2- dado que tenemos n vectores LI podemos generar todo $\mathbb{R}^n$

tomemos x_n con su regla de actualización,

~~Ahora~~

entonces $x_n = x_0 + \alpha_0 P_0 + \dots + \alpha_{n-1} P_{n-1} = x^*$

para alguna tupla $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$

pero Nocedal prueba que en efecto

$\alpha_i = \sigma_i \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\}$

por lo que en efecto $x_n = x^*$

1- por contradicción

supongamos que no son LI

sin pérdida de generalidad

$P_k = \sigma_1 P_1 + \dots + \sigma_{k-1} P_{k-1}$

$\Rightarrow 0 < P_k^T Q P_k = P_k^T Q(\sigma_1 P_1 + \dots + \sigma_{k-1} P_{k-1})$

$= \sigma_1 P_k^T Q P_1 + \dots + \sigma_{k-1} P_k^T Q P_{k-1} = 0$!

3- $|\nabla F(x_k+\alpha_k p_k)^T p_k| \leq c_2 |\nabla f_k^T p_k|$

$y_k = \nabla f_{k+1} - \nabla f_k$ $\qquad$ $s_k = x_{k+1} - x_k = \alpha_k p_k$

$|\nabla f_{k+1}^T p_k| \leq c_2 |\nabla f_k^T p_k|$

como $c_2 > 0 \Rightarrow c_2 |\nabla f_k^T p_k| + |\nabla f_{k+1}^T p_k| > 0$
ambos términos en los valores absolutos son negativos

$\Rightarrow \nabla f_{k+1}^T p_k \geq c_2 \nabla f_k^T p_k$

$\Rightarrow \nabla f_{k+1}^T p_k - \nabla f_k^T p_k \geq c_2 \nabla f_k^T p_k - \nabla f_k^T p_k$

$(\nabla f_{k+1}^T - \nabla f_k^T) p_k \geq (c_2 - 1) \nabla f_k^T p_k$

$\Rightarrow y_k^T \cancel{\alpha_k} s_k \geq \frac{(c_2-1)}{\cancel{\alpha_k}} \nabla f_k^T s_k$

$c_2 - 1$ es < 0, $\cancel{\alpha_k > 0}$ y $\nabla f_k^T s_k < 0$ por ser dirección de descenso

$\frac{c_2-1}{\alpha_k} = a$

$\Rightarrow a \nabla f_k^T s_k \geq 0$

$\Rightarrow y_k^T s_k \geq 0$

$\Rightarrow s_k^T y_k > 0$

4 -

$$H_{k+1} B_{k+1} s_k = H_{k+1} y_k$$

$$H_{k+1} y_k = (I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) y_k + \rho_k s_k s_k^T y_k$$

$$= (I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (y_k - \cancel{\rho_k} y_k \cancel{s_k^T y_k}) + \cancel{\rho_k} s_k \cancel{s_k^T y_k}$$

$$\cancel{(I - \rho_k s_k y_k^T) H_k \underbrace{(y_k - y_k)}_{= 0}} + s_k$$

nótese que ρ_k se cancela con $s_k^T y_k$ pues es el mismo producto punto