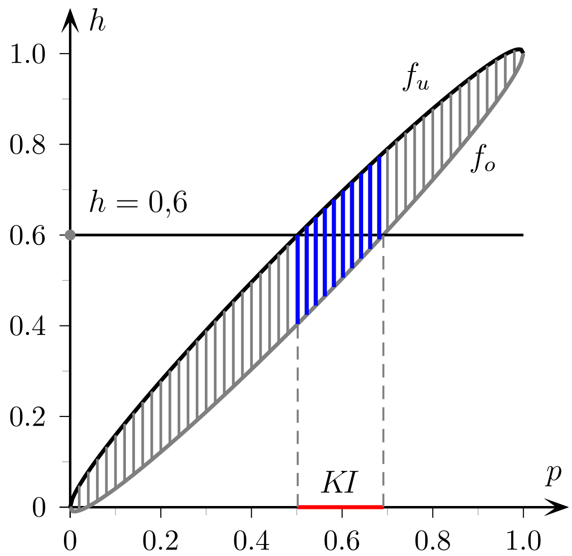
Definition eines Konfidenzintervalls:

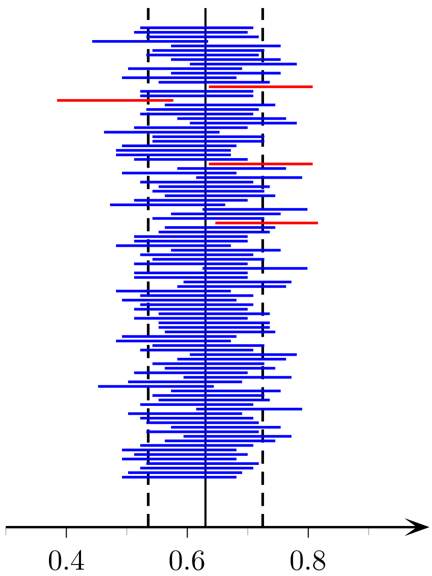
> Das 95%-Konfidenzintervall für eine beobachtete relative Häufigkeit h soll genau alle Wahrscheinlichkeiten p umfassen, die h in ihrem 95%-Prognoseintervall enthalten.

Die Umsetzung dieser Definition kann im Wesentlichen auf zwei Arten erfolgen:

- Methode 1: Grafisch-numerische Lösung durch Schnittpunktbestimmung der zugehörigen Graphen von f_u und f_o mit der Geraden zu $y = h$.
  $f_u(x) = x + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{x\cdot(1-x)}{n}}$; $f_o(x) = x - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{x\cdot(1-x)}{n}}$
- Methode 2: Auflösen der beiden Gleichungen
  $h = p_o - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p_o\cdot(1-p_o)}{n}}$ und
  $h = p_u + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p_u\cdot(1-p_u)}{n}}$ mithilfe des solve-Befehls.

Die Berechnung mithilfe der Konfidenzellipse erklärt noch nicht die Interpretation der Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95%. Die Bedeutung kann überzeugend durch Simulation von vielen Konfidenzintervallen (genauer: Realisationen) erarbeitet werden.





Dieses Konfidenzintervall heißt WILSON-Konfidenzintervall. Auch wenn die beiden Lösungen exakt berechnet werden können, ist so ein Konfidenzintervall immer noch eine Näherung. Hier ist die Approximation durch die Normalverteilung enthalten. Eine weitere Näherung führt zum WALD-Konfidenzintervall:

$$\left[h - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}}; h + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}}\right].$$

Dieses Intervall ist in vielen Rechnern implementiert. Bei TI-Rechnern heißt der Befehl 1-PropZInt.
Ohne Näherung durch die Normalverteilung wird die Fisher- oder Beta-Verteilung benötigt. Das ist auch mithilfe einiger Rechner möglich, aber für die Schule ungeeignet.

Will man im Unterricht die durch die Simulation visualisierten Phänomene in mathematischer Terminologie aufschreiben, muss man begrifflich verschiedene Dinge genau unterscheiden und unterschiedlich bezeichnen:

- die unbekannte Wahrscheinlichkeit p,
- die beobachtete relative Häufigkeit h, die in einer konkreten Realisierung des n-fachen Zufallsexperiments auftrat,
- die relative Häufigkeit H, die prinzipiell eintreten könnte. Dies ist eine Zufallsgröße.

Zufallsgrößen bezeichnen wir der Deutlichkeit halber mit Großbuchstaben. X bezeichne die Anzahl der Erfolge. X ist binomialverteilt mit der Wiederholungszahl n und der Erfolgswahrscheinlichkeit p. Die Zufallsgröße H lässt sich dann definieren als $H := \frac{X}{n}$. Mit h bezeichnen wir also eine Zahl, H bezeichnet hingegen eine Zufallsgröße, die die Werte $\{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\}$ mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten annimmt.

Zu einem beobachteten h errechnet man das Konfidenzintervall $[k_u; k_o]$. Diese Grenzen hängen von h ab, man kann daher auch $[k_u(h); k_o(h)]$ schreiben.

Es ist dann $k_u(h) = h + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}}$ und $k_o(h) = h - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}}$.
Interpretiert man h als Realisierung der Zufallsgröße H, so kann man das Intervall als Realisierung des „zufälligen Intervalls“ $[k_u(H); k_o(H)]$ mit den „zufälligen“ Intervallgrenzen

$k_u(H) = H + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{H\cdot(1-H)}{n}}$ und k_o(H)=H-1,96$\cdot\sqrt{\frac{H\cdot(1-H)}{n}}$ ansehen.

Man kann die Wahrscheinlichkeiten dafür ausrechnen, dass diese beiden Bedingungen gelten. Diese Berechnung erfolgt unter der Annahme, dass die wahre Wahrscheinlichkeit p ist, was wir hinter dem senkrechten Trennstrich notieren.

1. $P(k_u(H) \leq p \leq k_o(H) | p$ ist die wahre Wahrscheinlichkeit)
2. $= P(I_{95\%-KI}(H)$ enthält $p |$ p ist die wahre Wahrscheinlichkeit)
3. $= P(H \in I_{95\%-Prog}(p) | p$ ist die wahre Wahrscheinlichkeit) $\geq 95\%$

Zeile (3) ist gleich (2) gemäß Definition des Konfidenzintervalls. Die Abschätzung in Zeile (3) ergibt sich aus den definierenden Eigenschaften des Prognoseintervalls. Um klar zu machen, dass der Zufall zum Intervall gehört, formuliert man: Das (zufällige) Konfidenzintervall $[k_u(H); k_o(H)]$ „überdeckt“ die unbekannte (aber als fest angenommene) Wahrscheinlichkeit p (mit der Sicherheitswahrscheinlichkeit von z. B. 95 %).

Versuch einer anschaulichen Erklärung - mit Fischen und einem Netz

Angenommen, Sie versuchen mit einem Handnetz einen Fisch zu fangen. Die Größe des Netzes repräsentiert die Breite Ihres 95%-Vertrauensintervalls.

Was besagt Ihre Vertrauenswahrscheinlichkeit von 95%?

Es besagt, dass Sie in 95% aller Fälle einen Fisch fangen, wenn Sie mit Ihrem Handnetz sehr oft Wasser schöpfen. Einen Fisch fangen steht hier dafür, dass Ihr Vertrauensintervall den Parameter enthält.

Bedeutet es auch, dass Sie bei jedem Versuch eine 95%-ige Chance haben, einen Fisch zu fangen?

Nein! Es ist wirklich verwirrend. Sie nehmen Ihr Netz in die Hand und schließen die Augen. Bevor Sie das Netz durchs Wasser ziehen, stehen Ihre Chancen, einen Fisch zu fangen, bei 95%. Wenn Sie jedoch das Netz mit geschlossenen Augen durchs Wasser ziehen, gibt es anschließend nur zwei Ergebnisse: Sie haben den Fisch entweder gefangen oder nicht. Das hat nichts mit Wahrscheinlichkeit zu tun.