Gaußsches Eliminationsverfahren und seine geometrische Struktur

Unterrichtszusammenfassung mit Beispielen, Geometrie und Rangbegriff

Reimund Vehling

11. November 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung: Warum Gleichungssysteme?

Lineare Gleichungssysteme begegnen uns überall dort, wo mehrere Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein müssen. Sie sind ein universelles Werkzeug in Natur- und Ingenieurwissenschaften, in der Informatik, der Wirtschaft und selbst in Alltagsproblemen.

Ein Pferd, drei Käufer

Das Rätsel der Woche aus SpiegelOnline vom 2.11.2025

Hundert Goldtaler soll das Pferd kosten, für das sich gleich drei Männer interessieren. Aber keiner von ihnen hat genug Geld, um es allein kaufen zu können. Nur wenn sich die drei Männer zusammentun, reicht das Geld.

- Der **erste Mann** kann das Pferd kaufen, wenn die beiden anderen ihm *ein Drittel ihres Geldes* geben.
- Der **zweite Mann** kann das Pferd kaufen, wenn die beiden anderen ihm *ein Viertel ihres Geldes* geben.
- Der **dritte Mann** kann das Pferd kaufen, wenn die beiden anderen ihm *ein Fünftel ihres Geldes* geben.

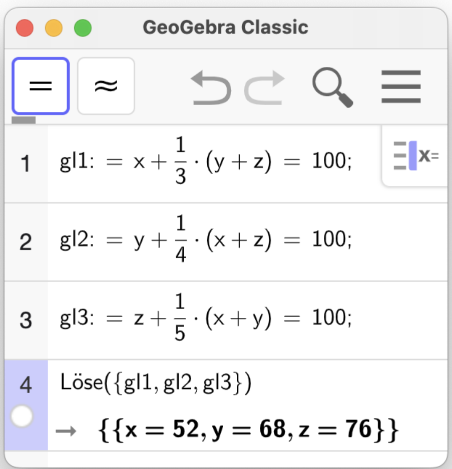
Wie viel Geld hat jeder der drei Männer?

1.1 Modellierung

Seien x, y, z die Geldmengen (in Talern) des ersten, zweiten und dritten Mannes. Dann gilt

$$\begin{array}{ccccccc} 1x & + & \frac{1}{3}y & + & \frac{1}{3}z & = & 100 \\ \frac{1}{4}x & + & 1y & + & \frac{1}{4}z & = & 100 \\ \frac{1}{5}x & + & \frac{1}{5}y & + & 1z & = & 100 \end{array}$$

Dieses lineare Gleichungssystem (LGS) lässt sich prinzipiell mit den bekannten Rechenverfahren aus der Sekundarstufe I lösen. Aber ab drei Gleichungen mit drei Variablen wird es schnell unübersichtlich und fehleranfällig.
Hier bietet sich ein strukturiertes Verfahren an – ein Verfahren, das auch der Computer benutzt. So löst GeoGebraCAS dieses LGS mithilfe des *Löse*-Befehls.

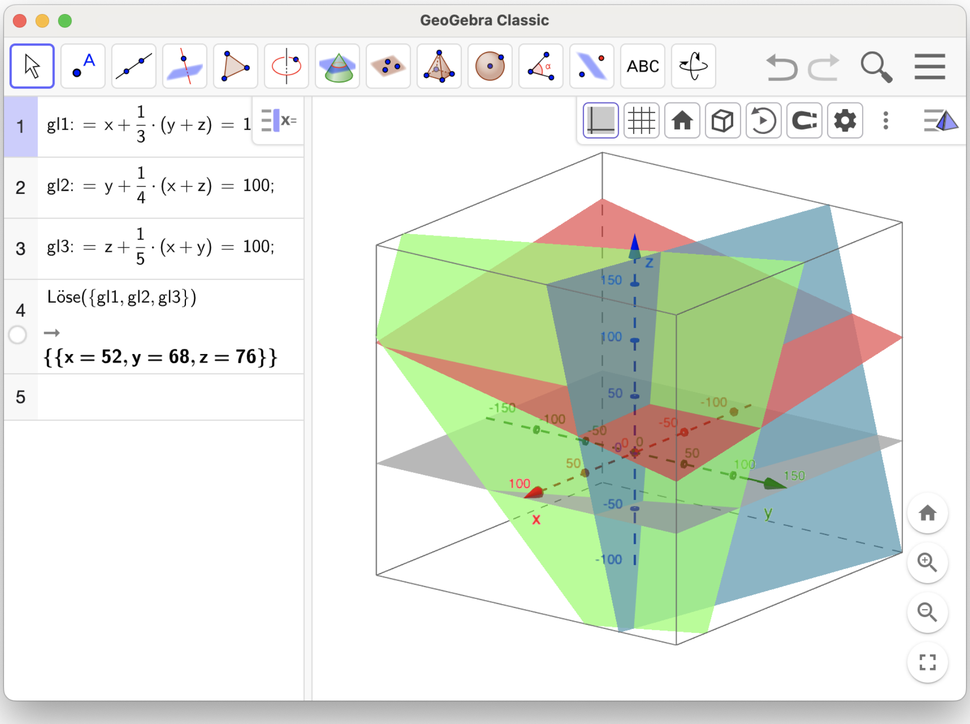


2 Das strukturierte Lösen – der Gaußsche Algorithmus

In vielen mathematischen Programmen wird zum Lösen linearer Gleichungssysteme der sogenannte **Gaußsche Algorithmus** verwendet. Er ist ein systematischer Weg, ein LGS schrittweise so umzuformen, dass die Lösung am Ende direkt abgelesen werden kann.
Doch der Gauß-Algorithmus kann weit mehr: Er zeigt auch, wie man **strukturiert und übersichtlich** Aussagen über die Lösungsvielfalt eines Systems trifft. So wird sichtbar, warum manche Systeme genau eine, andere unendlich viele oder keine Lösung besitzen.
Darüber hinaus öffnet dieses Verfahren den Blick auf die **Lineare Algebra**. Hier wird das Lösen von Gleichungssystemen auf eine höhere Ebene gehoben: Die einzelnen Rechenschritte erscheinen als Teil einer größeren Struktur. Plötzlich erkennt man Muster und Zusammenhänge – und sieht, dass das Lösen von Gleichungen mehr ist als Rechnen: Es ist das Erkennen von Ordnung und Abhängigkeit.

Vom Rechnen zur Geometrie

Schaltet man in `GeoGebra` zusätzlich die 3D-Ansicht ein, so lassen sich die drei Gleichungen als **Ebenen** im Raum deuten. Die Lösung des Gleichungssystems entspricht dem gemeinsamen Schnittpunkt dieser Ebenen.
In unserem Beispiel schneiden sich drei Ebenen in genau einem Punkt. Man könnte die Lösung sofort ablesen, wenn die Ebenen parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen würden – und genau darauf zielt das Gauß-Verfahren: Es „dreht“ das System so, dass man am Ende **achsenparallele Ebenen** erhält, deren Schnittpunkt leicht zu bestimmen ist.



2.1 Das Gaußsche Verfahren - am Beispiel erklärt

Im Folgenden wird das Verfahren an einem konkreten Beispiel gezeigt. Dabei werden die Umformungen Schritt für Schritt durchgeführt und jeweils kommentiert, um den Rechenweg und die Struktur deutlich zu machen.

Lösen eines linearen Gleichungssystems mit dem Gaußschen Verfahren

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 2z & = & -4 \\ -x & + & y & + & 3z & = & 11 \\ -x & - & 2y & + & 2{,}5z & = & -2{,}5 \end{array}$$

wird im Folgenden schrittweise durch Addition von Gleichungen in eine Form gebracht, in der die Lösung direkt ablesbar ist. Die letzte Spalte enthält jeweils die **rechte Seite (r.S.)**.

x	y	z	r. S.		
1	-3	2	-4	$\cdot 1$	$\cdot 1$
-1	1	3	11	$\cdot 1$	
-1	-2	2,5	$-2{,}5$		$\cdot 1$

Schritt 1: In der ersten Spalte sollen Nullen entstehen.

x	y	z	r.S.	
1	-3	2	-4	
0	-2	5	7	$\cdot 5$
0	-5	4,5	$-6{,}5$	$\cdot(-2)$

Schritt 2: In der zweiten Spalte soll unterhalb der -2 eine Null entstehen.

x	y	z	r.S.
1	-3	2	-4
0	-2	5	7
0	0	16	48

Schritt 3: Rückwärtseinsetzen.

$$\begin{aligned} 16z = 48 \quad & \Rightarrow z = 3, \\ -2y + 5z = 7 \quad & \Rightarrow -2y + 15 = 7 \Rightarrow y = 4, \\ x - 3y + 2z = -4 \quad & \Rightarrow x - 12 + 6 = -4 \Rightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Lösung: $x = 2,\ y = 4,\ z = 3$

Kommentar: Jede Zeile bleibt während des gesamten Prozesses **äquivalent** zum ursprünglichen System. Die Endform nennt man **Zeilenstufenform** – sie zeigt deutlich, wie sich die Variablen schrittweise bestimmen lassen.

2.2 Beispiele

Beipiel 1: Lösung zum Rätsel der Woche (Ein Pferd, drei Käufer)

Im ersten Schritt wurden durch entsprechende Multiplikation die Brüche entfernt.

$$
\begin{array}{ccc|c}
x & y & z & \text{r. S.} \\ \hline
1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 100 \\
\frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 100 \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 100 \\ \hline
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ccc|c}
x & y & z & \text{r. S.} \\ \hline
3 & 1 & 1 & 300 \\
1 & 4 & 1 & 400 \\
1 & 1 & 5 & 500 \\ \hline
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ccc|r}
x & y & z & \text{r. S.} \\ \hline
3 & 1 & 1 & 300 \\
0 & -11 & -2 & -900 \\
0 & -2 & -14 & -1200 \\ \hline
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ccc|r}
x & y & z & \text{r. S.} \\ \hline
3 & 1 & 1 & 300 \\
0 & -11 & -2 & -900 \\
0 & 0 & 150 & 11400 \\ \hline
\end{array}
$$

In der ersten Spalte wurden zwei Nullen, in der zweiten Spalte eine Null durch Äquivalenzumformungen erzeugt. Danach kann (rückwärts) die Lösung ermittelt werden:

$$150z = 11400;\ z = 76; \quad -11y - 2z = -900;\ y = 68; \quad 3x + y + z = 300;\ x = 52$$

Probe: : $52 + \frac{1}{3} \cdot (68 + 76) = 100; \quad 68 + \frac{1}{3} \cdot (52 + 76) = 100; \quad 76 + \frac{1}{3} \cdot (52 + 68) = 100.$

Beispiel 2

Das folgende lineare Gleichungssystem

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & 3y & + & z & = & 2 \\
-x & - & 4y & + & 2z & = & 6 \\
3x & + & y & + & z & = & 8
\end{array}
$$

kann mithilfe des Gauß-Verfahrens übersichtlich gelöst werden:

$$
\begin{array}{ccc|r}
x & y & z & \text{r. S.} \\ \hline
1 & 3 & 1 & 2 \\
-2 & -4 & 2 & 6 \\
3 & 1 & 1 & 8 \\ \hline
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ccc|r}
x & y & z & \text{r. S.} \\ \hline
1 & 3 & 1 & 2 \\
0 & 2 & 4 & 10 \\
0 & -8 & -2 & 2 \\ \hline
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ccc|r}
x & y & z & \text{r. S.} \\ \hline
1 & 3 & 1 & 2 \\
0 & 2 & 4 & 10 \\
0 & 0 & 14 & 42 \\ \hline
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ll}
\text{Ergebnis} & \\ \hline
x + 3y + z = 2; & x = 2 \\
2y + 4z = 10; & y = -1 \\
14z = 42; & z = 3 \\ \hline
\end{array}
$$

Auch hier zeigt sich: Am Ende stehen drei Zeilen mit jeweils einer führenden Variable – der „Stufenaufbau“ der Lösung wird sichtbar - mit drei „Stufen“.

Vom Stufenaufbau zum Begriff des Rangs

Am Ende des Gauß-Verfahrens stehen die Gleichungen in einer sogenannten **Zeilenstufenform**. Man erkennt dabei deutlich die „Stufen“ – jede Stufe steht für eine Gleichung, die eine neue Variable festlegt.

Die Anzahl der Stufen nennt man **Rang** der Koeffizientenmatrix. Sie gibt an, wie viele Gleichungen *wirklich unabhängig* voneinander sind.

Der Rang ist also eine Art „Maß für die Informationsdichte“ im Gleichungssystem – er zeigt, wie viele Bedingungen wirklich etwas Neues beitragen.

Dieser neue Begriff wird auch bei der Klassifizierung der Lösungsmöglichkeiten eines LGS hilfreich sein.

3 Die drei Lösungstypen

Um zu verstehen, welche Lösungsvielfalt ein lineares Gleichungssystem haben kann, hilft der geometrische Blick. Bei drei Variablen entsprechen die drei Gleichungen drei Ebenen im Raum. Je nach Lage dieser Ebenen gibt es:

- genau einen gemeinsamen Punkt — **eine eindeutige Lösung**,
- eine gemeinsame Gerade oder Ebene — **unendlich viele Lösungen**,
- oder gar keinen gemeinsamen Punkt — **keine Lösung**.

Im Folgenden betrachten wir den Fall **„unendlich viele Lösungen“**. Hier zeigt sich besonders schön, wie eng Algebra und Geometrie zusammenhängen — und wie sich diese Zusammenhänge mithilfe digitaler Werkzeuge wie `GeoGebra` sichtbar machen lassen.

3.1 Unendlich viele Lösungen

In den bisherigen Beispielen lieferte jede Zeile neue Informationen. Am Ende der Zeilenstufenform standen drei Stufen — also drei führende Variablen — und damit genau eine Lösung.
Nun betrachten wir ein System, bei dem eine Gleichung keine neue Information mehr liefert:

$$\begin{array}{rcrcrl} x & - & 3y & + & 2z & = -4 \\ -x & + & 2y & + & 3z & = 3 \\ 2x & - & 8y & + & 14z & = -10 \end{array}$$

Man erkennt:

$$(\text{Zeile } 3) = 4 \cdot (\text{Zeile } 1) + 2 \cdot (\text{Zeile } 2).$$

Die dritte Gleichung enthält also keine neue Information.
Das Gauß-Verfahren führt auf:

x	y	z	r.S.
1	-3	2	-4
0	-1	5	-1
0	0	0	0

Die letzte Zeile enthält nur Nullen – kein Widerspruch, sondern lediglich die Aussage: „Mehr Bedingungen gibt es nicht.“ Das System hat daher nur zwei Stufen — also unendlich viele Lösungen.

Bestimmung der Lösungsmenge:
Aus der zweiten Zeile folgt:

$$-y + 5z = -1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 + 5z.$$

Wir wählen z als freie Variable und setzen $z = t$. Damit wird

$$y = 1 + 5t.$$

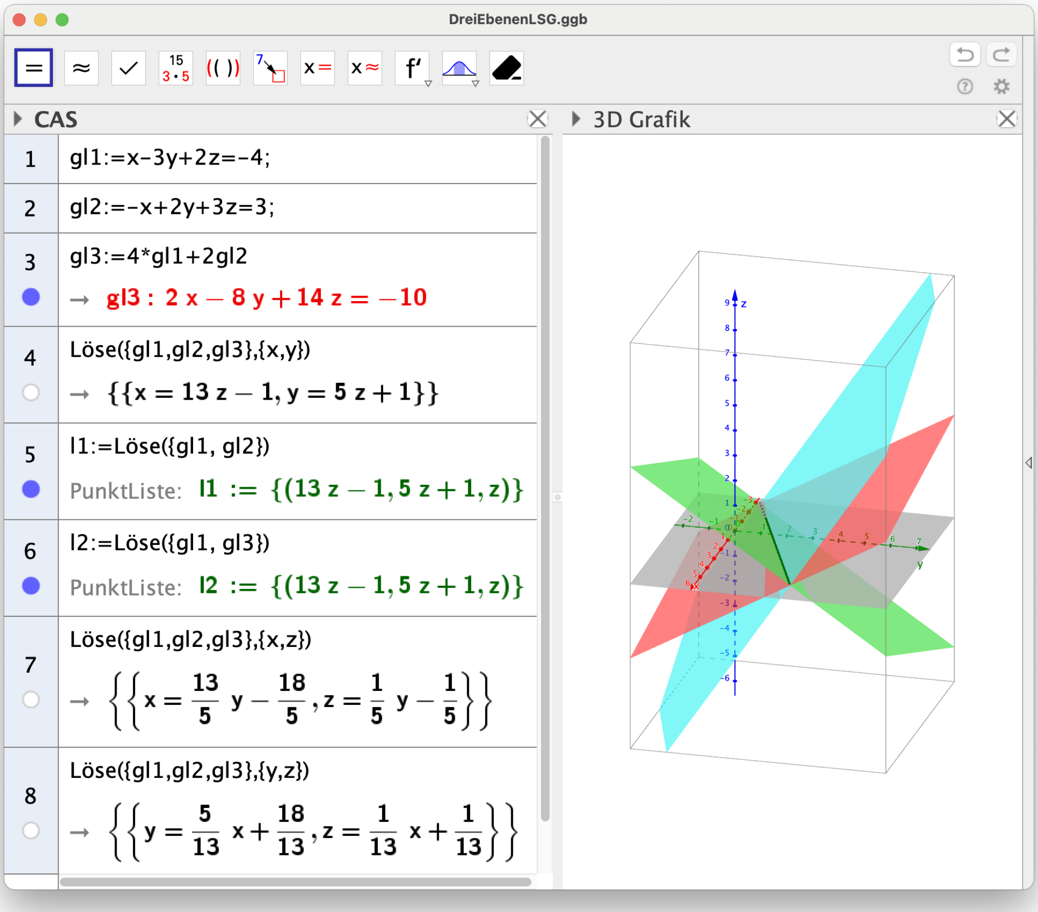
In die erste Zeile eingesetzt:

$$x - 3(1 + 5t) + 2t = -4 \quad \Rightarrow \quad x = -1 + 13t.$$

Damit lautet die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \{(x, y, z) = (-1 + 13t,\ 1 + 5t,\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Geometrisch bedeutet das: Alle diese Punkte liegen auf einer Geraden — es ist die Schnittgerade der drei Ebenen. Mit `GeoGebra` lässt sich das sehr anschaulich darstellen: Zuerst erzeugen die ersten beiden Gleichungen eine Schnittgerade, die Ebene zur dritten Gleichung liegt genau auf dieser Geraden.
Der Einsatz von GeoGebra zeigt dies alles in beeindruckender Weise. Zuerst die Eingabe der beiden ersten Gleichungen `gl1` und `gl2`. Danach die Definition der 3. Gleichung (`gl3`) als Linearkombination der beiden ersten Gleichungen. Mit dem Lösebefehl wird das LGS gelöst. GeoGebra benutzt keine neuen Variablen. In Zeile 4 wird durch $\{x, y\}$ die Variable z als freie Variable gewählt, in den Zeilen 7 und 8 entsprechend y und x.



Die Vektorrechnung liefert übrigens mit der Vektorschreibweise eine schöne Darstellung der drei Lösungsdarstellungen.
Geometrische Bedeutung: Alle diese Punkte liegen **auf einer Geraden** – es ist genau die Schnittgerade der drei Ebenen. In `GeoGebra` kann man das sehr schön sehen: Erst zwei Ebenen erzeugen eine Schnittgerade, die dritte Ebene liegt genau auf dieser Geraden.

Drei gleichwertige Beschreibungen derselben Lösungsmenge

1. Variante: $z = t$ frei

$$\begin{aligned} x &= -1 + 13t, \\ y &= 1 + 5t, \\ z &= 0 + 1t. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Variante: $y = t$ frei

$$\begin{aligned} x &= -\frac{18}{5} + \frac{13}{5}t \\ y &= 0 + 1t, \\ z &= -\frac{1}{5} + \frac{1}{5}t. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -18/5 \\ 0 \\ -1/5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 13/5 \\ 1 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

3. Variante: $x = t$ frei

$$\begin{aligned} x &= 0 + 1t, \\ y &= \frac{18}{13} + \frac{5}{13}t, \\ z &= \frac{1}{13} + \frac{1}{13}t. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/13 \\ 18/13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5/13 \\ 1/13 \end{pmatrix}$$

Alle drei Darstellungen beschreiben denselben Punktverlauf im Raum, also dieselbe Gerade. Die Wahl der freien Variablen ändert nur die Schreibweise – nicht die geometrische Lösung.

In der Sprache der Vektorgeometrie: Die Richtungsvektoren der drei Darstellungen sind **linear abhängig**, die Ortsvektoren liegen alle auf derselben Geraden.

3.2 Keine Lösung

Manchmal zeigt das Gauß-Verfahren, dass ein Gleichungssystem *keine Lösung* hat. Das geschieht, wenn beim Umformen eine **Widerspruchszeile** entsteht, also eine Zeile der Form

$$0x + 0y + 0z = c \quad \text{mit } c \neq 0.$$

Ein Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 2z & = & -4 \\ -x & + & 2y & + & 3z & = & 3 \\ 2x & - & 6y & + & 4z & = & -6 \end{array}$$

Führen wir das Gauß-Verfahren durch, ergibt sich:

x	y	z	r.S.
1	−3	2	−4
0	−1	5	−1
0	0	0	−2

Die letzte Zeile lautet $0 = -2$. Das ist offensichtlich unmöglich. Damit ist klar: Das System ist **nicht lösbar**.

Deutung: Die drei Ebenen besitzen keine gemeinsame Schnittmenge. Zwei von ihnen können sich noch entlang einer Geraden schneiden, die dritte verläuft jedoch **echt parallel** dazu oder enthält widersprüchliche Informationen.
In GeoGebra erkennt man das leicht: Die ersten beiden Ebenen schneiden sich in einer Geraden, die dritte liegt in einem anderen Abstand – ohne Schnitt.

Bemerkung zum Rang: Der Rang des Systems (also die Anzahl der „Stufen") ist kleiner als die Anzahl der Gleichungen mit rechter Seite. Damit gibt es mehr Bedingungen als miteinander vereinbar sind.

3.3 Zusammenfassung der drei Fälle

Das Gauß-Verfahren führt jedes lineare Gleichungssystem in eine sogenannte **Zeilenstufenform**. Daran lässt sich die **Lösungsvielfalt** direkt ablesen.

Fall	**Zeilenstufenform (Beispiel)**	**Deutung**	**Geometrie**
Eindeutige Lösung	$\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{array}$	Drei Stufen, drei führende Variablen	Drei Ebenen schneiden sich in einem Punkt
Unendlich viele Lösungen	$\begin{array}{ccc\|c} 1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	Eine Zeile ohne neue Information, eine Variable frei	Ebenen schneiden sich in einer Geraden (oder fallen zusammen)
Keine Lösung	$\begin{array}{ccc\|c} 1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}$	Widerspruchszeile, keine Lösung möglich	Ebenen verlaufen echt parallel oder widersprüchlich

Hinweis: Falls alle drei Gleichungen Vielfache voneinander sind, entsteht ein Sonderfall: Alle Ebenen fallen zusammen. Dann enthält die Zeilenstufenform nur *eine* Stufe, und zwei Variablen sind frei – die Lösungsmenge ist eine ganze Ebene.

Überblick: Rang – freie Variablen – Lösungsvielfalt

Art des Systems	**Rang (Stufen)**	**Freie Variablen**	**Lösungsmenge**
Eindeutig lösbar	3	0	Punkt
Unterbestimmt	2	1	Gerade
Alle Ebenen gleich	1	2	Ebene
Nicht lösbar (Widerspruch)	2, aber „r.S." zu viel	–	keine

Damit sind alle möglichen Fälle eines linearen Gleichungssystems mit drei Variablen beschrieben. Das Lösen eines LGS kann als *Abbildung* verstanden werden: Jede Kombination der Variablen wird dabei auf eine bestimmte rechte Seite abgebildet. Diese funktionale Sichtweise eröffnet völlig Sichtweisen.

4 Anhang: Vom Gleichungssystem zur linearen Abbildung

Das Lösen eines linearen Gleichungssystems lässt sich auch als eine Art „Abbildungsaufgabe" verstehen. Jede Gleichung beschreibt eine Bedingung für die drei Variablen x, y, z. Alle drei Gleichungen zusammen fassen wir als eine **lineare Abbildung** auf:

$$A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad A(x, y, z) = (\, a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z,\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z,\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z\,).$$

Das Gleichungssystem

$$A(x, y, z) = (b_1, b_2, b_3)$$

fragt dann schlicht: *„Welche Eingabe (x, y, z) wird durch A auf den Vektor (b_1, b_2, b_3) abgebildet?"*

Die rechte Seite (b_1, b_2, b_3) ist also das **Bild** des Punktes (x, y, z) unter der Abbildung A. Das Gauß-Verfahren sucht genau das Urbild dieses Vektors – also die Eingabe, die zu diesem Bild gehört.

Beobachtung: Zusammenhang mit der Geometrie

Die drei Gleichungen können wir auch als drei Ebenen sehen. Die Abbildung A beschreibt, wie die Koordinatenachsen auf diese Ebenen wirken: Sie „kippen" und „strecken" den Raum in bestimmte Richtungen.

- Wenn jede der drei Richtungen linear unabhängig bleibt, schneiden sich die Ebenen in einem Punkt – es gibt genau eine Lösung.
- Wenn eine Richtung verschwindet (eine Zeile keine neue Information liefert), dann „staucht" die Abbildung den Raum in dieser Richtung – es entsteht eine ganze Gerade von Lösungen.
- Wenn zwei Richtungen verloren gehen, bleibt eine ganze Ebene als Lösungsmenge übrig.
- Und wenn die Bedingungen widersprüchlich sind, gibt es kein Urbild – die Abbildung trifft diesen Vektor (b_1, b_2, b_3) gar nicht.

Damit taucht ganz natürlich ein zentraler Begriff auf: Die Richtungen, die „verloren gehen", bilden den **Kern der Abbildung**. Er enthält alle Vektoren, die auf $\vec{0}$ abgebildet werden.