

GeoGebra & Python im Mathematikunterricht

Zentrale Befehle - mit und ohne CAS

Reimund Vehling

30. November 2025

Analysis

Befehlsliste zur Analysis - zum Nachschlagen

CAS - zentrale Einsatzbeispiele in der Analysis

Analysis

Befehlslisten für die Analysis: Orientierung

Merke

GeoGebra besitzt zwei mathematische Arbeitswelten: das **Algebra-Fenster** (numerisch) und das **CAS-Fenster** (symbolisch). Viele Befehle funktionieren in beiden, aber nicht identisch.

1. Algebra-Fenster (numerisch)

- Funktionsgraphen, numerische Ableitung, Nullstellen
- numerisches Integral, Flächen, Summen
- keine Parameterfunktionen

2. CAS-Fenster (symbolisch)

- Definition mit $:=$
- Ableitungen, Grenzwerte, Integrale symbolisch
- Funktionsschar $f(k, x)$

Bemerkung

Beide Welten ergänzen sich: Algebra zeigt Werte, CAS zeigt Strukturen.

Analysis: Befehlsliste (Algebra-Fenster) — 1/2

Befehl	Erläuterung
$f(x)=\dots$	Definiert eine numerische Funktion für den Graphen
Ableitung(f)	Numerische Ableitung; erzeugt neuen Graphen von f'
Ableitung(f , n)	n -te numerische Ableitung
Extrempunkte(f)	Berechnet lokale Extrempunkte (numerisch)
Wendepunkte(f)	Berechnet Wendepunkte (numerisch)
Nullstelle(f)	Berechnet Nullstellen des Graphen (numerisch)
Nullstelle(f , a , b)	Nullstelle im Intervall $[a, b]$
Schnittpunkt(f, g)	Berechnet Schnittpunkte zweier Graphen

Analysis: Befehlsliste (Algebra-Fenster) — 2/2

Befehl	Erläuterung
Integral(f , a , b)	Numerisches bestimmtes Integral
FlächeZwischen(f , g , a , b)	Fläche zwischen zwei Graphen im Intervall $[a, b]$
Obersumme(f , a , b , n)	Obersumme mit n Rechtecken
Untersumme(f , a , b , n)	Untersumme mit n Rechtecken
Kurve($(x, f(x))$, x , a , b)	Erzeugt parametrische Kurve
Tangente(f , x_0)	Tangente an f in x_0
Asymptote(f)	Versucht, Asymptoten numerisch zu bestimmen
PolynomInterpolate(L)	Interpolationspolynom aus Punktliste L

Analysis: Befehlsliste (CAS-Fenster) — 1/3

Befehl	Erläuterung
$f(x) := \dots$	Symbolische Definition einer Funktion
$f(k, x) := \dots$	Parameterfunktion, z. B. Kurvenschar
Ersetze(expr, k=...)	Substitution in Ausdrücken oder Funktionen
Vereinfachen(expr)	Algebraische Vereinfachung
Faktorisieren(expr)	Faktorisierte Darstellung eines Polynoms
Erweitere(expr)	Ausmultiplizieren.
TrigErweitern(expr)	trigonometrische Erweiterung
TrigReduzieren(expr)	Reduktion trigonometrischer Ausdrücke.

Analysis: Befehlsliste (CAS-Fenster) — 2/3

Befehl	Erläuterung
Ableitung(expr,x)	Symbolische Ableitung nach x
Ableitung(expr,x,n)	n-te Ableitung.
Löse(expr=0,x)	Symbolisches Lösen
Löse(eq1,eq2,x,y)	Lösen von Gleichungssystemen
Eliminate(eq1,eq2,x)	Eliminiert Variable aus einem Gleichungssystem
Summe(expr,i,a,b)	Symbolische Summe
Produkt(expr,i,a,b)	Symbolisches Produkt.
Reihe(expr, x, a)	Taylorentwicklung von expr um $x = a$

Analysis: Befehlsliste (CAS-Fenster) — 3/3

Befehl	Erläuterung
Grenzwert(expr, x, a)	Grenzwert von expr für $x \rightarrow a$
Grenzwert(expr, x, ∞)	Grenzwert gegen unendlich
Integral(expr, x)	Symbolisches Integral
Integral(expr, x, a, b)	Symbolisches bestimmtes Integral
Stammfunktion(expr)	Stammfunktion von expr.
Zerlege(expr)	Partialbruchzerlegung
Numerisch(expr)	Erzwingt numerische Ausgabe
Dezimal(expr)	Numerische Dezimalschreibweise

Analysis: Befehle in beiden Fenstern (unterschiedlich)

Befehl	Algebra-Fenster	CAS-Fenster
Ableitung(f)	numerische Ableitung	symbolische Ableitung
Integral(f,a,b)	numerischer Wert	exaktes Integral
Löse(expr=0,x)	numerische Lösung	symbolische Lösung(en)
f(x)=...	Graphendefinition	logischer Ausdruck
{...}	numerische Liste	symbolische Liste
Folge(...)	numerische Liste	symbolische Liste/Ausdrücke

Bemerkung

Gleicher Befehl – unterschiedliche Mathematik: Das CAS arbeitet symbolisch, das Algebra-Fenster numerisch.

CAS: typische Fehler

- “=” statt “:=” (Vergleich statt Definition)
- Variable vergessen ($f := x^2$ statt $f(x) := x^2$)
- Parameter nicht korrekt gesetzt ($f(2x)$ statt $f(2, x)$)
- Löse-Aufruf ohne Definition von Ableitungen
- fehlende Klammern: $(x+1)/(x-2)$ vs. $x+1/x-2$
- Mischung von Algebra- und CAS-Syntax
- Listenindex vs. Funktionsauswertung: $L(2)$ vs. $f(2)$

Bemerkung

Die meisten CAS-Fehler sind syntaktisch – nicht fachlich.

CAS: drei Grundprinzipien

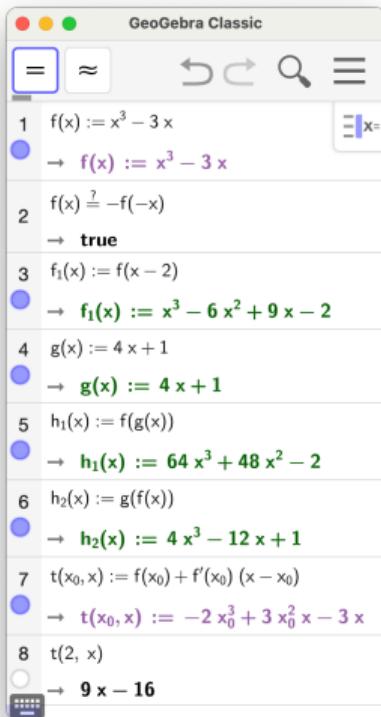
1. **Definition** → Objekt $f(x) := x^2, \quad f(k, x) := x^2 + kx$
2. **Operation** → neues Objekt $f_1(k, x) := \frac{\partial f}{\partial x}$
3. **Transformation** → Struktur sichtbar Ersetze($f(k, x)$, $k = 1/x$)

Bemerkung

CAS = Objekte definieren, transformieren, weiterverwenden. Das zeigt Mathematik als Struktur.

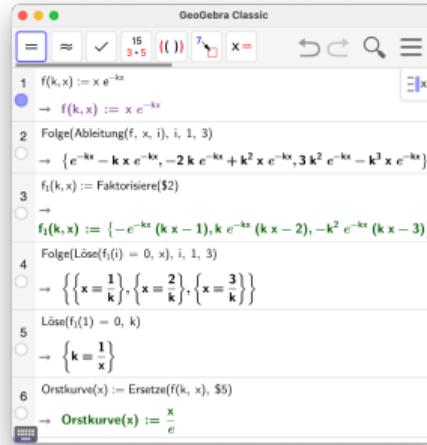
CAS: Drei Beispiele auf einen Blick

Definition: :=



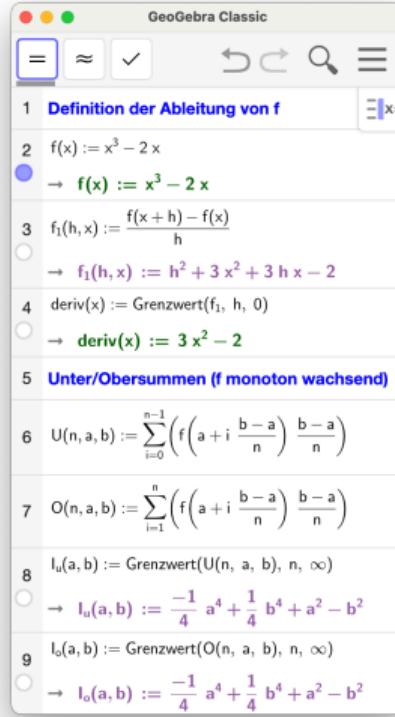
```
GeoGebra Classic
1 f(x) := x3 - 3 x
→ f(x) := x3 - 3 x
2 f(x) := -f(-x)
→ true
3 f1(x) := f(x - 2)
→ f1(x) := x3 - 6 x2 + 9 x - 2
4 g(x) := 4 x + 1
→ g(x) := 4 x + 1
5 h1(x) := f(g(x))
→ h1(x) := 64 x3 + 48 x2 - 2
6 h2(x) := g(f(x))
→ h2(x) := 4 x3 - 12 x + 1
7 t(x0, x) := f(x0) + f'(x0) (x - x0)
→ t(x0, x) := -2 x03 + 3 x02 x - 3 x
8 t(2, x)
→ 9 x - 16
```

Kurvenschär: $f(k, x)$



```
GeoGebra Classic
1 f(k, x) := x e-kx
→ f(k, x) := x e-kx
2 Folge(Ableitung(f, x, i), i, 1, 3)
→ {e-kx - k x e-kx, -2 k e-kx + k2 x e-kx, 3 k2 e-kx - k3 x e-kx}
3 f1(k, x) := Faktorisiere(\$2)
→ f1(k, x) := {-e-kx (k x - 1), k e-kx (k x - 2), -k2 e-kx (k x - 3)}
4 Folge(Löse(f1(i) = 0, x), i, 1, 3)
→ {{x = 1/k}, {x = 2/k}, {x = 3/k}}
5 Löse(f1(1) = 0, k)
→ {k = 1/x}
6 Ortskurve(x) := Ersetze(f(k, x), \$5)
→ Ortskurve(x) := x/e
```

Modulare Mathematik



```
GeoGebra Classic
1 Definition der Ableitung von f
2 f(x) := x3 - 2 x
→ f(x) := x3 - 2 x
3 f1(h, x) := (f(x + h) - f(x)) / h
→ f1(h, x) := h2 + 3 h x - 2
4 deriv(x) := Grenzwert(f1, h, 0)
→ deriv(x) := 3 x2 - 2
5 Unter/Obersummen (f monoton wachsend)
6 U(n, a, b) := summe(i=0, n-1, f(a + i * (b - a) / n) * (b - a) / n)
7 O(n, a, b) := summe(i=1, n, f(a + i * (b - a) / n) * (b - a) / n)
8 Iu(a, b) := Grenzwert(U(n, a, b), n, infinity)
→ Iu(a, b) := -1/4 a4 + 1/4 b4 + a2 - b2
9 Io(a, b) := Grenzwert(O(n, a, b), n, infinity)
→ Io(a, b) := -1/4 a4 + 1/4 b4 + a2 - b2
```

CAS: Definition := statt Vergleich =

The screenshot shows the GeoGebra Classic interface with the CAS tab selected. The input history is as follows:

- $f(x) := x^3 - 3x$
- $\rightarrow f(x) := x^3 - 3x$
- $f(x) \stackrel{?}{=} -f(-x)$
→ true
- $f_1(x) := f(x - 2)$
- $\rightarrow f_1(x) := x^3 - 6x^2 + 9x - 2$
- $g(x) := 4x + 1$
- $\rightarrow g(x) := 4x + 1$
- $h_1(x) := f(g(x))$
- $\rightarrow h_1(x) := 64x^3 + 48x^2 - 2$
- $h_2(x) := g(f(x))$
- $\rightarrow h_2(x) := 4x^3 - 12x + 1$
- $t(x_0, x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
- $\rightarrow t(x_0, x) := -2x_0^3 + 3x_0^2x - 3x$
- $t(2, x)$
- $\rightarrow 9x - 16$

Merke

$:=$ definiert ein Objekt.
 $=$ prüft nur eine Gleichheit (true/false).

- Im CAS ist $:=$ der wichtigste Operator.
- $f(x) := x^2$ erzeugt eine Funktion.
- $f(x) \stackrel{?}{=} -f(-x)$ liefert true oder false, hier true, also f punktsymmetrisch bzgl. $(0, 0)$.
- Funktionen als Objekte am Beispiel einer Verkettung
- Modulares Arbeiten: Nicht nur eine Tangente – alle auf einmal.

CAS: Parameterfunktionen und Kurvenscharen

The screenshot shows the GeoGebra Classic interface with the CAS tab selected. The input area contains the following sequence of commands:

- $f(k, x) := x e^{-kx}$
- $\rightarrow f(k, x) := x e^{-kx}$
- $Folge(Ableitung(f, x, i), i, 1, 3)$
- $\rightarrow \{e^{-kx} - k x e^{-kx}, -2 k e^{-kx} + k^2 x e^{-kx}, 3 k^2 e^{-kx} - k^3 x e^{-kx}\}$
- $f_1(k, x) := \text{Faktorisiere}(\$2)$
- \rightarrow
- $f_1(k, x) := \{-e^{-kx} (k x - 1), k e^{-kx} (k x - 2), -k^2 e^{-kx} (k x - 3)\}$
- $Folge(L\ddot{o}se(f_1(i) = 0, x), i, 1, 3)$
- $\rightarrow \left\{\left\{x = \frac{1}{k}\right\}, \left\{x = \frac{2}{k}\right\}, \left\{x = \frac{3}{k}\right\}\right\}$
- $L\ddot{o}se(f_1(1) = 0, k)$
- $\rightarrow \left\{k = \frac{1}{x}\right\}$
- $Orstkurve(x) := \text{Ersetze}(f(k, x), \$5)$
- $\rightarrow Orstkurve(x) := \frac{x}{e}$

Merke

Funktionen können im CAS mehrere Variablen haben: $f(k, x)$ beschreibt eine ganze Funktionsfamilie.

- Beispiel: $f(k, x) := x e^{-kx}$, statt $f_k(x)$
- Ableitungen bleiben Scharen: $f_1(k, x), f_2(k, x)$
- Faktorisiere(), Vereinfache(), Multipliziere() - ohne Termkompetenz wenig Nutzen.
- $L\ddot{o}se(f_1(k, x) = 0, x)$ liefert *Kandidaten* für Extrempunkte für alle k .

CAS: Modulare Mathematik sichtbar machen

The screenshot shows a GeoGebra Classic interface with a toolbar at the top. Below the toolbar is a list of CAS commands:

- 1 Definition der Ableitung von f
- 2 $f(x) := x^3 - 2x$
- 3 $f_1(h, x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
→ $f_1(h, x) := h^2 + 3x^2 + 3hx - 2$
- 4 $\text{deriv}(x) := \text{Grenzwert}(f_1, h, 0)$
→ $\text{deriv}(x) := 3x^2 - 2$
- 5 Unter/Obersummen (f monoton wachsend)
- 6 $U(n, a, b) := \sum_{i=0}^{n-1} \left(f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n} \right)$
- 7 $O(n, a, b) := \sum_{i=1}^n \left(f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n} \right)$
- 8 $I_u(a, b) := \text{Grenzwert}(U(n, a, b), n, \infty)$
→ $I_u(a, b) := -\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{4}b^4 + a^2 - b^2$
- 9 $I_o(a, b) := \text{Grenzwert}(O(n, a, b), n, \infty)$
→ $I_o(a, b) := -\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{4}b^4 + a^2 - b^2$

Merke

Im CAS entstehen neue Objekte Schritt für Schritt:
Differenzenquotient → Grenzwert → Ableitung →
Anwendungen.

- Differenzenquotient $f_1(h, x)$ definieren.
- Grenzwert $h \rightarrow 0$ ergibt die Ableitung.
- Summen und Grenzwerte führen zum Integral.