1 Konfidenzintervalle[1]

1.1 Zentrales Einstiegsbeispiel

Konfidenzintervalle sind einfach zu berechnen. Der Rechner hat dafür sogar eine Taste (TR: 1-PropZInt). Das Verstehen ist schon eine andere Sache. Viele Aufgaben sind so aufgebaut, wie die folgende Problemstellung:

> Die Wahl zum Bürgermeister einer Großstadt gewinnt derjenige Kandidat, der mehr als 50 % der Stimmen erhält. Vor der Bürgermeisterwahl wurden Umfragen zum Wahlausgang durchgeführt. In einer Umfrage gaben 424 von 800 Personen an, den amtierenden Bürgermeister wählen zu wollen.
>
> Entscheiden Sie mithilfe eines Konfidenzintervalls zur Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 %, ob der amtierende Bürgermeister mit einem Wahlsieg rechnen konnte.

Lösung - so könnte eine Dokumentation aussehen:
Ein Konfidenzintervall (WALD-Intervall) zur Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % kann mithilfe der Beziehung

$$\left[h - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}\ ;\ h + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}\right] \tag{1}$$

ermittelt werden.
Mit der relativen Häufigkeit $h = \frac{424}{800} = 0{,}53$ und der Stichprobengröße $n = 800$ ergibt sich hiermit: $[0{,}4954...; 0{,}56459]$.
Da die linke Grenze des Konfidenzintervalls nicht größer als 0,50 ist, konnte der amtierende Bürgermeister auf Grundlage der Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % nicht sicher sein, die Wahl zu gewinnen.

Übrigens: Bei $k = 428$ Personen ergibt sich das WALD-Konfidenzintervall $[0{,}5004...; 0{,}5695...]$. Die linke Grenze ist größer als 0,50. Somit hätte der amtierende Bürgermeister bei diesem Stichprobenergebnis auf Grundlage der Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % mit einem Wahlsieg rechnen können.

Mit dem Befehl 1-PropZInt (STAT | Tests | 1-PropZInt) kann (1) einfach mithilfe des Rechners ermittelt werden.

Das war es schon. So sind fast sämtliche Aufgaben zu Konfidenzintervallen gestrickt: Es gibt eine Stichprobe mit einer Stichprobengröße n, ein Stichprobenergebnis k und eine Sicherheitswahrscheinlichkeit (meist 95 %).

1.2 Etwas Theorie

Bei Prognoseintervallen ist p bekannt. Es geht um die Blickrichtung *Von der Grundgesamtheit zur Stichprobe*. Beim Einstiegsbeispiel ist p der unbekannte Parameter der Grundgesamtheit. Es gibt nur ein Stichprobenergebnis h, mit dem auf den Parameter p der Grundgesamtheit (alle Wähler) geschlossen werden soll. Nun kommt die umgekehrte Blickrichtung: *Von der Stichprobe zur Grundgesamtheit.*
Prognoseintervalle führen zu Konfidenzintervallen. Es gilt die folgende Definition:

> Ein 95 %-Konfidenzintervall besteht aus allen p-Werten, die h im jeweiligen 95 %-Prognoseintervall haben.

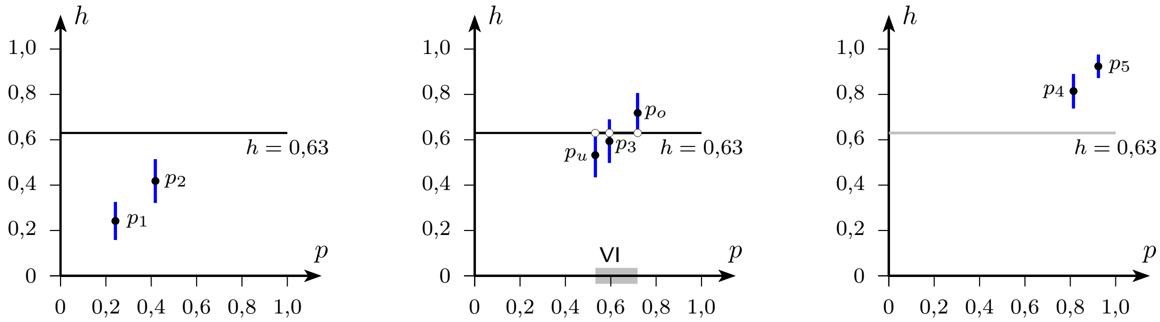
[1] In Niedersachsen wird das 95 %-Konfidenzintervall hauptsächlich benutzt, also $k = 1{,}96$. Ich habe mein Skipt für meine SuS nicht für Thüringen angepasst ($k = 2$, $\gamma = 95{,}4\,\%$).

Diese Definition liefert gleich die Berechnung eines Konfidenzintervalls. Die Grenzen können durch Lösen der beiden Gleichungen:

$$h = p_u + 1{,}96 \cdot \sqrt{p_u \cdot (1 - p_u)/n} \text{ und } h = p_o - 1{,}96 \cdot \sqrt{p_o \cdot (1 - p_o)/n}$$

ermittelt werden.

Die folgende Abbildung verdeutlicht die Definition und die Berechnung eines Konfidenzintervalls:



(a) h nicht im PI von p (b) h im PI von p (c) h nicht im PI von p

Abbildung 1: Entstehung eines Konfidenzintervalls

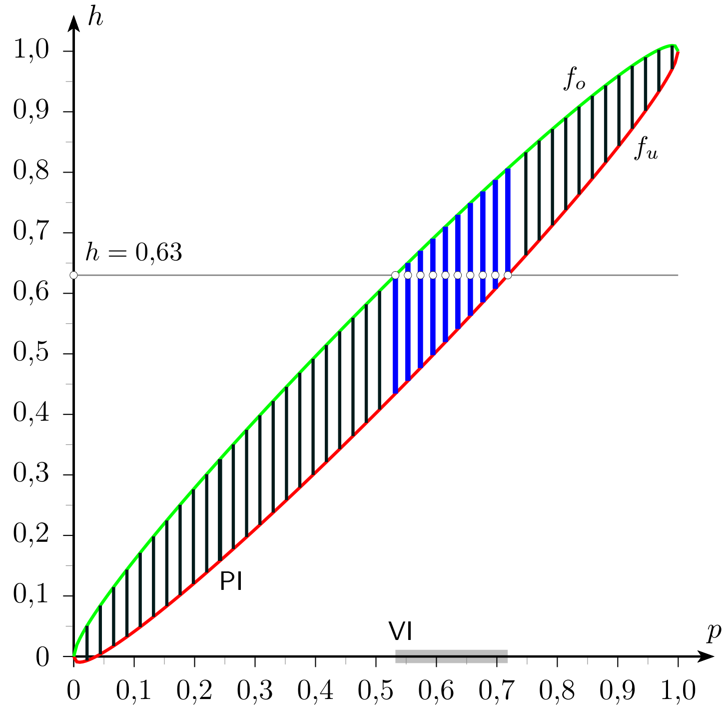


Abbildung 2: Prognose- und Konfidenzintervall

Es gilt $n = 100$. Für das Stichprobenergebnis h gilt: $h = 0{,}63$. Man erkennt für 45 p-Werte die zugehörigen 95%-Prognoseintervalle (vertikale Strecken).

Alle p -Werte für $0{,}532... \leq p \leq 0{,}787...$ haben 95 %-Prognoseintervalle, die h enthalten. Somit ist das 95 %-Konfidenzintervall in diesem Fall $[0{,}532...;\ 0{,}787...]$.
Da 95 %-Prognoseintervalle durch

$$\left[p - 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}};\ p + 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right]$$

berechnet werden, können die Intervallgrenzen durch Lösen der beiden folgenden Gleichungen ermittelt werden:

$$h = p_u + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p_u \cdot (1-p_u)}{n}}$$

$$h = p_o - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p_o \cdot (1-p_o)}{n}}$$

Die Berechnung kann der Rechner übernehmen:
$y_1 = h;\ y_2 = x + 1.96\cdot\sqrt{x \cdot (1-x)/n};\ y_3 = x - 1.96\cdot\sqrt{x \cdot (1-x)/n}$

Es sind zwei normale Schnittprobleme, die grafisch-numerisch gelöst werden können.
Das Ergebnis wird übrigens WILSON-Konfidenzintervall genannt. Da ein Prognoseintervall schon eine Näherung ist, ist es ein Konfidenzintervall auch, da Prognoseintervalle bei der Berechnung eine Rolle spielen. Durch eine weitere Näherung kann auf das Lösen der beiden Gleichungen verzichtet werden. Es ergibt sich dann das WALD-Konfidenzintervall (s. (1)):

$$\left[h - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}\ ;\ h + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}\right].$$

Hier müssen keine Gleichungen gelöst werden. Die Grenzen ergeben sich sofort durch Einsetzen der einzelnen Werte. Beide Näherungen können benutzt werden, wobei (1) die einfachere Formel ist und auch sofort mit dem GTR ermittelt werden kann. Übrigens benutzten viele Meinungsforschungsinstitute diese einfache Formel. Für $n \approx 1000$ gibt es z.B. keine nennenswerte Unterschiede der beiden Verfahren.

Beispiel:

Es wird eine Umfrage unter 850 Wahlberechtigten durchgeführt. 46 % der Personen geben an, Partei A wählen zu wollen. Es wird behauptet, dass die Partei A mindestens 50 % der Stimmen erreicht.
Untersuchen Sie mithilfe eines Konfidenzintervalls zur Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 %, ob diese Behauptung mit dem Ergebnis der Umfrage verträglich ist.

Lösung:

$h = 0{,}46$
Um die Grenzen des (WILSON)-Konfidenzintervalls zu bestimmen, müssen die beiden folgenden Gleichungen gelöst werden:

$$0{,}46 = p_u + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p_u \cdot (1-p_u)}{850}} \quad \text{und} \quad 0{,}46 = p_o - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p_o \cdot (1-p_o)}{850}}$$

Die beiden Gleichungen werden grafisch-numerisch durch Schnittpunktbestimmung gelöst. Die x-Koordinaten der beiden Schnittpunkte ergeben die Grenzen des Intervalls [TR: intersect]. Es ergibt sich das folgende Intervall: $[0{,}4267\ldots;\ 0{,}4936...]$.

Da die rechte Intervallgrenze kleiner als 0,5 ist, überdeckt dieses Konfidenzintervall nicht den Wert $p = 0{,}5$. Die Behauptung, dass die Partei A mindestens 50 % der Stimmen erreicht, ist somit mit dem Ergebnis dieser Umfrage nicht verträglich.
Zusatz:
Die Berechnung des (WALD)-Konfidenzintervalls

$$\left[h - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}\ ;\ h + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}\right]$$

kann mit dem GTR durchgeführt werden [TR: 1-PropZInt]. Mit $h = 0{,}46$; $n = 850$ und $\gamma = 0{,}95$ ergibt sich das Intervall $[0{,}4264...\,;\ 0{,}4935...]$.
Da die rechte Intervallgrenze kleiner als 0,5 ist, überdeckt dieses Konfidenzintervall nicht den Wert $p = 0{,}5$. Die Behauptung, dass die Partei A mindestens 50 % der Stimmen erreicht, ist somit mit dem Ergebnis dieser Umfrage nicht verträglich.

1.3 Was bedeutet eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 %?

Die Abbildung 3 kann dabei helfen zu verstehen, was eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % eigentlich bedeutet. Hier wurden 100-mal Stichprobenergebnisse h mit der eigentlich unbekannten Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}63$ simuliert. Zu jedem h wurde nun das zugehörige Konfidenzintervall (genauer: eine Realisation) berechnet und als Strecke dargestellt. Zusätzlich wurden noch die Grenzen des Prognoseintervalls von p als gestrichelte Linien eingezeichnet.
Bei dieser Simulation überdecken genau 6 Konfidenzintervalle das (unbekannte) p nicht, also überdecken 94 % den eigentlich unbekannten Wert des Parameters p.
Man kann sich die Sicherheitswahrscheinlichkeit also so vorstellen: Wenn sehr viele Konfidenzintervalle zu einem bestimmten Stichprobenumfang berechnet werden, erwarten wie in ca. 95 % aller Fälle, dass der unbekannte Parameter p von diesen Intervallen überdeckt wird. Mehr können wir nicht sagen. Leider auch nicht, ob unser einziges berechnetes Konfidenzintervall dazugehört. Wir haben ja nur EINE Stichprobe genommen. Bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % fühlen wir uns aber (relativ) sicher, dass unser errechnetes Konfidenzintervall den unbekannten Parameter p überdeckt.

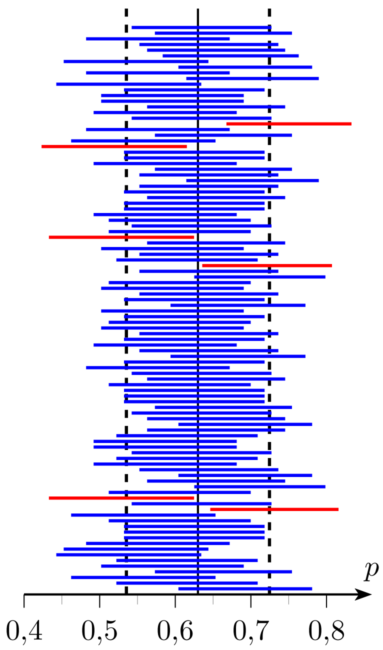


Abbildung 3: 100 Konfidenzintervalle

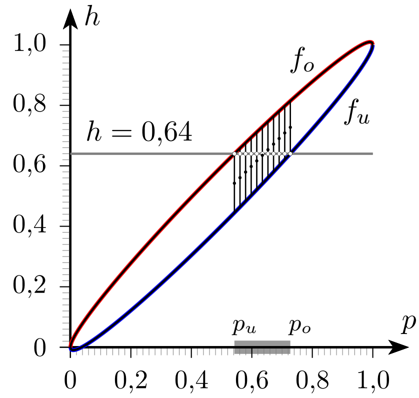
2 WILSON- und WALD-Konfidenzintervalle

Methode 1 (WILSON-Konfidenzintervalle):

Es müssen die beiden folgenden Gleichungen nach p aufgelöst werden:

$$h = p - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}\,; \quad h = p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}\,. \tag{2}$$

Abbildung 4 zeigt den grafisch-numerischen Weg. Die Lösung der ersten Gleichung liefert die rechte Grenze p_o, die zweite Gleichung die linke Grenze p_u des 95 %-Vertrauensintervalls.



$f_o(p) = p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$

$f_u(p) = p - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$

$h = f_o(p) \Rightarrow p_u$

$h = f_u(p) \Rightarrow p_o$

VI: $[0{,}5423\ldots\,;\ 0{,}727\ldots]$

Abbildung 4: $n = 100$

Die beiden Gleichungen (2) können aber auch algebraisch (Anwendung der pq-Formel) gelöst werden. Dies liefert die beiden Lösungen

$$p_u = \frac{2 \cdot h \cdot n + 1{,}96^2}{2 \cdot 1{,}96^2 + 2 \cdot n} - \frac{1{,}96}{2 \cdot 1{,}96^2 + 2 \cdot n} \cdot \sqrt{1{,}96^2 + 4 \cdot h \cdot n \cdot (1-h)} \tag{3}$$

$$p_o = \frac{2 \cdot h \cdot n + 1{,}96^2}{2 \cdot 1{,}96^2 + 2 \cdot n} + \frac{1{,}96}{2 \cdot 1{,}96^2 + 2 \cdot n} \cdot \sqrt{1{,}96^2 + 4 \cdot h \cdot n \cdot (1-h)} \tag{4}$$

Die beiden Lösungen (3) und (4) sehen nicht gerade sympathisch aus. Wenn man bedenkt, dass für große Werte für n die Zahlen $1{,}96^2$ und $2 \cdot 1{,}96^2$ gar nicht so groß ins Gewicht fallen, kann man sie auch weglassen. Der Fehler ist oft vernachlässigbar.
Versuchen Sie einmal, die folgenden Schritte nachzuvollziehen!

Methode 2 (WALD-Konfidenzintervalle):

$$\begin{aligned} p_u \approx \frac{2 \cdot h \cdot n}{2 \cdot n} - \frac{1{,}96}{2 \cdot n} \cdot \sqrt{4 \cdot h \cdot n \cdot (1-h)} &= h - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot h \cdot n \cdot (1-h)}{4 \cdot n^2}} \\ &= h - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_o \approx \frac{2 \cdot h \cdot n}{2 \cdot n} + \frac{1{,}96}{2 \cdot n} \cdot \sqrt{4 \cdot h \cdot n \cdot (1-h)} &= h + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot h \cdot n \cdot (1-h)}{4 \cdot n^2}} \\ &= h + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \end{aligned}$$

Zusammenfassung:

Das WALD-Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $\gamma = 0{,}95$

$$\left[h - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}};\ h + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}\right]$$

Vorsicht: Das sieht so aus, als ob hier ein Prognoseintervall berechnet wird, also nur p durch h ersetzt wird. Das stimmt nicht. Es ist eine Näherung von (3) und (4), dem WILSON-Vertrauensintervall. Da hier Prognoseintervalle benutzt werden, sind diese Intervalle aber auch Näherungen (geht die Approximation durch die Normalverteilung ein).
Dieses Vertrauensintervall ist im Rechner implementiert (siehe Stat | Tests | A: 1-PropZInt)
x: Anzahl der Treffer; n: Stichprobengröße; C_Level: Sicherheitswahrscheinlichkeit
Übrigens: $1 - PropZInt$ ist die Abkürzung von "**1 Prop**ortion **Z**Wert **Int**ervall

3 Aufgaben

1 Konfidenzintervalle ermitteln mithilfe der Ellipse

Abbildung 5 zeigt für $n = 80$ einige 95 %-Prognoseintervalle und die zugehörige Ellipse. Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung für die Stichprobenergebnisse $h_1 = 0{,}8$, $h_2 = 0{,}5$ und $h_3 = 0{,}2$ die zugehörigen 95 %-Konfidenzintervalle.

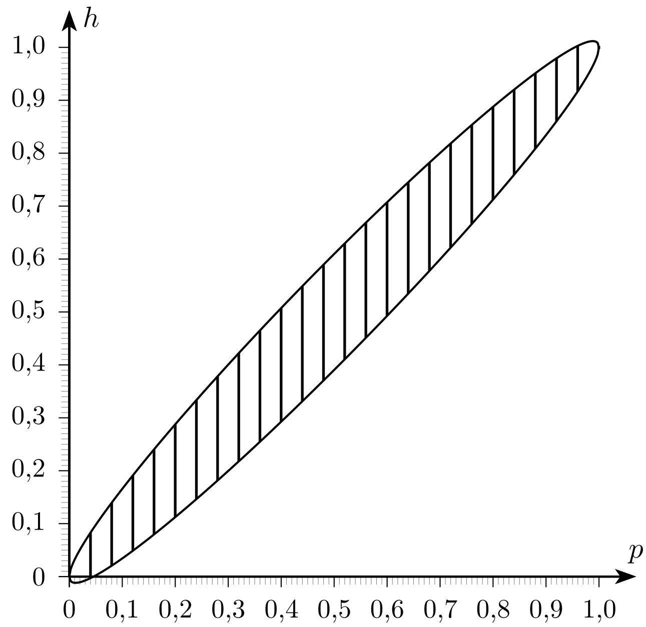


Abbildung 5: $n = 80$

2 Frühstück an Morgen?

Von 152 Schülern einer Schule gaben 66 an, morgens zu Hause nicht mehr zu frühstücken. Bestimmen Sie das 95 %-Vertrauensintervall für den unbekannten Anteil an Schülern der Schule, die morgens kein Frühstück zu sich nehmen.

3 Lohnt sich der CD-Verkauf?

Bei einem Rockkonzert werden 250 Besuchern zufällig ausgewählt und befragt, ob sie am Ausgang eine CD der Gruppe kaufen werden. 27 der Befragten antworteten mit ja. Insgesamt waren 9543 Besucher bei dem Rockkonzert.
Schätzen Sie bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 %, mit welchem Minimal – und Maximalumsatz an CDs zu rechnen ist.

4 Oberbürgermeister Müller

Oberbürgermeisterkandidat Müller möchte mit einer Zuverlässigkeit von 95 % wissen, ob er die Wahl am nächsten Sonntag gewinnt. Von $n = 2000$ zufällig ausgesuchten Wahlberechtigten haben sich 1039 für ihn ausgesprochen.
Kann Herr Müller davon ausgehen, dass er mehr als 50 % der Stimmen erhält und damit die Wahl gewinnt?

5 Sonntagsfrage

Beim Politbarometer des ZDF wird auch die Sonntagsfrage gestellt: “ *Wenn am nächsten Sonntag Wahl wäre, welche Partei würden Sie wählen*?“

a) 367 von 1500 Befragten gaben an, Partei A wählen zu wollen. Partei A hatte bei den letzten Wahlen einen Stimmenanteil von 30 %. Hat Partei A an Wählergunst eingebüßt?

b) 95 Befragte entscheiden sich für die Partei B. Kann für Partei B die 5 %-Klausel kritisch werden?

c) Das Regierungsbündnis würden 790 Befragte wählen. Wie stehen die Chancen?

6 Würfel gezinkt?

Die Würfel von Peter und Pauline werden einem Dauertest mit 10 000 Würfen unterworfen. Peters Würfel ergibt 1400-mal das Ergebnis „6“, Paulines Würfel 1800-mal das Ergebnis „6“.
a) Bestimmen Sie 95 %-Konfidenzintervalle für die Wahrscheinlichkeit der „Sechs“.
b) Kann es sich um gefälschte Würfel handeln?

7 Wahr oder falsch?

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) Eine Intervallschätzung wird mit wachsendem Stichprobenumfang n bei gleichem Stichprobenanteil h immer genauer.

b) Wenn das Sicherheitsniveau zunimmt, dann nimmt die Größe des Vertrauensintervalls ab.

c) Für die Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 % gilt: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % liegt die unbekannte Wahrscheinlichkeit p in dem Konfidenzintervall.

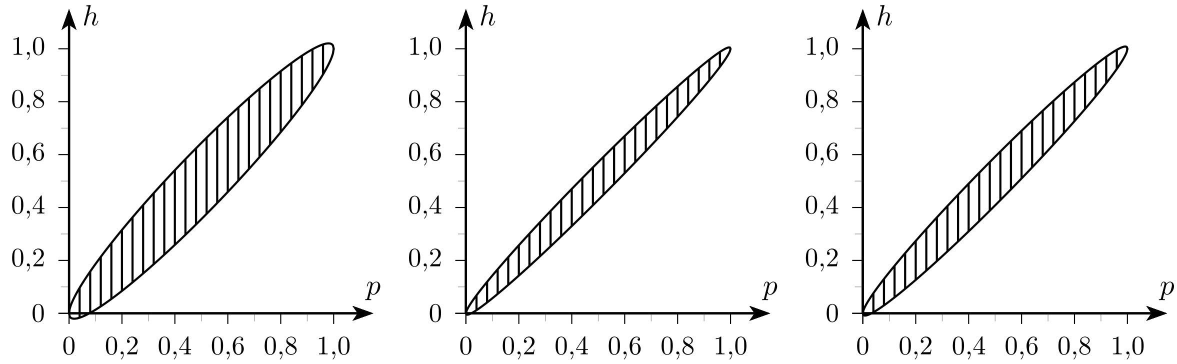
d) Wenn man den Stichprobenumfang verdoppelt, wird das Vertrauensintervall halb so groß.

8 Interpretation der Ergebnisse bei vorgegebener Gesamtanzahl

Für eine neue Attraktion im Zoo benötigt die Stadt von den Bürgern zusätzlich noch eine Spende von 250 000 €. Um die Spendenbereitschaft zu testen, wird eine Umfrage unter 800 Haushalten durchgeführt. Es wurde danach gefragt, ob ein Haushalt 20 € spenden würde. Die Auszählung ergab, dass 102 Haushalte von 800 Haushalten den Betrag von 20 € spenden würden. Die Stadt hat insgesamt 98 750 Haushalte.
Untersuchen Sie, ob man mit einer Sicherheit von 95 % davon ausgehen kann, den Betrag von 250 000 € zu erhalten?

9 Zuordnung finden, γ verschieden

Die drei Grafiken in Abbildung 6 zeigen für $n = 80$ jeweils einige 95 %-Prognoseintervalle zur Bestimmung eines Konfidenzintervalls. Hierbei sind die Sicherheitswahrscheinlichkeiten γ verschieden: $\gamma_1 = 0{,}8$; $\gamma_2 = 0{,}9$ und $\gamma_3 = 0{,}99$.
Ordnen Sie begründet den drei verschiedenen Werten für γ jeweils die zugehörige Abbildung zu.



(a) $n = 80$; $\gamma = ?$ (b) $n = 80$; $\gamma = ?$ (c) $n = 80$; $\gamma = ?$

Abbildung 6: Zuordnung finden

10 Grenze gesucht

Bei einem Stichprobenumfang von $n = 100$ ergibt sich das folgende 95 %-Vertrauensintervall: $[0{,}420;\ a]$.

a) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung 7 einen Näherungswert für a.

b) Berechnen Sie den Wert für a.

c) Angenommen, 0,420 ist die rechte Grenze eines 95 %-Konfidenzintervalls. Welche Auswirkungen hat das auf die Ermittlung der linken Grenze?

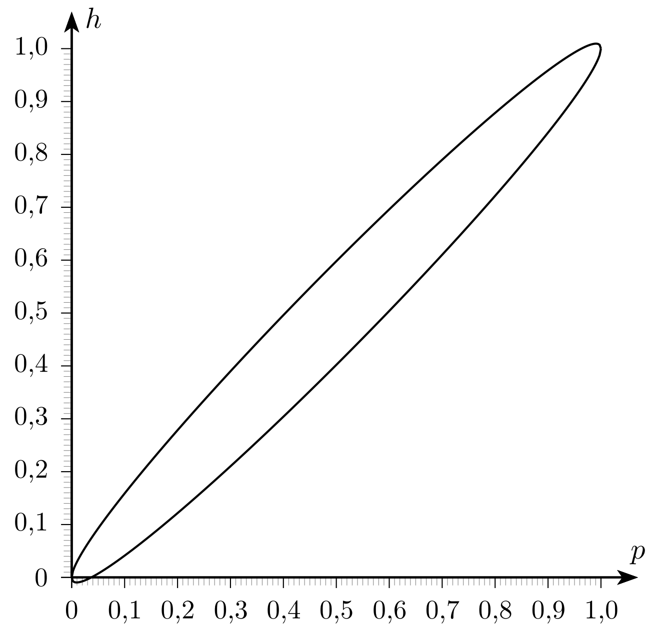


Abbildung 7: $n = 100$