1 Binomialverteilung

Ein Standardbeispiel für die Modellierung mit einer Binomialverteilung ist das n-fache, unabhängige Drehen eines Glücksrades und Zählen der Treffer (Trefferwahrscheinlichkeit p). Wenn die Zufallsgröße X die Anzahl der Treffer zählt, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit, genau k Treffer bei n Drehungen zu erzielen:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

- $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der Pfade in dem zugehörigen n-stufigen Baumdiagramm an, genau k Treffer und $n - k$ Nieten zu erzielen.
- Der Term $p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ liefert die Wahrscheinlichkeit (1. Pfadregel) längs eines Pfades (k Treffer, $n - k$ Nieten).

Abbildung 1 zeigt für eine Bernoullikette der Länge $n = 3$ und der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}25$ das zugehörige Baumdiagramm.

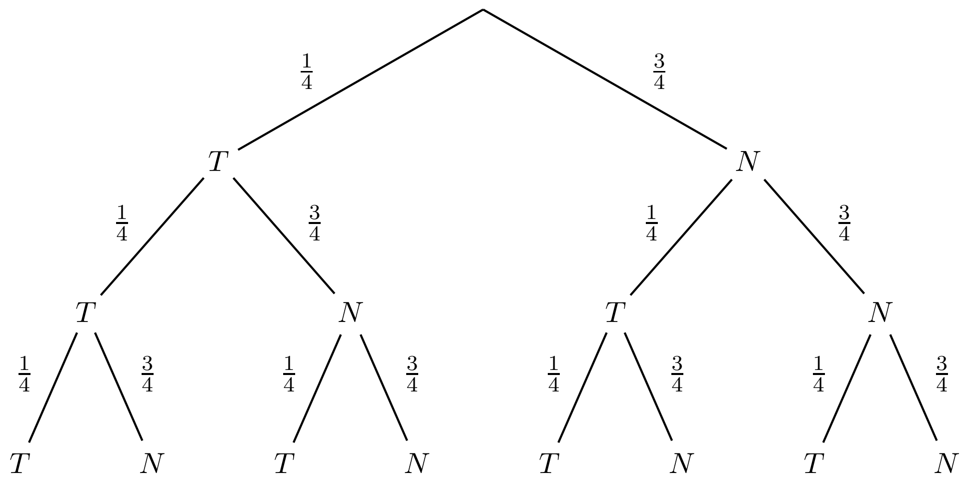
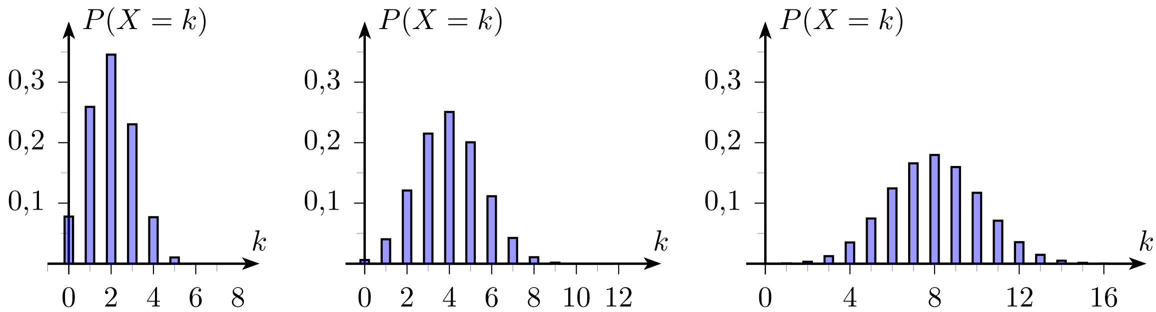


Abbildung 1: Baumdiagramm, $n = 3$



(a) $n = 5$; $\mu = 2$; $\sigma \approx 1{,}095$

(b) $n = 10$; $\mu = 4$ $\sigma \approx 1{,}549$

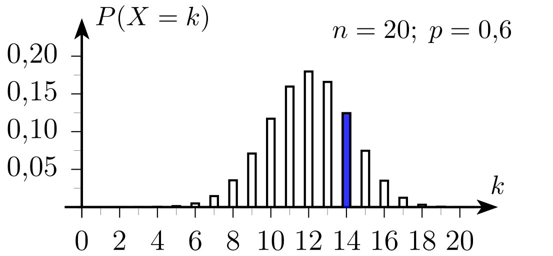
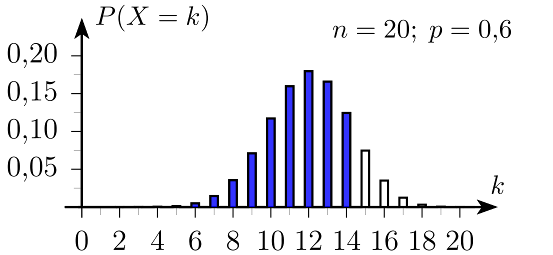
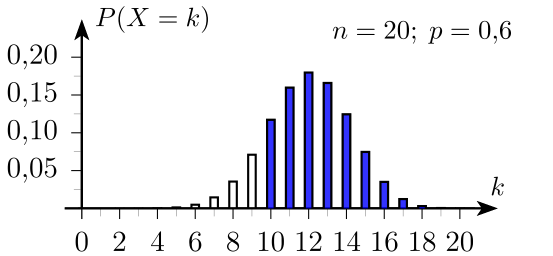
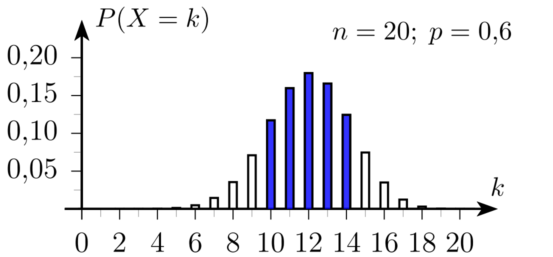
(c) $n = 20$; $\mu = 8$ $\sigma \approx 2{,}191$

Abbildung 2: Binomialverteilungen ($p = 0{,}4$; $n = 5$, 10, 20)

Bei einer Binomialverteilung gibt es für den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ einfache Terme, ohne immer auf die Definition der beiden Kenngrößen zurückgehen zu müssen:

$$\mu = n \cdot p; \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

1.1 Berechnungen mit dem GTR-84

genau k Treffer: $P(X = k)$ Beispiel: $P(X = 14)$; $n = 20$; $p = 0{,}6$; $k = 14$ GTR: allgemein: binompdf(n,p,k) Beispiel: binompdf(20,0.6,14)	
höchstens k Treffer: $P(X \leq k)$ Beispiel: $P(X \leq 14)$; $n = 20$; $p = 0{,}6$; $k = 14$ GTR: allgemein: binomcdf(n, p, k) Beispiel: binomcdf(20, 0.6,14)	
mindestens k Treffer $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$ Beispiel: $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$ $n = 20$; $p = 0{,}6$; $k = 10$ GTR: allgemein: 1 − binomcdf($n, p, k-1$) Beispiel: 1 − binomcdf(20, 0.6,9)	
mindestens k_1 und höchstens k_2 Treffer $P(k_1 \leq X \leq k_2) = P(X \leq k_2) - P(X \leq k_1 - 1)$ Beispiel: $P(10 \leq X \leq 14)$ $n = 20$; $p = 0{,}6$; $k_1 = 10$; $k_2 = 14$ GTR: binomcdf(n, p, k_2) − binomcdf($n, p, k_1 - 1$) binomcdf(20, 0.6,14) − binomcdf(20, 0.6,9)	

1.2 Die "Drei-Mindestens-Aufgabe"

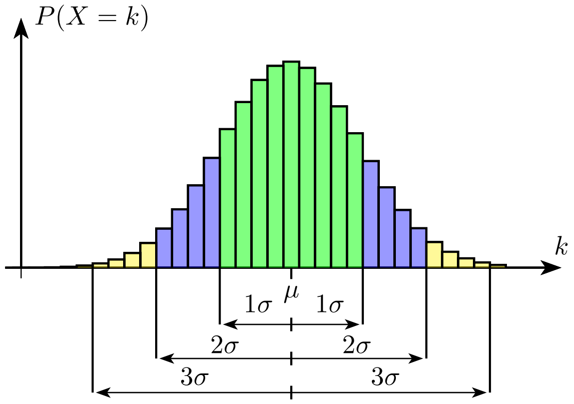
Eine oft gestellte Frage:

> Wie oft muss **mindestens** gewürfelt werden, um mit **mindestens** 90 %-iger Wahrscheinlichkeit, **mindestens** eine 6 zu erhalten?

Lösung: Es kann mit dem Binomialmodell modelliert werden (Wieso?). Die Zufallsgröße X sei also binomialverteilt mit $p = \frac{1}{6}$. Die Mindestanzahl n an Versuchen wird gesucht. Damit ergibt sich der Ansatz $P(X \geq 1) \geq 0{,}9$.
Da $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ gilt, folgt: $1 - P(X = 0) \geq 0{,}9$. Nun ist $P(x = 0)$ einfach zu berechnen (n-mal keine Sechs): $P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$. Die Ungleichung $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}9$ kann durch Probieren, grafisch-numerisch oder mit dem ln gelöst werden. Es ergibt sich $n \geq 12{,}629...$
Es muss mindestens 13-mal gewürfelt werden.

1.3 Sigma-Umgebungen bei Binomialverteilungen

Umgebungen vom Erwartungswert μ, die als Vielfache der Standardabweichung σ angegeben werden, führen zu Sigma-Regeln. Die Wahrscheinlichkeiten sind fast unabhängig von n und p. Diese Regel liefert gute Näherungswerte, falls $\sigma > 3$ gilt. Die Näherungswerte werden umso besser, je größer σ ist.



k	$P(\mu - k \cdot \sigma \leq X \leq \mu + k \cdot \sigma)$
1,000...	68,3%
1,644...	90%
1,959...	95%
2,575...	99%
2,004...	95,5%
2,967...	99,7%

$$\left[\mu - k \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)};\ \mu + k \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}\right]$$

Sigma-Umgebungen gibt es für absolute und relative Häufigkeiten. Wir nennen solche um μ bzw. p symmetrischen Intervalle auch Prognoseintervalle. Es gilt:
95%-Prognoseintervall für absolute Häufigkeiten H (1,96σ-Umgebung von $\mu = n \cdot p$):

$$\left[\mu - 1{,}96 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)};\ \mu + 1{,}96 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}\right] \tag{1}$$

95%-Prognoseintervall für relative Häufigkeiten $h = H/n$:

$$\left[p - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}};\ p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}\right] \tag{2}$$

Andere Bezeichnungen:

- Ein um p symmetrisches Intervall, in dem ca. 95% der relativen Häufigkeiten h liegen.
- Ein um p symmetrisches Intervall, in dem ca. 95% der Stichprobenergebnisse h liegen.

Es ist wichtig, sich selbst zu vergewissern, wieso aus (1) durch Division mit n die Beziehung (2) folgt. Wieso steht z.B. in (2) nun $p(1-p)/n$ unter der Wurzel?

Die Berechnung der beiden Intervallgrenzen ist einfach. Warum diese Intervalle auch als Prognoseintervalle bezeichnet werden und wieso Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten einfacher zu berechnen sind, wird nun geklärt.

1.4 Prognoseintervalle

Stellen Sie sich vor, Sie haben einen Würfel, von dem wir einmal annehmen, er sei ideal. Die Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu würfeln, beträgt somit $\frac{1}{6}$.
Nun wollen Sie aus welchen Gründen auch immer 200-mal diesen Würfel werfen. Vorher fragen Sie sich dann, mit welchen absoluten Häufigkeiten H und welchen relativen Häufigkeiten h ($h = H/n$) wohl zu rechnen ist. Sie führen also eine Prognose durch.
Solche Fragestellungen können mit Prognoseintervallen beantwortet werden. Leider niemals exakt. Wir müssen dabei mit einer Unsicherheit leben. Statistiker haben sich weltweit auf bestimmte Werte geeinigt. Spitzenreiter sind 5%-Unsicherheiten. Damit können Statistiker sehr gut leben, wenn es nicht gerade um Leben und Tod geht oder um seltene Elementarteilchen.

1.4.1 Prognoseintervalle für absolute Häufigkeiten

Zurück zum Beispiel: Mit $n = 200$ und $p = \frac{1}{6}$ kann eine Ermittlung des 95%-Prognoseintervalls um μ folgendermaßen aussehen:
$\mu = 200 \cdot \frac{1}{6} = 33{,}333...$; $\sigma = \sqrt{200 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 5{,}270...$
Tipp: Diese beiden Werte speichern [TR: STO A, STO B], dann vereinfacht sich die Berechnung. Im Kopf kann auch schon eine Überschlagsrechnung durchgeführt werden: $33 \pm 2 \cdot 5$.

$$\left[\mu - 1{,}96\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)};\ \mu + 1{,}96\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}\right] = [23{,}003...; 43{,}663...] \tag{3}$$

Bei einem absoluten Prognoseintervall ergibt sich offensichtlich das folgende Problem:
Der Erwartungswert und die beiden Intervallgrenzen müssen nicht unbedingt ganzzahlig sein. Da die Zufallsvariable X aber nur ganzzahlige Werte annehmen kann, folgt rein mathematisch aus $P(23{,}003... \leq X \leq 43{,}663...)$ die Bereichswahrscheinlichkeit $P(24 \leq X \leq 43)$.
Es gilt aber $P(24 \leq X \leq 43) = 0{,}9429... < 0{,}95$. Eine Vergrößerung des Intervalls auf beiden Seiten liefert $P(23 \leq X \leq 44) = 0{,}9536... > 0{,}95$.
Interpretation des Ergebnisses: Wenn ich das Zufallsexperiment oft durchführen würde, würde ich in ca. 95 % aller Fälle (meine Prognose) erwarten, mindestens 23 und höchstens 44 mal die Augenzahl 6 zu erhalten. Oder: Wenn ich das Zufallsexperiment 100-mal durchführe, erwarte ich in ca. 5 Fällen, dass ich weniger als 23-mal oder mehr als 44-mal eine 6 erhalte.

1.4.2 Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten

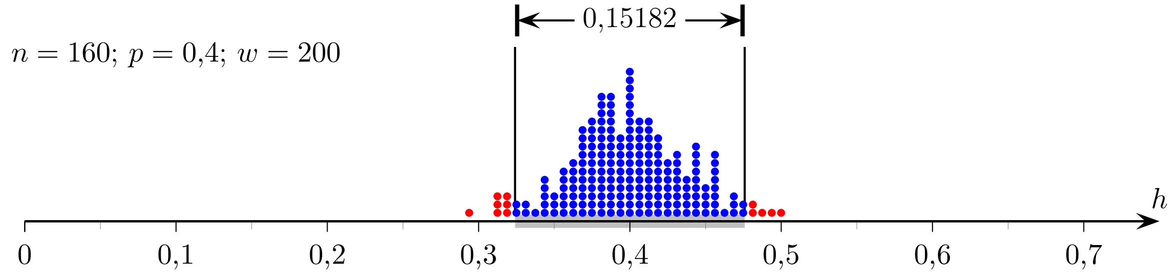
Hier ergeben sich keine Probleme mit der Ganzzahligkeit von X. Die Berechnungen liefern Intervalle, die zu p symmetrisch sind.
Es kann einfach (1) durch n dividiert werden, dann ergibt sich als Ergebnis: [0,115...,0,218...].
Oder so (mit einer möglichen Dokumentation):
Für das 95%-Prognoseintervall um p gilt: $\left[p - 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}};\ p + 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$.
Mit $p = \frac{1}{6}$ und $n = 200$ ergibt sich:

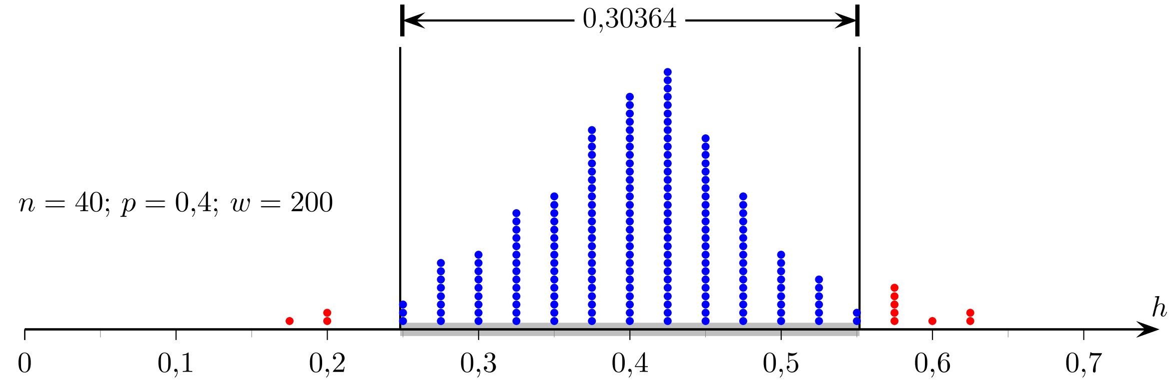
$$\left[\frac{1}{6} - 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{200}};\ \frac{1}{6} + 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{200}}\right] = [0{,}115...; 0{,}218...]\ .$$

Mögliche Interpretationen:

- Wenn ich das Zufallsexperiment oft durchführe, erwarte ich in ca. 95 % aller Fälle (meine Prognose), mindestens 0,115... und höchstens 0,218... als relative Häufigkeit für die Augenzahl 6 zu erhalten.
- Wenn ich das Zufallsexperiment 100-mal durchführe, erwarte ich in ca. 5 Fällen, dass ich kleinere h-Werte als 0,115... oder größere h-Werte also 0,218... erhalte.
- In dem um p symmetrischen Intervall liegen ca. 95 % aller Stichprobenergebnisse, wenn ich das Zufallsexperiment oft durchführe.
- In dem um p symmetrischen Intervall liegen ca. 95 % aller relativen Häufigkeiten, wenn ich das Zufallsexperiment oft durchführe.

Das Bild "*ca. 95 % aller Stichprobenergebnisse fallen in das 95 %-Prognoseintervall*" ist wichtig. Das sollte schon verstanden und auch angewendet werden können. Die folgende Abbildung kann da helfen. Es wurden jeweils 200 Stichproben ermittelt, der relative Anteil (Stichprobenergebnis) berechnet und als Punkt grafisch dargestellt ($p = 0{,}6$; $n_1 = 40$; $n_2 = 160$).
Es ist gut zu sehen, wie die Ergebnisse in das 95 %-Prognoseintervall von p "*fallen*" und wie sich die Intervallbreite verkleinert, falls die Stichprobengröße n vergrößert wird.





Prognoseintervalle werden mit wachsendem n immer kleiner, p wird sozusagen immer enger eingeschnürt. Genauer: Es gilt

$$1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \underbrace{1{,}96 \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)}}_{Konstante} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \text{Konstante}.$$

Man spricht deshalb vom $1/\sqrt{n}$-Gesetz.
Die Stichprobengröße vervierfachen bringt (nur) eine Halbierung der Intervalllänge.

1.5 Beispiele

1.5.1 Sigma-Umgebung/Prognoseintervall (absolute Häufigkeit)

Angenommen, Sie würfeln 600-mal einen Würfel und zählen die Anzahl der „Sechsen“. Berechnen Sie mithilfe der Sigma-Regeln, in welchem zum Erwartungswert symmetrischen Bereich die Anzahl der „Sechsen“ mit mindestens 95%-iger Wahrscheinlichkeit fallen.

Lösung:
Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der „Sechsen“. X ist binomialverteilt mit $n = 600$ und $p = \frac{1}{6}$.

$\mu = n \cdot p$; $\mu = 100$; $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$; $\sigma = \sqrt{600 \cdot (1/6) \cdot (5/6)} = 9{,}1287... > 3$

$\left[\mu - 1{,}95 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)};\ \mu + 1{,}96 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}\right] = [82{,}107; ...; 117{,}89...] \overset{exakt}{=} [83; ...; 117]$

$P(83 \leq X \leq 117) = 0{,}9450... < 0{,}95$; $P(82 \leq X \leq 118) = 0{,}957...... < 0{,}9572... > 0{,}95$

Häufigkeitsinterpretation: Wird das Zufallsexperiment 100-mal wiederholt, dann erwarte ich in ca. 95% aller Fälle, dass die Trefferanzahl mindestens 82 und höchstens 118 beträgt.

1.5.2 Prognoseintervall (relative Häufigkeit)

Aufgabe 1:

In einer Urne befinden sich 400 grüne und 600 rote Kugeln. Es werden 80 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Ein Treffer wird genau dann erzielt, wenn eine grüne Kugel gezogen wird. Die Zufallsgröße X, die die Anzahl der grünen Kugeln in der 80-er Stichprobe zählt, kann als binomialverteilt angenommen werden.
Ermitteln Sie ein um p symmetrisches Intervall, in dem ca. 95 % der relativen Häufigkeiten h liegen.

Lösung:

Das gesuchte Intervall ist das 95 %-Prognoseintervall um p. Es gilt

$$\left[p - 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}};\ p + 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right].$$

Mit $p = \frac{400}{1000} = 0{,}4$ und $n = 80$ (Stichprobenumfang) ergibt sich das um p symmetrische Intervall, in das ca. 95 % aller relativen Häufigkeiten liegen: $[0{,}2926...; 0{,}5073...]$.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}4$. Ermitteln Sie für die Stichprobenumfänge 50, 100, 200 und 5000 jeweils das 95 %-Prognoseintervall für p.

Lösung:

n	Intervall	Länge
50	[0,2715...; 0,5357...]	0,2715...
100	[0,3039...; 0,4960...]	0,1920...
200	[0,3321...; 0,4678...]	0,1357...
5000	[0,3864...; 0,4135...]	0,0271...

Aufgabe 3:

Von einem (relativen) 95 %-Prognoseintervall ist das Folgende bekannt:
Die linke Intervallgrenze hat den Wert 0,65 und für den Stichprobenumfang n gilt: $n = 400$.
Ermitteln Sie das zugehörige p und die rechte Intervallgrenze.

Lösung:

Der Ansatz $p - 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{400}} = 0{,}65$ führt auf die Lösung 0,6951... Hierbei wurde die Gleichung grafisch-numerisch durch Schnittpunktbestimmung gelöst. Somit gilt $p = 0{,}6951...$. Für die rechte Intervallgrenze ergibt sich mit $p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$ der Wert 0,7402...

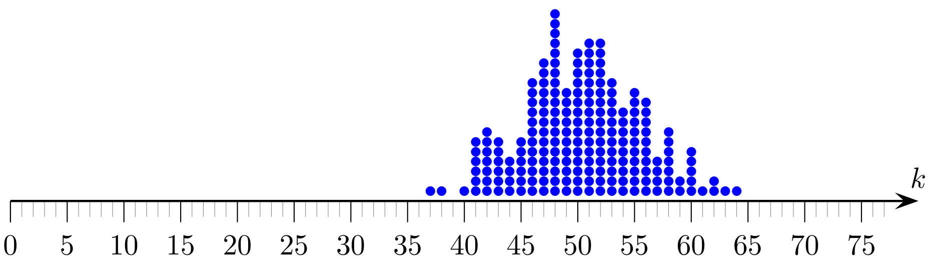
1.6 Das Konzept des Zweifelns und Prognoseintervalle

Ist die Münze gezinkt?

Eine Münze wird 100-mal geworfen. Dabei fällt 38-mal Kopf. Besteht ein Grund, an der Annahme $p_{\text{Kopf}} = 0{,}5$ zu zweifeln?

Eine Simulation kann helfen

Die folgende Abbildung zeigt das Ergebnis einer Simulation eines 100-fachen Münzwurfs mit $p_{\text{Kopf}} = 0{,}5$. Jeder Punkt symbolisiert das Ergebnis eines 100-fachen Münzwurfs. Insgesamt wurde das Experiment 200-mal wiederholt. Es werden also 200 Punkte dargestellt. Man erkennt z.B.: 6-mal wurde bei 100 Würfen 45-mal Kopf geworfen.



Lösung:

Vereinbarung: Wir zweifeln an der Annahme $p_{\text{Kopf}} = 0{,}5$, falls die Trefferanzahl von 38 (absolute Häufigkeit) nicht mehr in der 2σ-Umgebung des Erwartungswertes $\mu = 50$ liegt. Unter der Voraussetzung, dass $p_{\text{Kopf}} = 0{,}5$ gilt, passiert ein Ereignis, das mehr als 2σ vom Erwartungswert entfernt ist, in ca. 5 % aller Fälle. Man macht also (nur) einen Fehler von 5 %, wenn man sich irrt, also fälschlicherweise annimmt, die Münze sei gezinkt, obwohl sie es nicht ist. Mehr ist nicht drin. Wir können nur mit Sicherheitswahrscheinlichkeiten argumentieren.
Wenn die Stichprobe vom Umfang 100 eine Trefferanzahl in der 2σ-Umgebung ergeben hätte, kann man nur sagen, dass aufgrund dieses Stichprobenergebnisses auf der Basis der Sicherheitswahrscheinlichkeit von ca. 95 % kein Grund daran besteht, an $p_{\text{Kopf}} = 0{,}5$ zu zweifeln.
Ob für die Münze tatsächlich $p_{\text{Kopf}} = 0{,}5$ gilt, können wir niemals beweisen. Wahrscheinlichkeiten sind vom Menschen gesetzte Modelle, die in der Realität nie ganz richtig sind, nur „besser oder schlechter“. Wir können aber mit Testgrößen (hier 2σ-Umgebungen) in der Modellwelt arbeiten, mit denen wir die Modellgüte beurteilen. Zufallsschwankungen müssen wir hinnehmen. Sie sind nichts Negatives!

1.7 Aufgaben

Aufgabe 1: Datenübertragung

Angenommen, bei einer Datenübertragung wird ein Zeichen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % richtig übertragen. Weiterhin soll eine Nachricht aus 200 Zeichen bestehen.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
   - genau 5 Zeichen falsch übertragen werden,
   - mehr als 3 aber weniger als 17 Zeichen falsch übertragen werden,
   - mindestens 190 Zeichen richtig übertragen werden.

b) Bestimmen Sie das kleinste um den Erwartungswert von X symmetrische Intervall, in dem die Anzahl der falsch übertragenden Zeichen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % liegt.

Aufgabe 2: k gesucht

Gegeben ist eine Bernoullikette der Länge $n = 80$ mit $p = 0{,}4$. Die binomialverteilte Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Treffer.

a) Ermitteln Sie das kleinste k, für das gilt: $P(X \leq k) \geq 0{,}8$.

b) Ermitteln Sie das größte k, für das gilt: $P(X \geq k) \leq 0{,}5$.

c) Geben Sie für beide Problemstellungen jeweils eine Aufgabe im Sachzusammenhang an.

Aufgabe 3: Rechte Grenze wird gesucht

Eine Stichprobe vom Umfang $n = 200$ liefert für die linke Grenze des zugehörigen 95,4 %-Prognoseintervalls auf zwei Nachkommastellen gerundet den Wert 0,58.
Ermitteln Sie die Werte für p und die rechte Grenze auf zwei Nachkommastellen.

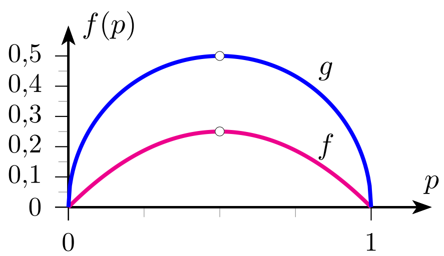
Aufgabe 4: Abschätzungen

Die Abbildung (s. u.) zeigt die Graphen der Funktionen f und g mit $f(p) = p \cdot (1-p)$ und $g(p) = \sqrt{p \cdot (1-p)}$, $0 \leq p \leq 1$.

a) Zeigen Sie mithilfe des Graphen von f oder des Graphen von g, dass die Grenzen der beiden 95,4 %-Prognoseintervalle für absolute und relative Häufigkeiten folgendermaßen abgeschätzt werden können:

$$\left[n \cdot p - 2 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)};\ n \cdot p + 2 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}\right] \subseteq [n \cdot p - \sqrt{n};\ n \cdot p + \sqrt{n}]$$

$$\left[p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}};\ p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}\right] \subseteq \left[p - \sqrt{\frac{1}{n}};\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$



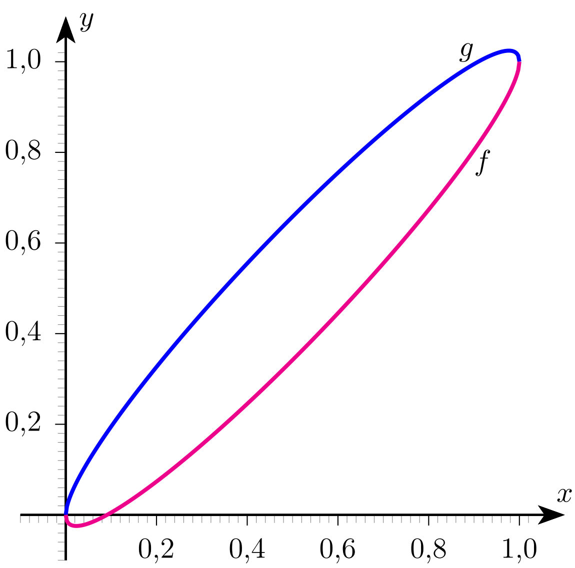
b) Gegeben sind $p = 0{,}4$ und $n = 100$ bzw. $n = 400$.
Bestimmen Sie ohne Taschenrechner mithilfe der Abschätzung des 95,4 %-Prognoseintervalls für relative Häufigkeiten jeweils die Grenzen des Intervalls.

Aufgabe 5: Prognoseintervalle grafisch ermitteln

In der Abbildung (s. u.) sind die beiden Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $f(x) = x - 2 \cdot \sqrt{\frac{x(x-1)}{40}}$ und $g(x) = x + 2 \cdot \sqrt{\frac{x(x-1)}{40}}$, $0 \leq x \leq 1$, dargestellt.

a) Begründen Sie, dass hiermit 95,4 %-Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten bei einem Stichprobenumfang von $n = 40$ ermittelt werden können.

b) Bestimmen Sie zeichnerisch für $p = 0{,}4$ und $p = 0{,}8$ die zugehörigen 95,4 %-Prognoseintervalle.



Aufgabe 6: Bezweifeln

Nehmen Sie an, dass bei einem handgesägten Würfel $p(6) = \frac{1}{6}$ gilt.

a) Bestimmen Sie das 95,4 % Prognoseintervall für die relative Häufigkeit $h(6)$ der Sechser zu $n = 100$ bzw. $n = 1000$ Versuchen.

b) Man beobachtet die relative Häufigkeit $h(6) = 0{,}21$.
Untersuchen Sie, ob Anlass besteht, an der Annahme $p(6) = \frac{1}{6}$ zu zweifeln.

Aufgabe 7: Eichzeichen

Das Eichzeichen garantiert, dass die Gewichtsangabe 1,8 g (netto) im Mittel eingehalten wird. Weil Produzenten nichts verschenken, liegt die Annahme nahe, dass die Tütchen mit Wahrscheinlichkeit 50 % über- und mit 50 % untergewichtig sind.

a) Bestimmen Sie mit dieser Annahme für den Stichprobenumfang $n = 144$ das 95,4 % Prognoseintervall für die relative Häufigkeit $h(+)$ übergewichtiger Tütchen.

b) Niko: „Ich hatte 56 % übergewichtige Tütchen. Das ist eine signifikante Abweichung nach oben und ich darf bezweifeln, dass ein Tütchen nur mit Wahrscheinlichkeit 50 % übergewichtig ist“. Überprüfen und kommentieren Sie Nikos Aussage.

Aufgabe 8: Wahr oder falsch?

Wahr oder falsch?

a) Wenn man den Radius des Prognoseintervalls verdoppelt, dann verdoppelt sich auch die Sicherheitswahrscheinlichkeit, mit der die relative Häufigkeit in dem Prognoseintervall liegt.

b) Wenn man den Versuchsumfang verdoppelt, dann halbiert sich der Radius des Prognoseintervalls der relativen Häufigkeiten bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit.

c) Je größer die Sicherheitswahrscheinlichkeit, desto größer ist auch das Prognoseintervall.

d) Das $1/\sqrt{n}$-Gesetz liefert Näherungen für Prognoseintervalle, die man mit der Binomialverteilung kontrollieren kann.

e) Wenn eine relative Häufigkeit außerhalb des 1σ-Prognoseintervalls zu p liegt, dann wird man ein bisschen skeptisch, hat aber noch keinen Anlass, die angegebene Wahrscheinlichkeit zu bezweifeln.

Aufgabe 9: Umfrage

a) Eine Partei kam auf 27,8 % aller Stimmen. Bestimmen Sie das Intervall, in dem bei einer repräsentativen Kontroll-Umfrage der Stimmenanteil mit Sicherheitswahrscheinlichkeit 95,4 % liegen müsste, wenn man 500 Personen befragen würde.

b) Prüfen Sie, ob es reicht, 2000 Personen zu befragen, wenn gefordert wird, dass das Prognoseintervall für den Stimmenanteil nur noch den Radius 0,01 haben soll.

Aufgabe 10: Parameter p bestimmen

Jedes Bauteil einer Produktionsserie fällt mit einer Wahrscheinlichkeit p aus. Die Bauteile werden unabhängig voneinander produziert.
Wie groß darf p höchstens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % höchstens zehn von 100 Bauteilen ausfallen?

Aufgabe 11: MC-Test

Ein Multiple-Choise-Test besteht aus 70 Aufgaben mit jeweils fünf Antwortmöglichkeiten, von denen aber nur eine richtig ist.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann jemand, der am Test teilnimmt, durch reines Raten (i) höchstens 10, (ii) weniger als 10, (iii) zwischen 10 und 20 Fragen richtig beantworten?

Nun wird variiert (Anzahl der Aufgaben, Wahrscheinlichkeit, richtig zu beantworten)

b) Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit sein, eine Frage richtig zu beantworten, wenn die Wahrscheinlichkeit, mindestens 36 Fragen richtig zu beantworten, bei 95 % liegt?

c) Nun sind es nur 4 Auswahlfragen, von denen genau eine richtig ist. Aus wie vielen Fragen muss der Test bestehen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens 26 Fragen richtig zu beantworten, bei 95 % liegt, wenn Sie nur raten?

d) Es sind wieder 4 Auswahlfragen, von denen genau eine richtig ist. Sie haben den MC-Test bestanden, wenn Sie mindestens 60 % der Fragen richtig beantwortet haben. Leider ist der Test in einer Sprache verfasst, die Sie nicht kennen. Sie können also nur raten. Ihnen werden drei Möglichkeiten angeboten:
Entweder können Sie den Test mit 10 Fragen, mit 20 Fragen oder mit 100 Fragen durchführen. Wie entscheiden Sie sich?

Konfidenzintervalle

1.8 Zentrales Einstiegsbeispiel

Konfidenzintervalle sind einfach zu berechnen. Der Rechner hat dafür sogar eine Taste (TR: 1-PropZInt). Das Verstehen ist schon eine andere Sache. Viele Aufgaben sind so aufgebaut, wie die folgende Problemstellung:

> Die Wahl zum Bürgermeister einer Großstadt gewinnt derjenige Kandidat, der mehr als 50% der Stimmen erhält. Vor der Bürgermeisterwahl wurden Umfragen zum Wahlausgang durchgeführt. In einer Umfrage gaben 424 von 800 Personen an, den amtierenden Bürgermeister wählen zu wollen.
>
> Entscheiden Sie mithilfe eines Vertrauensintervalls zur Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95%, ob der amtierende Bürgermeister mit einem Wahlsieg rechnen konnte.

Lösung - so könnte eine Dokumentation aussehen:
Ein Vertrauensintervall (WALD-Intervall) zur Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% kann mithilfe der Beziehung

$$\left[h - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}\ ;\ h + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}\right] \tag{4}$$

ermittelt werden.
Mit der relativen Häufigkeit $h = \frac{424}{800} = 0{,}53$ und der Stichprobengröße $n = 800$ ergibt sich hiermit: $[0{,}4954...; 0{,}56459]$.
Da die linke Grenze des Vertrauensintervalls nicht größer als 0,50 ist, konnte der amtierende Bürgermeister auf Grundlage der Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % nicht sicher sein, die Wahl zu gewinnen.

Übrigens: Bei $k = 428$ Personen ergibt sich das WALD-Vertrauensintervall $[0{,}5004...; 0{,}5695...]$. Die linke Grenze ist größer als 0,50. Somit hätte der amtierende Bürgermeister bei diesem Stichprobenergebnis auf Grundlage der Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % mit einem Wahlsieg rechnen können.

Mit dem Befehl 1-PropZInt (STAT | Tests | 1-PropZInt) kann (4) einfach mithilfe des Rechners ermittelt werden.

Das war es schon. So sind fast sämtliche Aufgaben zu Konfidenzintervallen gestrickt: Es gibt eine Stichprobe mit einer Stichprobengröße n, ein Stichprobenergebnis k und eine Sicherheitswahrscheinlichkeit (meist 95 %).

1.9 Etwas Theorie

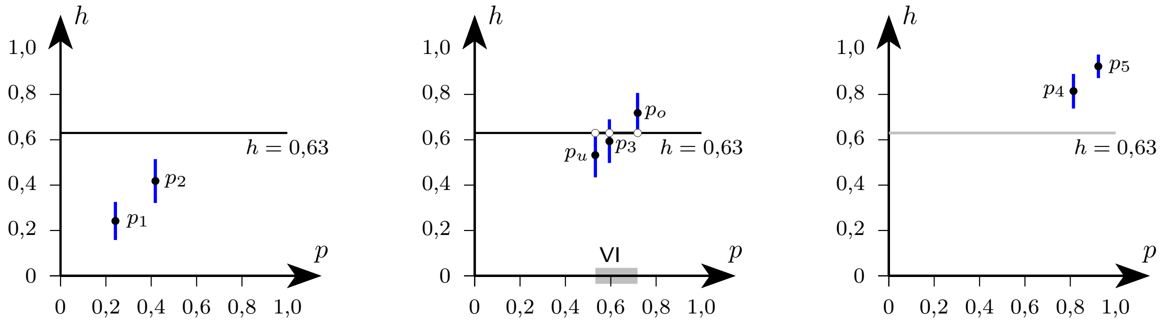
Bei Prognoseintervallen ist p bekannt. Es geht um die Blickrichtung *Von der Grundgesamtheit zur Stichprobe*. Beim Einstiegsbeispiel ist p der unbekannte Parameter der Grundgesamtheit. Es gibt nur ein Stichprobenergebnis h, mit dem auf den Parameter p der Grundgesamtheit (alle Wähler) geschlossen werden soll. Nun kommt die umgekehrte Blickrichtung: *Von der Stichprobe zur Grundgesamtheit.*
Prognoseintervalle führen zu Konfidenzintervallen. Es gilt die folgende Definition:

> Ein 95 %-Vertrauensintervall besteht aus allen p-Werten, die h im jeweiligen 95 %-Prognoseintervall haben.

Diese Definition liefert gleich die Berechnung eines Vertrauensintervalls. Die Grenzen können durch Lösen der beiden Gleichungen:

$$h = p_u + 1{,}96 \cdot \sqrt{p_u \cdot (1 - p_u)/n} \quad \text{und} \quad h = p_o - 1{,}96 \cdot \sqrt{p_o \cdot (1 - p_o)/n}$$

ermittelt werden.
Die folgende Abbildung verdeutlicht die Definition und die Berechnung eines Vertrauensintervalls:



(a) h nicht im PI von p (b) h im PI von p (c) h nicht im PI von p

Abbildung 3: Entstehung eines Vertrauensintervalls

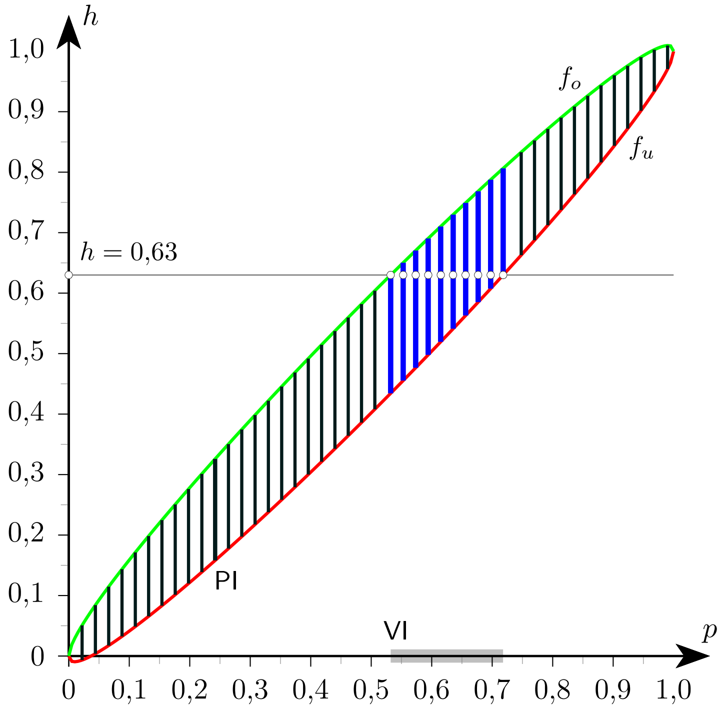


Abbildung 4: Prognose- und Vertrauensintervall

Es gilt $n = 100$. Für das Stichprobenergebnis h gilt: $h = 0{,}63$. Man erkennt für 45 p-Werte die zugehörigen 95%-Prognoseintervalle (vertikale Strecken).

Alle p -Werte für $0{,}532... \leq p \leq 0{,}787...$ haben 95 %-Prognoseintervalle, die h enthalten. Somit ist das 95 %-Vertrauensintervall in diesem Fall [0,532...; 0,787...].
Da 95 %-Prognoseintervalle durch

$$\left[p - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}};\ p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}\right]$$

berechnet werden, (s. 2), können die Intervallgrenzen durch Lösen der beiden folgenden Gleichungen ermittelt werden:

$$h = p_u + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p_u \cdot (1-p_u)}{n}}$$

$$h = p_o - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p_o \cdot (1-p_o)}{n}}$$

Die Berechnung kann der Rechner übernehmen:
$y_1 = h$; $y_2 = x + 1.96 \cdot \sqrt{x \cdot (1-x)/n}$; $y_3 = x - 1.96 \cdot \sqrt{x \cdot (1-x)/n}$

Es sind zwei normale Schnittprobleme, die grafisch-numerisch gelöst werden können.
Das Ergebnis wird übrigens WILSON-Vertrauensintervall genannt. Da ein Prognoseintervall schon eine Näherung ist, ist es ein Vertrauensintervall auch, da Prognoseintervalle bei der Berechnung eine Rolle spielen. Durch eine weitere Näherung kann auf das Lösen der beiden Gleichungen verzichtet werden. Es ergibt sich dann das WALD-Vertrauensintervall (s. (4)):

$$\left[h - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}\ ;\ h + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}\right].$$

Hier müssen keine Gleichungen gelöst werden. Die Grenzen ergeben sich sofort durch Einsetzen der einzelnen Werte. Beide Näherungen können benutzt werden, wobei (4) die einfachere Formel ist und auch sofort mit dem GTR ermittelt werden kann. Übrigens benutzten viele Meinungsforschungsinstitute diese einfache Formel. Für $n \approx 1000$ gibt es z.B. keine nennenswerte Unterschiede der beiden Verfahren.

Beispiel:

Es wird eine Umfrage unter 850 Wahlberechtigten durchgeführt. 46 % der Personen geben an, Partei A wählen zu wollen. Es wird behauptet, dass die Partei A mindestens 50 % der Stimmen erreicht.
Untersuchen Sie mithilfe eines Vertrauensintervalls zur Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 %, ob diese Behauptung mit dem Ergebnis der Umfrage verträglich ist.

Lösung:

$h = 0{,}46$
Um die Grenzen des (WILSON)-Vertrauensintervalls zu bestimmen, müssen die beiden folgenden Gleichungen gelöst werden:

$$0{,}46 = p_u + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p_u \cdot (1-p_u)}{850}} \quad \text{und} \quad 0{,}46 = p_o - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p_o \cdot (1-p_o)}{850}}$$

Die beiden Gleichungen werden grafisch-numerisch durch Schnittpunktbestimmung gelöst. Die x-Koordinaten der beiden Schnittpunkte ergeben die Grenzen des Intervalls [TR: intersect]. Es ergibt sich das folgende Intervall: [0,4267... ; 0,4936...].

Da die rechte Intervallgrenze kleiner als 0,5 ist, überdeckt dieses Vertrauensintervall nicht den Wert $p = 0{,}5$. Die Behauptung, dass die Partei A mindestens 50 % der Stimmen erreicht, ist somit mit dem Ergebnis dieser Umfrage nicht verträglich.
Zusatz:
Die Berechnung des (WALD)-Vertrauensintervalls

$$\left[h - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}\ ;\ h + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}\right]$$

kann mit dem GTR durchgeführt werden [TR: 1-PropZInt]. Mit $h = 0{,}46$; $n = 850$ und $\gamma = 0{,}95$ ergibt sich das Intervall $[0{,}4264\ldots\,;\ 0{,}4935\ldots]$.
Da die rechte Intervallgrenze kleiner als 0,5 ist, überdeckt dieses Vertrauensintervall nicht den Wert $p = 0{,}5$. Die Behauptung, dass die Partei A mindestens 50 % der Stimmen erreicht, ist somit mit dem Ergebnis dieser Umfrage nicht verträglich.

1.10 Was bedeutet eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 %?

Die Abbildung 5 kann dabei helfen zu verstehen, was eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % eigentlich bedeutet. Hier wurden 100-mal Stichprobenergebnisse h mit der eigentlich unbekannten Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}63$ simuliert. Zu jedem h wurde nun das zugehörige Vertrauensintervall berechnet und als Strecke dargestellt. Zusätzlich wurden noch die Grenzen des Prognoseintervalls von p als gestrichelte Linien eingezeichnet.
Bei dieser Simulation überdecken genau 6 Konfidenzintervalle das (unbekannte) p nicht, also überdecken 94 % den eigentlich unbekannten Wert des Parameters p.
Man kann sich die Sicherheitswahrscheinlichkeit also so vorstellen: Wenn sehr viele Konfidenzintervalle zu einem bestimmten Stichprobenumfang berechnet werden, erwarten wie in ca. 95 % aller Fälle, dass der unbekannte Parameter p von diesen Intervallen überdeckt wird. Mehr können wir nicht sagen. Leider auch nicht, ob unser einziges berechnetes Vertrauensintervall dazugehört. Wir haben ja nur EINE Stichprobe genommen. Bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % fühlen wir uns aber (relativ) sicher, dass unser errechnetes Vertauensintervall den unbekannten Parameter p überdeckt.

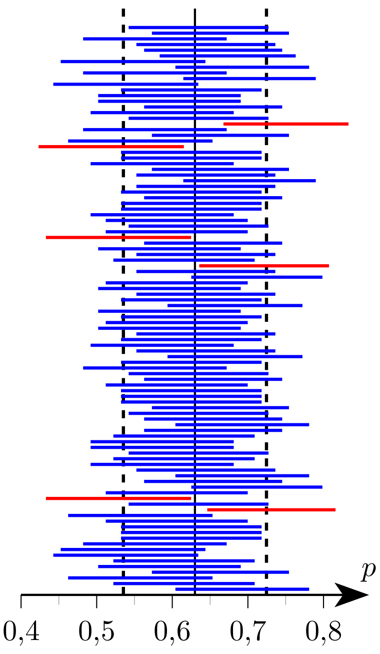
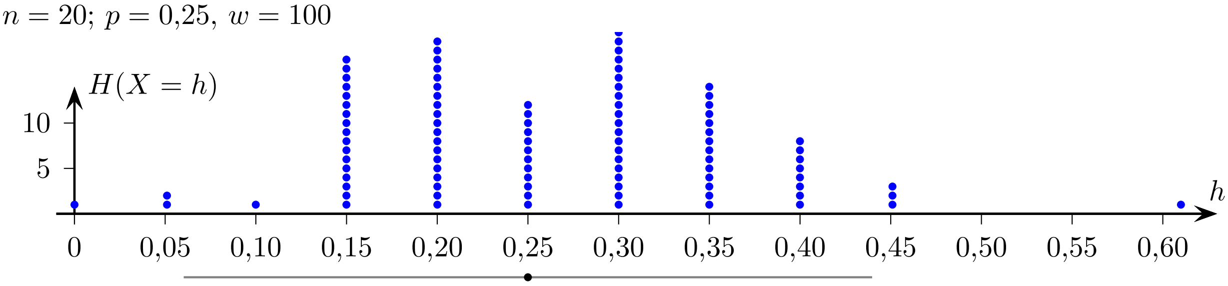


Abbildung 5: 100 Konfidenzintervalle

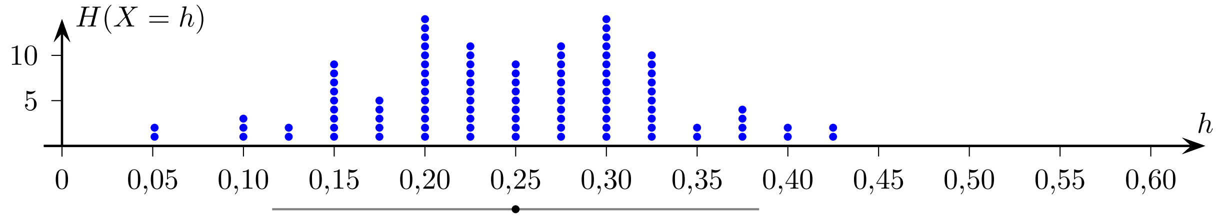
2 Anhang

2.1 Stichprobenverteilungen und das $1/\sqrt{n}$-Gesetz

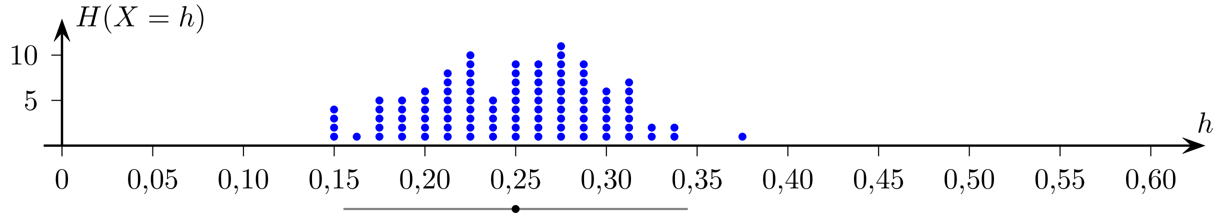
$n = 20$; $p = 0{,}25$, $w = 100$



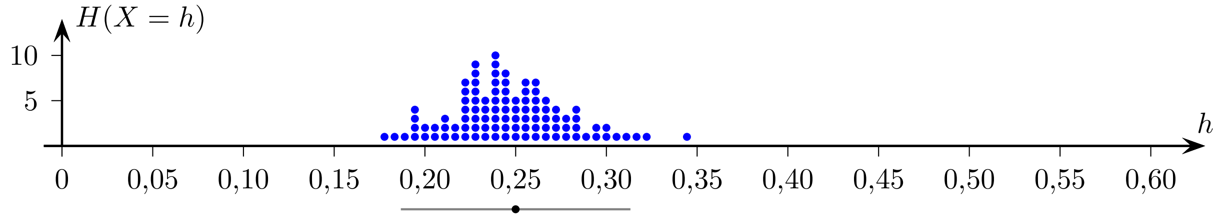
$n = 40$; $p = 0{,}25$, $w = 100$



$n = 80$; $p = 0{,}25$, $w = 100$



$n = 180$; $p = 0{,}25$, $w = 100$



$n = 320$; $p = 0{,}25$, $w = 100$