Exercices : Encodage des nombres réels

1. Partie 1 : Encodage à virgule fixe

Pour chaque exercice de cette partie, nous considérons que chaque nombre est composé d'un double octet encodé en virgule fixe. Le premier octet correspond à la valeur entière du nombre et le dernier octet représente la partie décimale.

Exercice 1 : Conversion binaire → décimal

Q1. Convertir en décimal, les nombres réels suivants, exprimés en base binaire et utilisant la représentation avec virgule fixe.

Partie entière du nombre									Partie décimale du nombre							
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**,**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*4*	*0*	*0*		*0,5*	*0,25*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*

- 0000 0100 1100 $0000_{(2)}$ = 4,75

Partie entière du nombre									Partie décimale du nombre							
0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**,**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	*0*	*32*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*		*0*	*0*	*0*	*0,0625*	*0*	*0*	*0*	*0*

- 0010 0001 0001 $0000_{(2)}$ = 33,0625

Partie entière du nombre									Partie décimale du nombre							
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**,**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	*0*	*0*	*0*	*8*	*4*	*0*	*1*		*0*	*0,25*	*0,125*		*0*	*0*	*0*	*0*

- 0000 1101 0110 $0000_{(2)}$ = 13,375

Partie entière du nombre									Partie décimale du nombre							
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**,**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	*0*	*0*	*0*	*8*	*4*	*2*	*1*		*0,5*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*

- 0000 1111 1000 $0000_{(2)}$ = 15,5

Exercice 2 : Conversion décimal → binaire

Q1. Convertir en binaire encodé en virgule fixe, les nombres réels suivants. Utiliser 8 bits pour la partie entière et 8 autres bits pour la partie après la virgule.

- 2.5$_{(10)}$ =0000 0010 1000 0000

Partie entière du nombre									Partie décimale du nombre							
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**,**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
128	*64*	*32*	*16*	*8*	*4*	*2*	*1*		*0,5*	*0,25*	*0,125*	*0.0625*	*0.03125*	*0.015625*	*0.0078125*	*0.00390625*

- 15.2$_{(10)}$ = 0000 1111 0011 0011 (valeur approchée)

Partie entière du nombre									Partie décimale du nombre							
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**,**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
128	*64*	*32*	*16*	*8*	*4*	*2*	*1*		*0,5*	*0,25*	*0,125*	*0.0625*	*0.03125*	*0.015625*	*0.0078125*	*0.00390625*

- 0.6875$_{(10)}$ = 0000 0000 1011 0000

Partie entière du nombre									Partie décimale du nombre							
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**,**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
128	*64*	*32*	*16*	*8*	*4*	*2*	*1*		*0,5*	*0,25*	*0,125*	*0.0625*	*0.03125*	*0.015625*	*0.0078125*	*0.00390625*

- 35.9$_{(10)}$ = 0010 0011 1110 0110

Partie entière du nombre									Partie décimale du nombre							
0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**,**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
128	*64*	*32*	*16*	*8*	*4*	*2*	*1*		*0,5*	*0,25*	*0,125*	*0.0625*	*0.03125*	*0.015625*	*0.0078125*	*0.00390625*

Exercice 3 : Addition de nombres réels

On souhaite faire l'addition des les valeurs suivantes : 4.2$_{(10)}$ + 5.4$_{(10)}$ = 9.6$_{(10)}$
On donne la conversion en binaire des deux nombres et du résultat :

4.2$_{(10)}$ = 0000 0100 0011 0011
5.4$_{(10)}$ = 0000 0101 0110 0110
9.6$_{(10)}$ = 0000 1001 1001 1010

Q1. Réaliser l'addition binaire de ces 2 nombres. **Comparer** le résultat obtenu avec la conversion binaire du résultat attendu. **Justifier** les écarts constatés

$4.2_{(10)}$ = `0000 0100 0011 0011`
$5.4_{(10)}$ = `0000 0101 0110 0110`

`--------------------`

`0000 1001 1001 1001`

Les deux valeurs ont des parties entières identiques et des parties décimales différentes. La conversion des différentes valeurs sont approchées, leur somme donne des erreurs.

Exercice 4 : Analyse des formats numériques

Q1. Parmi les nombres suivants, quel est celui dont la représentation sous forme de nombre flottant peut être écrite de manière exacte avec un nombre fini de chiffres en base 2 ?

- 1/5
- 1/7
- 1/6
- **1/8**

Q2. Parmi les nombres suivants, écrits en base 10, quel est celui qui a une écriture finie en base 2 ?

- **1.25**
- 1.7
- 0.45
- 0.2

Q3. Parmi les nombres à virgule binaires suivants, lequel est strictement supérieur à 1/2 ?

- 0.011111
- **0.1000001**
- 0.10
- 0.0000001

2. Partie 2 : Encodage à virgule flottante

Exercice 5 : Conversion d'un nombre binaire à virgule flottante

On considère le nombre suivant, en virgule flottante :

s	e+127	m
1	1 0 0 0 0 1 0 1	1 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Q1. Déterminer le signe du nombre et déterminer la valeur de l'exposant décalé.

Le bit de signe est négatif (1) et l'exposant e+127 vaut 133. L'exposant décalé e est donc égal 133-127 = 6

Q2. Convertir le résultat en base 10 et en déduire la valeur en base 10 du nombre en virgule flottante.

$m = 2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-7} = 0.6015625 \rightarrow 1+m = 1,6015625$

$N = -1,6015625 \times 2^{6} = -102,5$

Exercice 6 : Conversion en binaire d'un nombre réel

On veux convertir le nombre 31,25 en virgule flottante.

Q3. Déterminer le bit de signe puis convertir le nombre en binaire.

Le bit de signe est positif (0)

Q4. Ecrire le nombre précédent sous la forme $1,m \times 2^{e}$.

$31,25 = 0001\ 1111,\ 0100\ 0000_{(2)} \rightarrow 1,\underbrace{1111\ 0100_{(2)}}_{\mathbf{m}} \times 2^{\underbrace{4}_{e-127}}$

Q5. Convertir e + 127 en binaire puis donner l'écriture en virgule flottante ci-dessous. Les derniers 0 de la mantisse pourront être omis.

$e + 127 = 131 \rightarrow 1000\ 0011_{(2)}$

s	e+127	m
0	1 0 0 0 0 0 1 1	1 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0