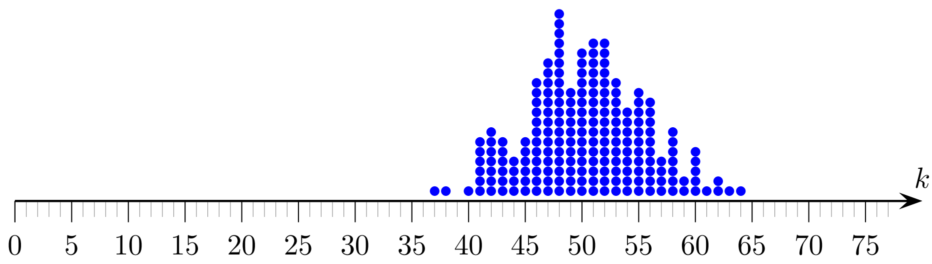
Das Konzept des Zweifelns und Prognoseintervalle

Ist die Münze gezinkt?

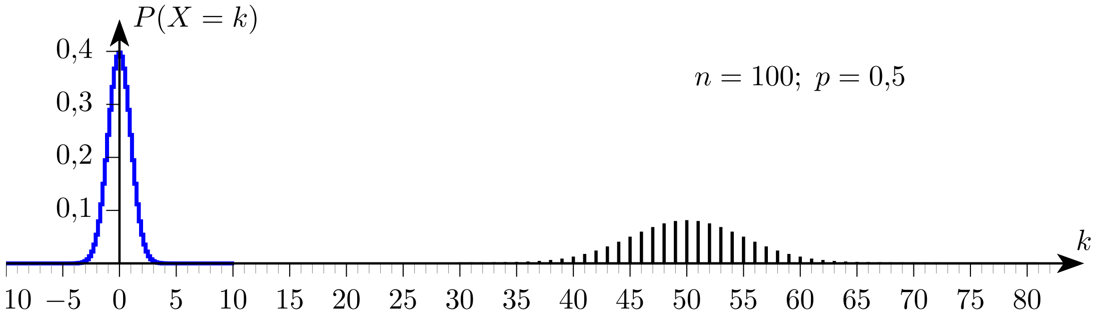
Eine Münze wird 100-mal geworfen. Dabei fällt 38-mal Kopf. Besteht ein Grund, an der Annahme $p_{\text{Kopf}} = 0{,}5$ zu zweifeln?

Eine Simulation kann helfen

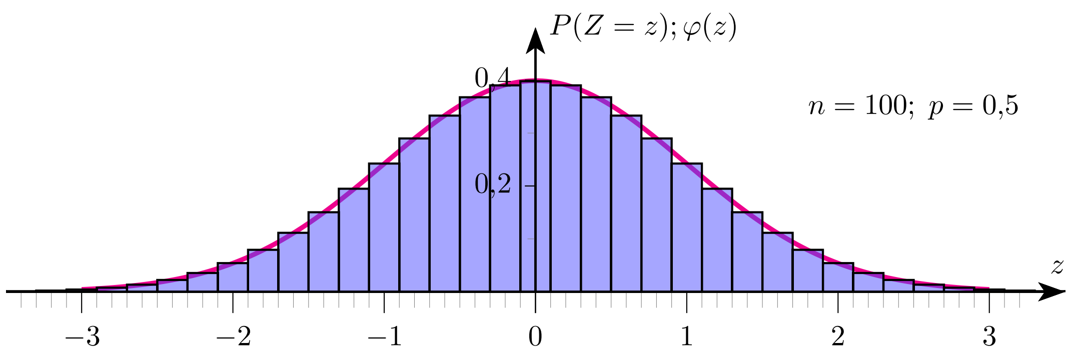
Die folgende Abbildung zeigt das Ergebnis einer Simulation eines 100-fachen Münzwurfs mit $p_{\text{Kopf}} = 0{,}5$. Jeder Punkt symbolisiert das Ergebnis eines 100-fachen Münzwurfs. Insgesamt wurde das Experiment 200-mal wiederholt. Es werden also 200 Punkte dargestellt. Man erkennt z.B.: 6-mal wurde bei 100 Würfen 45-mal Kopf geworfen.



Die zugehörige Binomialverteilung und die standardisierte Binomialverteilung[1]



Die standardisierte Binomialverteilung und die Standardnormalverteilung



[1] Wieso Histogramme bei Binomialverteilungen wirklich nur bei der Standardisierung etwas zu suchen haben, siehe: Henze, N., Vehling, R.: Der verwirrende Siegeszug des Histogramms in deutsche Klassenzimmer: Sind Stabdiagramme tot? In: Der Mathematikunterricht (MU) 65 (2019), Heft 1, 33-41

Lösung:
Vereinbarung: Wir zweifeln an der Annahme $p_{\text{Kopf}} = 0{,}5$, falls die Trefferanzahl von 38 (absolute Häufigkeit) nicht mehr in der 2σ-Umgebung des Erwartungswertes $\mu = 50$ liegt. Unter der Voraussetzung, dass $p_{\text{Kopf}} = 0{,}5$ gilt, passiert ein Ereignis, das mehr als 2σ vom Erwartungswert entfernt ist, in ca. 5 % aller Fälle. Man macht also (nur) einen Fehler von 5 %, wenn man sich irrt, also fälschlicherweise annimmt, die Münze sei gezinkt, obwohl sie es nicht ist. Mehr ist nicht drin. Wir können nur mit Sicherheitswahrscheinlichkeiten argumentieren.
Wenn die Stichprobe vom Umfang 100 eine Trefferanzahl in der 2σ-Umgebung ergeben hätte, kann man nur sagen, dass aufgrund dieses Stichprobenergebnisses auf der Basis der Sicherheitswahrscheinlichkeit von ca. 95 % kein Grund daran besteht, an $p_{\text{Kopf}} = 0{,}5$ zu zweifeln.
Ob für die Münze tatsächlich $p_{\text{Kopf}} = 0{,}5$ gilt, können wir niemals beweisen. Wahrscheinlichkeiten sind vom Menschen gesetzte Modelle, die in der Realität nie ganz richtig sind, nur „besser oder schlechter". Wir können aber mit Testgrößen (hier 2σ-Umgebungen) in der Modellwelt arbeiten, mit denen wir die Modellgüte beurteilen. Zufallsschwankungen müssen wir hinnehmen. Sie sind nichts Negatives!

Ergebnis:
Da 38 außerhalb der 2σ-Umgebung von 50 liegt ($[40; 60]$), kann an $p_{\text{Kopf}} = 0{,}5$ gezweifelt werden - und zwar mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von ca. 95 %.

Was bringen Prognoseintervalle?

1. Prognoseintervalle schärfen den Blick auf das „Denken in Verteilungen" und geben schnell einen Überblick, in welchem Bereich überhaupt mit Trefferwahrscheinlichkeiten zu rechnen ist. Ein Beispiel mit $X \sim B(10000; 0{,}2)$ soll dies verdeutlichen:

   Es gilt: $E(X) = 10000 \cdot 0{,}2 = 2000$; $\sigma(X) = \sqrt{10000 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 40$

   Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung konzentriert ca. 95 % der gesamten Wahrscheinlichkeitsmasse über dem Intervall $[1920; 2080]$ (2σ-Umgebung). Außerhalb der 3σ-Umgebung wird es einsam. So bringt es z.B. nicht viel, nach $P(X \leq 1850)$ zu fragen. Es gilt nämlich $P(X \leq 1850) \approx 0{,}00008$.

2. Prognoseintervalle können gut eingesetzt werden, um signifikante Abweichungen aufzuspüren (Konzept des Bezweifelns, siehe Handreichung, S. 2):

   > Wenn man in einem Experiment oder in einer Datenerhebung eine relative Häufigkeit h beobachtet, die nicht im Prognoseintervall einer (angenommenen) Wahrscheinlichkeit p liegt, nennt man die Abweichung der relativen Häufigkeit h von der Wahrscheinlichkeit p signifikant.
   > Man sagt: „Die relative Häufigkeit gibt Anlass, an der Wahrscheinlichkeit [Modellierung] zu zweifeln" oder „die Wahrscheinlichkeitsannahme scheidet vermutlich aus". Andernfalls bezeichnen Statistiker die Wahrscheinlichkeitsannahme als „verträglich" mit der Beobachtung.

3. Mit Prognoseintervallen lassen sich Konfidenzintervalle sehr anschaulich einführen.

4. Prognoseintervalle sind geeignet, das ***schwache Gesetze der großen Zahlen*** mit Leben zu füllen. Dieses wichtige Gesetz stellt u. a. einen Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten her. Es kann folgendermaßen formuliert werden:
   Sind p die Trefferwahrscheinlichkeiten in einer Bernoulli-Kette und H_n die zufällige relative Trefferhäufigkeit aufgrund von n Versuchen, dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$:

   $$\lim_{n\to\infty} P\left(|H_n - p| < \varepsilon\right) = 1$$

   Dieses Gesetz darf übrigens nicht mit dem **starken Gesetz der großen Zahlen** verwechselt werden. Hierfür gilt: $P\left(\lim_{n\to\infty} H_n = p\right) = 1$

Etwas Theorie

Woher kommt der Faktor 2 in der Formel für die Sigma-Umgebung?

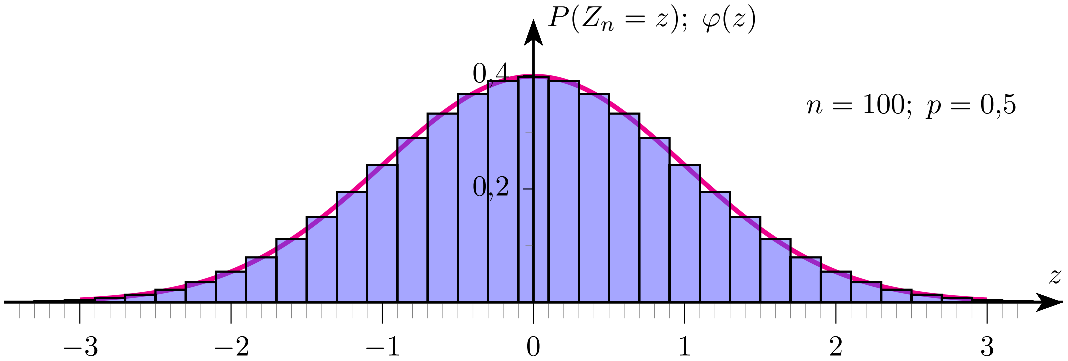
Hintergrund ist der **zentrale Grenzwertsatz**, der natürlich in der Schule nicht bewiesen werden kann. Aber eine Veranschaulichung der Aussage dieses überaus wichtigen Satzes ist durchaus möglich.
Wir betrachten eine Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p. Mit wachsendem n wandert der Erwartungswert wegen $\mu = n \cdot p$ „nach Unendlich ab“. Da die zugehörige Zufallsgröße X_n die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ besitzt, findet zugleich eine immer stärkere „Verschmierung der Wahrscheinlichkeitsmassen“ statt.
Beide Effekte werden durch die Standardisierung

$$Z_n := \frac{X_n - \mu}{\sigma} = \frac{X_n - n \cdot p}{\sqrt{npq}}$$

von X kompensiert, denn es gelten $E(Z_n) = 0$ und $\sigma(Z_n) = 1$.
Die folgende Abbildung zeigt, dass im Fall $n = 100$ der Graph der **Gaußschen Glockenfunktion** φ mit

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 \cdot x^2}, x \in \mathbb{R},$$

das Histogramm der Binomialverteilung gut annähert.
Eine sehr gute Erklärung hierzu liefert das Lernvideo Nr. 44 von Prof. Dr. Norbert Henze[2].



Diese Funktion heißt auch **Dichte** der **standardisierten Normalverteilung**. Der zentrale Grenzwertsatz liefert z.B. für die Grenzen -2 und 2:

$$\lim_{n\to\infty} P(-2 \le Z_n \le 2) = \int_{-2}^{2} \varphi(x)\mathrm{d}x = 0{,}95449...$$

Aus $z_1 = -2$ folgt $-2 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$ und somit $x_1 = \mu - 2\sigma$. Entsprechend liefert $z_2 = 2$ das Ergebnis $x_2 = \mu + 2\sigma$
Somit gilt näherungsweise bei großem n

$$P(\mu - 2\sigma \le X_n \le \mu + 2\sigma) \approx 95{,}4\,\%.$$

Das Beispiel ($n = 100$; $p = 0{,}5$) liefert $x_1 = 50 - 2 \cdot 5 = 40$ und $x_2 = 50 + 2 \cdot 5 = 60$. Die Klassenbreite beim standardisierten Histogramm ist $\frac{1}{5} = 0{,}2$. Die einzelnen Höhen der Rechtecke sind so gewählt, dass der entsprechende Flächeninhalt gleich der Wahrscheinlichkeit ist. Dies wird dadurch erreicht, dass die Rechtecke mit dem Faktor σ in Richtung der Hochachse gestreckt werden, da die Rechteckbreiten (vorher jeweils Breite 1) mit den Faktor σ gestaucht wurden. Die Standardisierung kann geometrisch als eine Verschiebung des Histogramms mit anschließender Stauchung der Rechteckbreiten und Streckung der entsprechenden Höhen angesehen werden.

[2] http://www.math.kit.edu/stoch/~henze/seite/videos/de

Dies kann gut an der Abbildung nachvollzogen werden. So erkennt man die Klassenbreite 0,2 (Stauchung) sowie die Streckung mit dem Faktor 5 in Richtung der Hochachse.
Das Rechteck über der Klassenmitte 0 hat näherungsweise den Flächeninhalt $0{,}2 \cdot 0{,}4$. Somit gilt: $P(X_{100} = 50) \approx 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$ (exakt: 0,079589...).
Zählt man von diesem Rechteck jeweils 10 Rechtecke (2σ) nach links und 10 nach rechts, so landet man bei -2 bzw. bei 2. Auch so erhält man ohne viel Rechnerei $P(40 \le X_{100} \le 60) \approx 0{,}954$.

Dieser kurze Exkurs soll aufzeigen: Erst der Bezug zum zentralen Grenzwertsatz kann ein Verständnis der Sigma-Regeln liefern. Aus den Sigma-Regeln ergeben sich sofort durch Division mit n die Prognoseintervalle.

Zentraler Grenzwertsatz von Moivre-Laplace

Gegeben ist die Funktion φ mit $\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-1/2 \cdot x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Die Zufallsvariable X_n besitze eine Binomialverteilung mit den Parametern n und p, wobei $0 < p < 1$ vorausgesetzt ist. Dann gilt für jede Wahl reeller Zahlen a, b mit $a < b$:

a) $$\lim_{n\to\infty} P\left(a \le \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

b) $$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) = \int_{-\infty}^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

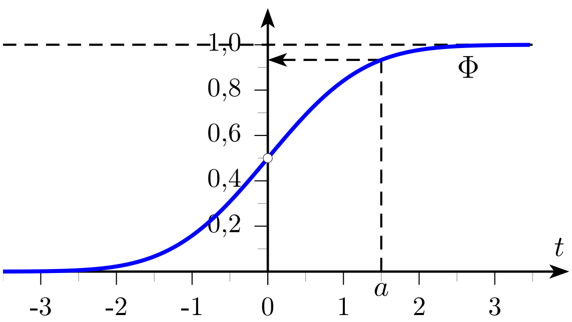
Die numerische Auswertung des Integrals $\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$ kann mithilfe der durch

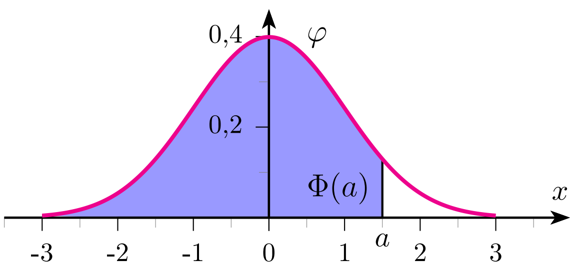
$$\Phi(t) := \int_{-\infty}^t \varphi(x)\,\mathrm{d}x\ ,\ t \in \mathbb{R},$$

definierten Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung erfolgen, denn es gilt

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(b) - \Phi(a),\ a < b.$$

Die beiden folgenden Abbildungen zeigen den Graphen von Φ und die Fläche unter der Gaußschen Glockenkurve.





Beispiel: gesucht wird der Wert für a mit $\Phi(a) - \Phi(-a) = 0{,}95$

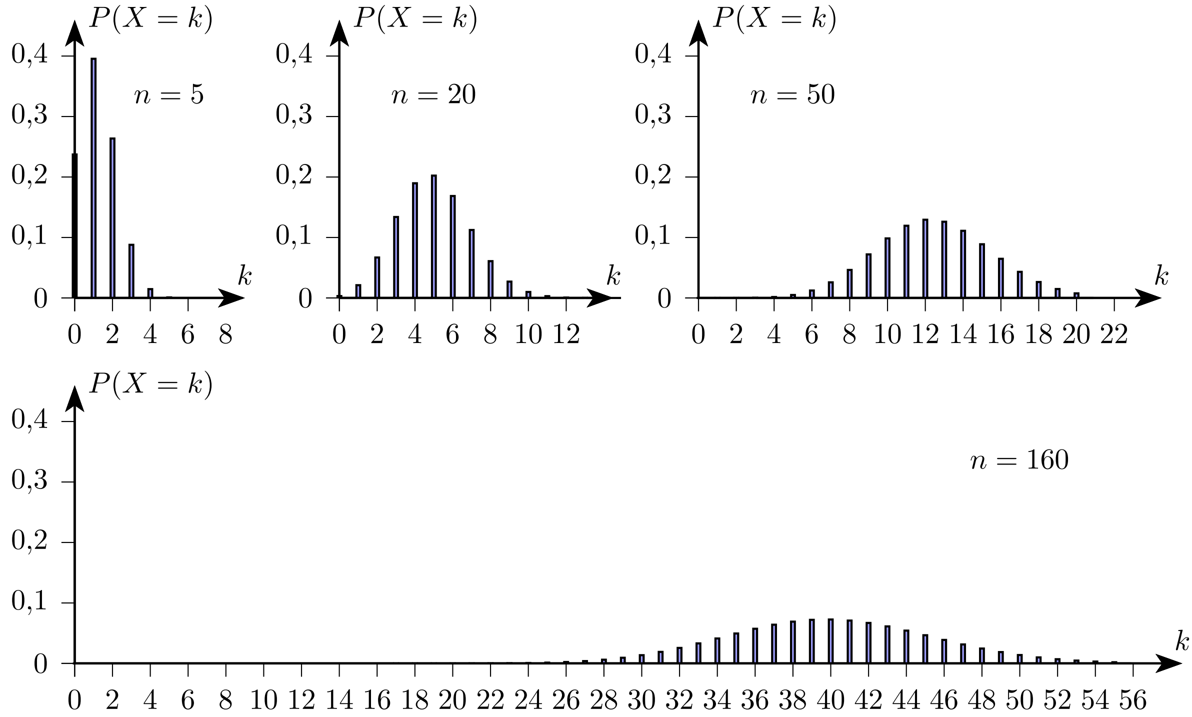
$\int_{-a}^a \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(a) - \Phi(-a) = \Phi(a) - (1 - \Phi(a)) = 2\Phi(a) - 1$

$2\Phi(a) - 1 = 0{,}95$; $\Phi(a) = \frac{1+0{,}95}{2}$; $a = \Phi^{-1}(\frac{1+0{,}95}{2}) = 1{,}959963\ldots \approx 1{,}96$

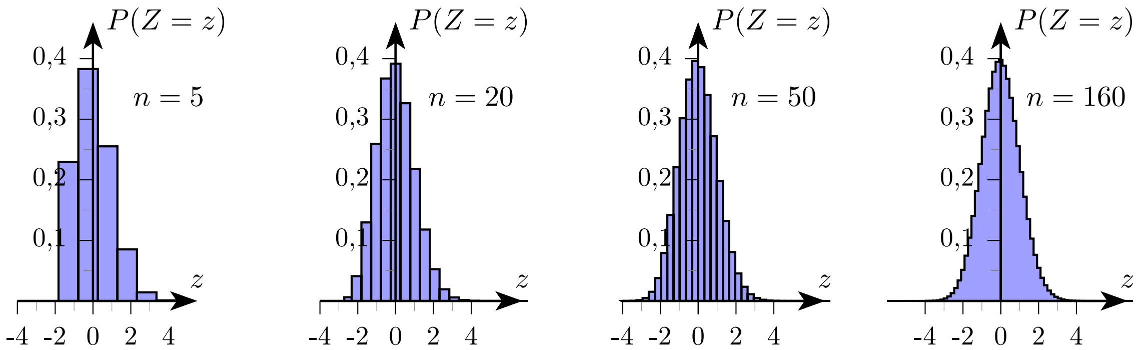
Werte von Φ^{-1} können z. B. mit dem TI-Nspire mit dem Befehl invNorm(Wert) ermittelt werden.

Beachten Sie: $\Phi^{-1}(\frac{1+0{,}954}{2}) = 1{,}99539\ldots$; $\Phi^{-1}(\frac{1+0{,}95449}{2}) = 1{,}999909\ldots$ (2σ-Umgebung)

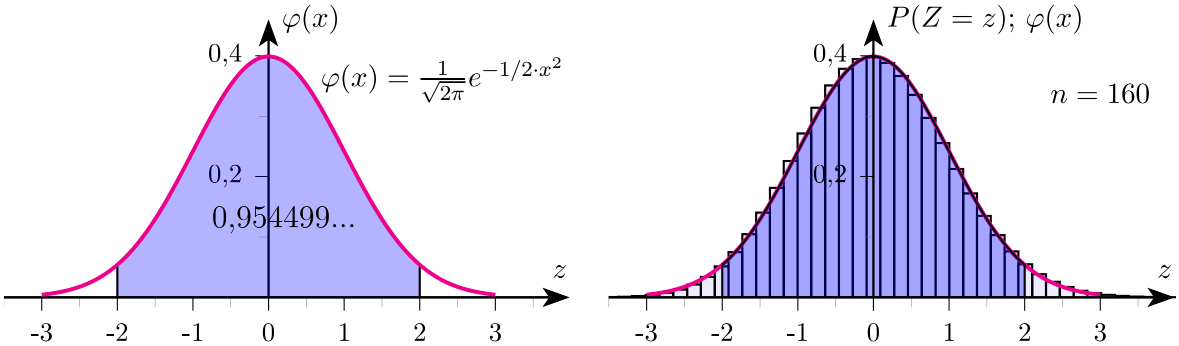
Stabdiagramme von Binomialverteilungen für $p = 0{,}25$



Histogramme standardisierter Binomialverteilungen für $p = 0{,}25$

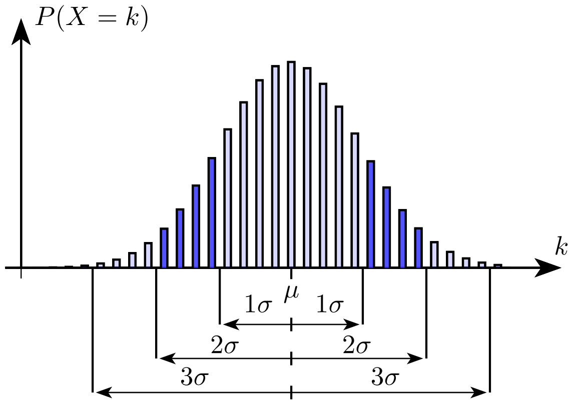


Zusammenhang zwischen der Dichte der standardisierten Normalverteilung und dem Histogramm der standardisierten Binomialverteilung für $p = 0{,}25$ und $n = 160$



Sigma-Umgebungen bei Binomialverteilungen

Umgebungen vom Erwartungswert μ, die als Vielfache der Standardabweichung σ angegeben werden, führen zu Sigma-Regeln. Eine direkte Folgerung des zentralen Grenzwertsatzes: Die Wahrscheinlichkeiten sind fast unabhängig von n und p. Diese Regel liefert gute Näherungswerte, falls $\sigma > 3$ gilt. Es ist aber nur eine Faustregel, die nicht mit einer mathematischen Gesetzmäßigkeit verwechselt werden darf. Neueste Forschungsergebnisse hierzu finden sich im Lernvideo Nr. 35 von Prof. Dr. Norbert Henze (http://www.math.kit.edu/stoch/~henze/seite/videos/de).



k	$P(\mu - k\cdot\sigma \le X \le \mu + k\cdot\sigma)$
1,000...	68,3%
1,644...	90%
1,959...	95%
2,575...	99%
2,004...	95,5%
2,967...	99,7%

$\left[\mu - k\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)};\ \mu + k\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}\right]$

Sigma-Umgebungen gibt es für absolute und relative Häufigkeiten. Wir nennen solche um μ bzw. p symmetrischen Intervalle auch **Prognoseintervalle**.
Für eine normalverteilte Zufallsgröße X gilt auf 2 Nachkommastellen gerundet[3]:

$$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) = 95{,}00\,\%$$

$$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) = 95{,}45\,\%$$

Diese (exakten) Bereichswahrscheinlichkeiten können für hinreichend großes n und nicht zu kleine Trefferwahrscheinlichkeiten p als Näherung für Bereichswahrscheinlichkeiten für eine Zufallsgröße X dienen, die binomialverteilt ist. In Thüringen (sehr gut so!) wird nur der Faktor 2 benutzt. Das ist völlig ausreichend. Der Faktor 1,96 führt gelegentlich dazu, die Zufallsschwankungen aus dem Auge zu verlieren.
Es gilt für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit $\mu = n\cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n\cdot p(1-p)}$:

$$P(\mu - 2\sqrt{n\cdot p(1-p)} \le X \le \mu + 2\sqrt{n\cdot p(1-p)} \approx 95{,}4\,\%$$

$$P(p - 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \le \frac{X}{n} \le p + 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}) \approx 95{,}4\,\%$$

95,4 %-Prognoseintervall für absolute Häufigkeiten (2σ-Umgebung von $\mu = n\cdot p$):

$$\left[\mu - 2\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)};\ \mu + 2\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}\right] \tag{1}$$

95,4 %-Prognoseintervall für relative Häufigkeiten:

$$\left[p - 2\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}};\ p + 2\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right] \tag{2}$$

Zu (1) gehört die binomialverteilte Zufallsgröße X, die die *absolute Trefferhäufigkeit* zählt. In ca. 95 % aller Fälle liegen die Realisierungen von X, die häufig mit k bezeichnet werden, in dem Intervall (1).

[3] In der Schule ist es üblich, statt X_n einfach X zu schreiben. Diese Schreibweise wird im Folgenden auch verwendet.

Zu (2) gehört die (nicht binomialverteilte) Zufallsgröße $R := X/n$, die die zufällige *relative Trefferhäufigkeit* beschreibt. In ca. 95 % aller Fälle liegen die Realisierungen von R, die häufig mit h oder $\hat{p}$ bezeichnet werden, in dem Intervall (2).
Die Unterscheidung zwischen einer Zufallsgröße und ihren Realisierungen ist wichtig. So darf in $P(p - 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \frac{X}{n} \leq p + 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}) \approx 95{,}4\,\%$ nicht X/n einfach durch h ersetzt werden. Entweder gilt diese Doppelungleichung für eine bestimmte Realisierung h, oder sie gilt nicht. Wahrscheinlichkeitsaussagen sind nur für Zufallsgrößen sinnvoll.

Es ist wichtig, sich zu vergewissern, wieso aus (1) durch Division mit n die Beziehung (2) folgt. Wieso steht z.B. in (2) nun $p(1-p)/n$ unter der Wurzel?

Die Berechnung der beiden Intervallgrenzen ist einfach. Leider wird gelegentlich für das Runden mehr Zeit investiert, als für die Interpretation der Intervalle. Das ist schade, da es sich ja (nur) um Näherungsintervalle handelt.
Strenggenommen sind Prognoseintervalle keine Intervalle, sondern nur (hoch wahrscheinliche) Mengen. So können z. B. bei einer Stichprobengröße von 100 nur die relativen Häufigkeiten $\{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\}$ als Realisationen der Zufallsgröße X/n auftreten. Es können also gar nicht alle Werte eines berechneten Intervalls realisiert werden. Aber das wird in der Schule nicht problematisiert. Es kann aber nicht schlecht sein, es zu wissen. Diese Erkenntnis relativiert auch den Fokus auf das Runden der Intervallgrenzen.

Prognoseintervalle

Stellen Sie sich vor, Sie haben einen Würfel, von dem wir einmal annehmen, er sei ideal. Die Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu würfeln, beträgt somit $\frac{1}{6}$.
Nun wollen Sie aus welchen Gründen auch immer diesen Würfel 200-mal werfen. Vorher fragen Sie sich, mit welchen absoluten Häufigkeiten und welchen relativen Häufigkeiten wohl zu rechnen ist. Sie führen also eine Prognose durch.
Solche Fragestellungen können mit Prognoseintervallen beantwortet werden. Leider niemals exakt. Wir müssen dabei mit einer Unsicherheit leben. Statistiker haben sich weltweit auf bestimmte Werte geeinigt. Spitzenreiter sind 5%-Unsicherheiten. Damit können Statistiker sehr gut leben, wenn es nicht gerade um Leben oder Tod oder um seltene Elementarteilchen geht.

Prognoseintervalle für absolute Häufigkeiten

Zurück zum Beispiel: Mit $n = 200$ und $p = \frac{1}{6}$ kann eine Ermittlung des 2σ-Prognoseintervalls um μ folgendermaßen aussehen:
$\mu = 200 \cdot \frac{1}{6} = 33{,}333...$; $\sigma = \sqrt{200 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 5{,}270...$
Hinweis: Es sollte vorher schon eine Überschlagsrechnung durchgeführt werden: $33 \pm 2 \cdot 5$.

$$\left[\mu - 2\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)};\ \mu + 2\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}\right] = [22{,}792...; 43{,}874...] \tag{3}$$

Bei einem absoluten Prognoseintervall ergibt sich offensichtlich das folgende Problem:
Der Erwartungswert und die beiden Intervallgrenzen müssen nicht unbedingt ganzzahlig sein. Sie sind es fast nie! Da die Zufallsvariable X aber nur ganzzahlige Werte annehmen kann, folgt aus $P(22{,}792... \leq X \leq 43{,}874...)$ die Bereichswahrscheinlichkeit $P(23 \leq X \leq 43)$ und das 2σ-Prognoseintervall $[23; 43]$.
Soll die Wahrscheinlichkeit (warum auch immer) von mindestens 95,4 % gelten, kann so vorgegangen werden:
Es gilt $P(23 \leq X \leq 43) = 0{,}9536... < 0{,}954$. Eine Vergrößerung des Intervalls auf beiden Seiten liefert $P(22 \leq X \leq 44) = 0{,}9707... > 0{,}954$. Ergebnis: $[22; 44]$.

Wichtiger ist eine Interpretation des Ergebnisses, etwa so:
Wenn ich das Zufallsexperiment oft durchführen würde, würde ich in ca. 95 % aller Fälle (meine Prognose) erwarten, mindestens 23 und höchstens 43 mal die Augenzahl 6 zu erhalten.
Oder: Wenn ich das Zufallsexperiment 100-mal durchführe, erwarte ich in ca. 5 Fällen, dass ich weniger als 23-mal oder mehr als 43-mal eine 6 erhalte.

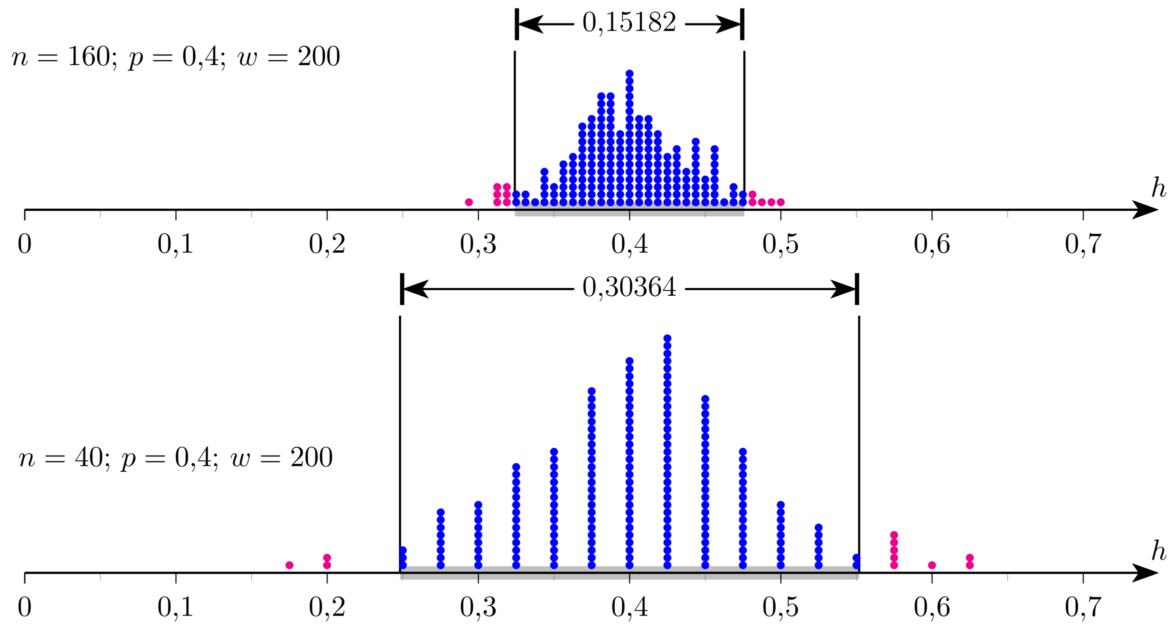
Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten

Hier ergeben sich auf den ersten Blick eigentlich keine Probleme durch der Ganzzahligkeit von X. Die Berechnungen liefern Intervalle, die zu p symmetrisch sind. Wer es aber ganz genau nehmen will, muss beachten, dass die Zufallsgröße $R := X/n$ nur die Realisierungen $\{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\}$ hat.
Es kann einfach (1) durch n dividiert werden, dann ergibt sich als Ergebnis: [0,113...,0,219...].
Oder so (mit einer möglichen Dokumentation):
Für das 95,4%-Prognoseintervall um p gilt: $\left[p - 2\cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}};\ p + 2\cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$.
Mit $p = \frac{1}{6}$ und $n = 200$ ergibt sich: [0,113...; 0,219...].

Mögliche Interpretationen:

- Wenn ich das Zufallsexperiment oft durchführe, erwarte ich in ca. 95 % aller Fälle (meine Prognose), mindestens 0,113... und höchstens 0,219... als relative Häufigkeit für die Augenzahl 6 zu erhalten.
- Wenn ich das Zufallsexperiment 100-mal durchführe, erwarte ich in ca. 5 Fällen, dass ich kleinere h-Werte als 0,113.... oder größere h-Werte also 0,219... erhalte.
- In dem um p symmetrischen Intervall liegen ca. 95 % aller Stichprobenergebnisse, wenn ich das Zufallsexperiment oft durchführe.

Das Bild „*ca.* 95 % *aller Stichprobenergebnisse fallen in das* 95 %*-Prognoseintervall*“ ist wichtig. Das sollte schon verstanden und auch angewendet werden können. Die folgende Abbildung (hier wurde mit 1,96 statt mit 2 gerechnet) kann da helfen. Es wurden jeweils 200 Stichproben ermittelt, der relative Anteil (Stichprobenergebnis) berechnet und als Punkt grafisch dargestellt ($p = 0{,}6$; $n_1 = 40$; $n_2 = 160$).
Es ist gut zu sehen, wie die Ergebnisse in das 95 %-Prognoseintervall von p *fallen* und wie sich die Intervallbreite verkleinert, falls die Stichprobengröße n vergrößert wird.



Prognoseintervalle werden mit wachsendem n immer kleiner, p wird sozusagen immer enger eingeschnürt. Genauer: Es gilt für die Intervallbreite (hier wird wieder mit 2 gerechnet)

$$2 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \underbrace{4 \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)}}_{Konstante} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \text{Konstante.}$$

Man spricht deshalb vom $1/\sqrt{n}$-Gesetz.
Die Stichprobengröße vervierfachen bringt (nur) eine Halbierung der Intervalllänge. Diese Erkenntnis ist zentral.

Aufgaben

Aufgabe 1: Prognoseintervall (absolute Häufigkeit)

Angenommen, Sie würfeln 600-mal einen (idealen) Würfel und zählen die Anzahl der „Sechsen“. Berechnen Sie, in welchem zum Erwartungswert symmetrischen Bereich die Anzahl der „Sechsen“ mit mindestens 95%-iger Wahrscheinlichkeit fallen.

Lösung:

Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der „Sechsen“. X ist binomialverteilt mit $n = 600$ und $p = \frac{1}{6}$.

Es könnten nun Schritt für Schritt die Intervalle $[100 - k; 100 + k]$, $k = 1{,}2, \ldots$, betrachtet werden, bis die Bereichswahrscheinlichkeit zum ersten mal größer oder gleich 95% ist. Man kann aber auch mithilfe der Prognoseintervalle eine erste Schätzung durchführen und sich dann den Intervallgrenzen Stück für Stück nähern.

$\mu = n \cdot p$; $\mu = 600 \cdot \frac{1}{6}$; $\mu = 100$; $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$; $\sigma = \sqrt{600 \cdot (1/6) \cdot (5/6)} = 9{,}1287... \approx 9$

$P(100 - 2 \cdot 9 \leq X \leq 100 + 2 \cdot 9) = P(82 \leq X \leq 118) = 0{,}9575... > 0{,}95$
$P(83 \leq X \leq 117) = 0{,}9450...... < 0{,}95...$ Ergebnis: $[82; 118]$ ist das gesuchte Intervall.

Häufigkeitsinterpretation: Wird das Zufallsexperiment 100-mal wiederholt, dann erwarte ich in ca. 95 % aller Fälle, dass die Trefferanzahl mindestens 82 und höchstens 118 beträgt.

Aufgabe 2: Prognoseintervall (relative Häufigkeit)

In einer Urne befinden sich 400 grüne und 600 rote Kugeln. Es werden 80 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Ein Treffer wird genau dann erzielt, wenn eine grüne Kugel gezogen wird. Die Zufallsgröße X, die die Anzahl der grünen Kugeln in der 80-er Stichprobe zählt, kann als binomialverteilt angenommen werden.
Ermitteln Sie ein um p symmetrisches Intervall, in dem ca. 95,4 % der relativen Häufigkeiten h liegen.

Lösung:

Das gesuchte Intervall ist das 95,4 %-Prognoseintervall um p. Es gilt

$$\left[p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}};\ p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}\right].$$

Mit $p = \frac{400}{1000} = 0{,}4$ und $n = 80$ (Stichprobenumfang) ergibt sich das um p symmetrische Intervall, in das ca. 95 % aller relativen Häufigkeiten liegen: $[0{,}2904...; 0{,}5095...]$.

Bemerkung:

Wird noch berücksichtigt, dass $h \in \{\frac{0}{80}, \frac{1}{80}, \ldots, \frac{79}{80}, \frac{80}{80}\}$ gilt, dann erhält man $[\frac{24}{80}; \frac{40}{80}] = [0{,}3; 0{,}5]$.

Aufgabe 3: Intervalle und Intervalllängen

Gegeben ist die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}4$. Ermitteln Sie für die Stichprobenumfänge 50, 100, 200 und 5000 jeweils das 95,4 %-Prognoseintervall für p.

Lösung:

n	Intervall	Länge
50	[0,2614...; 0,5385...]	0,2771...
100	[0,3020...; 0,4979...]	0,1959...
200	[0,3307...; 0,4692...]	0,1385...
5000	[0,3861...; 0,4138...]	0,0277...

Aufgabe 4: Zentralabitur 2011 (NT), NDS, eA (CAS) - problematisch

Zur Überprüfung, ob der Würfel gezinkt ist, wird er 600-mal geworfen. Dabei fällt 79-mal die „6“.
Mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,5 % soll überprüft werden, ob es sich um einen gezinkten Würfel handelt.
Beschreiben Sie einen Lösungsweg.
Entscheiden Sie, ob es sich um einen gezinkten Würfel handelt.

offizieller Erwartungshorizont:

Zu einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,5 % gehört die Untersuchung einer 2σ -Umgebung bei einer relativen Häufigkeit von $h = \frac{79}{600}$.
Liegt $\frac{1}{6}$ außerhalb des Vertrauensintervalls, so kann man annehmen, dass der Würfel gezinkt ist.
Hier erhält man $[0{,}106\ldots; 0{,}161\ldots]$, bezüglich der gegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit kann man also annehmen, dass der Würfel gezinkt ist.

Aufgabe 5: Zentralabitur 2017 (HT), NDS, eA (CAS)

Eine Fluggesellschaft setzt auf einer bestimmten Flugstrecke immer Flugzeuge des gleichen Typs mit 320 Sitzplätzen ein. Kunden der Fluggesellschaft, die einen Flug für diese Strecke gebucht haben, treten diesen erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht an. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Passagiere, die den Flug nicht antreten.

a) Für ein Flugzeug dieses Typs sind für einen zufällig ausgewählten Flug auf dieser Strecke 320 Tickets verkauft worden.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in diesem Flugzeug
   - mindestens 12 Plätze frei bleiben,
   - mehr als 6 aber weniger als 10 Plätze frei bleiben,
   - mindestens 300 aber höchstens 310 Plätze genutzt werden.

b) Bestimmen Sie das kleinste um den Erwartungswert von X symmetrische Intervall, in dem die Anzahl der den Flug nicht antretenden Passagiere mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % liegt.

Aufgabe 6: Rechte Grenze wird gesucht

Eine Stichprobe vom Umfang $n = 200$ liefert für die linke Grenze des zugehörigen 95,4 %-Prognoseintervalls auf zwei Nachkommastellen gerundet den Wert 0,58.
Ermitteln Sie die Werte für p und die rechte Grenze auf zwei Nachkommastellen.

Aufgabe 7: Abschätzungen

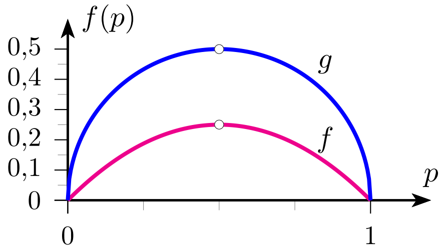
Die Abbildung (s. u.) zeigt die Graphen der Funktionen f und g mit $f(p) = p \cdot (1-p)$ und $g(p) = \sqrt{p \cdot (1-p)}$, $0 \le p \le 1$.

a) Zeigen Sie mithilfe des Graphen von f oder des Graphen von g, dass die Grenzen der beiden 95,4 %-Prognoseintervalle für absolute und relative Häufigkeiten folgendermaßen abgeschätzt werden können:

$$\left[n \cdot p - 2 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)};\ n \cdot p + 2 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}\right] \subseteq \left[n \cdot p - \sqrt{n};\ n \cdot p + \sqrt{n}\right]$$

$$\left[p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}};\ p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}\right] \subseteq \left[p - \sqrt{\frac{1}{n}};\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

b) Gegeben sind $p = 0{,}4$ und $n = 100$ bzw. $n = 400$.
Bestimmen Sie ohne Taschenrechner mithilfe der Abschätzung des 95,4 %-Prognoseintervalls für relative Häufigkeiten jeweils die Grenzen des Intervalls.

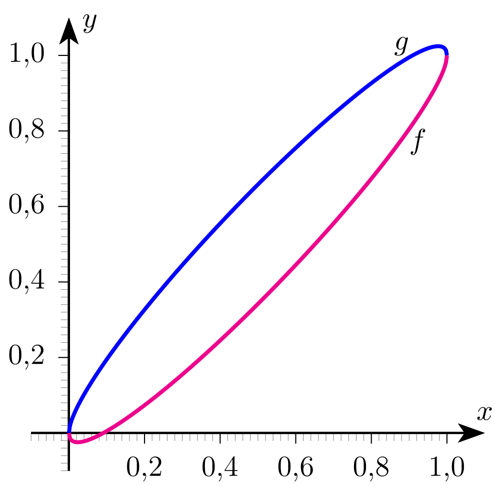


Aufgabe 8: Prognoseintervalle graphisch ermitteln

In der Abbildung (s. u.) sind die beiden Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $f(x) = x - 2 \cdot \sqrt{\frac{x(x-1)}{40}}$ und $g(x) = x + 2 \cdot \sqrt{\frac{x(x-1)}{40}}$, $0 \le x \le 1$, dargestellt.

a) Begründen Sie, dass hiermit 95,4 %-Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten bei einem Stichprobenumfang von $n = 40$ ermittelt werden können.

b) Bestimmen Sie zeichnerisch für $p = 0{,}4$ und $p = 0{,}8$ die zugehörigen 95,4 %-Prognoseintervalle.



Die folgenden Aufgaben sind aus dem Schulbuch *Lambacher Schweizer, Thüringen, Prognose- und Konfidenzintervalle. 2018.*

Aufgabe 9: Bezweifeln (Beispiel 2, S. 129)

Nehmen Sie an, dass bei einem handgesägten Würfel $p(6) = \frac{1}{6}$ gilt.

a) Bestimmen Sie das 95,4 % Prognoseintervall für die relative Häufigkeit $h(6)$ der Sechser zu $n = 100$ bzw. $n = 1000$ Versuchen.

b) Man beobachtet die relative Häufigkeit $h(6) = 0{,}21$.
Untersuchen Sie, ob Anlass besteht, an der Annahme $p(6) = \frac{1}{6}$ zu zweifeln.

Aufgabe 10: Eichzeichen (Aufgabe 4, S. 130)

Das Eichzeichen garantiert, dass die Gewichtsangabe 1,8 g (netto) im Mittel eingehalten wird. Weil Produzenten nichts verschenken, liegt die Annahme nahe, dass die Tütchen mit Wahrscheinlichkeit 50 % über- und mit 50 % untergewichtig sind.

a) Bestimmen Sie mit dieser Annahme für den Stichprobenumfang $n = 144$ das 95,4 % Prognoseintervall für die relative Häufigkeit $h(+)$ übergewichtiger Tütchen.

b) Niko: „Ich hatte 56 % übergewichtige Tütchen. Das ist eine signifikante Abweichung nach oben und ich darf bezweifeln, dass ein Tütchen nur mit Wahrscheinlichkeit 50 % übergewichtig ist“. Überprüfen und kommentieren Sie Nikos Aussage.

Aufgabe 11: Wahr oder falsch? (Aufgabe 9, S. 131)

Wahr oder falsch?

a) Wenn man den Radius des Prognoseintervalls verdoppelt, dann verdoppelt sich auch die Sicherheitswahrscheinlichkeit, mit der die relative Häufigkeit in dem Prognoseintervall liegt.

b) Wenn man den Versuchsumfang verdoppelt, dann halbiert sich der Radius des Prognoseintervalls der relativen Häufigkeiten bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit.

c) Je größer die Sicherheitswahrscheinlichkeit, desto größer ist auch das Prognoseintervall.

d) Das $1/\sqrt{n}$-Gesetz liefert Näherungen für Prognoseintervalle, die man mit der Binomialverteilung kontrollieren kann.

e) Wenn eine relative Häufigkeit außerhalb des 1σ-Prognoseintervalls zu p liegt, dann wird man ein bisschen skeptisch, hat aber noch keinen Anlass, die angegebene Wahrscheinlichkeit zu bezweifeln.

Aufgabe 12: Umfrage (Aufgabe 10, S. 131)

a) Eine Partei kam auf 27,8 % aller Stimmen. Bestimmen Sie das Intervall, in dem bei einer repräsentativen Kontroll-Umfrage der Stimmenanteil mit Sicherheitswahrscheinlichkeit 95,4 % liegen müsste, wenn man 500 Personen befragen würde.

b) Prüfen Sie, ob es reicht, 2000 Personen zu befragen, wenn gefordert wird, dass das Prognoseintervall für den Stimmenanteil nur noch den Radius 0,01 haben soll.