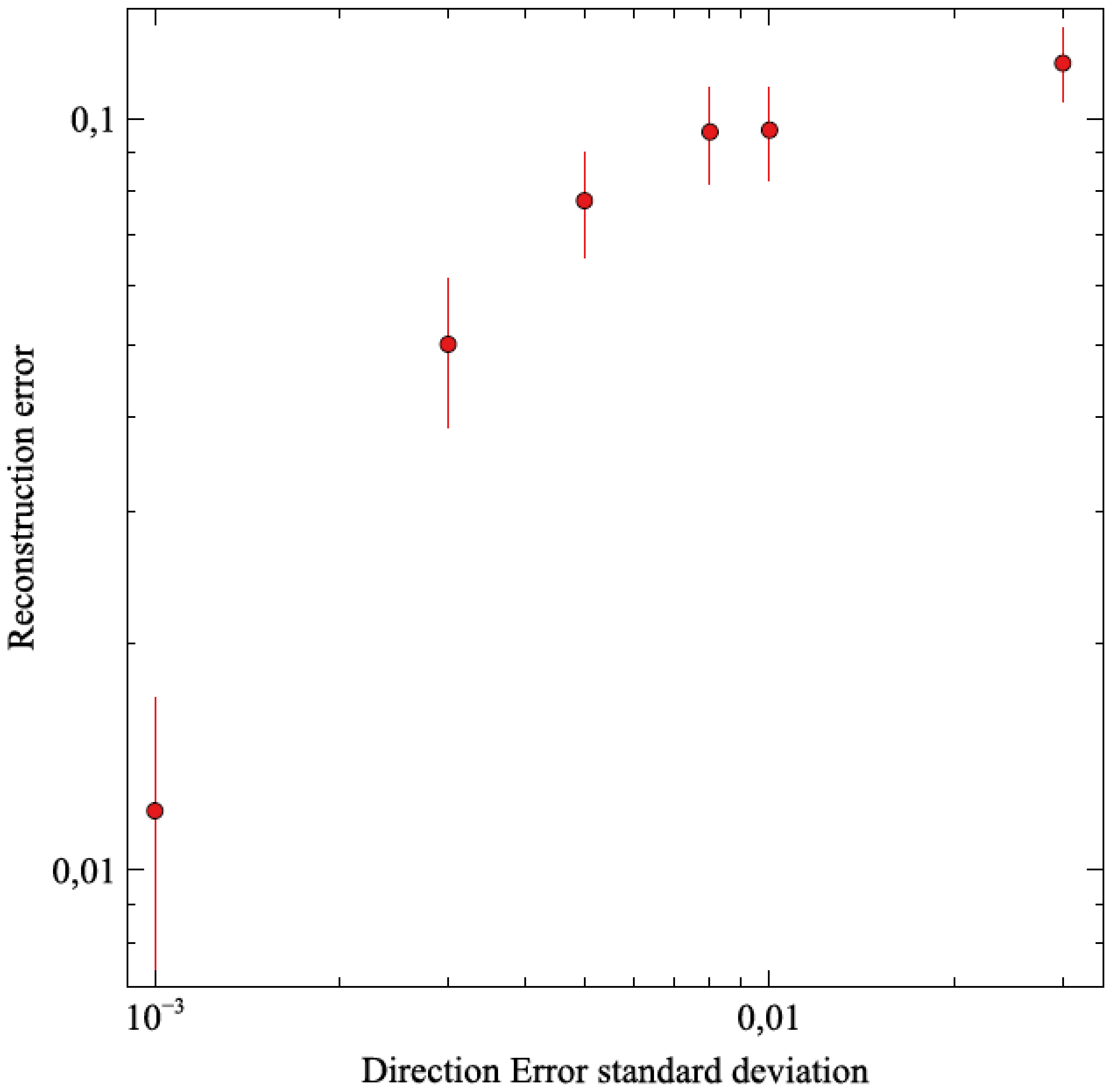


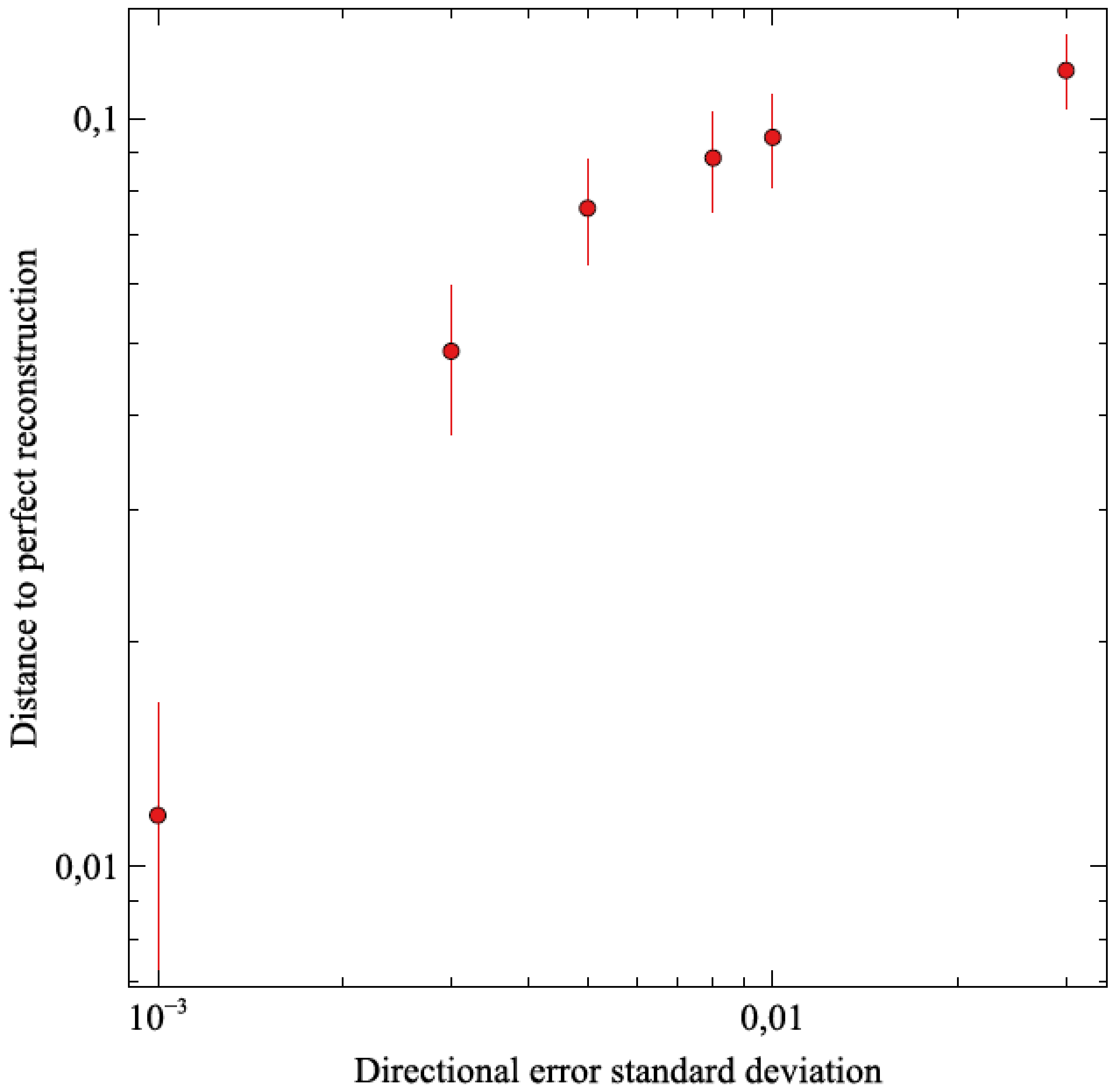


Perturbations – Directions (3/4) – Une direction



Perturbations – Directions (4/4) – Toutes les directions





école normale supérieure paris—saclay

Essai de correction expérimentale

université PARIS-SACLAY

Correction

On cherche à résoudre le problème :

$$\boldsymbol{y} - \mathbf{H}^d * \boldsymbol{x}_{\mathrm{MVDR}} = 0$$

Où :

$$\mathbf{H}^d_{j,q} = \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\boldsymbol{z}_j \cdot (\mathbf{l}^*_q - \boldsymbol{u}_q)\right)$$

Pour obtenir le vecteur de correction u tel que :

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}^* - \boldsymbol{u}$$

On obtient :

$$\left\langle d_1(\mathbf{l}, \mathbf{l}^*) - d_1(\mathbf{l}, \mathbf{l}^* - \boldsymbol{u})\right\rangle = -4.12 \times 10^{-4}$$

Conclusion

école normale supérieure paris—saclay

- Précision de 0,5% sur les positions
- Précision de 0,1% sur les directions
- Utilisation de lsqnonlin *a posteriori* impossible avec ces paramètres
- Utilisation du filtre de Kalman possible en radio astronomie dans les bonnes conditions

université PARIS-SACLAY

Sources

[1] A. M. Sardarabadi A.-J. vand der Veen S. J. Wijnholds. "Signal Processing for Radio Astronomy". In: *Handbook of Signal Processing Systems*. 2018. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-91734-4_9.

[2] Eric Chaumette. *Introduction to Kalman Filtering and Extend Kalman Filtering*. Nov. 2018.

[3] G.Robert-Dautun M. Marchesseau. *Reconstruction dynamique d'images radioastronomiques de trous noirs*. Report. ENS Paris-Saclay, 2022. URL: https://drive.google.com/file/d/1wX9jrd8hQLxSini0j5Myl91bs view?usp=sharing.

[4] Stephen P. Boyd Nir Shlezinger Yonina C. Eldar. *Model-Based Deep Learning: On the Intersection of Deep Learning and Optimization*. preprint. arXiv:2205.02640v1. arXiv, May 2022.

[5] Mulari Rajmani. "Data-based Techniques to Improve State Estimation in Model Predictive Control". PhD Thesis. University of Wisconsin-Madison, Oct. 2007.

[6] Simo Särkkä. *Optimal Smoothing*. Lecture. Mar. 2011.

[7] K. F. Evans T. J. Cornwell. "A simple maximum entropy devoncolution algorithm". In: *Astro. Astrophys.* (1985).

[8] Spoelstra TAT. "The ionosphere and radio interferometry". In: *Ann. Geophys.* 40.4 (Nov. 1997). DOI: https://doi.org/10.4401/ag-3885.

Annexe 1 : PSNR

$$PSNR = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{d^2}{EQM} \right)$$

où d est la valeur maximale pour un pixel (1 ici car les images sont normalisées), et EQM représente l'erreur quadratique moyenne définie pour deux images I_{ref} et I_{rec} :

$$EQM = \frac{1}{M_x M_y} \sum_{i=0}^{M_x-1} \sum_{j=0}^{M_y-1} (I_{ref}(i,j) - I_{rec}(i,j))^2$$

Annexe 2 – Distances

$$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \left(\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})\right)^2 \quad d_1(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \frac{||\mathrm{A}-\mathrm{B}||_\mathrm{F}}{mn}$$

$$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \left(\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})\right)^2 \quad d_2(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \left|\mathrm{A}_{ij} - \mathrm{B}_{i,j}\right|$$

$$\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \quad ||\mathrm{A}||_\mathrm{F} := \sqrt{\mathrm{tr}\{\mathrm{A}\mathrm{A}^\mathrm{H}\}} = \sqrt{\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \left|\mathrm{A}_{ij}\right|^2}$$