Einstieg 1: Berechnungen - sanfter Einstieg

Im Internet halten sich seit Jahren hartnäckig Gerüchte, dass die Euromünze als Instrument zur zufälligen Seitenwahl beim Fußballspiel ungeeignet sei, weil angeblich eine der beiden Seiten häufiger oben zu liegen kommt als die andere. Dies sei angeblich der Grund, warum es Schiedsrichtermarken gibt.
Bei einer Untersuchung ist bei 100 Würfen 58-mal Kopf aufgetreten.
Für die folgenden Berechnungen soll angenommen werden, dass es sich um eine ideale Münze handelt.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse
E_1: Beim 100-fachen Wurf tritt 58-mal Kopf auf.
E_2: Beim 100-fachen Wurf tritt mindestens 58-mal Kopf auf.

b) Bestimmen Sie eine Umgebung um den Erwartungswert, so dass die Umgebungswahrscheinlichkeit $P(\mu - z \cdot \sigma \leq X \leq \mu + z \cdot \sigma)$ ca. 95 % beträgt.

Einstieg 2: Denken in Verteilungen - Umgebungen um den Erwartungswert

Gegeben ist eine binomialverteilte Zufallsgröße X. Er soll gelten: $n = 10000$; $p = 0{,}5$.
Finden Sie Aufgaben der Form $P(X = k)$; $P(X \leq k)$; $P(X \geq k)$; $P(a \leq X \leq b)$ und berechnen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Bemerkungen:

Es soll entdeckt werden, dass ohne Kenntnis von Sigma-Umgebungen es sehr schwierig ist, überhaupt Aufgaben zu erstellen, für die eine Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,01 gilt. Der Fokus auf Intervalle der Form $[\mu - k \cdot \sigma; \mu + k \cdot \sigma]$ ist vielversprechend.
Ergebnis: Es gilt $P(5000 - 2 \cdot 50 \leq X \leq 5000 + 2 \cdot 50 \approx 0{,}956$. In diesen schmalen Bereich um den Erwartungswert konzentriert sich fast die ganze Wahrscheinlichkeitsmasse.
Weiterhin soll erkannt werden, dass Einzelwahrscheinlichkeiten bei großen Werten für n auch sehr kleine Werte liefern.
Diese Problemstellung kann sofort auf den folgenden Einstieg überleiten.

Einstieg 3: Umgebungswahrscheinlichkeiten berechnen

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X haben die Wahrscheinlichkeiten

$$P(\mu - z \cdot \sigma \leq X \leq \mu + z \cdot \sigma)\ ,\ z = 1; 2; 3,$$

eine besondere Bedeutung.

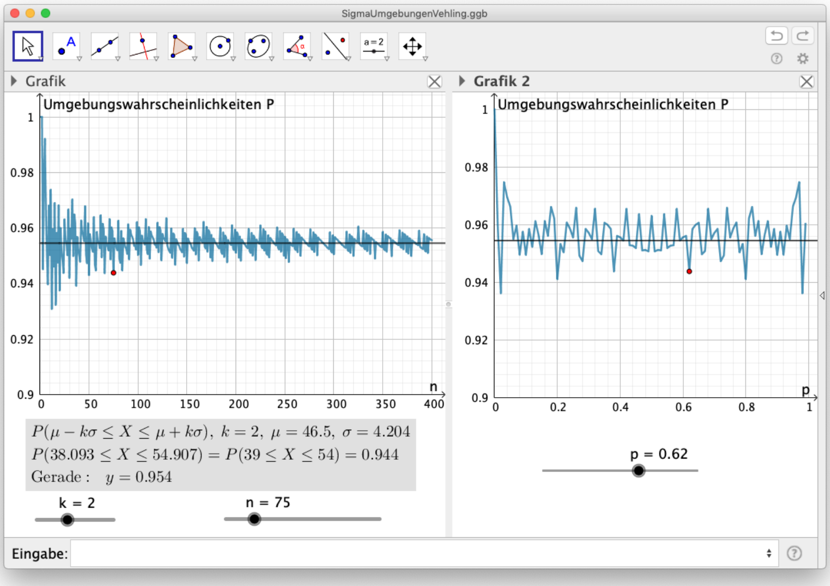
a) Beschreiben Sie, was diese Wahrscheinlichkeit jeweils aussagt.

b) Für $z = 1$ sollen die zugehörigen Umgebungswahrscheinlichkeiten berechnet werden. Füllen Sie untenstehende Tabelle aus.

n	$p = 0{,}3$	$p = 0{,}4$	$p = 0{,}5$
400			
600			
800			
1000			

c) Was ist überraschend? Untersuchen Sie diesen Sachverhalt auch für $z = 2$ und $z = 3$.

Einstieg 4: Umgebungswahrscheinlichkeiten - mit GeoGebra alles auf einmal



Einstieg 5: informierend - Umgebungswahrscheinlichkeiten vorgeben[1]

Dabei berücksichtigt man nur die ganzzahligen Ergebnisse im σ-Intervall. Die folgenden Tabellen vermitteln einen Eindruck von der Güte der Näherung auch für andere Werte von p und n:

n	400	800	1200	1600	2000
P_σ	0,6821	0,6945	0,6877	0,6825	0,6857

p = 0,5

n	400	800	1200	1600	2000
P_σ	0,6796	0,6837	0,6878	0,6819	0,6858

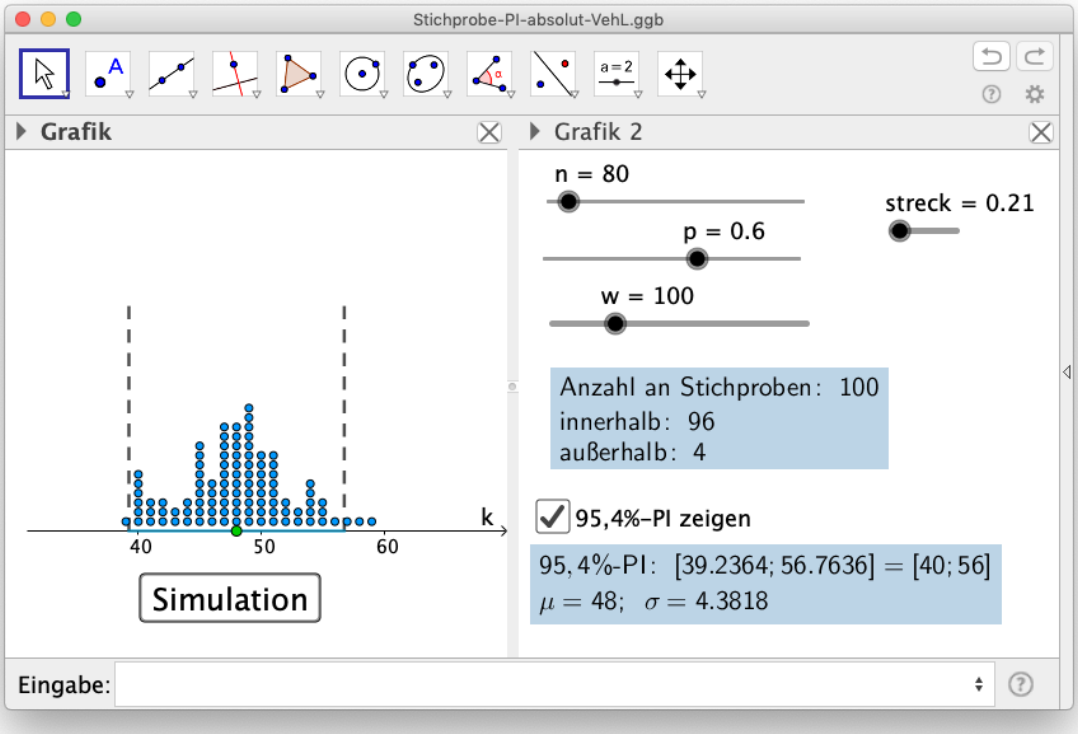
p = 0,1

p = 0,4			
n	P_σ	$P_{2\sigma}$	$P_{3\sigma}$
200	0,652	0,949	0,997
400	0,668	0,954	0,997
600	0,682	0,954	0,997
800	0,670	0,953	0,997
1000	0,683	0,951	0,997
1200	0,669	0,952	0,997
1400	0,687	0,954	0,997
1600	0,680	0,956	0,997
1800	0,676	0,954	0,997
2000	0,674	0,953	0,997
Mittel	0,674	0,953	0,997

[1] entnommen aus: LS. Mathematik. Prognose-und Konfidenzintervalle. Thüringen. S. 124. 2017

Einstieg 6: Simulationen mit GeoGebra - Berechnungen übernimmt das Programm

Experimentieren mit einem GeoGebra-Arbeitsblatt



Das Arbeitsblatt kann z. B. nach den Berechnungen zum Einsatz kommen. Werden nur Berechnungen durchgeführt, kann der Eindruck entstehen, dass die berechneten Wahrscheinlichkeiten in der Realität eine exakte Entsprechung haben. Der Zufall weist aber eine Variabilität auf. Hier können Simulationen helfen. Simulationen zeigen auf, dass nicht immer genau 4,5 % der Realisationen außerhalb der 2σ-Umgebung liegen. Nur auf lange Sicht (viele Simulationen und Mittelwert bilden) kann man erwarten, dass dieser Wert näherungsweise erreicht wird.

Hinweise zur GeoGebra-Datei

Es wird eine Bernoullikette der Länge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p zugrunde gelegt. Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Treffer. Mit GeoGebra können nun binomialverteilte Zufallszahlen mit dem folgenden Befehl erzeugt werden: ZufallszahlBinomialverteilt(n, p)
Der Befehl `Folge(ZufallszahlBinomialverteilt(n,p),i,1,w)` liefert sofort als Liste insgesamt w Realisationen, die mit dem Befehl DotPlot(<Liste von Daten>) grafisch dargestellt werden können.
Weiterhin werden bei dieser Simulation alle Berechnungen übernommen, um den Fokus auf die zentrale Erkenntnis von Sigma-Umgebungen zu legen.

Tipp:
Die beiden verschiedenen Wiederholungen $(n; w)$ führen immer wieder zu Verwirrungen. Ein Bezug zu einem Glücksrad kann helfen: Es wird n-mal ein Glücksrad (Trefferwahrscheinlichkeit p) gedreht, die Anzahl der Treffer notiert und jeweils als Punkt dargestellt. Dieser Zufallsversuch wird w-mal wiederholt. Dadurch entsteht das Punktdiagramm (Stichprobenverteilung).