

NOMBRE Y APELLIDO: VAZQUEZ AREU ROMAN
PADRON: 100815
CUATRIMESTRE: 2º 2021

P1: 25
P2: 15
40

I

IMPORTANTE: Debe incluir máximo una (1) carilla por problema con la justificación de cada una de sus respuestas. Si la justificación es incorrecta o es omitida, se considerará incorrecta la respuesta independientemente de la opción elegida.

PROBLEMA 1: Considere un servidor que recibe 1.000 pedidos por minuto con distribución tipo Poisson. Cada cliente requiere un tiempo promedio de servicio de 0.1 segundos distribuido exponencialmente. Además, la cola tiene una capacidad máxima de 5 lugares. Es decir que el sistema no puede albergar más de 6 clientes al mismo tiempo.

Indique con un círculo la respuesta correcta (sólo una) a cada una de las preguntas a continuación (cada respuesta vale 5 puntos):

<p>1. La probabilidad de que sistema rechace pedidos por falta de capacidad es</p> <p>a. 59% b. 33% c. 66% <input checked="" type="radio"/> d. 41% e. 11% f. 89% g. Ninguna de las opciones</p>	<p>2. La tasa de rechazo de pedidos (número de pedidos rechazados por unidad de tiempo) es:</p> <p><input checked="" type="radio"/> a. 6,86/s b. 3,43/s c. 2,23/s d. 11,43/s e. 10,21/s f. Ninguna de las opciones</p>
<p>3. El número promedio de clientes en el sistema en régimen estacionario es:</p> <p>a. 3,5 <input checked="" type="radio"/> b. 4,7 c. 2,1 d. 7,8 e. 6,3 f. Ninguna de las opciones</p>	<p>4. Si hay $N = 4$ pedidos en cola, ¿Cuál es la probabilidad de que no haya arribos durante un período de longitud 3 mseg?</p> <p>a. 5% b. 78% c. 22% d. 55% <input checked="" type="radio"/> e. 95% f. 11% g. Ninguna de las opciones</p>
<p>5. Los intervalos de tiempo medidos entre arribos de pedidos:</p> <p>a. Siguen una distribución uniforme b. Siguen una distribución Gaussiana c. Siguen una distribución Gamma <input checked="" type="radio"/> d. Siguen una distribución exponencial e. Ninguna de las opciones</p>	<p>6. La distribución de probabilidades del número de clientes en el sistema N</p> <p><input checked="" type="radio"/> a. Es monótona creciente en el intervalo $[0, K]$ b. Es monótona decreciente en el intervalo $[0, K]$ c. Es uniforme en el intervalo $[0, K]$ d. Tienen una distribución de Poisson. e. Ninguna de las opciones</p>
<p>7. Si en el instante $t = 3 \text{ mseg}$ hay 5 pedidos en cola, ¿Cuál es la probabilidad de que haya un arribo en el intervalo $[3 \text{ mseg}, 6 \text{ mseg}]$ y otro arribo en el intervalo $[6 \text{ mseg}, 9 \text{ mseg}]$?</p> <p><input checked="" type="radio"/> a. 3% b. 15% c. 9% d. 22% e. 66% f. 11% g. Ninguna de las opciones</p>	<p>8. Para el sistema del enunciado, pero con capacidad K tendiendo a infinito, entonces:</p> <p>a. El sistema se comporta como un sistema con múltiples servidores <input checked="" type="radio"/> b. La distribución del número de clientes en el sistema N tiende a una Poisson c. La distribución del tiempo en el sistema tiende a una uniforme d. El sistema no tiende a un estado estacionario e. Ninguna de las opciones</p>
<p>9. Indique cómo se puede reducir el tiempo promedio en el sistema para una tasa de servicio fija:</p> <p><input checked="" type="radio"/> a. Reduciendo el número máximo de pedidos en cola b. Aumentando el número máximo de pedidos en cola c. Aumentando la tasa de arribos d. Ninguna de las opciones</p>	<p>10. Indique cómo se puede reducir la tasa de pedidos rechazados:</p> <p><input checked="" type="radio"/> a. Aumentando el número máximo de pedidos en cola b. Aumentando la tasa de arribos c. Reduciendo el número máximo de pedidos en cola d. Ninguna de las opciones</p>

JUSTIFICACIONES A RESPUESTAS PROBLEMA 1:

$$1000 \text{ pedidos por minuto} = \frac{50}{3} \frac{\text{pedidos}}{\text{seg}} = \lambda$$

$$0,1 \text{ seg de servicio} = 10 \frac{\text{ped}}{\text{seg}} = \mu$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 5/3 \neq 1 \quad \checkmark$$

$$E[N] = \frac{5/3}{1-5/3} - \frac{(6+1) (5/3)^{(6+1)}}{1 - 5/3^{(6+1)}} = 4,701 \quad \checkmark$$

$$P(N=6) = \frac{(1-5/3) (5/3)^6}{1 - (5/3)^7} = 0,41151992 \dots \quad \checkmark$$

$$\text{proporcion rechazo} = P(N=6) \cdot \lambda = 411,51992 \dots \times \text{min} = 6,858 \times \text{seg} \quad \checkmark$$

$$t = 6 - 3 = 9 - 6 = 3 \Rightarrow$$

$$10 \frac{\text{ped}}{\text{seg}} = \frac{1}{100} \frac{\text{ped}}{\text{seg}}$$

$$\Rightarrow P(X=1) = \frac{e^{-\frac{1}{100} \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{100} \cdot 3\right)^1}{1!} \approx 0,0291 \quad \text{No}$$

$$t = 3 \Rightarrow P(X=0) = e^{-\frac{1}{100} \cdot 3} = 0,97 \quad \checkmark$$

$$\rho > 1 \Rightarrow P(N=K)$$

→ K

$$\text{Tiempo sistema: } E[T] = \frac{E[N]}{\lambda(1-\rho_K)} = \frac{E[N]}{\lambda(1-P(N=K))} \Rightarrow E[N] \text{ más chico}$$

⑨ pensar cola mlti

⑩ salvo que K pueda ser ∞ ?

PROBLEMA 2: Dado el siguiente modelo que describe el movimiento de un péndulo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\alpha \sin \theta,$$

donde $\alpha > 0$ y θ es el ángulo respecto de la vertical.

Indique con un círculo la respuesta correcta (sólo una) a cada una de las preguntas a continuación (cada respuesta vale 5 puntos):

<p>11. El sistema es:</p> <ul style="list-style-type: none"> a. Lineal y de segundo orden b. No-lineal y de primer orden c. Lineal y de primer orden <input checked="" type="radio"/> d. No-lineal y de segundo orden e. Ninguna de las opciones <p style="text-align: right;">No JUSTIFICA</p>	<p>12. El espacio de fases tiene:</p> <ul style="list-style-type: none"> a. 1 dimensión <input checked="" type="radio"/> b. 2 dimensiones c. Más de 2 dimensiones d. No existe el espacio de fases e. Ninguna de las opciones <p style="text-align: right;">No JUSTIFICA</p>
<p>13. El sistema:</p> <ul style="list-style-type: none"> a. Tiene 1 punto de equilibrio <input checked="" type="radio"/> b. Tiene 2 puntos de equilibrio c. Tiene 3 puntos de equilibrio d. No tiene puntos de equilibrio e. Ninguna de las opciones <p style="text-align: right;">5</p>	<p>14. Para el caso del péndulo en posición vertical (ángulo 0 grados) y velocidad angular nula:</p> <ul style="list-style-type: none"> a. Es un punto fijo inestable b. Es un saddle point c. Es un punto fijo estable tipo espiral <input checked="" type="radio"/> d. Es un punto fijo Lyapunov estable e. Ninguna de las opciones <p style="text-align: right;">5</p>
<p>15. Para el caso del péndulo en posición vertical (ángulo 180 grados) y velocidad angular nula:</p> <ul style="list-style-type: none"> a. Es un punto fijo estable <input checked="" type="radio"/> b. Es un punto fijo inestable tipo saddle point c. No es un punto fijo d. En un punto fijo inestable tipo espiral e. Ninguna de las opciones <p style="text-align: right;">5</p>	<p>16. Analizando el comportamiento del sistema en función del parámetro alfa:</p> <ul style="list-style-type: none"> <input checked="" type="radio"/> a. No hay bifurcaciones b. Hay una bifurcación tipo Hopf c. El sistema es caótico para algunos valores de alfa d. Ninguna de las opciones <p style="text-align: right;">No JUSTIFICA</p>
<p>17. Indique la sentencia verdadera:</p> <ul style="list-style-type: none"> a. Existe un punto fijo con los dos autovalores reales negativos b. Existe un punto fijo con los dos autovalores reales positivos <input checked="" type="radio"/> c. Existe un punto fijo con los dos autovalores imaginarios puros <input checked="" type="radio"/> d. Ninguna de las opciones <p style="text-align: right;">0</p>	<p>18. Indique la sentencia verdadera:</p> <ul style="list-style-type: none"> <input checked="" type="radio"/> a. Existe un punto fijo con un autovalor real positivo y otro real negativo b. Existe un punto fijo con los dos autovalores reales negativos c. Existe un punto fijo con los dos autovalores reales positivos d. Ninguna de las opciones <p style="text-align: right;">0</p> <p style="text-align: right;">No JUSTIFICA</p>
<p>19. Describa las trayectorias en el espacio de fases alrededor del punto fijo estable:</p> <ul style="list-style-type: none"> <input checked="" type="radio"/> a. El ángulo oscila entre valores positivos y negativos hasta detenerse en la posición vertical (ángulo cero) b. El sistema se mueve en trayectorias de tipo espiral. c. El ángulo oscila entre valores positivos y negativos indefinidamente d. Ninguna de las opciones <p style="text-align: right;">0</p> <p style="text-align: right;">No JUSTIFICA</p>	<p>20. Identifique la sentencia falsa entre las siguientes:</p> <ul style="list-style-type: none"> a. Las trayectorias en el espacio de fases no se bifurcan b. Existen trayectorias cerradas en el espacio de fases <input checked="" type="radio"/> c. El sistema puede presentar caos d. Pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales no producen grandes alteraciones de las trayectorias e. Ninguna de las opciones <p style="text-align: right;">0</p> <p style="text-align: right;">No JUSTIFICA</p>

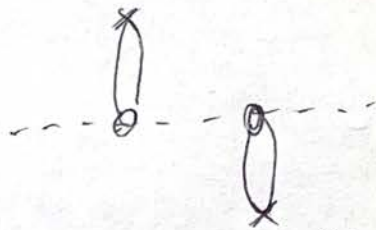
JUSTIFICACIONES A RESPUESTAS PROBLEMA 2:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\alpha \sin\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = w \quad w=0$$

$$\frac{dw}{dt} = -\alpha \sin\theta \quad -\alpha \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = k\pi$$

2 puntos de equilibrio.
vertical arriba y abajo

El péndulo simple



el de arriba es inestable de tipo saddle point (minima perturbación $\text{Re}(\lambda_d) > 0$)
y el de abajo estable Lyapunov ($\text{Re}(\lambda_d) = 0$)

$$F = -\alpha \sin\theta \quad G = w$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \theta} = -\alpha \cos\theta & \frac{\partial F}{\partial w} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial \theta} = 0 & \frac{\partial G}{\partial w} = 1 \end{bmatrix}$$

$$J|_{0,0} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J|_{0,\pi} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 + \lambda(\alpha-1) - \alpha = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 = (\alpha - \lambda)(1 - \lambda) = -\alpha + \alpha\lambda - \lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 = (\alpha - \lambda)(1 - \lambda) = \alpha - \alpha\lambda - \lambda + \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda(-\alpha-1) + \alpha = 0$$

no calcula autovalores. (2)