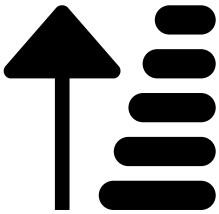


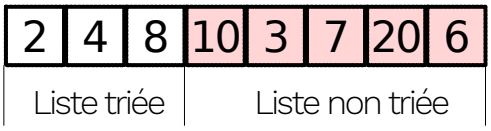
Dans cette activité nous allons étudier deux algorithmes de tri, ce qui est surtout un prétexte pour nous interroger sur la complexité des algorithmes.
Nous présentons le tri par sélection et le tri par insertion, et nous nous interrogeons sur l'efficacité de ces deux algorithmes, en évaluant leur temps d'exécution.

La recherche d'un élément dans une table est plus rapide quand celle-ci est ordonnée. C'est une chose que nous savons depuis qu'il existe des bibliothèques et des bibliothécaires : même si cela est long et fatigant, il vaut mieux ranger les livres d'une bibliothèque une fois pour toutes, par exemple dans l'ordre alphabétique, plutôt que les laisser en vrac et arpenter des kilomètres de rayonnages à chaque fois que l'on cherche un volume.
L'importance de ce problème fait que plusieurs dizaines d'algorithmes différents ont été proposés pour trier des objets. Cette diversité d'algorithmes se justifie par le fait qu'un même algorithme sera plus ou moins performant selon l'ordre de départ des objets à trier. Cette activité est consacrée à deux d'entre eux : le tri par sélection et le tri par insertion.
L'ensemble des travaux portera sur le tri de tableaux de nombres entiers positifs organisés sous forme de listes. Cependant les algorithmes développés pourront tout aussi bien être appliqués à des nombres réels ou des caractères

1. Le tri par sélection

Principe de tri

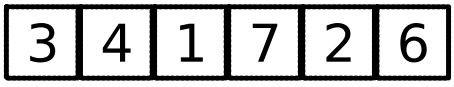
Le tri par sélection parcourt le tableau de gauche à droite, en maintenant sur la gauche une partie de la liste triée et à sa place définitive :



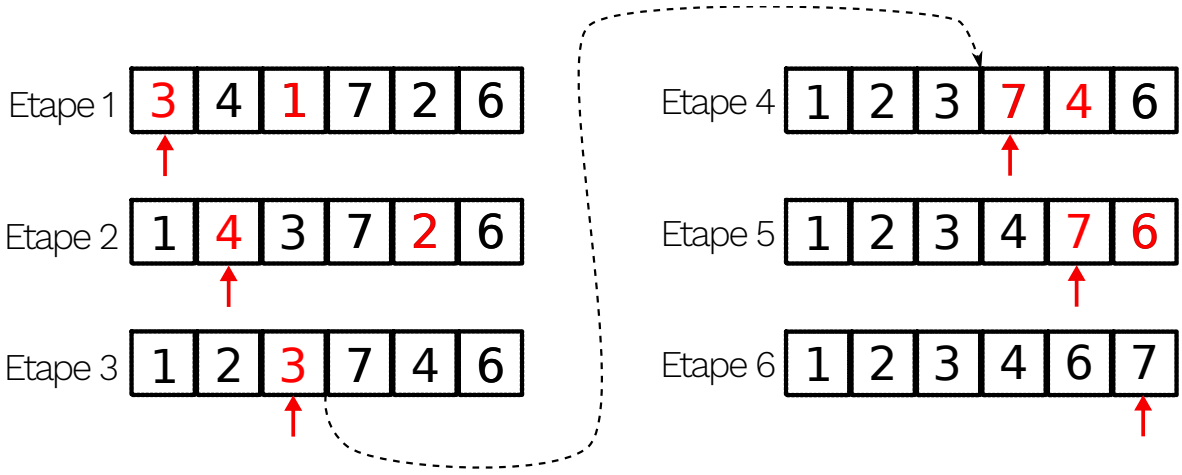
A chaque étape, on cherche le plus petit élément de la partie droite (non triée) puis on l'échange avec l'élément le plus à gauche de la partie non triée. Une illustration de ce processus est disponible sur le lien suivant :

http://lwh.free.fr/pages/algo/tri/tri_selection.html

Prenons pour exemple la liste d'entiers désordonnée suivante :



Q1. Compléter sur le schéma 1, la séquence à effectuer pour trier cette liste selon la méthode du tri par sélection. Pour cela pour chaque étape de tri :
- ➔ **Ecrire** à leur place les éléments
- ➔ **Repérer** en rouge les deux valeurs qui seront échangées
- ➔ **Repérer** avec une flèche rouge le premier élément de la liste non triée



Programme de tri

Le programme Python de ce tri par sélection est donc le suivant :

```
def tri_par_selection(t):
    '''trie le tableau t dans l'ordre croissant'''
    for debut_nonTriee in range(len(t)) :
        indice_valMini =  debut_nonTriee
        for i in range(debut_nonTriee + 1 , len(t)):
            if t[i] < t[indice_valMini] :
                indice_valMini = i
        echange(t,  debut_nonTriee, indice_valMini)
```

Durant son fonctionnement cet algorithme échange de position deux valeurs positionnées à des indices différents de la liste.

Echange de deux valeurs

Pour échanger deux valeurs il faut utiliser une troisième pour mémoriser l'une des deux. Par exemple si l'on souhaite échanger les valeurs de x et y (voir figure 1) dans le cas où x=2 et y=3, il faut :

1) Affecter la valeur de x dans une variable temporaire temp
2) Affecter la valeur de x dans y
3) Affecter la valeur de temp dans x

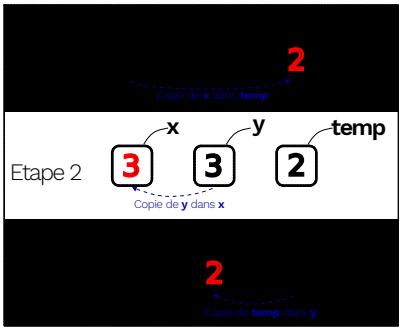


Figure 1: Echange de 2 valeures

Q2. Ecrire un programme Python effectuant cette opération d'échange de valeurs entre deux variables x et y. **Valider** son fonctionnement.

```
x, y = 2, 3
temp = x
x = y
y = temp
```

Q3. Compléter sur le fichier tri.py, la fonction echange(table,indice1,indice2) afin qu'elle respecte la spécification associée. **Valider** son fonctionnement.

```
def echange(table, indice1, indice2):
    '''Echange de position les deux elements aux indices
      indice 1 et indice 2 de table.
      Exemple :    >>> table = [1, 2, 3, 4]
                   >>> echange(table, 0, 1)
                   >>> table
                   [2, 1, 3, 4]
      '''
    temp = table[indice1]
    table[indice1] = table[indice2]
    table[indice2] = temp
```

Q4. Dérouler à la main l'exécution attendue de la fonction tri_selection(t), t étant la table à trier initialisée avec t = [3, 4, 1, 7, 2, 6]. **Compléter** la table d'exécution suivante afin de détailler les différentes étapes de la fonction tri_selection lors de l'appel tri_par_selection(t)

```
def tri_par_selection(t):
    '''trie le tableau t dans l'ordre croissant'''
    for debut_nonTriee in range(len(t)) :
        indice_valMini =  debut_nonTriee
        for i in range(debut_nonTriee + 1 , len(t)):
            if t[i] < t[indice_valMini] :
                indice_valMini = i
        echange(t,  debut_nonTriee, indice_valMini)
```

Table d'exécution

Liste t	debut_nonTriee	Valeur Mini dans t[debut_nonTriee :]	indice_valMin	Echange effectué
3 4 1 7 2 6	0	1	2	echange(t, 0, 2)
1 4 3 7 2 6	1	2	4	echange(t, 1, 4)
1 2 3 7 4 6	2	3	2	echange(t, 2, 2)
1 2 3 7 4 6	3	4	4	echange(t, 3, 4)
1 2 3 4 7 6	4	6	5	echange(t, 4, 5)
1 2 3 4 6 7	5	7	5	echange(t, 5, 5)

Dans la toute dernière étape du tri par sélection, il n'y a qu'une seule valeur dans la partie droite et il est donc inutile d'y chercher la plus petite valeur ni d'échanger avec elle-même.

Q5. Modifier le programme pour éviter cette étape inutile.

Q6. Valider sur un IDE Python l'appel de la fonction tri_selection(t) pour t=[3, 4, 1, 7, 2, 6].
Décrire la démarche employée

Après avoir exécuté le programme on test avec l'exemple ci dessus en tapant les instructions suivantes sur la console :

```
>>> table = [3, 4, 1, 7, 2, 6]
>>> tri_par_selection(table)
>>> table
[1, 2, 3, 4, 6, 7]
```

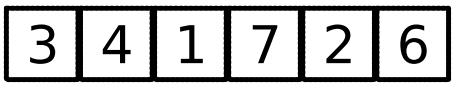
2.Le tri par insertion

Principe de tri

Un autre tri, souvent utilisé par les joueurs de carte est le tri par insertion. Il suit le même principe que le tri par sélection en parcourant le tableau de gauche à droite et en maintenant une partie déjà triée sur la gauche.
Mais plutôt que de chercher la valeur la plus petite dans la partie de droite, le tri par insertion va insérer la première valeur de la liste non triée (partie droite) dans la liste triée (partie gauche).
Pour cela, on va décaler d'une case vers la droite tous les éléments déjà triés qui sont plus grands que la valeur à insérer, puis déposer cette dernière dans la case libérée. Une illustration de ce processus est disponible sur le lien suivant :

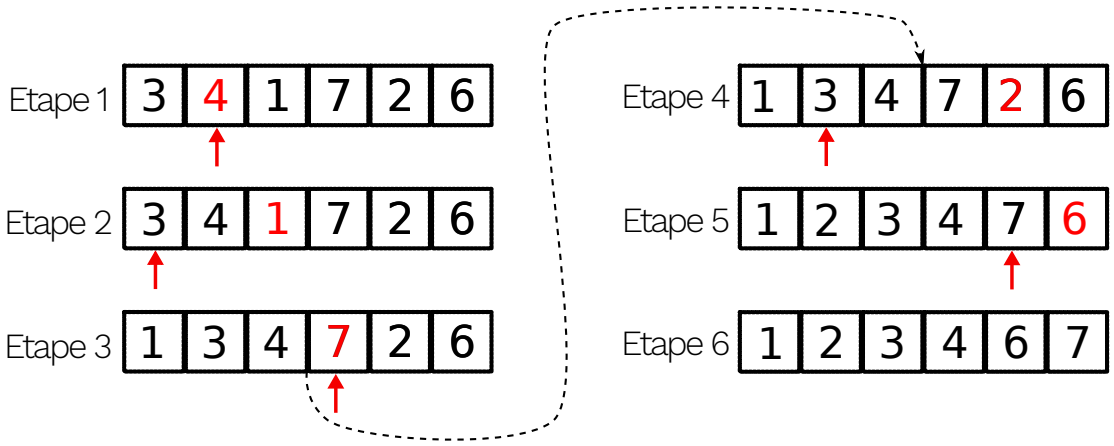
http://lwh.free.fr/pages/algo/tri/tri_insertion.html

Reprenons pour exemple la liste d'entiers désordonnée suivante :



Q7. Compléter sur le schéma 2, la séquence à effectuer pour trier cette liste selon la méthode du tri par sélection. Pour cela pour chaque étape de tri :

- ➔ **Ecrire** à leur place les éléments
- ➔ **Repérer** en rouge la valeur qui sera insérée dans la liste triée
- ➔ **Repérer** avec une flèche rouge l'emplacement de la liste triée où sera insérée cette valeur



Fonction d'insertion

Commençons par définir une fonction capable d'insérer un nouvel élément val dans une liste partiellement triée. Cette fonction s'écrit :

```
def insere(t, i, val) :
    ''' insère val dans la liste triée t[0...i[ supposée triée'''
    indice_val = i
    while indice_val > 0 and t[indice_val-1] > val :
        t[indice_val] = t[indice_val-1]
        indice_val = indice_val - 1
    t[indice_val] = val
```

Q8. Dérouler à la main l'exécution attendue de la fonction insere(t, 4, 2), t étant la table initialisée avec t=[1, 4, 5, 7, 2]. **Compléter** la table d'exécution suivante afin de détailler les valeurs des variables indiquées à chaque entrée de la boucle while lors de l'appel de la fonction insere(t, 4, 2)

Liste t	indice_val	t[indice_val - 1]	t[indice_val]
1 4 5 7 2	4	7	2
1 4 5 7 7	3	5	7
1 4 5 5 7	2	4	5
1 4 4 5 7	1	1	4
1 2 4 5 7	← Etat de la liste t à la sortie de la fonction insere		

Avec cette fonction, le plus dur est fait. Pour écrire le tri par insertion, il suffit d'insérer successivement toutes les valeurs du tableau avec la fonction insere, en procédant de la gauche vers la droite avec une boucle for :

```
def tri_insertion(t)
    '''trie le tableau t dans ordre croissant'''
    for i in range(1, len(t)) :
        insere(t, i, t[i])
```

Q9. Valider sur un IDE Python l'appel de la fonction tri_insertion(t) **pour** t=[1, 4, 5, 7, 2].
Décrire la démarche employée

Après avoir exécuté le programme on test avec l'exemple ci dessus en tapant les instructions suivantes sur la console :

```
>>> table = [1, 4, 5, 7, 2]
>>> insere(table, 4, 2)
>>> table
[1, 2, 4, 5, 7]
```

Correction de l'algorithme de tri

Un algorithme est correct s'il fait ce qu'on attend de lui. Démontrer la correction de l'algorithme consiste à démontrer que l'algorithme retourne les résultats escomptés dans toute circonstance.
Les invariants de boucle servent, entre autres, à prouver la validité d'un algorithme comportant une ou plusieurs boucles FOR ou WHILE.

Un invariant de boucle est une propriété qui est vraie pour tous les passages dans la boucle. **L'invariant doit être vrai avant d'entrer dans la boucle (Initialisation) et rester vrai jusqu'à la fin de celle-ci (Conservation et Terminaison)**. Trouver et prouver que l'on a un invariant de boucle permet très généralement de prouver la correction (validité) d'un algorithme.

Dans notre cas de tri par sélection, l'invariant de boucle peut être :

✗ pour chaque valeur de debut_nonTriee, la liste t[0 : debut_nonTriee -1] est triée. Cette affirmation est vraie avant d'entrer dans la boucle et reste vraie jusqu'à la fin de celle-ci. La présence de cet invariant prouve la correction du programme de tri

Q10. En déduire l'invariant de boucle de l'algorithme de tri par insertion

Cet invariant de boucle reste valable pour le tri par sélection

Autre exemple d'invariant de boucle :

Le programme suivant permet de calculer la somme des N premiers entiers, où N est un nombre entier donné :

```
      :
      :
      :
i =0
somme =0
while i < N :
      i = i +1
      somme = somme + i
```

Un invariant de boucle de cet algorithme est le suivant :
Réponse A :somme = 0 + 1 + 2 + ... + i et i < N
Réponse B :somme = 0 + 1 + 2 + ... + N et i < N
Réponse C :somme = 0 + 1 + 2 + ... + i et i < N+1
Réponse D : somme = 0 + 1 + 2 + ... + N et i < N+1