matesfacil

Sucesión de Fibonacci

Contenido de esta página:

En esta página hablaremos de la famosa sucesión de Fibonacci. El texto es muy básico y accesible para los alumnos de Educación Secundaria. A lo largo del texto resolveremos **10 problemas** sobre la sucesión.

Temas relacionados:

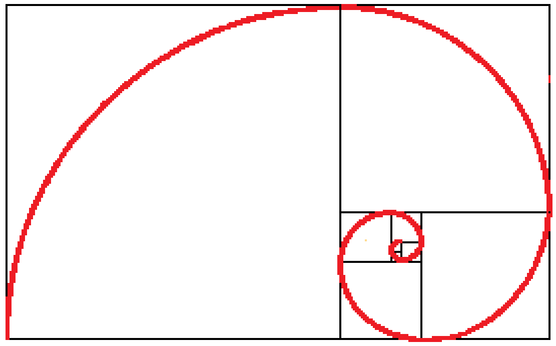
- **Test** básico sobre progresiones
- Progresiones aritméticas
- Progresiones geométricas
- Problemas de sucesiones aritméticas y geométricas
- Introducción a las progresiones (problemasyecuaciones.com)

Páginas relacionadas:

- Progresiones aritméticas
- Progresiones geométricas
- Temas y **calculadoras** de sucesiones
- Test (nivel básico) sobre sucesiones
- Más problemas de sucesiones
- Calculadora online de Pitágoras
- Problemas y Ecuaciones
- Logaritmos
- Calculadora de porcentajes
- Ecuaciones Resueltas
- Foro de ayuda

1. Sucesión de Fibonacci

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$



La sucesión de Fibonacci es conocida desde hace miles de años, pero fue Fibonacci (Leonardo de Pisa) quien la dio a conocer al utilizarla para resolver un problema.

El **primer** y **segundo** término de la sucesión son

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

Los siguientes términos se obtienen sumando los dos términos que les preceden:

El **tercer término** de la sucesión es

$$\begin{aligned} a_2 &= a_0 + a_1 = \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

El **cuarto término** es

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + a_2 = \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

El **quinto término** es

$$\begin{aligned} a_4 &= a_2 + a_3 = \\ &= 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

El **sexto término** es

$$\begin{aligned} a_5 &= a_3 + a_4 = \\ &= 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

El $(n+1)$**-ésimo término** es

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

2. Término general

La sucesión de Fibonacci es una sucesión definida por **recurrencia**. Esto significa que para calcular un término de la sucesión se necesitan los términos que le preceden.

Se proporcionan los dos primeros términos: $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$. Los siguientes se calculan con la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{a_{n+1} = a_{n-1} + a_n \, , \quad n \geq 1}$$

Nota: el primer término que proporciona la fórmula es a_2 (porque n tiene que ser mayor o igual que 1). Por esta razón, se definen a_0 y a_1 con anterioridad.

Problema 1

Calcular los 15 primeros términos de la sucesión de Fibonacci.

Ver solución

Problema 2

¿Es una sucesión aritmética? ¿Y geométrica? ¿Por qué?

Ver solución

Problema 3

¿Es una sucesión creciente, decreciente o alternada? ¿Por qué?

Ver solución

Problema 4

¿La suma todos los términos de la sucesión es un número finito como en algunas progresiones geométricas?

Ver solución

---

3. Monotonía y divergencia

La sucesión de Fibonacci es creciente, es decir, cada término es mayor o igual que el que le precede:

$$\boldsymbol{a_{n+1} \geq a_n \, , \quad n \geq 0}$$

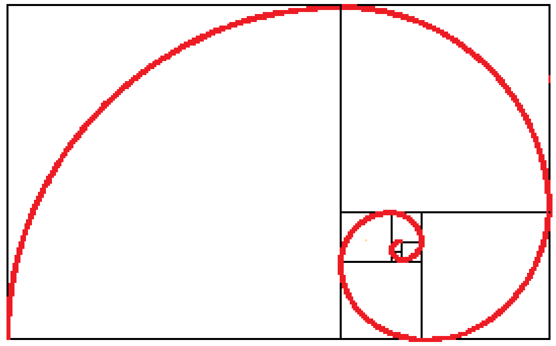
Nota: a partir de $n = 2$ la desigualdad es estricta, es decir, $a_{n+1} > a_n$ para $n \geq 2$.

La sucesión es creciente y no está acotada (superiormente). Esto implica que la sucesión es divergente (no convergente), es decir, no tiene límite. Por tanto, la sucesión crece indefinidamente.

Nota: puede servir como demostración el razonamiento del Problema 4.

Problema 5

Espiral de Fibonacci:



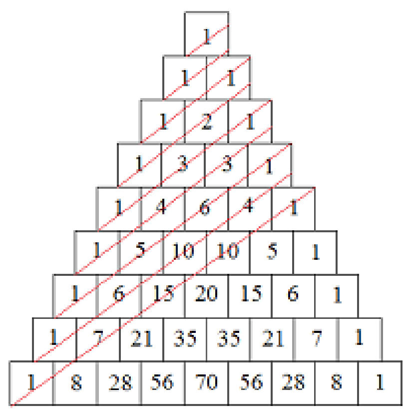
La espiral de Fibonacci se traza uniendo dos vértices de cuadrados adosados. La longitud del lado de los cuadrados viene dada por la sucesión de Fibonacci.

¿Cuánto miden los lados de los 9 cuadrados de la figura?

Ver solución

Problema 6

El triángulo de Pascal:



Para construir el triángulo de Pascal se escriben 1's en los dos lados del triángulo y se completa cada hueco sumando los dos números que tiene encima.

En la figura se han trazado en rojo las diagonales de un triángulo de Pascal con 9 filas. ¿Cuánto suman los números de cada diagonal?

Ver solución

Las sumas de los números de las diagonales son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 y 34. Se trata de la sucesión de Fibonacci.

4. Número áureo

El número áureo es el número irracional

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,61803...$$

Su relación con la sucesión de Fibonacci es que es el límite de los cocientes de sus términos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \varphi$$

Esto significa que los cocientes de los términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci se aproximan al número áureo.

Problema 7

Completar la siguiente tabla con los cocientes de la sucesión de Fibonacci:

n	a_n	a_{n+1}	a_{n+1}/a_n
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	3	1.5
4	3	5	1,66666...
5	5	8	
6	8	13	
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			

Observad que el límite de a_{n+1}/a_n es el número áureo ϕ ≅ 1,68033…

Ver solución

5. Fórmula de Binet

Aunque la sucesión se define por recurrencia, existe una fórmula para calcular un término de la sucesión sin necesidad de calcular los anteriores:

$$a_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

Operando un poco,

$$a_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n \cdot \sqrt{5}}$$

Sin embargo, este término general presenta el inconveniente de tener potencias de binomios y raíces.

Problema 8

Calcular los cuatro primeros términos de Fibonacci utilizando la fórmula de Binet.

Ver solución

6. Algunas propiedades

Entre las numerosas propiedades de la sucesión, destacamos estas tres por su sencillez:

- Cada término es el promedio del término que ocupa dos posiciones anteriores y el que ocupa la siguiente:

$$a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n+1}}{2}$$

- La suma de los n primeros términos, S_n, es igual al término a_{n+1} menos 1:

$$S_n = a_{n+1} - 1$$

Tened en cuenta que la sucesión comienza con a_0. Así, las primeras sumas son:

$$\begin{aligned} &S_1 = a_0 \\ &S_2 = a_0 + a_1 \\ &S_3 = a_0 + a_1 + a_2 \\ &\ldots \\ &S_n = a_0 + \cdots + a_{n-1} \end{aligned}$$

Por tanto, la suma hasta el término a_n es el término a_{n+2} menos 1.

- El máximo común divisor de los números de Fibonacci que ocupan las posiciones n y m coincide con el término cuya posición es el máximo común divisor de n y m:

$$MCD(a_n, a_m) = a_{MCD(n,m)}$$

Problema 9

Calcular las sumas S_2, S_5 y S_8 para comprobar la propiedad

$$S_n = a_{n+1} - 1$$

Ver solución

Problema 10

Comprobar la última propiedad dada (la del MCD) para las siguientes posiciones:

- $n = 3, m = 6$
- $n = 3, m = 9$
- $n = 5, m = 10$
- $n = 6,, m = 12$

Ver solución

¿Algún error?

Infórmanos a través de

llopis@matesfacil.com

¡Gracias!

Ejercicios Interactivos de Matemáticas

Sucesión de Fibonacci - (c) - matesfacil.com