

# Reconstruction d'images radio astronomiques dynamiques en présence de perturbations.

Soutenance de stage

Encadré par **I. Vin**

Présenté par **G. Robert-Dautun**

école  
normale  
supérieure  
paris—saclay

université  
PARIS-SACLAY

# Contexte

école —  
normale —  
supérieure —  
paris — saclay —



Very Large Array (VLA), Nouveau Mexique

## Fonctionnement

# Fonctionnement – Modèle

Modèle étudié :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{cases}$$

$\mathbf{x}$  : images réelles  
 $\mathbf{y}$  : observations  
 $\mathbf{A}$  : matrice d'évolution  
 $\mathbf{w}$  : « bruit » d'évolution  
 $\mathbf{v}$  : bruit de mesure  
 $\mathbf{H}$  : FFT des baseline

Calcul de  $\mathbf{H}$  :

$$\mathbf{H}_{j,q} = \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \mathbf{z}_j \cdot \mathbf{l}_q\right)$$

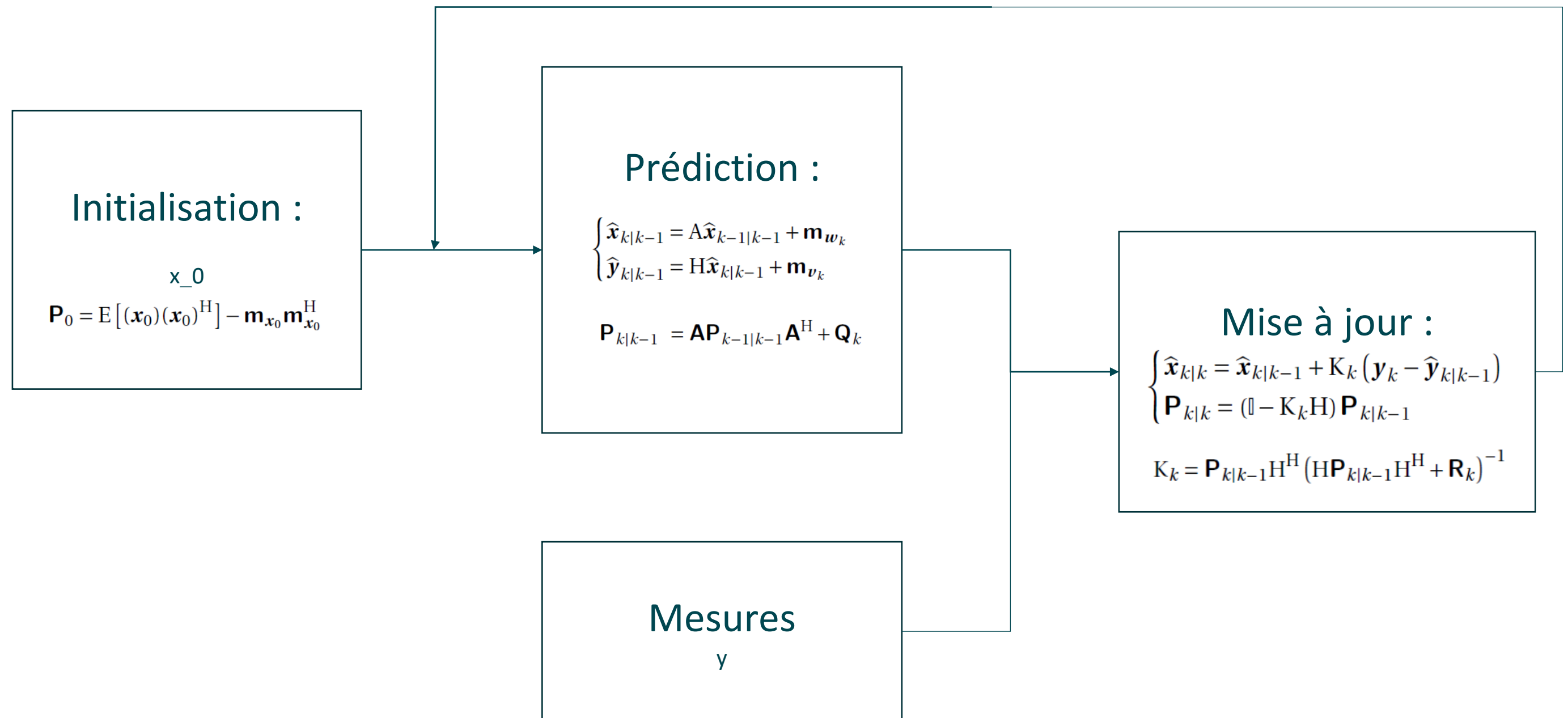
$\Delta \mathbf{z}_j$  : vecteur des baseline  
 $\mathbf{l}_q$  : vecteur des directions

Autres matrices :

$\mathbf{Q}$  : covariance du bruit d'évolution

$\mathbf{R}$  : covariance du bruit d'observation

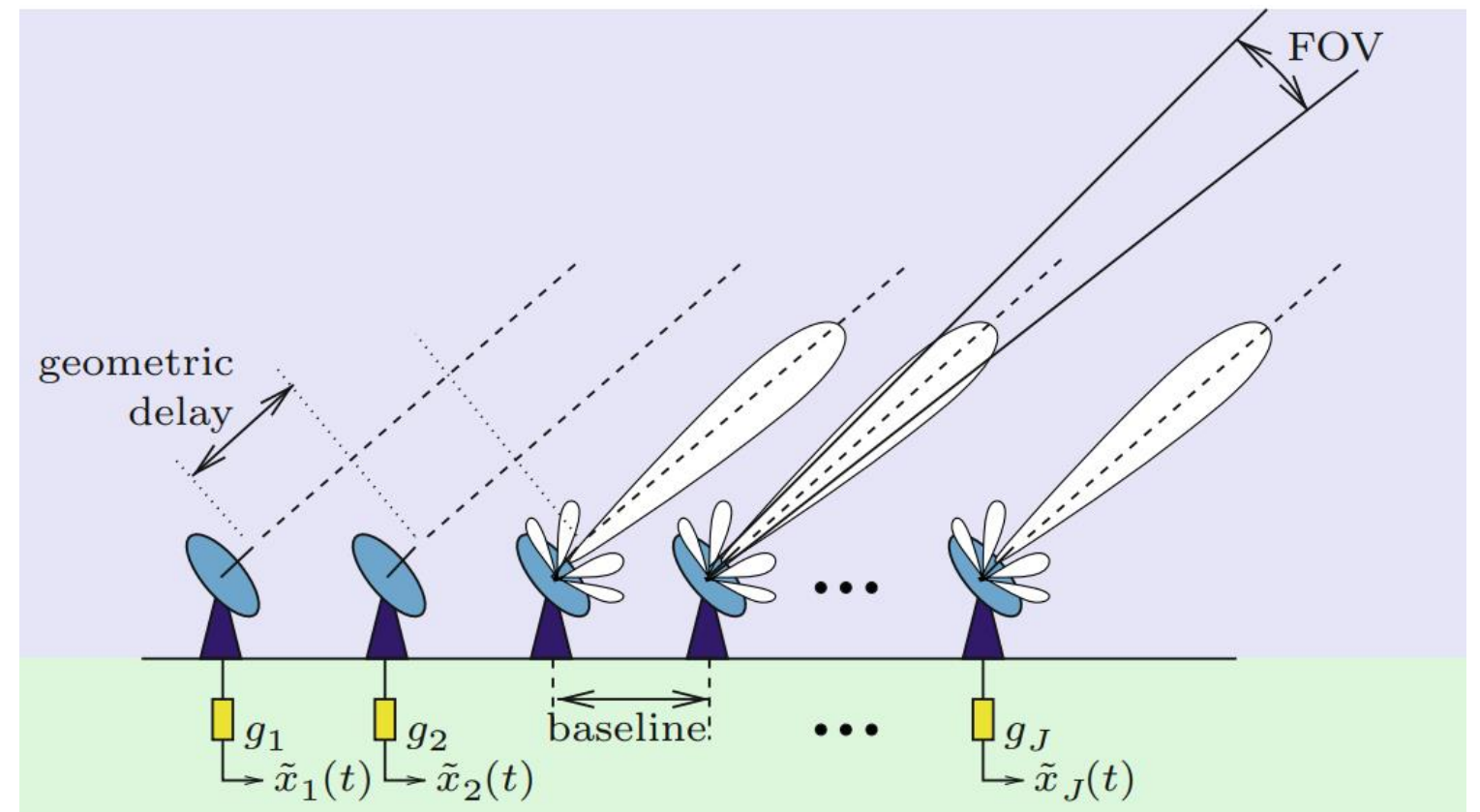
# Fonctionnement – Filtre de Kalman



## Simulation de données

# Simulation – Choix des paramètres (1/2)

- 36 antennes (grille 6x6)
- Directions observées : quadrillage 10x10
- SNR = 10
- Longueur d'onde 300cm
- Baseline = 1,429m



## Simulation – Choix des paramètres (2/2)

### Image :

- Fond majoritairement noir ou sombre
- Pas d'effet de convolution visible

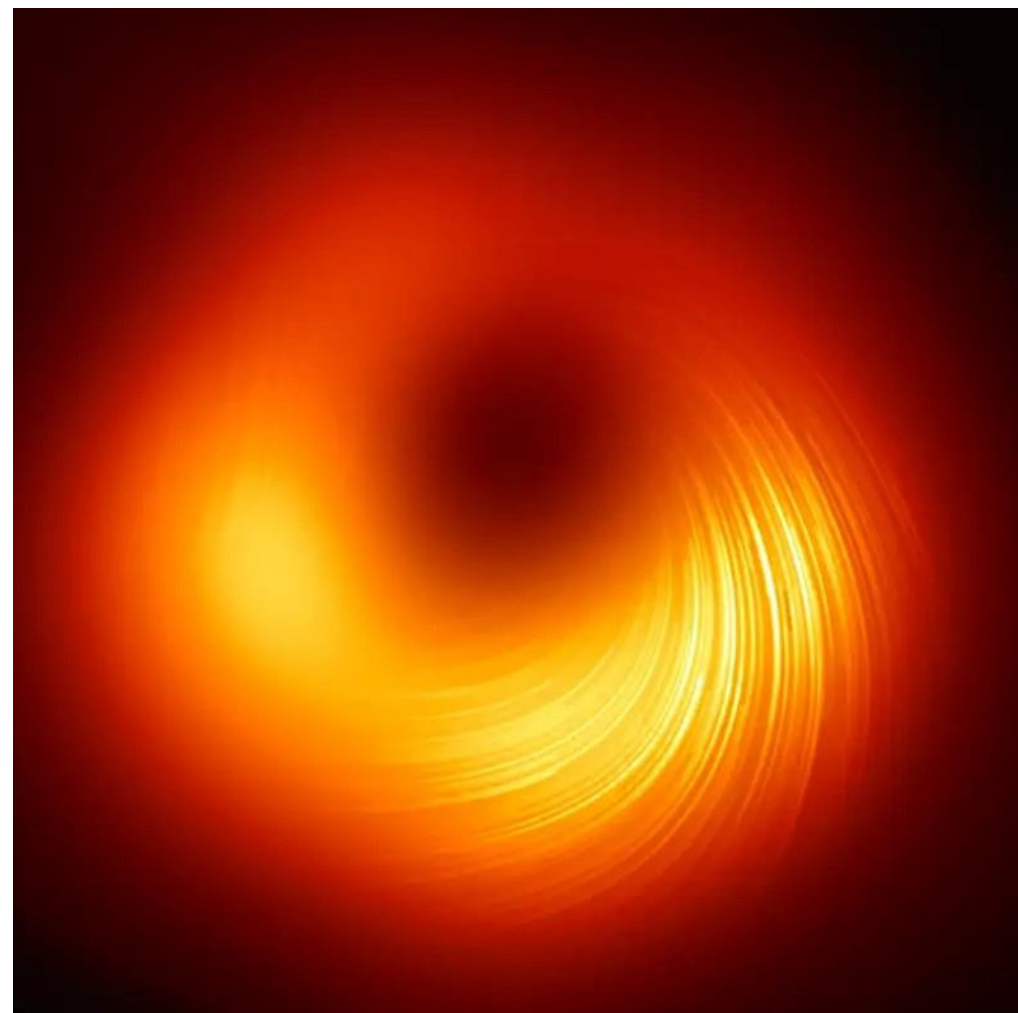


Image sélectionnée



## Simulation – Image initiale

La matrice de covariance de l'image initiale est calculée par :

$$y = Hx_0 + v$$

L'image « dirty » est calculée par maximum de vraisemblance (MVDR) :

$$x_D(I_q) = w_q^H y w_q$$

Avec :

$$w_q = \frac{y^{-1} a_q}{a_q^H y^{-1} a_q}$$

# Simulations – Images successives

On génère les images et observations successives par le modèle :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{cases}$$

Où  $\mathbf{x}_0$  est l'image initiale parfaite

Les matrices  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  sont calculées :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}[\mathbf{w}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}^H] - \mathbf{E}[\mathbf{w}_{k-1}]\mathbf{E}[\mathbf{w}_{k-1}]^H \\ \mathbf{R}_k = \mathbf{E}[\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^H] - \mathbf{E}[\mathbf{v}_k]\mathbf{E}[\mathbf{v}_k]^H \end{cases}$$

Elles sont en pratiques calculées par méthode « ALS » (*Autocovariance least-squares*)

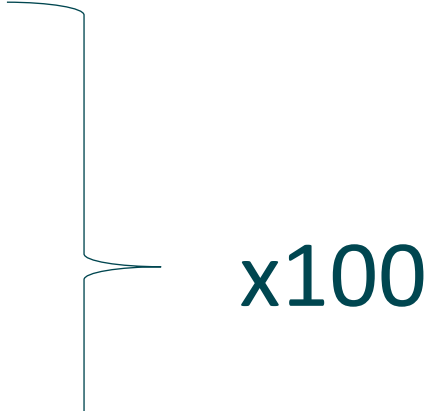
# Performances de reconstruction en présence de perturbations

école —  
normale —  
supérieure —  
paris — saclay —

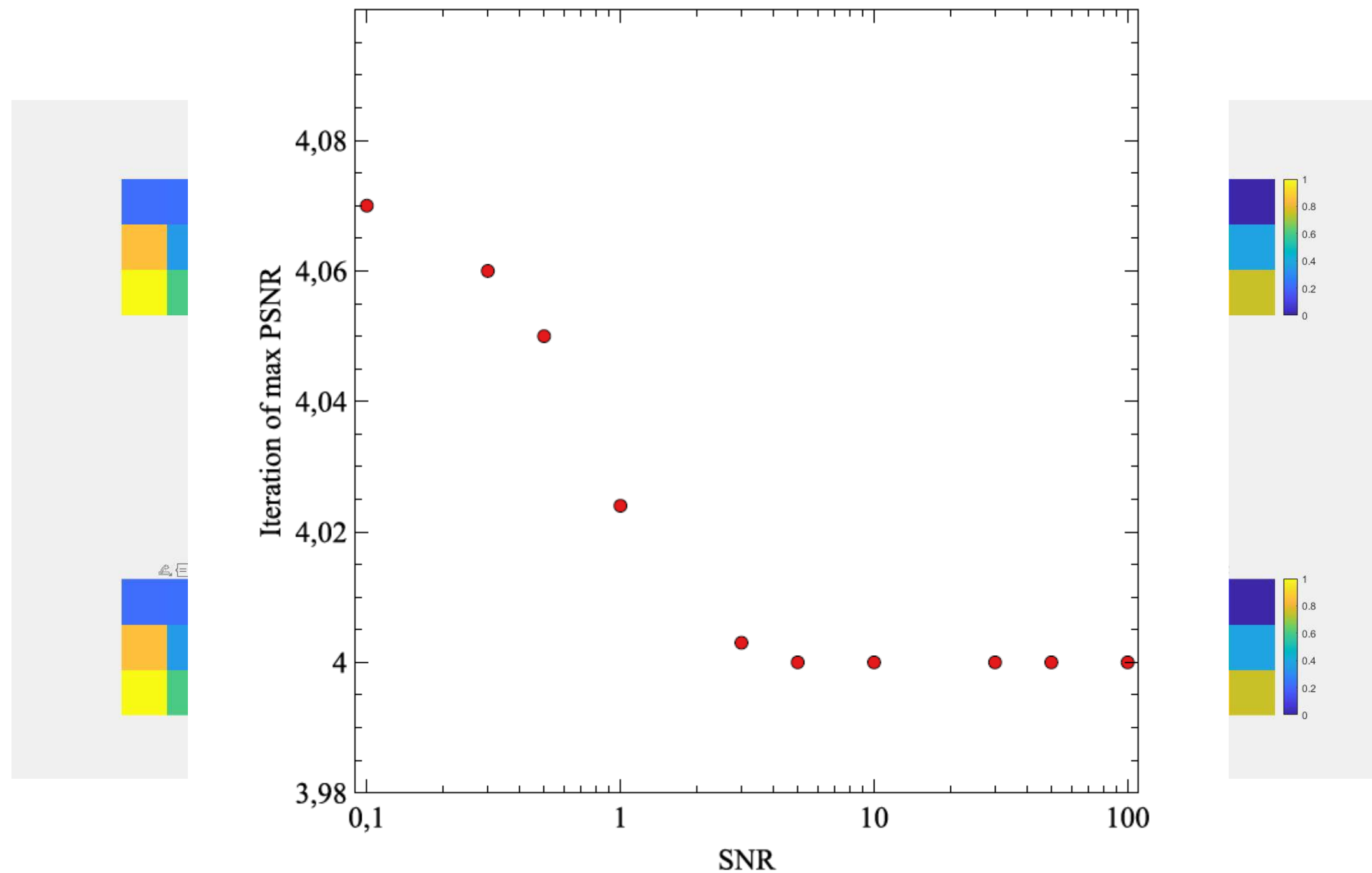
# Perturbations – Sources

- Erreur d'initialisation
- Erreur sur les matrices de covariances des bruits
- Imprécisions sur la position des antennes
- Perturbations ionosphériques

# Perturbations – Méthodologie

1. Calcul des paramètres initiaux
  2. Calcul de matrices sans erreur
  3. Ajout d'erreur sur un paramètre et calcul des matrices affectées
  4. Calcul du filtre de Kalman avec chaque matrice
- 
- x100

# Perturbations – Erreur d'initialisation



# Perturbations – Positions (1/3)

Introduction d'une erreur :  $\mathbf{z}_k^* = \mathbf{z}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k$

La matrice des visibilités perturbée est :

$$\mathbf{H}_{j,q}^* = \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \mathbf{z}_j^* \cdot \mathbf{l}_q\right) = \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} (\Delta \mathbf{z}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j) \cdot \mathbf{l}_q\right) = \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \mathbf{z}_j \cdot \mathbf{l}_q\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \boldsymbol{\varepsilon}_j \cdot \mathbf{l}_q\right)$$

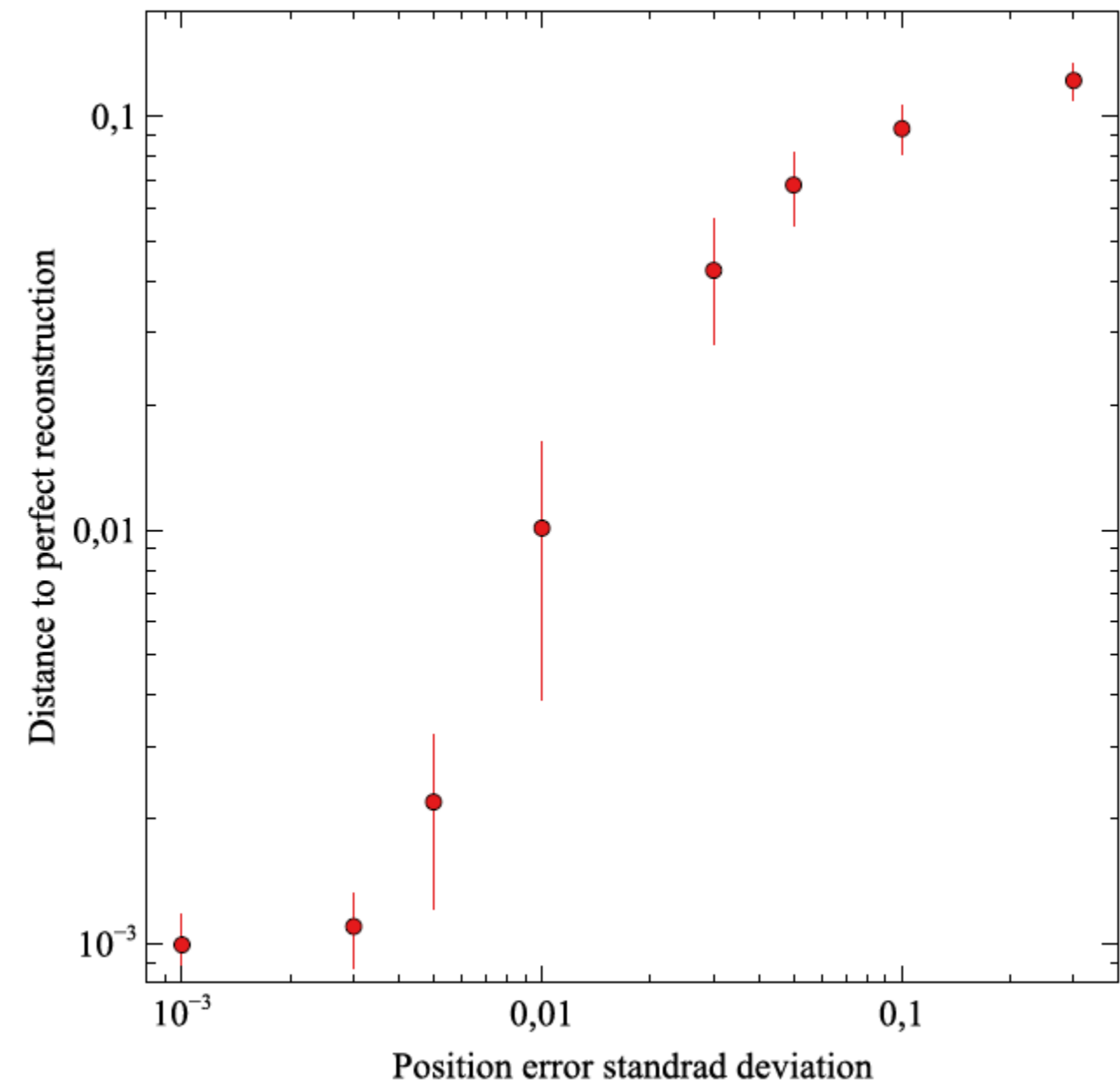
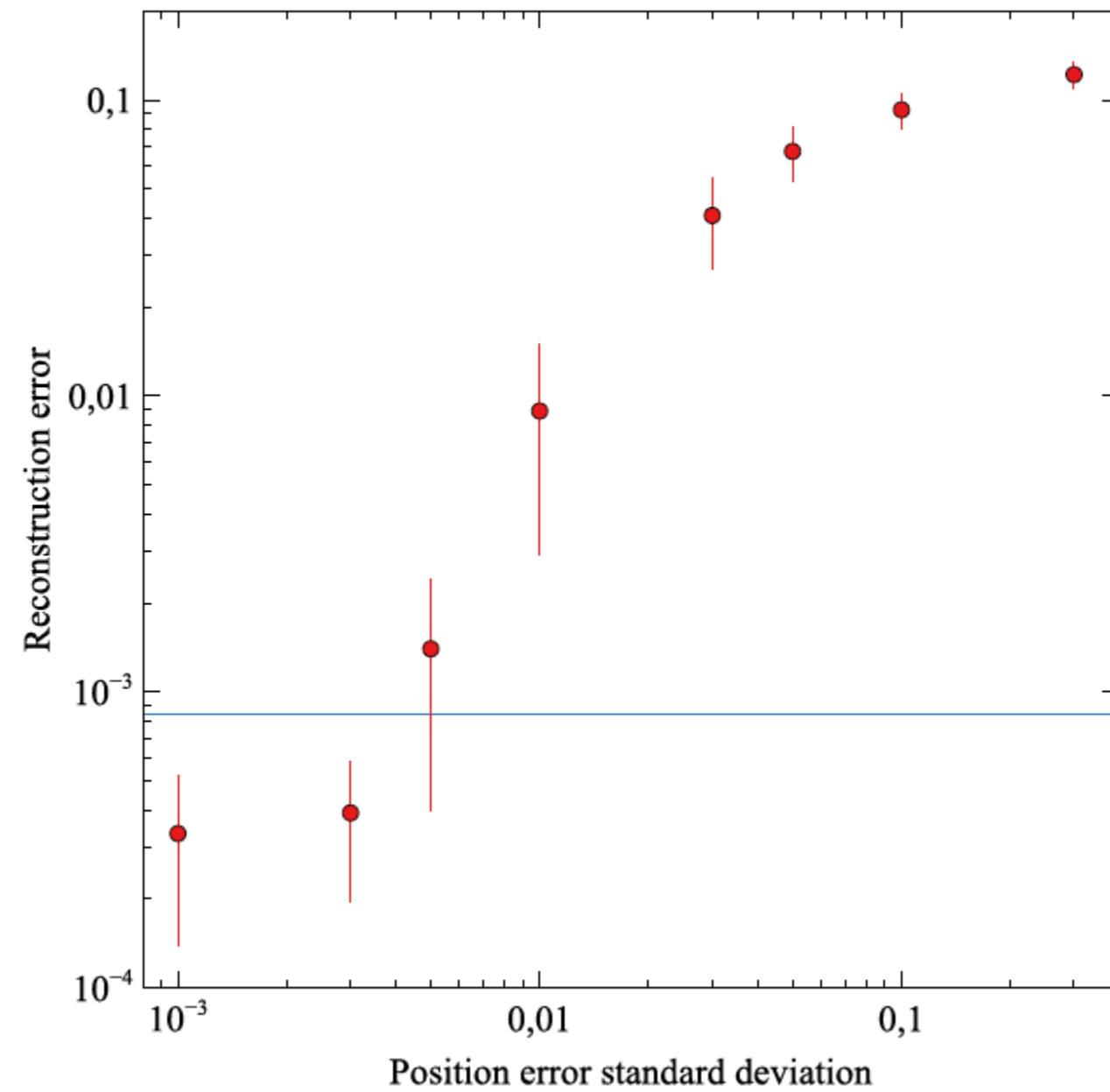
Les équations du filtre restent inchangées.

On introduit l'erreur de perturbation :  $\boldsymbol{\varepsilon}_k^{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$

Mesurée pour les graphiques :  $\varepsilon_k^{\mathbf{x}\mathbf{x}} = d_1\left(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^*, \hat{\mathbf{x}}_{k|k}\right)$

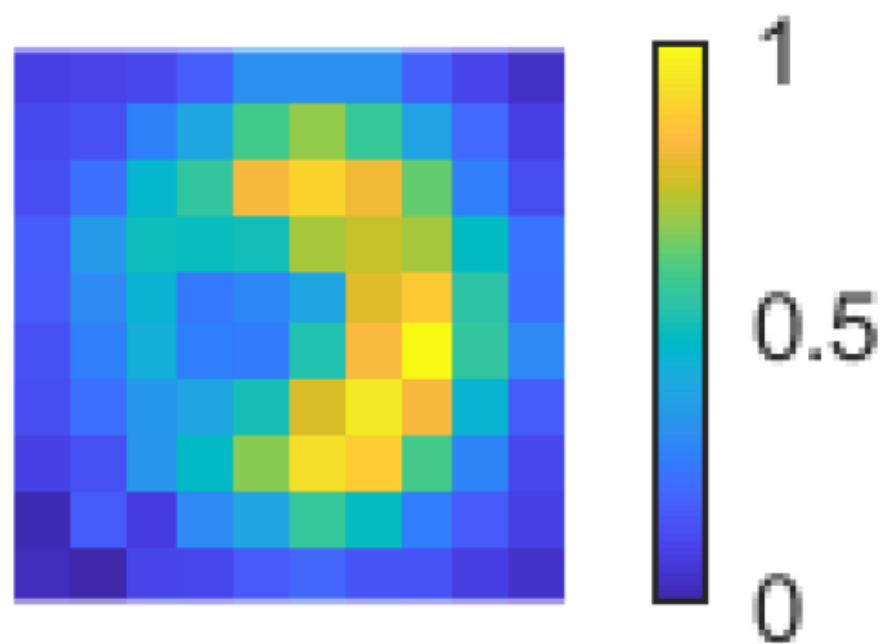
On mesure également l'erreur de reconstruction :  $\varepsilon_k^{\mathbf{x}} = d_1\left(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^*, \mathbf{x}_k\right)$

## Perturbations – Positions (2/3)

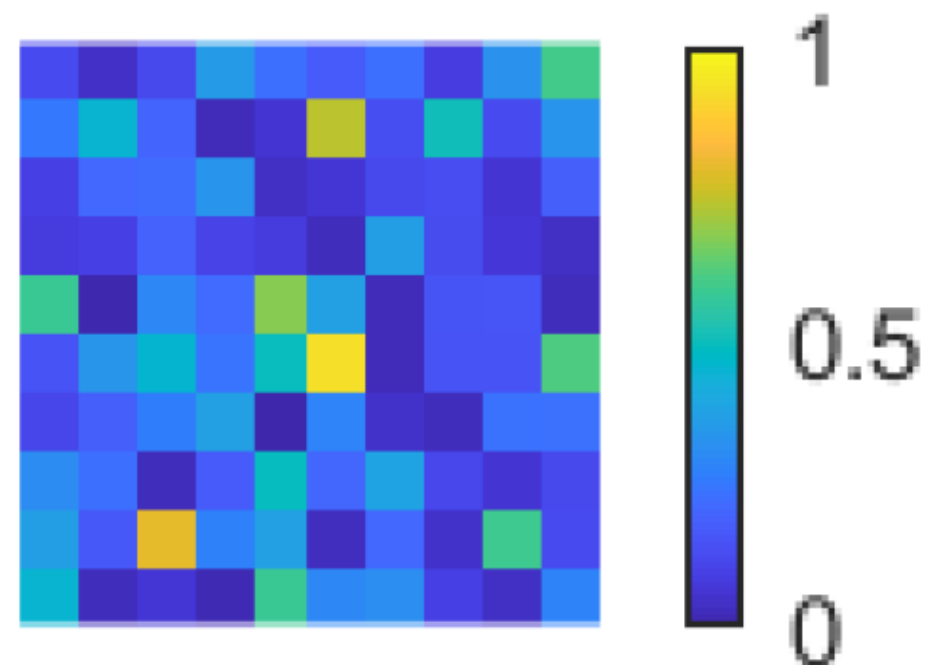




# Perturbations – Positions (3/3) – Convergence



Reconstruction sans erreur



Reconstruction à  $d_1=0,1$

Convergence vers 0,167

## Perturbations – Directions (1/4)

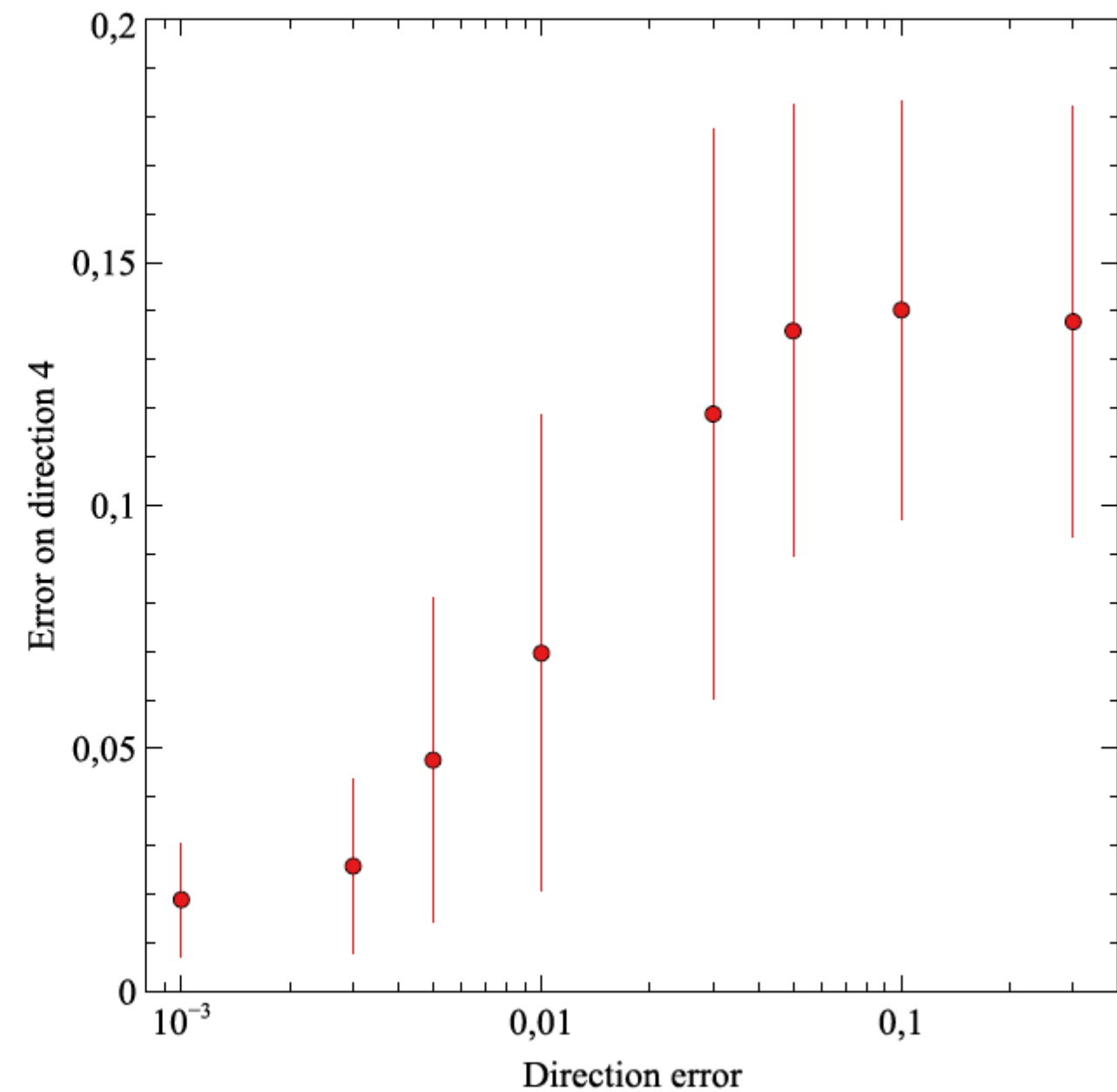
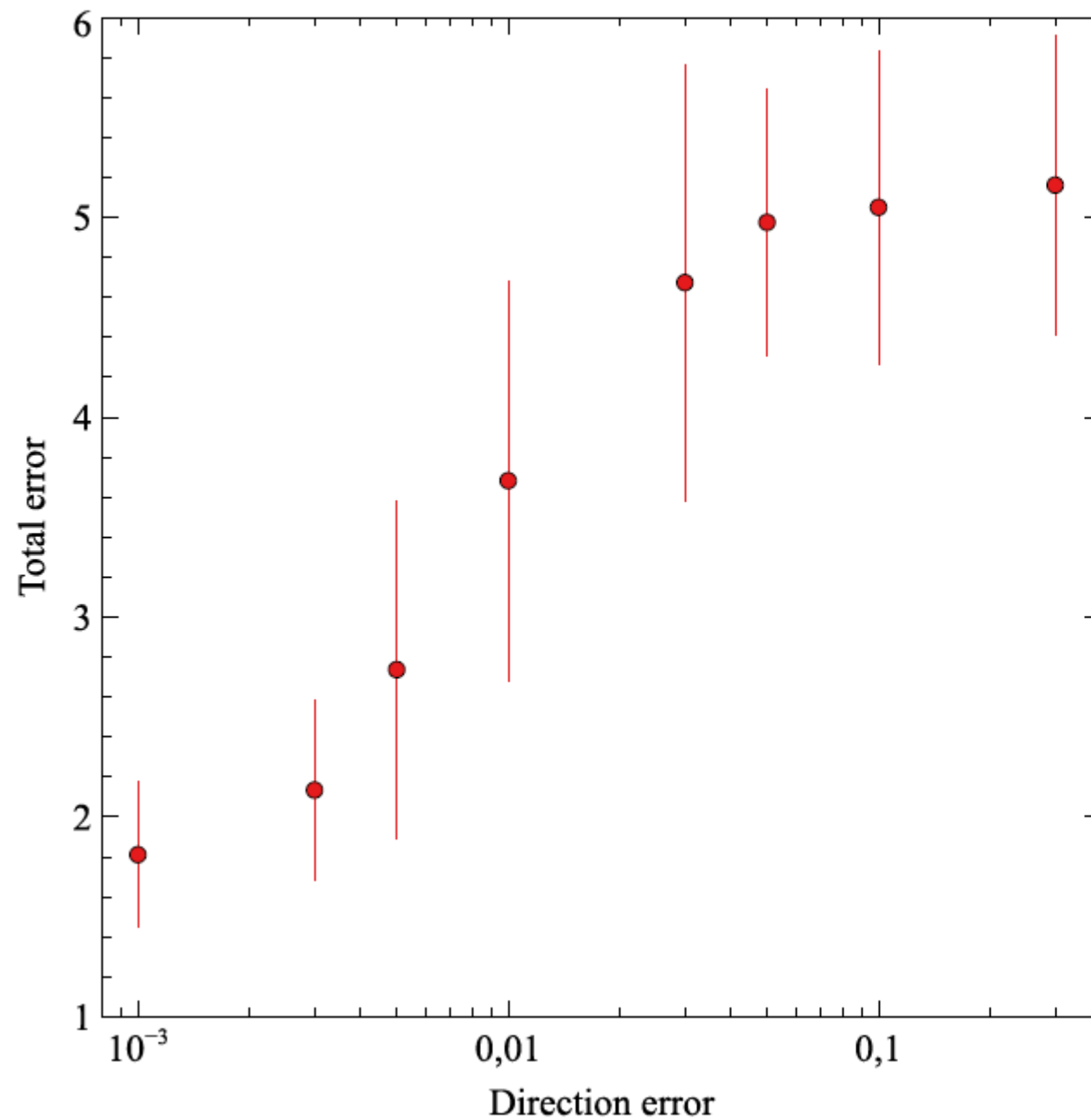
On introduit de même une erreur sur les positions :

$$\mathbf{l}_q^* = \mathbf{l}_q + \boldsymbol{\epsilon}_q$$

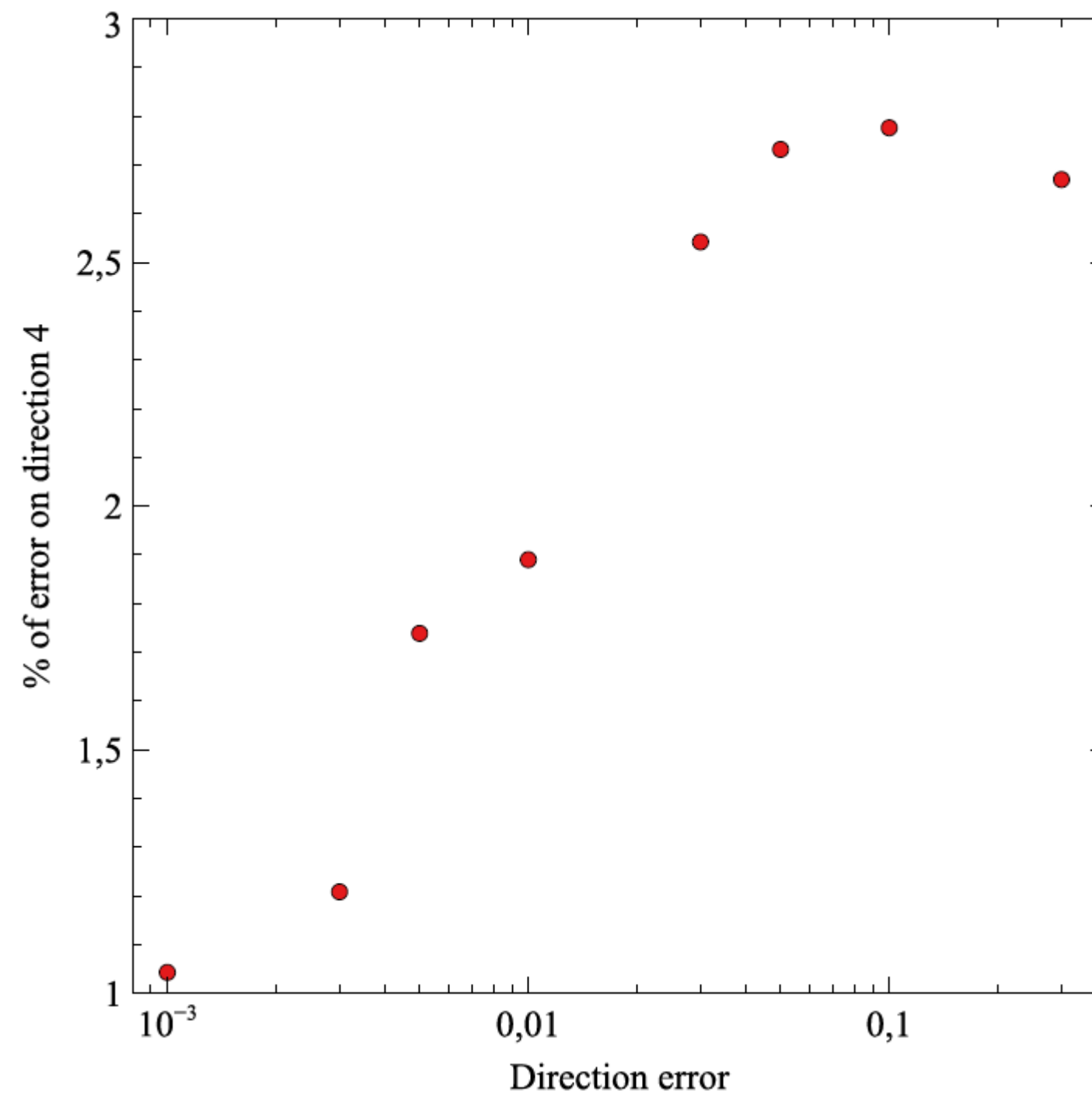
La matrices des visibilités perturbée devient :

$$\mathbf{H}_{j,q}^* = \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\mathbf{z}_j \cdot \mathbf{l}_q^*\right) = \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\mathbf{z}_j \cdot \mathbf{l}_q\right) \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\mathbf{z}_j \cdot \boldsymbol{\epsilon}_q\right)$$

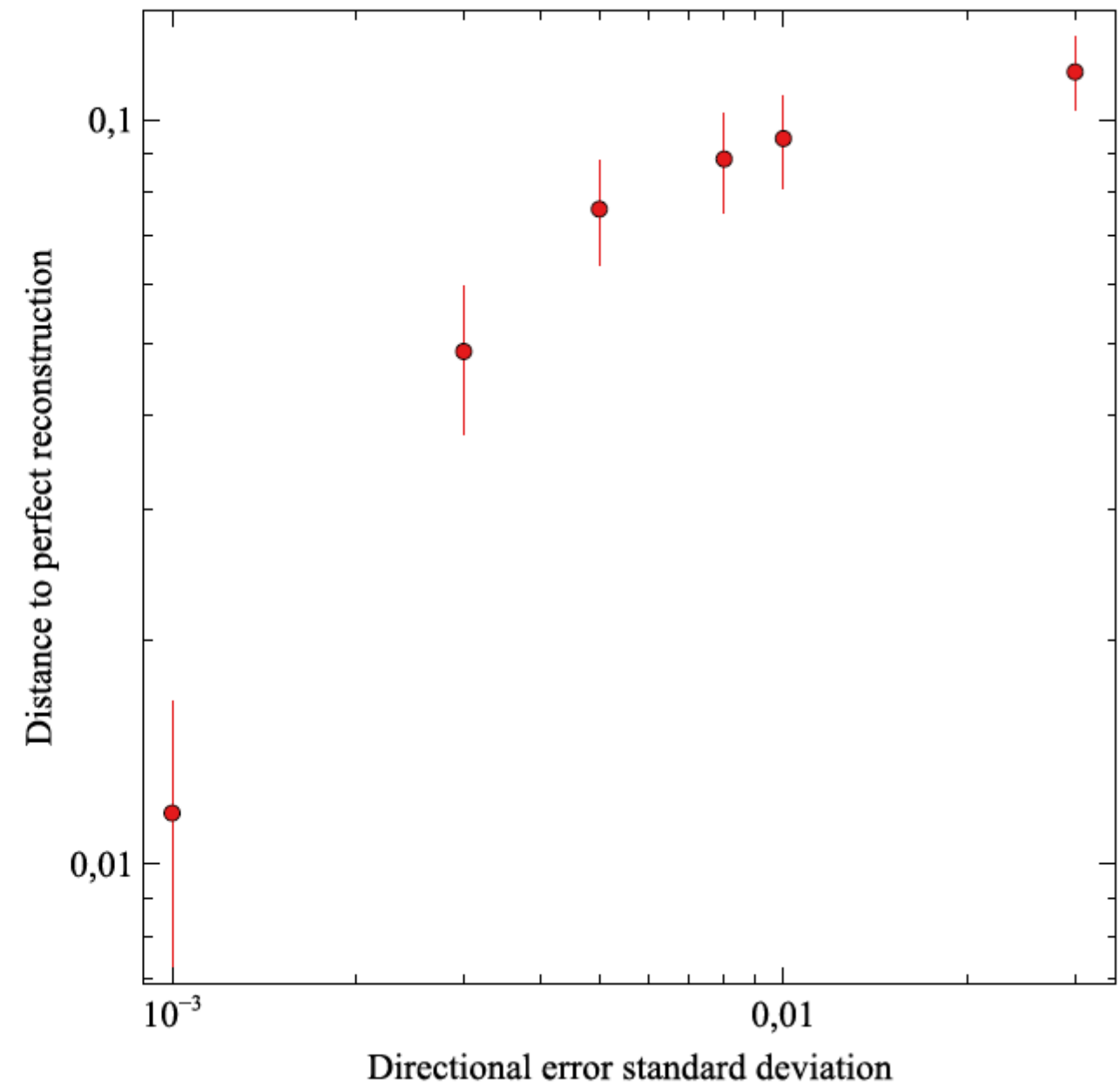
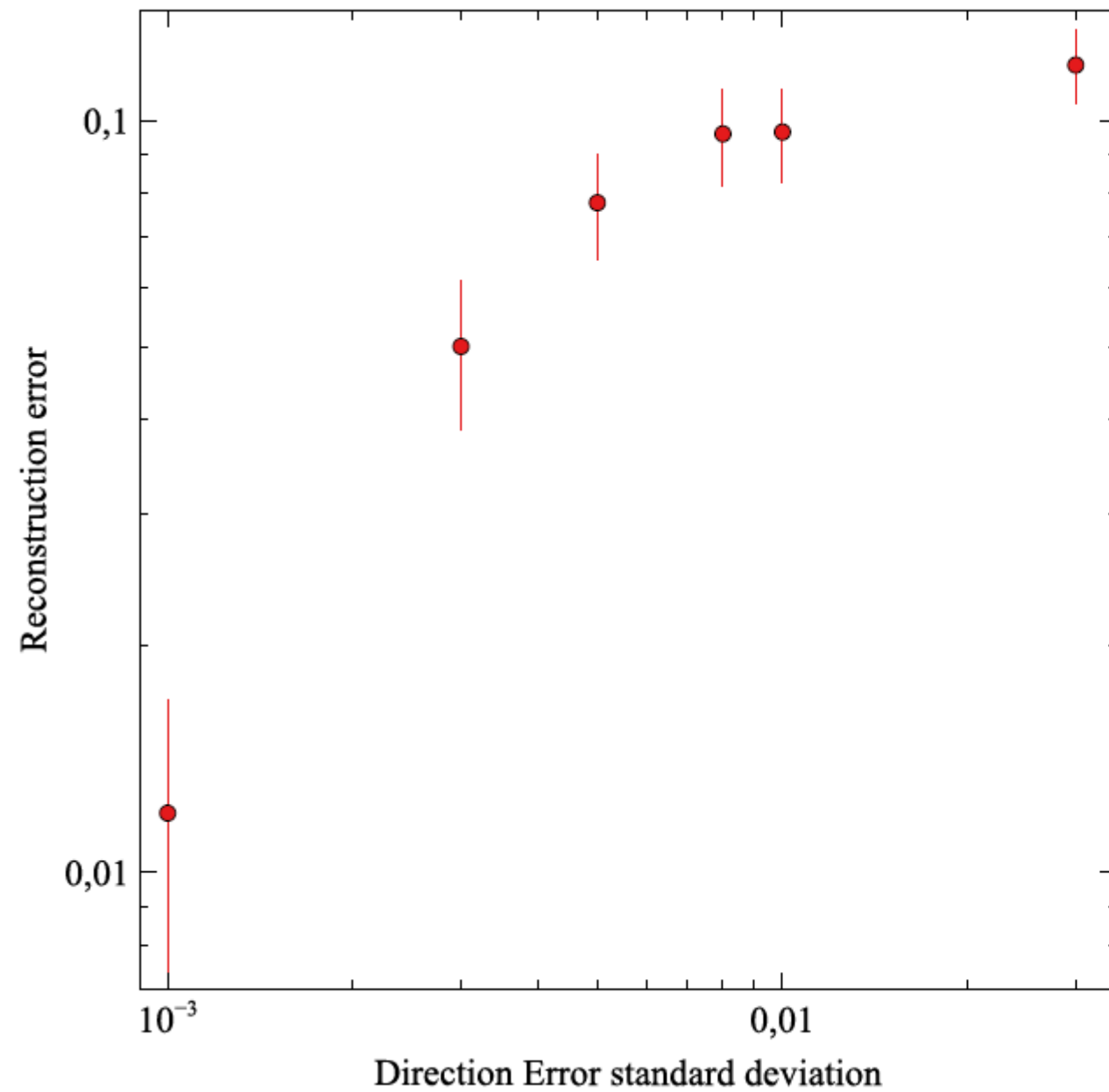
## Perturbations – Directions (2/4) – Une direction



## Perturbations – Directions (3/4) – Une direction



## Perturbations – Directions (4/4) – Toutes les directions



## Essai de correction expérimentale

# Correction

On cherche à résoudre le problème :

$$\mathbf{y} - \mathbf{H}^d * \mathbf{x}_{\text{MVDR}} = 0$$

Où :

$$\mathbf{H}_{j,q}^d = \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \mathbf{z}_j \cdot (\mathbf{l}_q^* - \mathbf{u}_q)\right)$$

Pour obtenir le vecteur de correction  $\mathbf{u}$  tel que :

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}^* - \mathbf{u}$$

On obtient :

$$\langle d_1(\mathbf{l}, \mathbf{l}^*) - d_1(\mathbf{l}, \mathbf{l}^* - \mathbf{u}) \rangle = -4.12 \times 10^{-4}$$

# Conclusion

- Précision de 0,5% sur les positions
- Précision de 0,1% sur les directions
- Utilisation de lsqnonlin *a posteriori* impossible avec ces paramètres
- Utilisation du filtre de Kalman possible en radio astronomie dans les bonnes conditions



## Annexe 1 : PSNR

$$PSNR = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{d^2}{EQM} \right)$$

où  $d$  est la valeur maximale pour un pixel (1 ici car les images sont normalisées), et  $EQM$  représente l'erreur quadratique moyenne définie pour deux images  $I_{ref}$  et  $I_{rec}$  :

$$EQM = \frac{1}{M_x M_y} \sum_{i=0}^{M_x-1} \sum_{j=0}^{M_y-1} (I_{ref}(i, j) - I_{rec}(i, j))^2$$

## Annexe 2 – Distances

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}))^2 \quad d_1(A, B) = \frac{\|A - B\|_F}{mn}$$

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}))^2 \quad d_2(A, B) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} |A_{ij} - B_{ij}|$$

$$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \quad \|A\|_F := \sqrt{\text{tr}\{AA^H\}} = \sqrt{\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} |A_{ij}|^2}$$