Prognose-und Konfidenzintervalle - vom Verstehen zum Unterrichten

32. Tage des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts 24.-26.02.2026

Reimund Vehling

26.02.2026

Prognose - und Konfidenzintervalle – ein möglicher Denkweg

1. Welche Fragen beantwortet ein Prognose-, welche ein Konfidenzintervall?

Prognose - und Konfidenzintervalle – ein möglicher Denkweg

1. Welche Fragen beantwortet ein Prognose-, welche ein Konfidenzintervall?
2. Wo begegnen uns diese Intervalle in der Realität und in der Gedankenwelt?

Prognose - und Konfidenzintervalle – ein möglicher Denkweg

1. Welche Fragen beantwortet ein Prognose-, welche ein Konfidenzintervall?
2. Wo begegnen uns diese Intervalle in der Realität und in der Gedankenwelt?
3. Welche Begriffe und Werkzeuge brauchen wir dafür?

Prognose - und Konfidenzintervalle – ein möglicher Denkweg

1. Welche Fragen beantwortet ein Prognose-, welche ein Konfidenzintervall?
2. Wo begegnen uns diese Intervalle in der Realität und in der Gedankenwelt?
3. Welche Begriffe und Werkzeuge brauchen wir dafür?
4. Wie kann jeweils eine Einführung verständnisorientiert aussehen?

Prognose - und Konfidenzintervalle – ein möglicher Denkweg

1. Welche Fragen beantwortet ein Prognose-, welche ein Konfidenzintervall?
2. Wo begegnen uns diese Intervalle in der Realität und in der Gedankenwelt?
3. Welche Begriffe und Werkzeuge brauchen wir dafür?
4. Wie kann jeweils eine Einführung verständnisorientiert aussehen?
5. Wie kann man zu diesen Inhalten meine SuS auch auf das Abitur vorbereiten?

Prognose - und Konfidenzintervalle – ein möglicher Denkweg

1. Welche Fragen beantwortet ein Prognose-, welche ein Konfidenzintervall?
2. Wo begegnen uns diese Intervalle in der Realität und in der Gedankenwelt?
3. Welche Begriffe und Werkzeuge brauchen wir dafür?
4. Wie kann jeweils eine Einführung verständnisorientiert aussehen?
5. Wie kann man zu diesen Inhalten meine SuS auch auf das Abitur vorbereiten?
6. Wie kann man effektiv Abituraufgaben im Unterricht einsetzen?

Prognose - und Konfidenzintervalle – ein möglicher Denkweg

1. Welche Fragen beantwortet ein Prognose-, welche ein Konfidenzintervall?
2. Wo begegnen uns diese Intervalle in der Realität und in der Gedankenwelt?
3. Welche Begriffe und Werkzeuge brauchen wir dafür?
4. Wie kann jeweils eine Einführung verständnisorientiert aussehen?
5. Wie kann man zu diesen Inhalten meine SuS auch auf das Abitur vorbereiten?
6. Wie kann man effektiv Abituraufgaben im Unterricht einsetzen?
7. Materialien: Einstiege, Übungs- und Testaufgaben, roter Faden durch eine UE

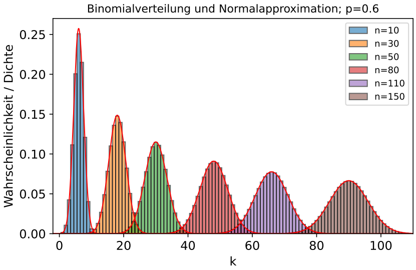
Prognose - und Konfidenzintervalle – ein möglicher Denkweg

1. Welche Fragen beantwortet ein Prognose-, welche ein Konfidenzintervall?
2. Wo begegnen uns diese Intervalle in der Realität und in der Gedankenwelt?
3. Welche Begriffe und Werkzeuge brauchen wir dafür?
4. Wie kann jeweils eine Einführung verständnisorientiert aussehen?
5. Wie kann man zu diesen Inhalten meine SuS auch auf das Abitur vorbereiten?
6. Wie kann man effektiv Abituraufgaben im Unterricht einsetzen?
7. Materialien: Einstiege, Übungs- und Testaufgaben, roter Faden durch eine UE

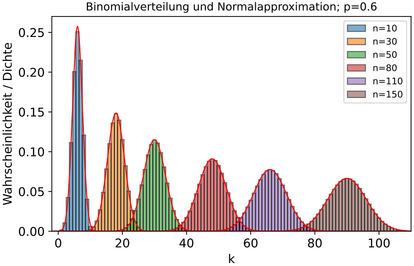
Änderungen sind natürlich jederzeit möglich.

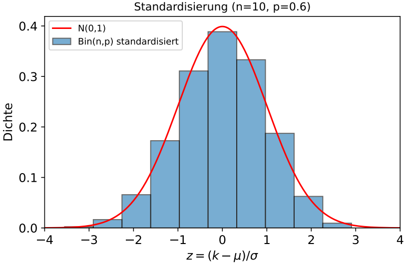
Prognoseintervalle

Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation

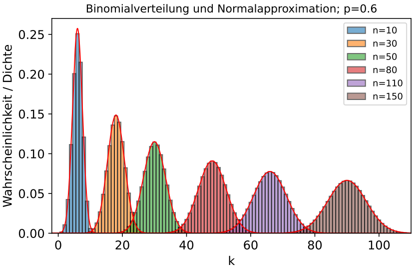


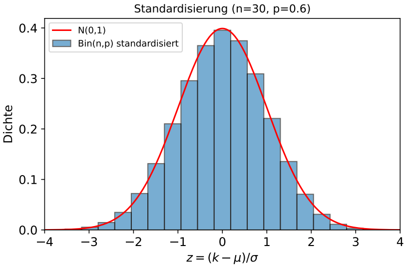
Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation



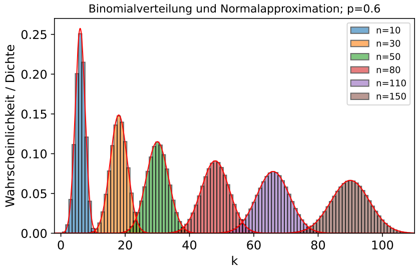


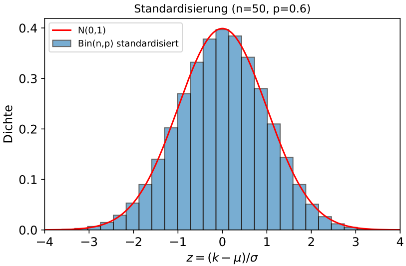
Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation



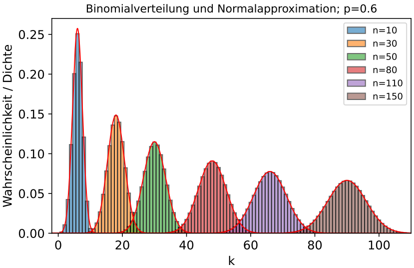


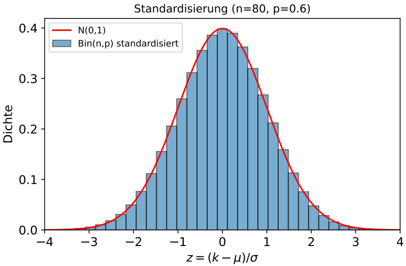
Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation



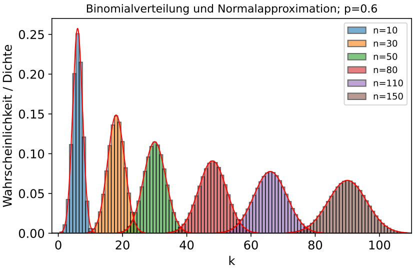


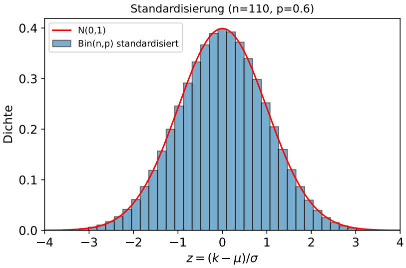
Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation



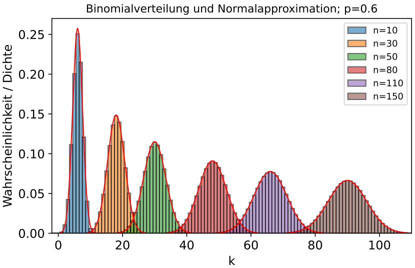


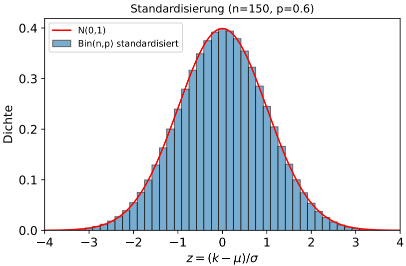
Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation



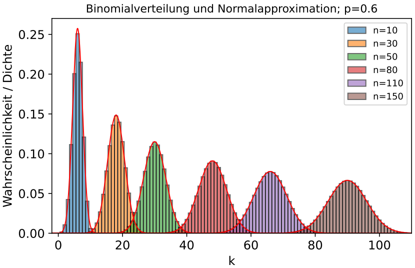


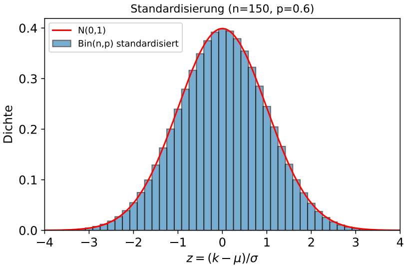
Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation

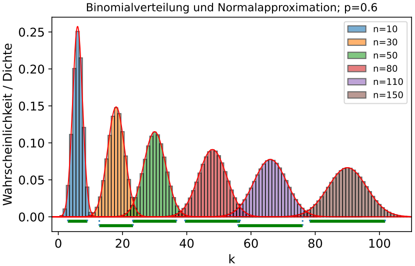




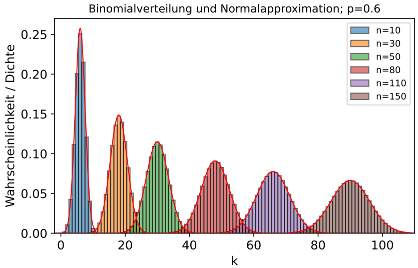
Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation

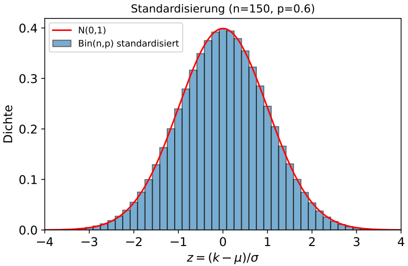


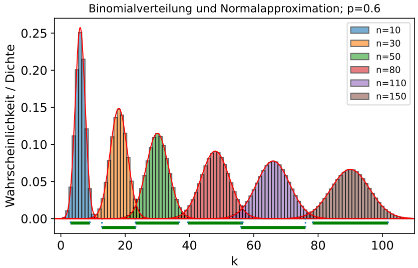


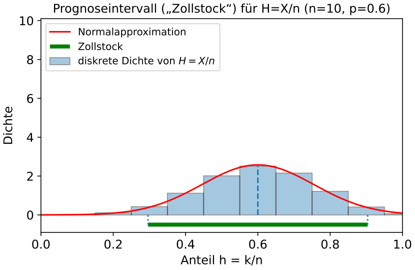


Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation

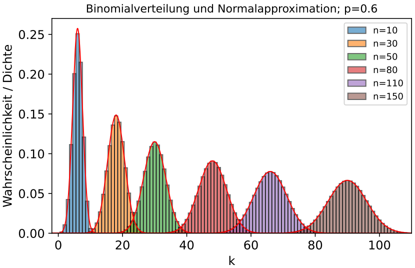


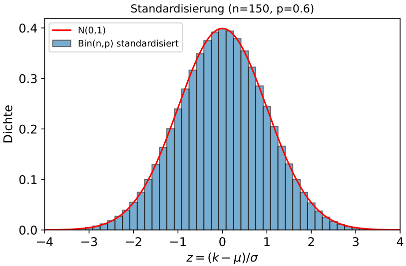


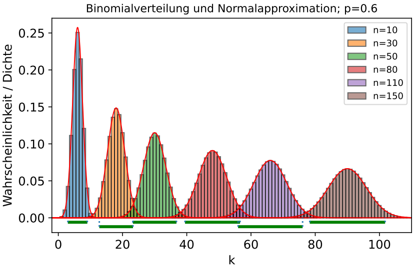


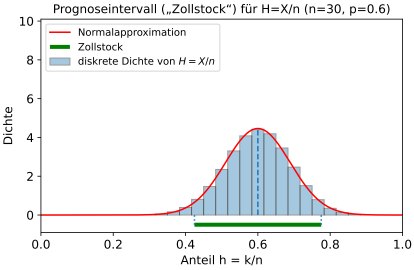


Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation

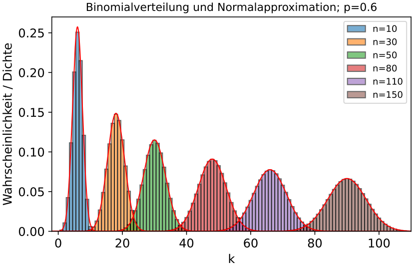


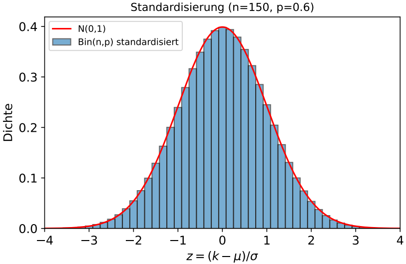


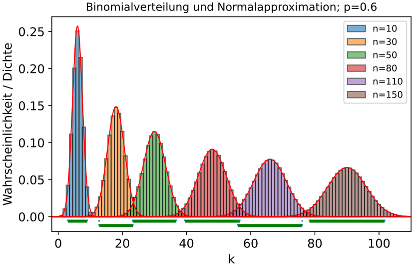


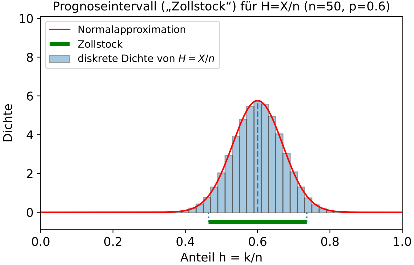


Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation

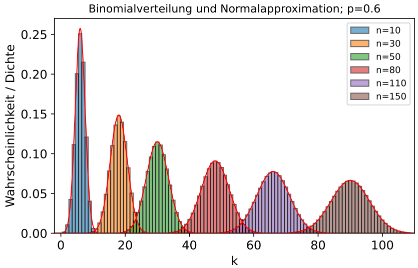


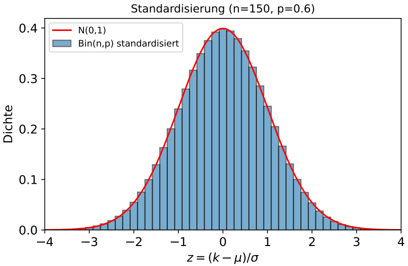


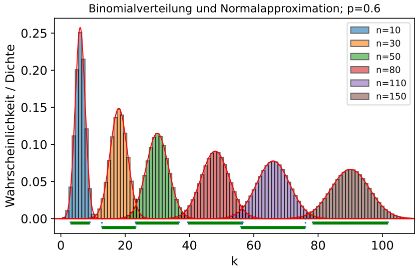


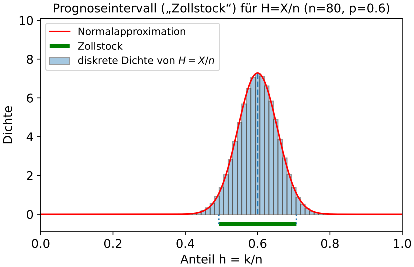


Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation

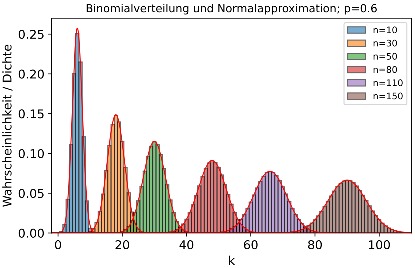


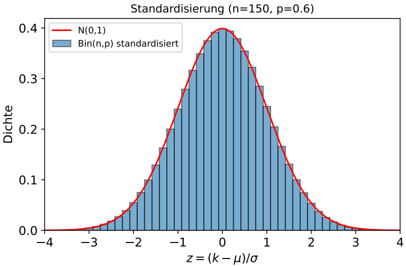


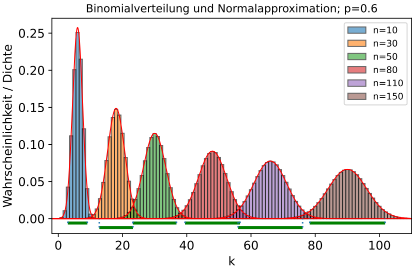


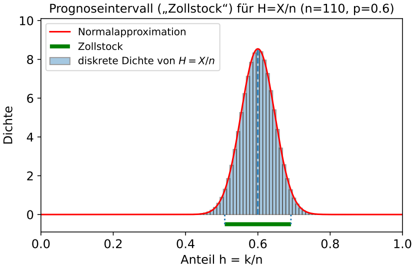


Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation

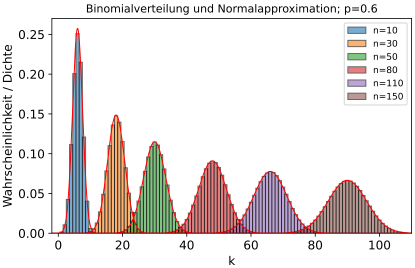


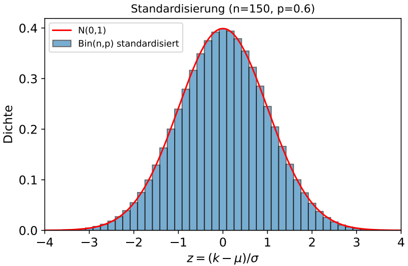


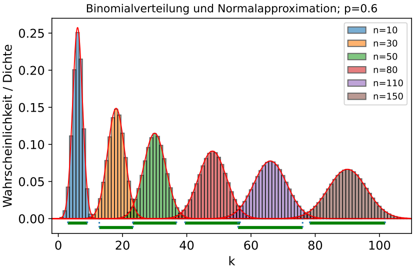


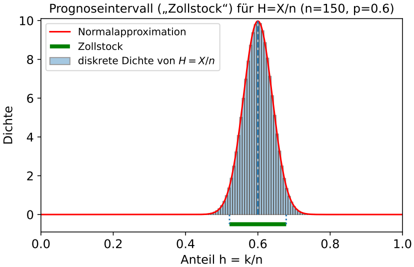


Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation









Definitionen: Prognoseintervall - Konfidenzintervall

Definitionen: Prognoseintervall - Konfidenzintervall

Ein 95%-**Prognoseintervall** zu einer Trefferwahrscheinlichkeit p ist ein Intervall, in das die *zufällige* Trefferanzahl X bzw. die *zufällige* Trefferhäufigkeit $H = X/n$ bei einem *bevorstehenden* Bernoulliexperiment gegebener Länge n mit einer Mindestwahrscheinlichkeit 95% fällt.

Definitionen: Prognoseintervall - Konfidenzintervall

Ein 95%-**Prognoseintervall** zu einer Trefferwahrscheinlichkeit p ist ein Intervall, in das die *zufällige* Trefferanzahl X bzw. die *zufällige* Trefferhäufigkeit $H = X/n$ bei einem *bevorstehenden* Bernoulliexperiment gegebener Länge n mit einer Mindestwahrscheinlichkeit 95% fällt.

Ein **Konfidenzintervall** zu einer beobachteten relativen Häufigkeit h besteht aus allen denjenigen Wahrscheinlichkeiten (p-Werten), in deren Prognoseintervall die beobachtete relative Häufigkeit h liegt.

Prognoseintervall - der Zollstock

Ein 95%-**Prognoseintervall** zu einer Trefferwahrscheinlichkeit p ist ein Intervall, in das die *zufällige* Trefferanzahl X bzw. die *zufällige* Trefferhäufigkeit $H = X/n$ bei einem *bevorstehenden* Bernoulliexperiment gegebener Länge n mit einer Mindestwahrscheinlichkeit 95% fällt.

Prognoseintervall - der Zollstock

Ein 95%-**Prognoseintervall** zu einer Trefferwahrscheinlichkeit p ist ein Intervall, in das die *zufällige* Trefferanzahl X bzw. die *zufällige* Trefferhäufigkeit $H = X/n$ bei einem *bevorstehenden* Bernoulliexperiment gegebener Länge n mit einer Mindestwahrscheinlichkeit 95% fällt.

Prognoseintervalle schauen in die Zukunft. Man schließt mit ihnen vom Modell (der Wahrscheinlichkeit) auf die Realität (relative Häufigkeit).

Bei gegebener Trefferwahrscheinlichkeit p liegt die *zufällige* Trefferhäufigkeit $H = X/n$ mit ca. 95% Sicherheit im Prognoseintervall

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\;;\; p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

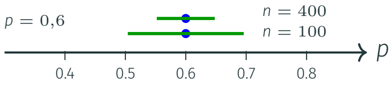
Prognoseintervall - der Zollstock

Ein 95%-**Prognoseintervall** zu einer Trefferwahrscheinlichkeit p ist ein Intervall, in das die *zufällige* Trefferanzahl X bzw. die *zufällige* Trefferhäufigkeit $H = X/n$ bei einem *bevorstehenden* Bernoulliexperiment gegebener Länge n mit einer Mindestwahrscheinlichkeit 95% fällt.

Prognoseintervalle schauen in die Zukunft. Man schließt mit ihnen vom Modell (der Wahrscheinlichkeit) auf die Realität (relative Häufigkeit).

Bei gegebener Trefferwahrscheinlichkeit p liegt die *zufällige* Trefferhäufigkeit $H = X/n$ mit ca. 95% Sicherheit im Prognoseintervall

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$



Prognoseintervalle - Denken in Verteilungen

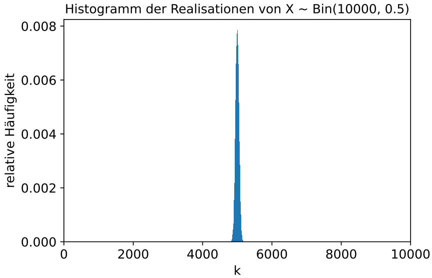
Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X gilt: $n = 10\,000;\ p = 0{,}5.$

Finden Sie Aufgaben der Form $P(X = k); P(X \leq k); P(X \geq k); P(a \leq X \leq b), \ldots$.

Prognoseintervalle - Denken in Verteilungen

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X gilt: $n = 10\,000$; $p = 0{,}5$.

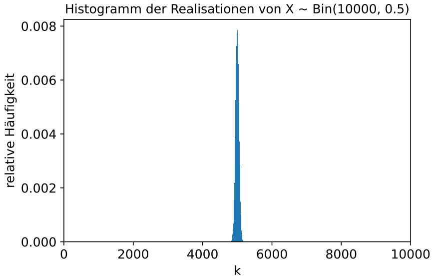
Finden Sie Aufgaben der Form $P(X = k)$; $P(X \leq k)$; $P(X \geq k)$; $P(a \leq X \leq b), \ldots$.

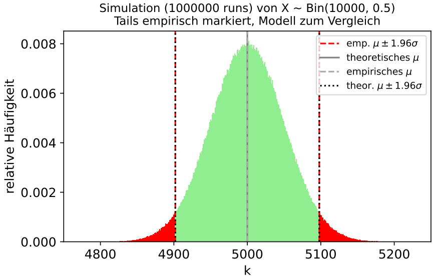


Prognoseintervalle - Denken in Verteilungen

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X gilt: $n = 10\,000;\ p = 0{,}5.$

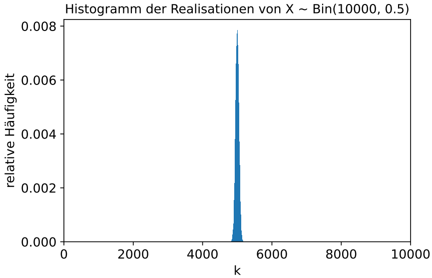
Finden Sie Aufgaben der Form $P(X = k); P(X \leq k); P(X \geq k); P(a \leq X \leq b), \ldots$.

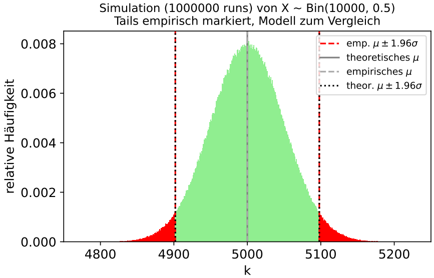




Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X gilt: $n = 10\,000$; $p = 0{,}5$.

Finden Sie Aufgaben der Form $P(X = k)$; $P(X \leq k)$; $P(X \geq k)$; $P(a \leq X \leq b), \ldots$.





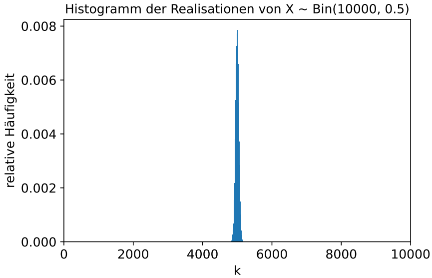
Idee (ohne Rechner): $\mu = n \cdot p = 5000$; $\sigma = \sqrt{10000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 50$; $2\sigma = 100$

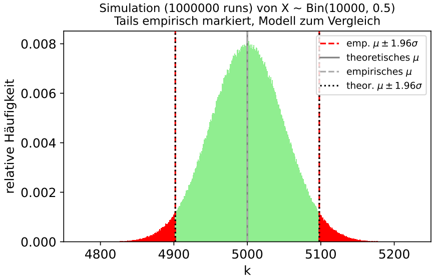
Folgerung: In ca. 95% aller *zukünftigen* Fälle gilt: $4900 \leq X \leq 5100$.

Prognoseintervalle - Denken in Verteilungen

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X gilt: $n = 10\,000$; $p = 0{,}5$.

Finden Sie Aufgaben der Form $P(X = k)$; $P(X \leq k)$; $P(X \geq k)$; $P(a \leq X \leq b), \ldots$.





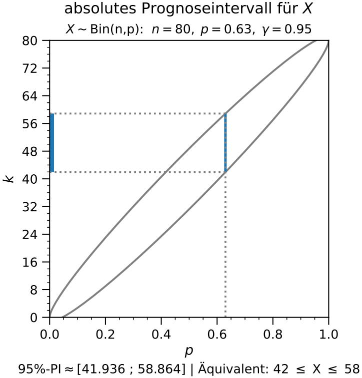
Idee (ohne Rechner): $\mu = n \cdot p = 5000$; $\sigma = \sqrt{10000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 50$; $2\sigma = 100$

Folgerung: In ca. 95% aller *zukünftigen* Fälle gilt: $4900 \leq X \leq 5100$. $(0{,}49 \leq \frac{X}{n} \leq 0{,}51)$

Prognoseintervalle: absolut und relativ - Normierung liefert Einsichten

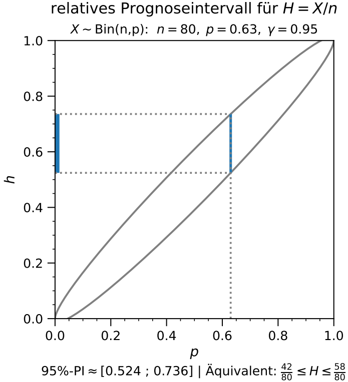
Absolutes Prognoseintervall für X

$$\left[n\cdot p - z\sqrt{np(1-p)},\ n\cdot p + z\sqrt{np(1-p)}\right]$$



Relatives Prognoseintervall für $H = X/n$

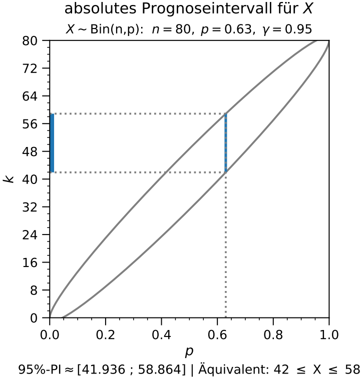
$$\left[p - z\sqrt{p(1-p)/n},\ p + z\sqrt{p(1-p)/n}\right]$$



Prognoseintervalle: absolut und relativ - Normierung liefert Einsichten

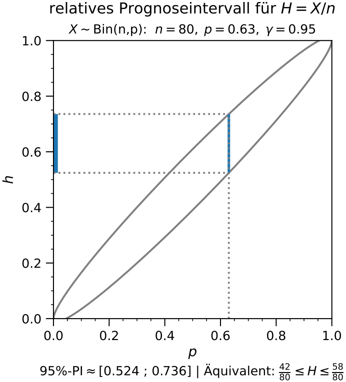
Absolutes Prognoseintervall für X

$$\left[n\cdot p - z\sqrt{np(1-p)},\ n\cdot p + z\sqrt{np(1-p)}\right]$$



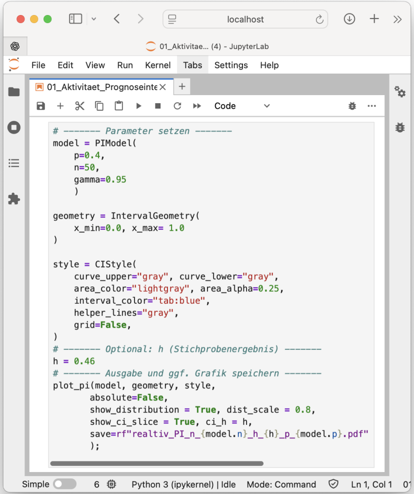
Relatives Prognoseintervall für $H = X/n$

$$\left[p - z\sqrt{p(1-p)/n},\ p + z\sqrt{p(1-p)/n}\right]$$

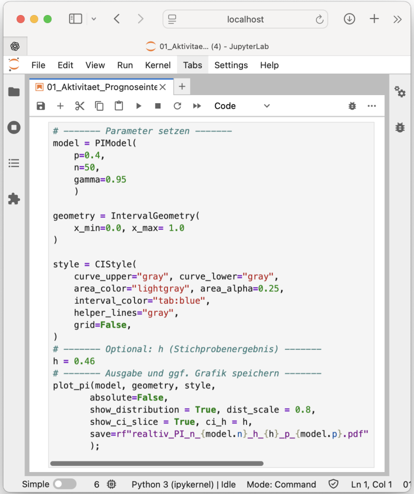


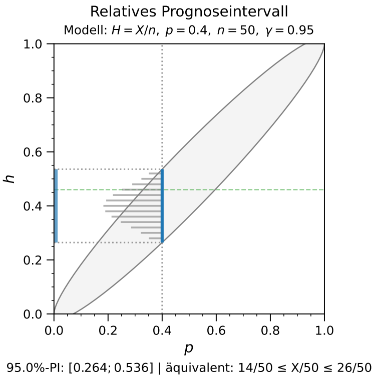
Lineare Transformation $H = \frac{X}{n}$. Skalierung ändert die Darstellung, nicht die Struktur.
Normierung ist eine lineare Transformation - das $1/\sqrt{n}$-Gesetz wird sichtbar.

Modell - Setzung - Style - Ausgabe - Interpretation

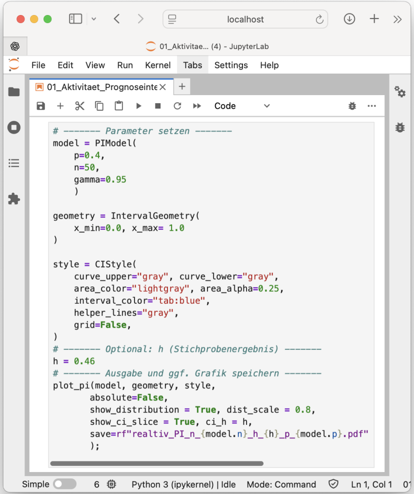


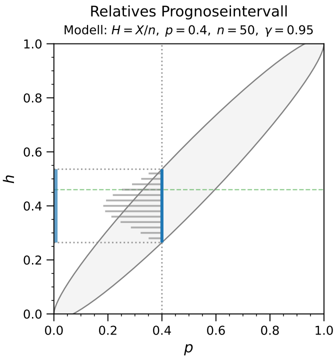
Modell - Setzung - Style - Ausgabe - Interpretation





Modell - Setzung - Style - Ausgabe - Interpretation





95.0%-PI: [0.264; 0.536] | äquivalent: 14/50 ≤ X/50 ≤ 26/50

Konfidenzintervalle - wie werden sie berechnet und wo steckt der Zufall?

Konfidenzintervall - der Versuch einer Definition

Ergebnis der Fortbildung

Definition

Ein **Konfidenzintervall** zu einer beobachteten relativen Häufigkeit h besteht aus allen denjenigen Wahrscheinlichkeiten (p-Werten), in deren Prognoseintervall die beobachtete relative Häufigkeit h liegt.

Konfidenzintervall - der Versuch einer Definition

Ergebnis der Fortbildung

Definition

Ein **Konfidenzintervall** zu einer beobachteten relativen Häufigkeit h besteht aus allen denjenigen Wahrscheinlichkeiten (p-Werten), in deren Prognoseintervall die beobachtete relative Häufigkeit h liegt.

Ergebnis am Schreibtisch

Definition

Ein **Konfidenzintervall** zu einer beobachteten relativen Häufigkeit h ist die Menge aller Wahrscheinlichkeiten p im Binomialmodell $Bin(n, p)$, in deren Prognoseintervall die beobachtete relative Häufigkeit h liegt.

Konfidenzintervall - der Versuch einer Definition

Definition

Ein Konfidenzintervall zu einer beobachteten relativen Häufigkeit h ist die Menge aller Wahrscheinlichkeiten p im Binomialmodell $\mathrm{Bin}(n, p)$, in deren Prognoseintervall die beobachtete relative Häufigkeit h liegt.

Konfidenzintervall - der Versuch einer Definition

Definition

Ein Konfidenzintervall zu einer beobachteten relativen Häufigkeit h ist die Menge aller Wahrscheinlichkeiten p im Binomialmodell $\mathrm{Bin}(n, p)$, in deren Prognoseintervall die beobachtete relative Häufigkeit h liegt.

Wo ist hier der Zufall?

Jetzt kommt der Zollstock ins Spiel.

Der Zollstock – eine saubere physikalische Realisierung statistischer Begriffe

Der Zollstock – eine saubere physikalische Realisierung statistischer Begriffe

- Eine Person steht an der Position h.

  h ist realisiert. Es gibt hier keinen Zufall mehr.

Der Zollstock – eine saubere physikalische Realisierung statistischer Begriffe

- Eine Person steht an der Position h.

  h ist realisiert. Es gibt hier keinen Zufall mehr.

- Eine zweite Person steht an einer Position p.

  p ist ein fixer, aber unbekannter Modellparameter.

  Die Frage ist zunächst alltagssprachlich: *Kann dieses p dieses h erzeugt haben? Wenn ich p bin, kann ich dieses h erwarten?*

Der Zollstock – eine saubere physikalische Realisierung statistischer Begriffe

- Eine Person steht an der Position h.

  h ist realisiert. Es gibt hier keinen Zufall mehr.

- Eine zweite Person steht an einer Position p.

  p ist ein fixer, aber unbekannter Modellparameter.

  Die Frage ist zunächst alltagssprachlich: *Kann dieses p dieses h erzeugt haben? Wenn ich p bin, kann ich dieses h erwarten?*

- Der (elastische) Zollstock gehört zu p.

  Er beschreibt, welche Werte von h unter diesem p zu erwarten sind. *Das ist ein Prognoseintervall.*

Der Zollstock – eine saubere physikalische Realisierung statistischer Begriffe

- Eine Person steht an der Position h.

  h ist realisiert. Es gibt hier keinen Zufall mehr.

- Eine zweite Person steht an einer Position p.

  p ist ein fixer, aber unbekannter Modellparameter.

  Die Frage ist zunächst alltagssprachlich: *Kann dieses p dieses h erzeugt haben? Wenn ich p bin, kann ich dieses h erwarten?*

- Der (elastische) Zollstock gehört zu p.

  Er beschreibt, welche Werte von h unter diesem p zu erwarten sind. *Das ist ein Prognoseintervall.*

- p wird verschoben, bis der Zollstock h gerade berührt.

  Ab hier wird es im Sinne des Modells plausibel. *Die Berührung markiert eine Intervallgrenze.*

Der Zollstock – eine saubere physikalische Realisierung statistischer Begriffe

- Eine Person steht an der Position h.

  h ist realisiert. Es gibt hier keinen Zufall mehr.

- Eine zweite Person steht an einer Position p.

  p ist ein fixer, aber unbekannter Modellparameter.

  Die Frage ist zunächst alltagssprachlich: *Kann dieses p dieses h erzeugt haben? Wenn ich p bin, kann ich dieses h erwarten?*

- Der (elastische) Zollstock gehört zu p.

  Er beschreibt, welche Werte von h unter diesem p zu erwarten sind. *Das ist ein Prognoseintervall.*

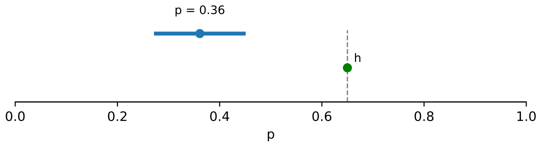
- p wird verschoben, bis der Zollstock h gerade berührt.

  Ab hier wird es im Sinne des Modells plausibel. *Die Berührung markiert eine Intervallgrenze.*

Wo steckt der Zufall? Der Zufall steckt in der gedanklichen Wiederholung.

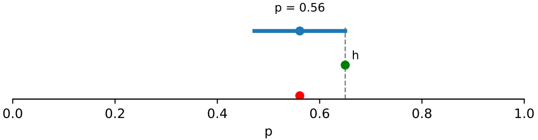
Konfidenzintervalle freirubbeln - und berechnen

Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 78;\ h = 0{,}65$



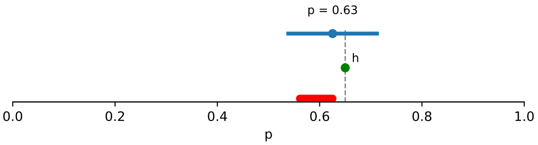
Konfidenzintervalle freirubbeln - und berechnen

Stichprobenziehung: $n = 120$; $x = 78$; $h = 0{,}65$

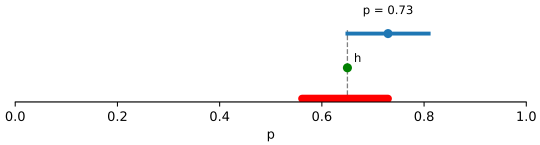


Konfidenzintervalle freirubbeln - und berechnen

Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 78;\ h = 0{,}65$

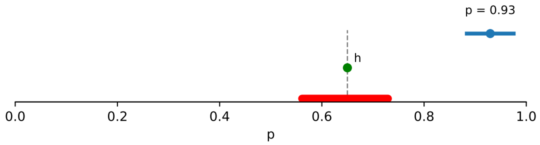


Stichprobenziehung: $n = 120; \ x = 78; \ h = 0{,}65$



Konfidenzintervalle freirubbeln - und berechnen

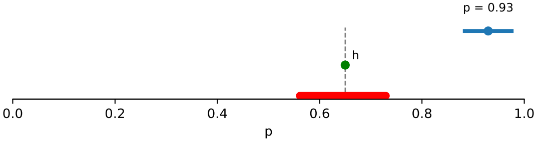
Stichprobenziehung: $n = 120;\; x = 78;\; h = 0{,}65$



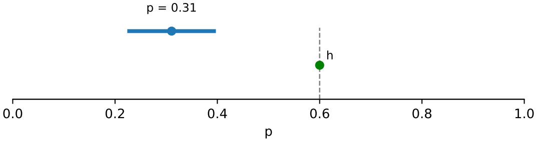
Stichprobenziehung: $n = 120;\; x = 72;\; h = 0{,}60$

Konfidenzintervalle freirubbeln - und berechnen

Stichprobenziehung: $n = 120$; $x = 78$; $h = 0{,}65$

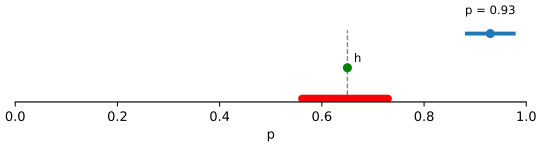


Stichprobenziehung: $n = 120$; $x = 72$; $h = 0{,}60$

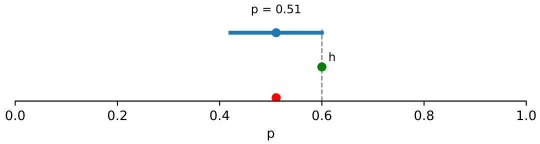


Konfidenzintervalle freirubbeln - und berechnen

Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 78;\ h = 0{,}65$

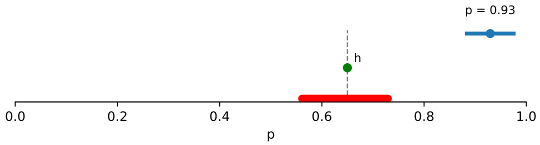


Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 72;\ h = 0{,}60$

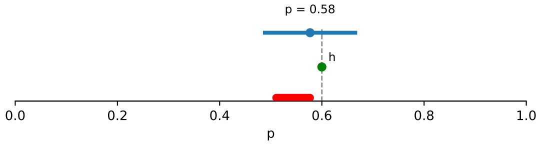


Konfidenzintervalle freirubbeln - und berechnen

Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 78;\ h = 0{,}65$

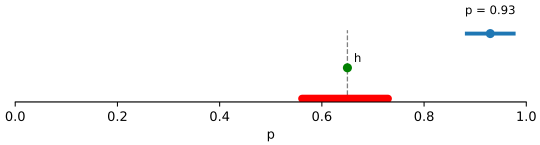


Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 72;\ h = 0{,}60$

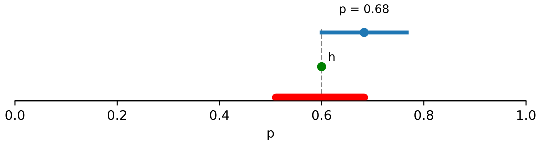


Konfidenzintervalle freirubbeln - und berechnen

Stichprobenziehung: $n = 120;\; x = 78;\; h = 0{,}65$

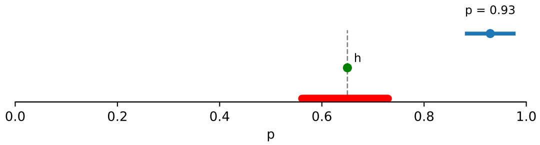


Stichprobenziehung: $n = 120;\; x = 72;\; h = 0{,}60$

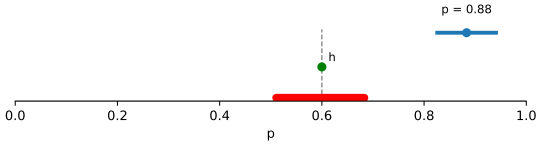


Konfidenzintervalle freirubbeln - und berechnen

Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 78;\ h = 0{,}65$

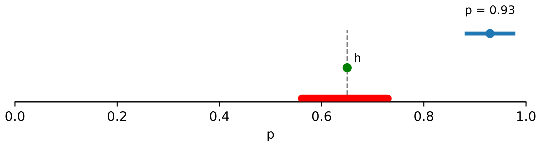


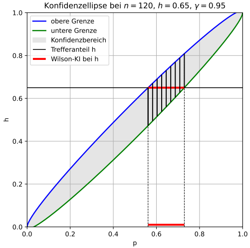
Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 72;\ h = 0{,}60$



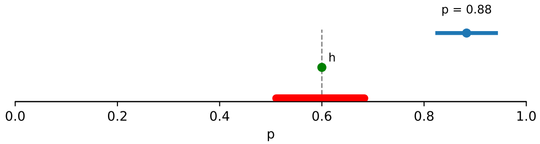
Konfidenzintervalle freirubbeln - und berechnen

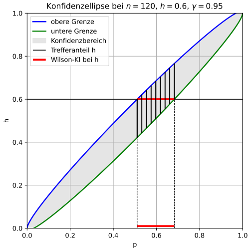
Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 78;\ h = 0{,}65$



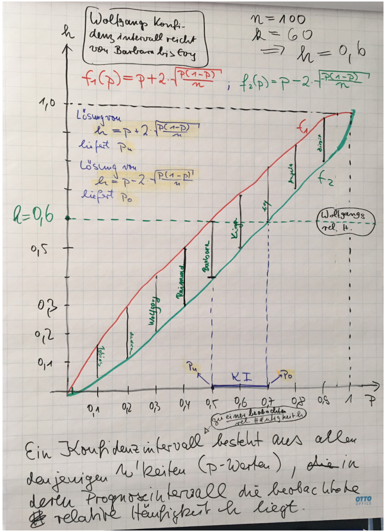


Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 72;\ h = 0{,}60$

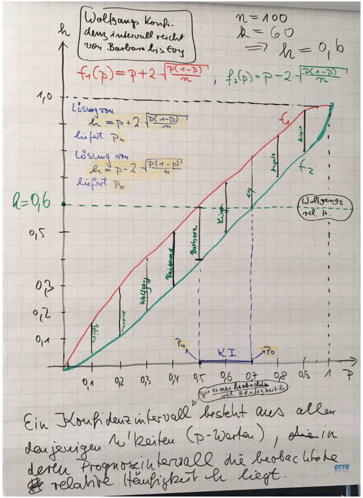




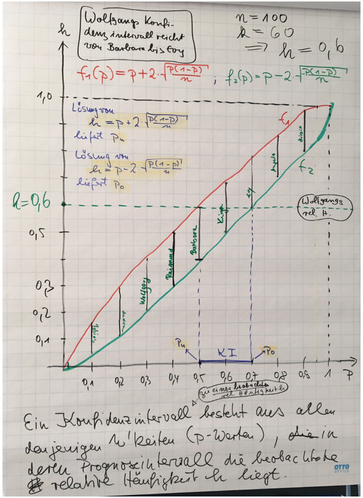
Konfidenzellipse (do it yourself) - während einer denkwürdigen Fortbildung



Die Konfidenzellipse (do it yourself) - während einer denkwürdigen Fortbildung



Die Konfidenzellipse als Denkraum



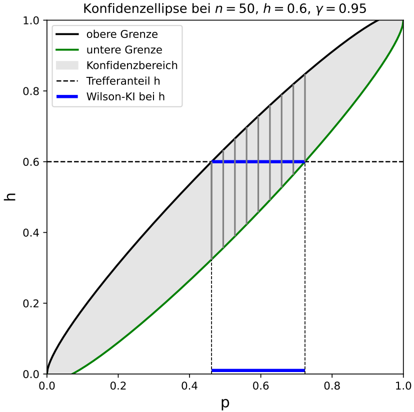
Mehr als eine Grafik

Die Konfidenzellipse ist kein Poster und kein Rechenhilfsmittel,
sondern ein gemeinsamer **Denkraum**.

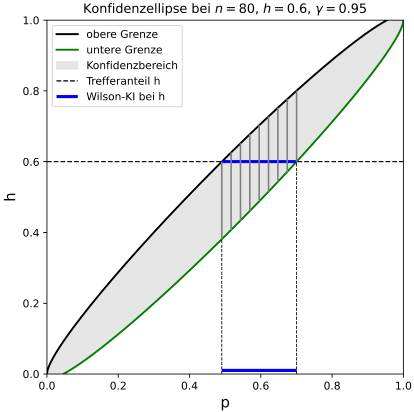
- Sie macht Abhängigkeiten sichtbar.
- Sie erlaubt Perspektivwechsel (Schnitte).
- Sie verbindet Geometrie und Stochastik.
- Sie trägt Prognose- und Konfidenzintervalle.

Nicht anschauen – benutzen.
Immer wieder – im Klassenraum – gemeinsam.

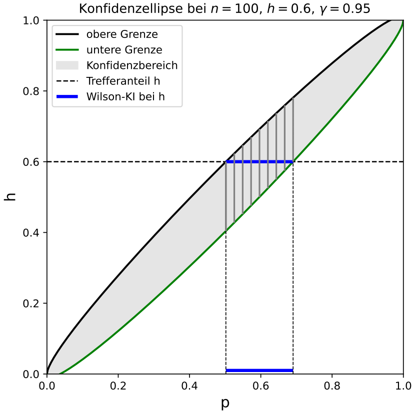
Konfidenzellipsen – ein Überblick, falls n verändert wird



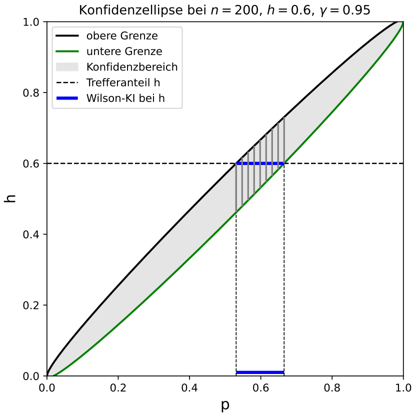
Konfidenzellipsen – ein Überblick, falls n verändert wird



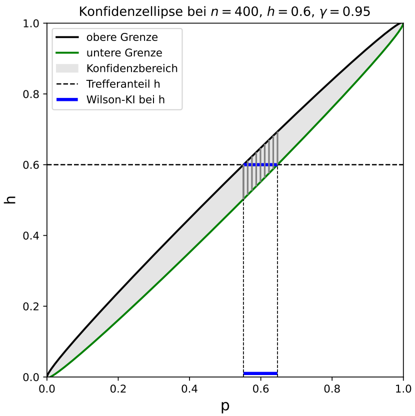
Konfidenzellipsen – ein Überblick, falls n verändert wird



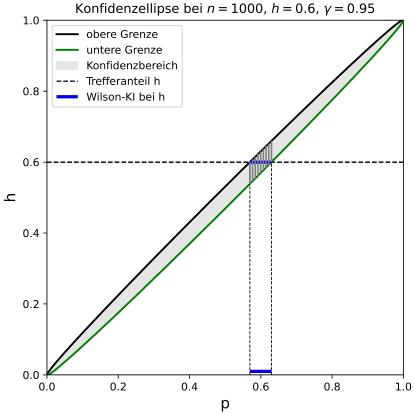
Konfidenzellipsen – ein Überblick, falls n verändert wird



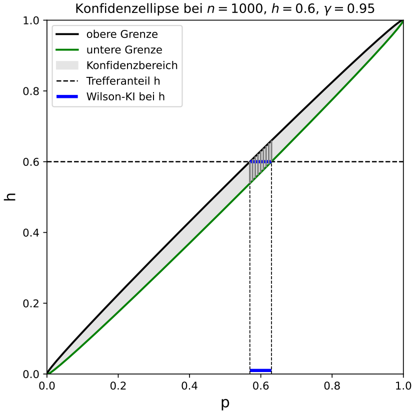
Konfidenzellipsen – ein Überblick, falls n verändert wird

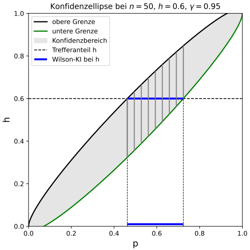


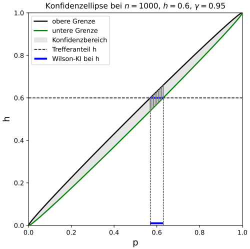
Konfidenzellipsen – ein Überblick, falls n verändert wird



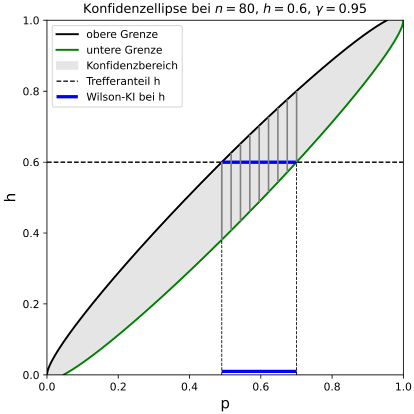
Konfidenzellipsen – ein Überblick, falls n verändert wird







Konfidenzellipsen – ein Überblick, falls n verändert wird



Schnitt des oberen Astes der Ellipse mit $h = 0{,}6$ liefert die linke Grenze p_u des Konfidenzintervalls:

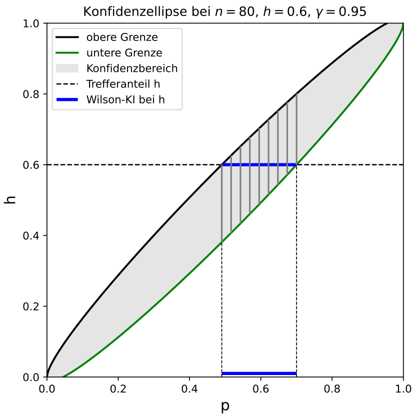
$$0{,}6 = p_u + 1,96\sqrt{\frac{p_u(1-p_u)}{n}}$$

Schnitt des unteren Astes der Ellipse

mit $h = 0{,}6$ liefert die rechte Grenze p_o des Konfidenzintervalls:

$$0{,}6 = p_o - 1,96\sqrt{\frac{p_o(1-p_o)}{n}}$$

Konfidenzellipsen – ein Überblick, falls n verändert wird

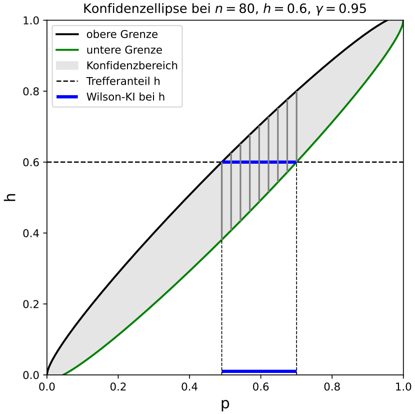


Die Konfidenzellipse hilft …

- Prognoseintervalle von Konfidenzintervallen zu unterscheiden,
- Berechnungen zu verstehen,
- Abhängigkeiten zu entdecken und zu begründen.

Sie ist keine Darstellung der Verfahrenswahrscheinlichkeit.

Konfidenzellipsen – ein Überblick, falls n verändert wird



Die Konfidenzellipse hilft ...

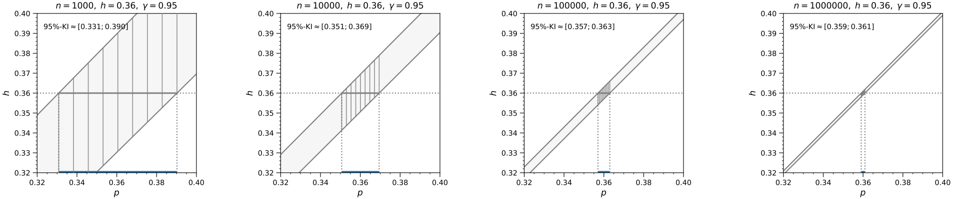
- Prognoseintervalle von Konfidenzintervallen zu unterscheiden,
- Berechnungen zu verstehen,
- Abhängigkeiten zu entdecken und zu begründen.

Sie ist keine Darstellung der Verfahrenswahrscheinlichkeit.

Überdeckungswahrscheinlichkeit: Zahlenwert
Sicherheitswahrscheinlichkeit: Wird oft benutzt, umgangssprachlich besetzt, 95% sicher - was soll ich mir darunter vorstellen?
Verfahrenswahrscheinlichkeit: Die Wahrscheinlichkeit gehört dem Verfahren, nicht dem Ergebnis; der Perspektivwechsel wird deutlich.

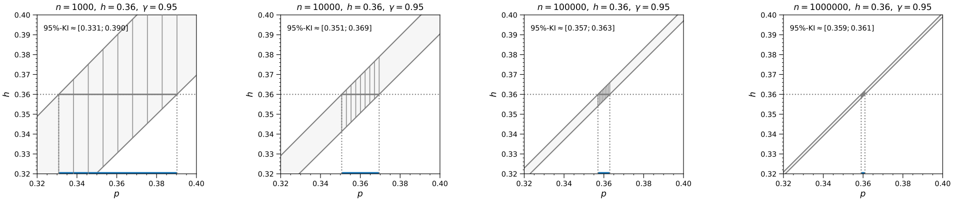
Konfidenzintervall - Abhängigkeit vom n und γ

n verschieden, $\gamma = 0{,}95$

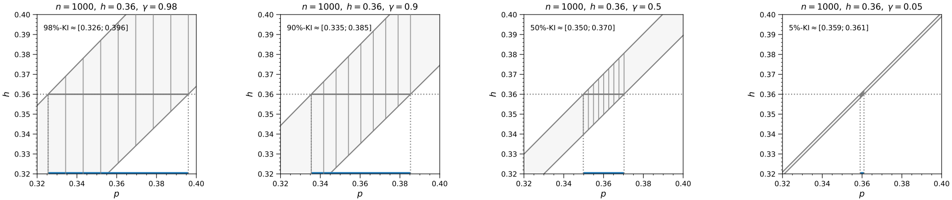


Konfidenzintervall - Abhängigkeit vom n und γ

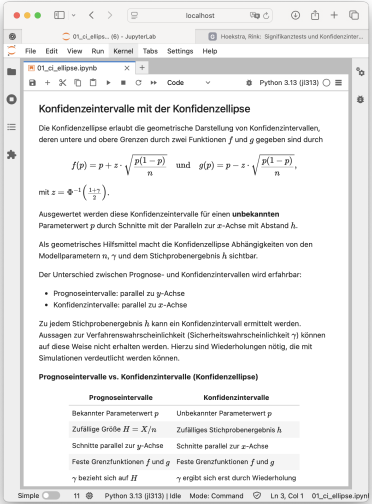
n verschieden, $\gamma = 0{,}95$



$n = 1000$, γ verschieden



Konfidenzellipse – mehr als ein Programm



Konfidenzeintervalle mit der Konfidenzellipse

Die Konfidenzellipse erlaubt die geometrische Darstellung von Konfidenzintervallen, deren untere und obere Grenzen durch zwei Funktionen f und g gegeben sind durch

$$f(p) = p + z \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad \text{und} \quad g(p) = p - z \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},$$

mit $z = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$.

Ausgewertet werden diese Konfidenzeintervalle für einen **unbekannten** Parameterwert p durch Schnitte mit der Paralleln zur x-Achse mit Abstand h.

Als geometrisches Hilfsmittel macht die Konfidenzellipse Abhängigkeiten von den Modellparametern n, γ und dem Stichprobenergebnis h sichtbar.

Der Unterschied zwischen Prognose- und Konfidenzintervallen wird erfahrbar:

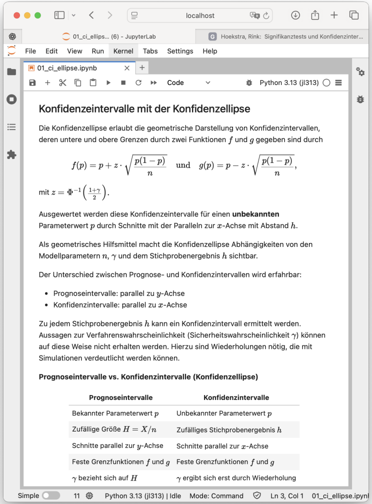
- Prognoseintervalle: parallel zu y-Achse
- Konfidenzintervalle: parallel zu x-Achse

Zu jedem Stichprobenergebnis h kann ein Konfidenzintervall ermittelt werden. Aussagen zur Verfahrenswahrscheinlichkeit (Sicherheitswahrscheinlichkeit γ) können auf diese Weise nicht erhalten werden. Hierzu sind Wiederholungen nötig, die mit Simulationen verdeutlicht werden können.

Prognoseintervalle vs. Konfidenzintervalle (Konfidenzellipse)

Prognoseintervalle	Konfidenzintervalle
Bekannter Parameterwert p	Unbekannter Parameterwert p
Zufällige Größe $H = X/n$	Zufälliges Stichprobenergebnis h
Schnitte parallel zur y-Achse	Schnitte parallel zur x-Achse
Feste Grenzfunktionen f und g	Feste Grenzfunktionen f und g
γ bezieht sich auf H	γ ergibt sich erst durch Wiederholung

Konfidenzellipse – mehr als ein Programm



Konfidenzeintervalle mit der Konfidenzellipse

Die Konfidenzellipse erlaubt die geometrische Darstellung von Konfidenzintervallen, deren untere und obere Grenzen durch zwei Funktionen f und g gegeben sind durch

$$f(p) = p + z \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad \text{und} \quad g(p) = p - z \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},$$

mit $z = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$.

Ausgewertet werden diese Konfidenzintervalle für einen **unbekannten** Parameterwert p durch Schnitte mit der Parallelen zur x-Achse mit Abstand h.

Als geometrisches Hilfsmittel macht die Konfidenzellipse Abhängigkeiten von den Modellparametern n, γ und dem Stichprobenergebnis h sichtbar.

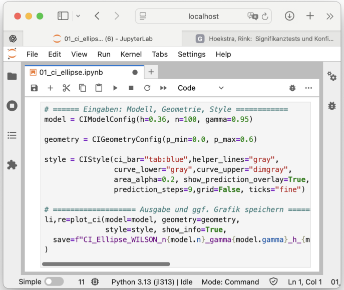
Der Unterschied zwischen Prognose- und Konfidenzintervallen wird erfahrbar:

- Prognoseintervalle: parallel zu y-Achse
- Konfidenzintervalle: parallel zu x-Achse

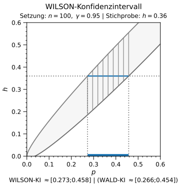
Zu jedem Stichprobenergebnis h kann ein Konfidenzintervall ermittelt werden. Aussagen zur Verfahrenswahrscheinlichkeit (Sicherheitswahrscheinlichkeit γ) können auf diese Weise nicht erhalten werden. Hierzu sind Wiederholungen nötig, die mit Simulationen verdeutlicht werden können.

Prognoseintervalle vs. Konfidenzintervalle (Konfidenzellipse)

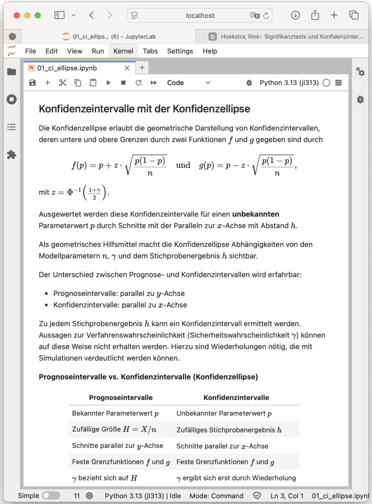
Prognoseintervalle	Konfidenzintervalle
Bekannter Parameterwert p	Unbekannter Parameterwert p
Zufällige Größe $H = X/n$	Zufälliges Stichprobenergebnis h
Schnitte parallel zur y-Achse	Schnitte parallel zur x-Achse
Feste Grenzfunktionen f und g	Feste Grenzfunktionen f und g
γ bezieht sich auf H	γ ergibt sich erst durch Wiederholung



```
# ====== Eingaben: Modell, Geometrie, Style ===========
model = CIModelConfig(h=0.36, n=100, gamma=0.95)

geometry = CIGeometryConfig(p_min=0.0, p_max=0.6)

style = CIStyle(ci_bar="tab:blue",helper_lines="gray",
                  curve_lower="gray",curve_upper="dimgray",
                  area_alpha=0.2, show_prediction_overlay=True,
                  prediction_steps=9,grid=False, ticks="fine")

# =================== Ausgabe und ggf. Grafik speichern =====
li,re=plot_ci(model=model, geometry=geometry,
               style=style, show_info=True,
  save=f"CI_Ellipse_WILSON_n{model.n}_gamma{model.gamma}_h_{m
)
```



Konfidenzellipse – mehr als ein Programm



Konfidenzeintervalle mit der Konfidenzellipse

Die Konfidenzellipse erlaubt die geometrische Darstellung von Konfidenzintervallen, deren untere und obere Grenzen durch zwei Funktionen f und g gegeben sind durch

$$f(p) = p + z \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad \text{und} \quad g(p) = p - z \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},$$

mit $z = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$.

Ausgewertet werden diese Konfidenzeintervalle für einen **unbekannten** Parameterwert p durch Schnitte mit der Parallen zur x-Achse mit Abstand h.

Als geometrisches Hilfsmittel macht die Konfidenzellipse Abhängigkeiten von den Modellparametern n, γ und dem Stichprobenergebnis h sichtbar.

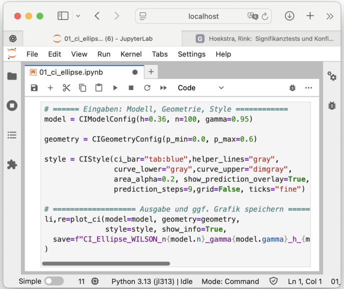
Der Unterschied zwischen Prognose- und Konfidenzintervallen wird erfahrbar:

- Prognoseintervalle: parallel zu y-Achse
- Konfidenzintervalle: parallel zu x-Achse

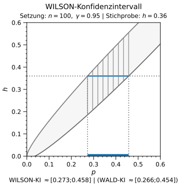
Zu jedem Stichprobenergebnis h kann ein Konfidenzintervall ermittelt werden. Aussagen zur Verfahrenswahrscheinlichkeit (Sicherheitswahrscheinlichkeit γ) können auf diese Weise nicht erhalten werden. Hierzu sind Wiederholungen nötig, die mit Simulationen verdeutlicht werden können.

Prognoseintervalle vs. Konfidenzintervalle (Konfidenzellipse)

Prognoseintervalle	Konfidenzintervalle
Bekannter Parameterwert p	Unbekannter Parameterwert p
Zufällige Größe $H = X/n$	Zufälliges Stichprobenergebnis h
Schnitte parallel zur y-Achse	Schnitte parallel zur x-Achse
Feste Grenzfunktionen f und g	Feste Grenzfunktionen f und g
γ bezieht sich auf H	γ ergibt sich erst durch Wiederholung



```python
# ====== Eingaben: Modell, Geometrie, Style ============
model = CIModelConfig(h=0.36, n=100, gamma=0.95)

geometry = CIGeometryConfig(p_min=0.0, p_max=0.6)

style = CIStyle(ci_bar="tab:blue",helper_lines="gray",
                curve_lower="gray",curve_upper="dimgray",
                area_alpha=0.2, show_prediction_overlay=True,
                prediction_steps=9,grid=False, ticks="fine")

# =================== Ausgabe und ggf. Grafik speichern =====
li,re=plot_ci(model=model, geometry=geometry,
              style=style, show_info=True,
  save=f"CI_Ellipse_WILSON_n{model.n}_gamma{model.gamma}_h_{m
)
```



Konfidenzintervalle - WILSON, WALD und Clopper-Pearson

WILSON: Normalapproximation, Grenzen durch Lösen der Gleichung $(h-p)^2 = \frac{z^2}{n}\,p(1-p)$

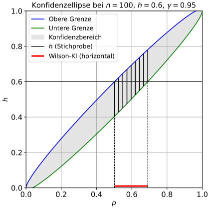
Konfidenzintervalle - WILSON, WALD und Clopper-Pearson

WILSON: Normalapproximation, Grenzen durch Lösen der Gleichung $(h-p)^2 = \frac{z^2}{n}\, p(1-p)$

$$h = p_u - z\sqrt{p_u(1-p_u)/n}$$

$$h = p_o + z\sqrt{p_o(1-p_0)/n}$$

$$p_{u,o} = (1-a)\cdot\tfrac{1}{2} + a\cdot h \mp z\cdot\sqrt{\tfrac{1}{4a}\cdot\tfrac{1-a}{a} + \tfrac{h(1-h)}{n}};\;\; a := \tfrac{1}{1+z^2/n}$$



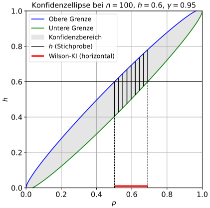
Konfidenzintervalle - WILSON, WALD und Clopper-Pearson

WILSON: Normalapproximation, Grenzen durch Lösen der Gleichung $(h-p)^2 = \frac{z^2}{n} p(1-p)$

$$h = p_u - z\sqrt{p_u(1-p_u)/n}$$

$$h = p_o + z\sqrt{p_o(1-p_0)/n}$$

$$p_{u,o} = (1-a)\cdot\tfrac{1}{2} + a\cdot h \mp z\cdot\sqrt{\tfrac{1}{4a}\cdot\tfrac{1-a}{a} + \tfrac{h(1-h)}{n}};\ \ a := \tfrac{1}{1+z^2/n}$$



WALD: Approximation der Lösungen von WILSON; in GeoGebra und Rechnern implementiert

$$\left[h - z_{1-\alpha/2}\sqrt{h(1-h)/n},\ h + z_{1-\alpha/2}\sqrt{h(1-h)/n}\right]$$

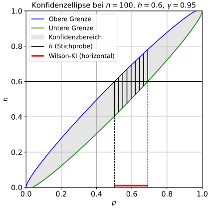
Konfidenzintervalle - WILSON, WALD und Clopper-Pearson

WILSON: Normalapproximation, Grenzen durch Lösen der Gleichung $(h-p)^2 = \frac{z^2}{n}\,p(1-p)$

$$h = p_u - z\sqrt{p_u(1-p_u)/n}$$

$$h = p_o + z\sqrt{p_o(1-p_o)/n}$$

$$p_{u,o} = (1-a)\cdot\tfrac{1}{2} + a\cdot h \mp z\cdot\sqrt{\tfrac{1}{4a}\cdot\tfrac{1-a}{a} + \tfrac{h(1-h)}{n}};\ \ a := \tfrac{1}{1+z^2/n}$$



WALD: Approximation der Lösungen von WILSON; in GeoGebra und Rechnern implementiert

$$\left[h - z_{1-\alpha/2}\sqrt{h(1-h)/n},\ h + z_{1-\alpha/2}\sqrt{h(1-h)/n}\right]$$

Clopper–Pearson (exakt) : Inversion der Binomialverteilung; garantiert $\mathbb{P}_p(\text{KI} \ni p) \geq 1-\alpha$ für alle p.
Grenzen über F-Verteilung

$$p_{\text{low}} = \frac{k}{k + (n-k+1)\,F_{1-\alpha/2;\ 2(n-k+1),\,2k}}, \qquad p_{\text{high}} = \frac{(k+1)\,F_{1-\alpha/2;\ 2(k+1),\,2(n-k)}}{(n-k) + (k+1)\,F_{1-\alpha/2;\ 2(k+1),\,2(n-k)}}.$$

Vergleich von Konfidenzintervallen

Tabelle 1: $n = 100;\ \gamma = 0{,}95$

k	$\hat{p}$	Wald	Wilson	Clopper–Pearson
30	0,3	[0,2102 ; 0,3898]	[0,2189 ; 0,3958]	[0,2124 ; 0,3998]
32	0,32	[0,2286 ; 0,4114]	[0,2367 ; 0,4166]	[0,2302 ; 0,4208]
34	0,34	[0,2472 ; 0,4328]	[0,2546 ; 0,4372]	[0,2482 ; 0,4415]
36	0,36	[0,2659 ; 0,4541]	[0,2727 ; 0,4576]	[0,2664 ; 0,4621]
37	0,37	[0,2754 ; 0,4646]	[0,2818 ; 0,4678]	[0,2756 ; 0,4724]
38	0,38	[0,2849 ; 0,4751]	[0,291 ; 0,4779]	[0,2848 ; 0,4825]
39	0,39	[0,2944 ; 0,4856]	[0,3002 ; 0,488]	[0,294 ; 0,4927]

Die drei Verfahren liefern leicht unterschiedliche, aber sehr ähnliche Intervalle. Wichtig ist nicht die Formel, sondern der gemeinsame Grundgedanke: Ein KI gibt an, welche p-Werte mit den Daten verträglich sind.

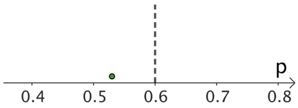
Vergleich von Konfidenzintervallen

Tabelle 2: $n = 1000;\ \gamma = 0{,}95$

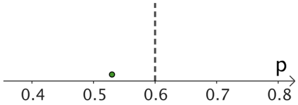
k	$\hat{p}$	Wald	Wilson	Clopper–Pearson
300	0,3	[0,2716 ; 0,3284]	[0,2724 ; 0,3291]	[0,2717 ; 0,3295]
320	0,32	[0,2911 ; 0,3489]	[0,2918 ; 0,3496]	[0,2912 ; 0,3499]
340	0,34	[0,3106 ; 0,3694]	[0,3113 ; 0,3699]	[0,3106 ; 0,3703]
360	0,36	[0,3302 ; 0,3898]	[0,3308 ; 0,3902]	[0,3302 ; 0,3906]
370	0,37	[0,3401 ; 0,3999]	[0,3406 ; 0,4004]	[0,34 ; 0,4008]
380	0,38	[0,3499 ; 0,4101]	[0,3504 ; 0,4105]	[0,3498 ; 0,4109]
390	0,39	[0,3598 ; 0,4202]	[0,3602 ; 0,4206]	[0,3596 ; 0,421]

Die drei Verfahren liefern leicht unterschiedliche, aber sehr ähnliche Intervalle. Wichtig ist nicht die Formel, sondern der gemeinsame Grundgedanke: Ein KI gibt an, welche p-Werte mit den Daten verträglich sind.

Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren

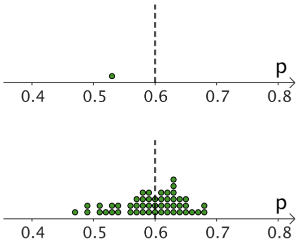


Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



Eine Stichprobe – ein Ergebnis in der Realität

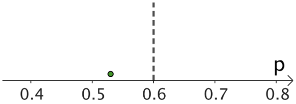
In der Realität beobachten wir genau einen Wert h. Der wahre Parameter liegt irgendwo in $[0, 1]$ – mehr wissen wir nicht.



Eine Stichprobe – ein Ergebnis in der Realität

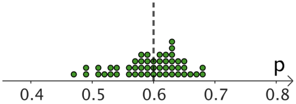
In der Realität beobachten wir genau einen Wert h. Der wahre Parameter liegt irgendwo in $[0, 1]$ – mehr wissen wir nicht.

Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



Eine Stichprobe – ein Ergebnis in der Realität

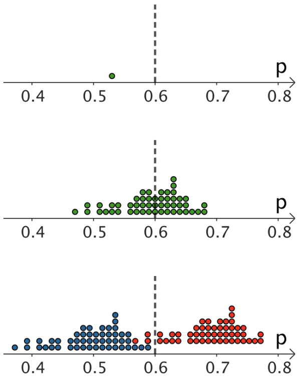
In der Realität beobachten wir genau einen Wert *h*. Der wahre Parameter liegt irgendwo in $[0,1]$ – mehr wissen wir nicht.



Gedankenexperiment im Modell

Im Modell denken wir viele mögliche Stichproben. So entsteht eine Verteilung möglicher Ergebnisse in unserem Kopf.

Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



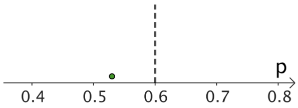
Eine Stichprobe – ein Ergebnis in der Realität

In der Realität beobachten wir genau einen Wert *h*. Der wahre Parameter liegt irgendwo in $[0, 1]$ – mehr wissen wir nicht.

Gedankenexperiment im Modell

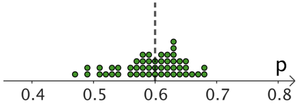
Im Modell denken wir viele mögliche Stichproben. So entsteht eine Verteilung möglicher Ergebnisse in unserem Kopf.

Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



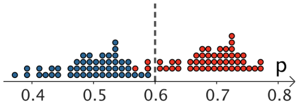
Eine Stichprobe – ein Ergebnis in der Realität

In der Realität beobachten wir genau einen Wert h. Der wahre Parameter liegt irgendwo in $[0, 1]$ – mehr wissen wir nicht.



Gedankenexperiment im Modell

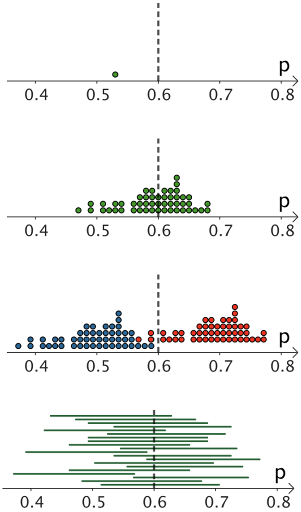
Im Modell denken wir viele mögliche Stichproben. So entsteht eine Verteilung möglicher Ergebnisse in unserem Kopf.



Grenzen durch gedachte Extremfälle im Modell

Um den unbekannten Parameter einzugrenzen, betrachten wir zu jeder möglichen Stichprobe die kleinste und größte noch plausible Lage.

Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



Eine Stichprobe – ein Ergebnis in der Realität

In der Realität beobachten wir genau einen Wert h. Der wahre Parameter liegt irgendwo in $[0, 1]$ – mehr wissen wir nicht.

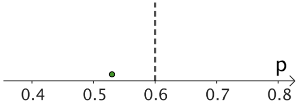
Gedankenexperiment im Modell

Im Modell denken wir viele mögliche Stichproben. So entsteht eine Verteilung möglicher Ergebnisse in unserem Kopf.

Grenzen durch gedachte Extremfälle im Modell

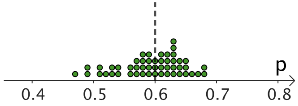
Um den unbekannten Parameter einzugrenzen, betrachten wir zu jeder möglichen Stichprobe die kleinste und größte noch plausible Lage.

Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



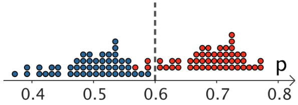
Eine Stichprobe – ein Ergebnis in der Realität

In der Realität beobachten wir genau einen Wert h. Der wahre Parameter liegt irgendwo in $[0, 1]$ – mehr wissen wir nicht.



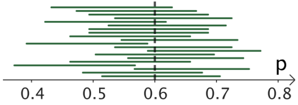
Gedankenexperiment im Modell

Im Modell denken wir viele mögliche Stichproben. So entsteht eine Verteilung möglicher Ergebnisse in unserem Kopf.



Grenzen durch gedachte Extremfälle im Modell

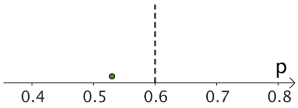
Um den unbekannten Parameter einzugrenzen, betrachten wir zu jeder möglichen Stichprobe die kleinste und größte noch plausible Lage.



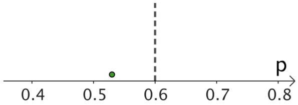
Das Intervall als Verfahren im Modell

Wiederholen wir dieses Vorgehen gedanklich, so überdecken die entstehenden Intervalle den wahren Parameter in einem festen Anteil der Fälle.

Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren

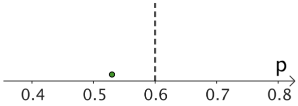


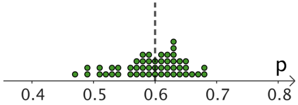
Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



Realisation

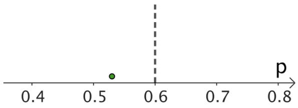
Ein konkretes Intervall zu einem beobachteten Stichprobenergebnis h.





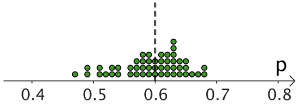
Realisation

Ein konkretes Intervall zu einem beobachteten Stichprobenergebnis h.



Realisation

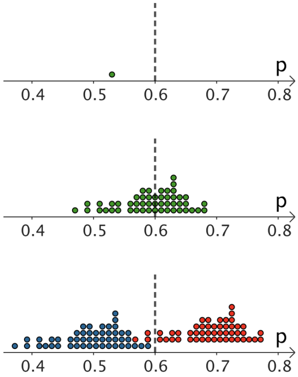
Ein konkretes Intervall zu einem beobachteten Stichprobenergebnis h.



Zufallsgröße

Das Stichprobenergebnis wird als Zufallsgröße $H = X/n$ modelliert.

Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren

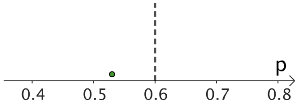


Realisation

Ein konkretes Intervall zu einem beobachteten Stichprobenergebnis h.

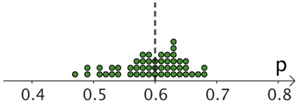
Zufallsgröße

Das Stichprobenergebnis wird als Zufallsgröße $H = X/n$ modelliert.



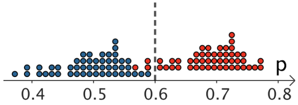
Realisation

Ein konkretes Intervall zu einem beobachteten Stichprobenergebnis h.



Zufallsgröße

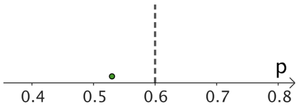
Das Stichprobenergebnis wird als Zufallsgröße $H = X/n$ modelliert.



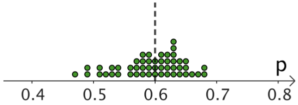
Zufällige Intervallgrenzen

Die linke und rechte Grenze $L(H)$ und $R(H)$ sind selbst Zufallsgrößen.

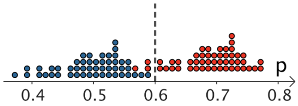
Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



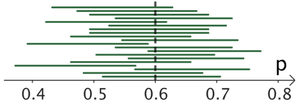
Realisation
Ein konkretes Intervall zu einem beobachteten Stichprobenergebnis h.



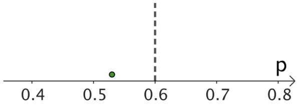
Zufallsgröße
Das Stichprobenergebnis wird als Zufallsgröße $H = X/n$ modelliert.



Zufällige Intervallgrenzen
Die linke und rechte Grenze $L(H)$ und $R(H)$ sind selbst Zufallsgrößen.

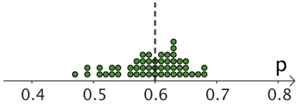


Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



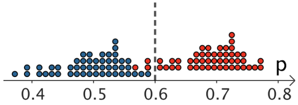
Realisation

Ein konkretes Intervall zu einem beobachteten Stichprobenergebnis h.



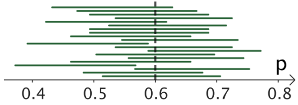
Zufallsgröße

Das Stichprobenergebnis wird als Zufallsgröße $H = X/n$ modelliert.



Zufällige Intervallgrenzen

Die linke und rechte Grenze $L(H)$ und $R(H)$ sind selbst Zufallsgrößen.



Konfidenzverfahren

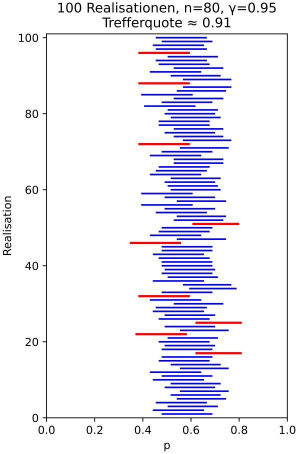
Das Verfahren ist so konstruiert, dass gilt

$$\mathbb{P}_p\big([L(H), R(H)] \ni p\big) = 0{,}95.$$

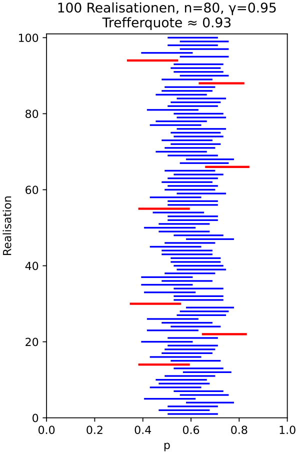
•

Simulationen - der Weg zum Verständnis

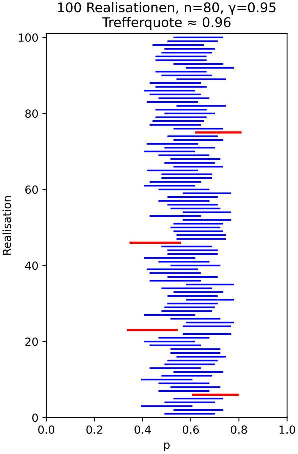
Anteil der KI, die den wahren Parameter enthalten



Anteil der KI, die den wahren Parameter enthalten

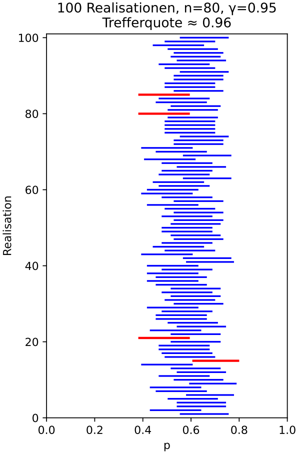


Anteil der KI, die den wahren Parameter enthalten



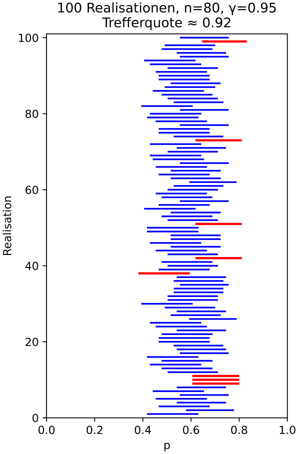
Simulationen - der Weg zum Verständnis

Anteil der KI, die den wahren Parameter enthalten



Simulationen - der Weg zum Verständnis

Anteil der KI, die den wahren Parameter enthalten

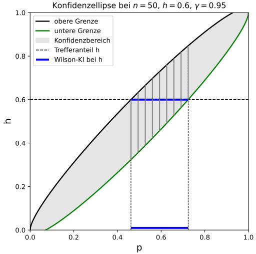


Wo steckt hier eigentlich der Zufall?

- Der Zufall steckt **nicht** im Parameter.
- Er steckt **nicht** im Vertrauen.
- Er steckt **nicht** im konkreten Intervall.

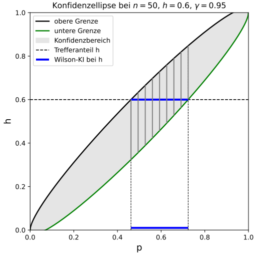
Wo steckt hier eigentlich der Zufall?

- Der Zufall steckt **nicht** im Parameter.
- Er steckt **nicht** im Vertrauen.
- Er steckt **nicht** im konkreten Intervall.



Wo steckt hier eigentlich der Zufall?

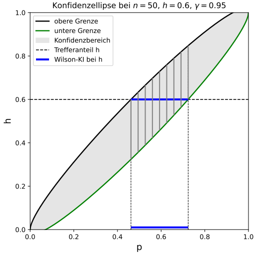
- Der Zufall steckt **nicht** im Parameter.
- Er steckt **nicht** im Vertrauen.
- Er steckt **nicht** im konkreten Intervall.

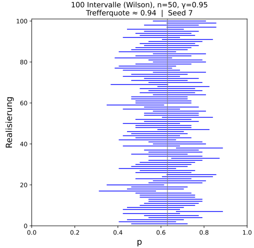


Er steckt im **Gedanken der Wiederholung.**

Wo steckt hier eigentlich der Zufall?

- Der Zufall steckt **nicht** im Parameter.
- Er steckt **nicht** im Vertrauen.
- Er steckt **nicht** im konkreten Intervall.





Er steckt im **Gedanken der Wiederholung.**

„Ich habe nur eine Stichprobe - nur eine einzige, mehr nicht.“

$\rightarrow$ radikale Realitätsakzeptanz, kein implizites *man könnte ja noch* …

„Ich habe nur eine Stichprobe - nur eine einzige, mehr nicht.“

$\rightarrow$ radikale Realitätsakzeptanz, kein implizites *man könnte ja noch* ...

„Ich vertraue dem berechneten Intervall, dass es den Parameter einfängt.“

$\rightarrow$ Vertrauen nicht in das Ergebnis, sondern in das Verfahren (Perspektivwechsel).

„Ich habe nur eine Stichprobe - nur eine einzige, mehr nicht.“

$\rightarrow$ radikale Realitätsakzeptanz, kein implizites *man könnte ja noch* ...

„Ich vertraue dem berechneten Intervall, dass es den Parameter einfängt.“

$\rightarrow$ Vertrauen nicht in das Ergebnis, sondern in das Verfahren (Perspektivwechsel).

„Ich vertraue, dass es zu den $95\,\%$ *aller gehört.“*

$\rightarrow$ Die $95\,\%$ klassifizieren, sie sind nicht probabilistisch.
Das Intervall ist eines von vielen möglichen. Ich weiß nicht, zu welcher Sorte es gehört.

„Ich habe nur eine Stichprobe - nur eine einzige, mehr nicht.“

$\rightarrow$ radikale Realitätsakzeptanz, kein implizites *man könnte ja noch* ...

„Ich vertraue dem berechneten Intervall, dass es den Parameter einfängt.“

$\rightarrow$ Vertrauen nicht in das Ergebnis, sondern in das Verfahren (Perspektivwechsel).

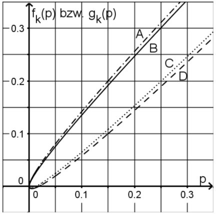
„Ich vertraue, dass es zu den $95\,\%$ aller gehört.“

$\rightarrow$ Die $95\,\%$ klassifizieren, sie sind nicht probabilistisch.
Das Intervall ist eines von vielen möglichen. Ich weiß nicht, zu welcher Sorte es gehört.

„Mehr kann ich nicht verlangen. Mehr geht nicht.“

$\rightarrow$ Das ist keine Schwäche, sondern epistemische Bescheidenheit.

Auf der Grundlage der Stichprobe können mithilfe der abgebildeten Graphen A, B, C und D für den zu ermittelnden Schätzwert Konfidenzintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 % und 95 % bestimmt werden.



Jeder der Graphen lässt sich durch eine der folgenden Funktionen beschreiben:

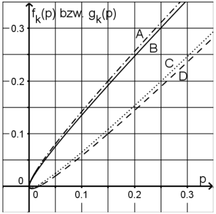
$$f_k : p \mapsto p - k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \qquad g_k : p \mapsto p + k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$

Dabei ist $p \in [0;1]$, $k \in \mathbb{R}^+$ und n der Umfang der Stichprobe.

f Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Entscheiden Sie, ob die Aussage „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft." durch das bestimmte Konfidenzintervall gestützt werden kann. 3

g Der Mitarbeiter zieht eine zweite Stichprobe vom Umfang $2n$. Auch in dieser Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft. Begründen Sie, dass die Länge des zugehörigen Konfidenzintervalls im Vergleich zur ersten Stichprobe – bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit – geringer, aber nicht halb so groß ist. 3

Auf der Grundlage der Stichprobe können mithilfe der abgebildeten Graphen A, B, C und D für den zu ermittelnden Schätzwert Konfidenzintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 % und 95 % bestimmt werden.



Jeder der Graphen lässt sich durch eine der folgenden Funktionen beschreiben:

$$f_k : p \mapsto p - k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \qquad g_k : p \mapsto p + k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$

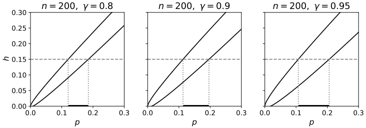
Dabei ist $p \in [0;1]$, $k \in \mathbb{R}^+$ und n der Umfang der Stichprobe.

f Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Entscheiden Sie, ob die Aussage „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft." durch das bestimmte Konfidenzintervall gestützt werden kann. 3

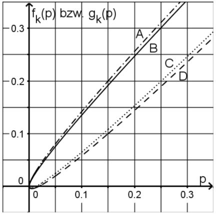
g Der Mitarbeiter zieht eine zweite Stichprobe vom Umfang $2n$. Auch in dieser Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft. Begründen Sie, dass die Länge des zugehörigen Konfidenzintervalls im Vergleich zur ersten Stichprobe – bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit – geringer, aber nicht halb so groß ist. 3

Lösungshinweise mit Variationen zu f)

Zeichnen: gleiches n, verschiedenes γ



Auf der Grundlage der Stichprobe können mithilfe der abgebildeten Graphen A, B, C und D für den zu ermittelnden Schätzwert Konfidenzintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 % und 95 % bestimmt werden.



Jeder der Graphen lässt sich durch eine der folgenden Funktionen beschreiben:

$$f_k : p \mapsto p - k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \qquad g_k : p \mapsto p + k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$

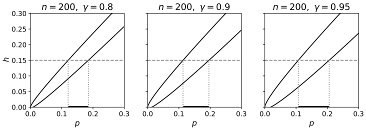
Dabei ist $p \in [0;1]$, $k \in \mathbb{R}^+$ und n der Umfang der Stichprobe.

f Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Entscheiden Sie, ob die Aussage „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft." durch das bestimmte Konfidenzintervall gestützt werden kann. 3

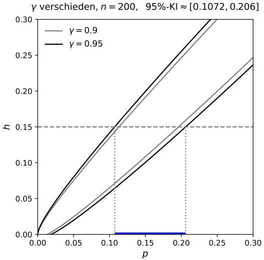
g Der Mitarbeiter zieht eine zweite Stichprobe vom Umfang $2n$. Auch in dieser Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft. Begründen Sie, dass die Länge des zugehörigen Konfidenzintervalls im Vergleich zur ersten Stichprobe – bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit – geringer, aber nicht halb so groß ist. 3

Lösungshinweise mit Variationen zu f)

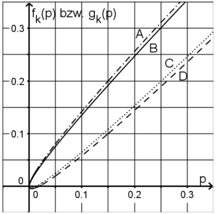
Zeichnen: gleiches n, verschiedenes γ



Zeichnen: Konfidenzellipsen



Auf der Grundlage der Stichprobe können mithilfe der abgebildeten Graphen A, B, C und D für den zu ermittelnden Schätzwert Konfidenzintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 % und 95 % bestimmt werden.



Jeder der Graphen lässt sich durch eine der folgenden Funktionen beschreiben:

$$f_k : p \mapsto p - k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \qquad g_k : p \mapsto p + k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$

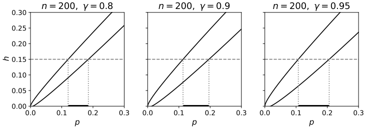
Dabei ist $p \in [0;1]$, $k \in \mathbb{R}^+$ und n der Umfang der Stichprobe.

f Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Entscheiden Sie, ob die Aussage „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft." durch das bestimmte Konfidenzintervall gestützt werden kann. 3

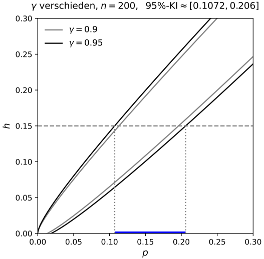
g Der Mitarbeiter zieht eine zweite Stichprobe vom Umfang 2n. Auch in dieser Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft. Begründen Sie, dass die Länge des zugehörigen Konfidenzintervalls im Vergleich zur ersten Stichprobe – bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit – geringer, aber nicht halb so groß ist. 3

Lösungshinweise mit Variationen zu f)

Zeichnen: gleiches n, verschiedenes γ

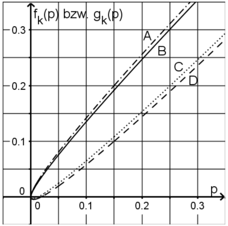


Zeichnen: Konfidenzellipsen



Erläutern: $0{,}2 \in 95\%$-KI $\rightarrow$ Aussage kann gestützt werden

Auf der Grundlage der Stichprobe können mithilfe der abgebildeten Graphen A, B, C und D für den zu ermittelnden Schätzwert Konfidenzintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 % und 95 % bestimmt werden.



Jeder der Graphen lässt sich durch eine der folgenden Funktionen beschreiben:

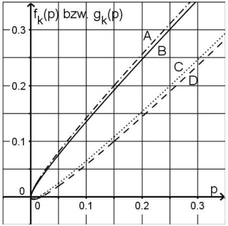
$$f_k : p \mapsto p - k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \qquad g_k : p \mapsto p + k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$

Dabei ist $p \in [0;1]$, $k \in \mathbb{R}^+$ und n der Umfang der Stichprobe.

f Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Entscheiden Sie, ob die Aussage „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft." durch das bestimmte Konfidenzintervall gestützt werden kann. 3

g Der Mitarbeiter zieht eine zweite Stichprobe vom Umfang $2n$. Auch in dieser Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft. Begründen Sie, dass die Länge des zugehörigen Konfidenzintervalls im Vergleich zur ersten Stichprobe – bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit – geringer, aber nicht halb so groß ist. 3

Auf der Grundlage der Stichprobe können mithilfe der abgebildeten Graphen A, B, C und D für den zu ermittelnden Schätzwert Konfidenzintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 % und 95 % bestimmt werden.



Jeder der Graphen lässt sich durch eine der folgenden Funktionen beschreiben:

$$f_k : p \mapsto p - k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \qquad g_k : p \mapsto p + k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$

Dabei ist $p \in [0;1]$, $k \in \mathbb{R}^+$ und n der Umfang der Stichprobe.

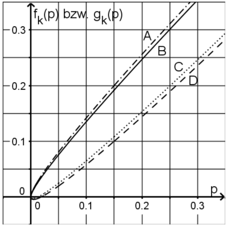
f	Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Entscheiden Sie, ob die Aussage „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft." durch das bestimmte Konfidenzintervall gestützt werden kann.	3
g	Der Mitarbeiter zieht eine zweite Stichprobe vom Umfang $2n$. Auch in dieser Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft. Begründen Sie, dass die Länge des zugehörigen Konfidenzintervalls im Vergleich zur ersten Stichprobe – bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit – geringer, aber nicht halb so groß ist.	3

Lösungshinweise zu g)

Erwartungshorizon (IQB):

g	Für die Länge des Konfidenzintervalls ergibt sich: $2k \cdot \sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{2n}} = 2k \cdot \sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ Es gilt: $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{1}{2}$	3

Auf der Grundlage der Stichprobe können mithilfe der abgebildeten Graphen A, B, C und D für den zu ermittelnden Schätzwert Konfidenzintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 % und 95 % bestimmt werden.



Jeder der Graphen lässt sich durch eine der folgenden Funktionen beschreiben:

$$f_k : p \mapsto p - k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \qquad g_k : p \mapsto p + k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$

Dabei ist $p \in [0;1]$, $k \in \mathbb{R}^+$ und n der Umfang der Stichprobe.

f Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Entscheiden Sie, ob die Aussage „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft." durch das bestimmte Konfidenzintervall gestützt werden kann. 3

g Der Mitarbeiter zieht eine zweite Stichprobe vom Umfang $2n$. Auch in dieser Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft. Begründen Sie, dass die Länge des zugehörigen Konfidenzintervalls im Vergleich zur ersten Stichprobe – bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit – geringer, aber nicht halb so groß ist. 3

Lösungshinweise zu g)

Erwartungshorizon (IQB):

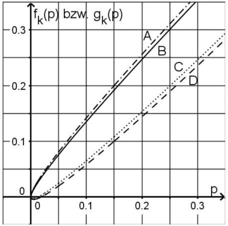
g	Für die Länge des Konfidenzintervalls ergibt sich: $2k \cdot \sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{2n}} = 2k \cdot \sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ Es gilt: $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{1}{2}$	3

Vorsicht: Das gilt nur für WALD-Konfidenzintervalle.

WALD-KI: $\left[h - k \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\,,\ h + k \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\right]$

$\rightarrow$ Länge des WALD-KI: $2k \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$

Auf der Grundlage der Stichprobe können mithilfe der abgebildeten Graphen A, B, C und D für den zu ermittelnden Schätzwert Konfidenzintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 % und 95 % bestimmt werden.



Jeder der Graphen lässt sich durch eine der folgenden Funktionen beschreiben:

$$f_k: p \mapsto p - k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \qquad g_k: p \mapsto p + k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$

Dabei ist $p \in [0;1]$, $k \in \mathbb{R}^+$ und n der Umfang der Stichprobe.

f Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Entscheiden Sie, ob die Aussage „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft." durch das bestimmte Konfidenzintervall gestützt werden kann. 3

g Der Mitarbeiter zieht eine zweite Stichprobe vom Umfang $2n$. Auch in dieser Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft. Begründen Sie, dass die Länge des zugehörigen Konfidenzintervalls im Vergleich zur ersten Stichprobe – bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit – geringer, aber nicht halb so groß ist. 3

Lösungshinweise zu g)

Erwartungshorizon (IQB):

g	Für die Länge des Konfidenzintervalls ergibt sich: $2k \cdot \sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{2n}} = 2k \cdot \sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ Es gilt: $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{1}{2}$	3

Vorsicht: Das gilt nur für WALD-Konfidenzintervalle.

WALD-KI: $\left[h - k \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\ ,\ h + k \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\right]$

$\rightarrow$ Länge des WALD-KI: $2k \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$

WILSON-KI:

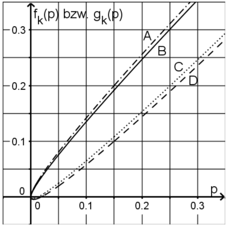
Grenzen dieses Intervalls sind Lösungen von

$h = p_u + k \cdot \sqrt{\frac{p_u(1-p_u)}{n}}$; $\quad h = p_o - k \cdot \sqrt{\frac{p_o(1-p_o)}{n}}$

$\rightarrow$ Länge des WILSON-KI:

$$\frac{n}{k^2+n} \cdot 2k \cdot \sqrt{\left(\frac{k}{2n}\right)^2 + \frac{h(1-h)}{n}}$$

Auf der Grundlage der Stichprobe können mithilfe der abgebildeten Graphen A, B, C und D für den zu ermittelnden Schätzwert Konfidenzintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 % und 95 % bestimmt werden.



Jeder der Graphen lässt sich durch eine der folgenden Funktionen beschreiben:

$$f_k : p \mapsto p - k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \qquad g_k : p \mapsto p + k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$

Dabei ist $p \in [0;1]$, $k \in \mathbb{R}^+$ und n der Umfang der Stichprobe.

f Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Entscheiden Sie, ob die Aussage „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft." durch das bestimmte Konfidenzintervall gestützt werden kann. 3

g Der Mitarbeiter zieht eine zweite Stichprobe vom Umfang $2n$. Auch in dieser Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft. Begründen Sie, dass die Länge des zugehörigen Konfidenzintervalls im Vergleich zur ersten Stichprobe – bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit – geringer, aber nicht halb so groß ist. 3

Lösungshinweise zu g)

Erwartungshorizon (IQB):

g	Für die Länge des Konfidenzintervalls ergibt sich: $2k \cdot \sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{2n}} = 2k \cdot \sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ Es gilt: $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{1}{2}$	3

Vorsicht: Das gilt nur für WALD-Konfidenzintervalle.

WALD-KI: $\left[h - k \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\ ,\ h + k \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\right]$

$\rightarrow$ Länge des WALD-KI: $2k \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$

WILSON-KI:
Grenzen dieses Intervalls sind Lösungen von

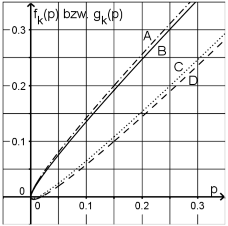
$$h = p_u + k \cdot \sqrt{\frac{p_u(1-p_u)}{n}}; \quad h = p_o - k \cdot \sqrt{\frac{p_o(1-p_o)}{n}}$$

$\rightarrow$ Länge des WILSON-KI:

$$\frac{n}{k^2+n} \cdot 2k \cdot \sqrt{\left(\frac{k}{2n}\right)^2 + \frac{h(1-h)}{n}}$$

sehr gute Näherung ($n \gg k$): $2k \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$

Auf der Grundlage der Stichprobe können mithilfe der abgebildeten Graphen A, B, C und D für den zu ermittelnden Schätzwert Konfidenzintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 % und 95 % bestimmt werden.



Jeder der Graphen lässt sich durch eine der folgenden Funktionen beschreiben:

$$f_k : p \mapsto p - k \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \qquad g_k : p \mapsto p + k \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

Dabei ist $p \in [0;1]$, $k \in \mathbb{R}^+$ und n der Umfang der Stichprobe.

f Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Entscheiden Sie, ob die Aussage „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft." durch das bestimmte Konfidenzintervall gestützt werden kann. 3

g Der Mitarbeiter zieht eine zweite Stichprobe vom Umfang $2n$. Auch in dieser Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft. Begründen Sie, dass die Länge des zugehörigen Konfidenzintervalls im Vergleich zur ersten Stichprobe – bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit – geringer, aber nicht halb so groß ist. 3

Lösungshinweise zu g)

Erwartungshorizon (IQB):

g	Für die Länge des Konfidenzintervalls ergibt sich: $2k \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{2n}} = 2k \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ Es gilt: $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{1}{2}$	3

Vorsicht: Das gilt nur für WALD-Konfidenzintervalle.

WALD-KI: $\left[h - k \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} \,,\, h + k \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} \right]$

$\rightarrow$ Länge des WALD-KI: $2k \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$

WILSON-KI:
Grenzen dieses Intervalls sind Lösungen von

$$h = p_u + k \cdot \sqrt{\frac{p_u(1-p_u)}{n}}; \quad h = p_o - k \cdot \sqrt{\frac{p_o(1-p_o)}{n}}$$

$\rightarrow$ Länge des WILSON-KI:

$$\frac{n}{k^2+n} \cdot 2k \cdot \sqrt{\left(\frac{k}{2n}\right)^2 + \frac{h(1-h)}{n}}$$

sehr gute Näherung ($n \gg k$): $2k \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$

WALD-KI: Näherung von WILSON-KI
WILSON-KI: $\text{Bin}(n,p) \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$

Kurz nach einer Änderung im Herstellungsverfahren stellt das Unternehmen den Anteil fehlerhafter Geräte von 25 % infrage. Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % einen Schätzwert für den Anteil fehlerhafter Geräte zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 100 Geräten betrachtet. Abbildung 1 zeigt die Graphen der folgenden für $p \in [0;1]$ definierten Funktionen:

$$f: p \mapsto p - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}} \qquad g: p \mapsto p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}}$$

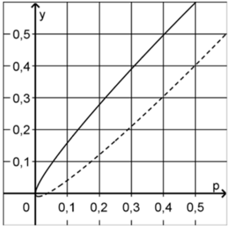


Abb. 1

d Bestimmen Sie grafisch alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Geräte in der Stichprobe, für die bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % jeweils Anlass dazu bestehen würde, die Korrektheit des gegebenen Anteils fehlerhafter Geräte infrage zu stellen. 3

e Die betrachtete Stichprobe enthält 19 fehlerhafte Geräte. Bestimmen Sie grafisch das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. 3

Kurz nach einer Änderung im Herstellungsverfahren stellt das Unternehmen den Anteil fehlerhafter Geräte von 25 % infrage. Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % einen Schätzwert für den Anteil fehlerhafter Geräte zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 100 Geräten betrachtet. Abbildung 1 zeigt die Graphen der folgenden für $p \in [0;1]$ definierten Funktionen:

$$f: p \mapsto p - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{100}} \qquad g: p \mapsto p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{100}}$$

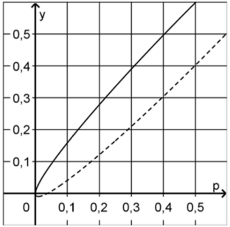


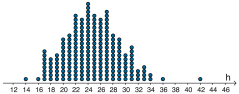
Abb. 1

d Bestimmen Sie grafisch alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Geräte in der Stichprobe, für die bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % jeweils Anlass dazu bestehen würde, die Korrektheit des gegebenen Anteils fehlerhafter Geräte infrage zu stellen. 3

e Die betrachtete Stichprobe enthält 19 fehlerhafte Geräte. Bestimmen Sie grafisch das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. 3

Lösungshinweise mit Variationen zu d)

Simulieren: 100 Simulationen mit $p = 0{,}25$ und $n = 100$



Kurz nach einer Änderung im Herstellungsverfahren stellt das Unternehmen den Anteil fehlerhafter Geräte von 25 % infrage. Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % einen Schätzwert für den Anteil fehlerhafter Geräte zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 100 Geräten betrachtet. Abbildung 1 zeigt die Graphen der folgenden für $p \in [0;1]$ definierten Funktionen:

$$f: p \mapsto p - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{100}} \qquad g: p \mapsto p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}$$

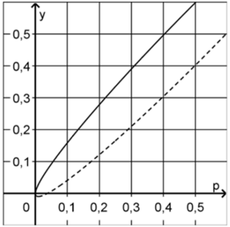


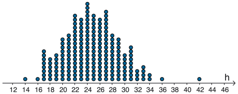
Abb. 1

d Bestimmen Sie grafisch alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Geräte in der Stichprobe, für die bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % jeweils Anlass dazu bestehen würde, die Korrektheit des gegebenen Anteils fehlerhafter Geräte infrage zu stellen. 3

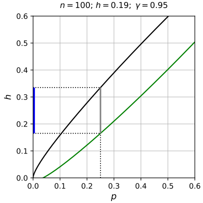
e Die betrachtete Stichprobe enthält 19 fehlerhafte Geräte. Bestimmen Sie grafisch das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. 3

Lösungshinweise mit Variationen zu d)

Simulieren: 100 Simulationen mit $p = 0{,}25$ und $n = 100$



Zeichnen: Konfidenzellipse



IQB-Pool für das Jahr 2019 - PT B - WTR - Aufgabe 1d), 1e)

Kurz nach einer Änderung im Herstellungsverfahren stellt das Unternehmen den Anteil fehlerhafter Geräte von 25 % infrage. Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % einen Schätzwert für den Anteil fehlerhafter Geräte zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 100 Geräten betrachtet. Abbildung 1 zeigt die Graphen der folgenden für $p \in [0;1]$ definierten Funktionen:

$$f: p \mapsto p - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{100}} \qquad g: p \mapsto p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{100}}$$

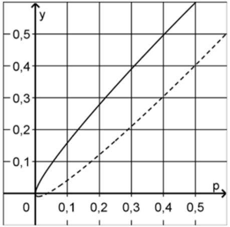


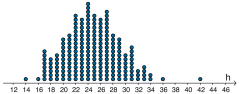
Abb. 1

d Bestimmen Sie grafisch alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Geräte in der Stichprobe, für die bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % jeweils Anlass dazu bestehen würde, die Korrektheit des gegebenen Anteils fehlerhafter Geräte infrage zu stellen. 3

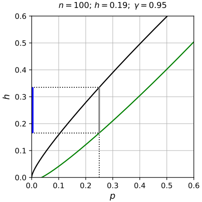
e Die betrachtete Stichprobe enthält 19 fehlerhafte Geräte. Bestimmen Sie grafisch das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. 3

Lösungshinweise mit Variationen zu d)

Simulieren: 100 Simulationen mit $p = 0{,}25$ und $n = 100$



Zeichnen: Konfidenzellipse



Rechnen: 95 %-Prognoseintervall:

$$\left[np - 1{,}96\sqrt{np(1-p)};\, np + 1{,}96\sqrt{np(1-p)}\right]$$
$$[16{,}51; 33{,}49] \to [17; 33]$$

Kurz nach einer Änderung im Herstellungsverfahren stellt das Unternehmen den Anteil fehlerhafter Geräte von 25 % infrage. Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % einen Schätzwert für den Anteil fehlerhafter Geräte zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 100 Geräten betrachtet. Abbildung 1 zeigt die Graphen der folgenden für $p \in [0;1]$ definierten Funktionen:

$$f: p \mapsto p - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}} \qquad g: p \mapsto p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}}$$

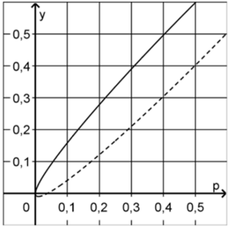


Abb. 1

d Bestimmen Sie grafisch alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Geräte in der Stichprobe, für die bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % jeweils Anlass dazu bestehen würde, die Korrektheit des gegebenen Anteils fehlerhafter Geräte infrage zu stellen. 3

e Die betrachtete Stichprobe enthält 19 fehlerhafte Geräte. Bestimmen Sie grafisch das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. 3

Kurz nach einer Änderung im Herstellungsverfahren stellt das Unternehmen den Anteil fehlerhafter Geräte von 25 % infrage. Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % einen Schätzwert für den Anteil fehlerhafter Geräte zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 100 Geräten betrachtet. Abbildung 1 zeigt die Graphen der folgenden für $p \in [0;1]$ definierten Funktionen:

$$f: p \mapsto p - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{100}} \qquad g: p \mapsto p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{100}}$$

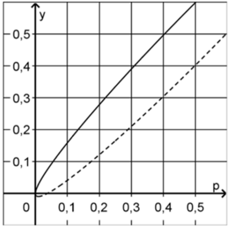


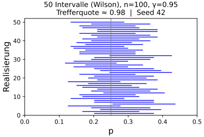
Abb. 1

d Bestimmen Sie grafisch alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Geräte in der Stichprobe, für die bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % jeweils Anlass dazu bestehen würde, die Korrektheit des gegebenen Anteils fehlerhafter Geräte infrage zu stellen. 3

e Die betrachtete Stichprobe enthält 19 fehlerhafte Geräte. Bestimmen Sie grafisch das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. 3

Lösungshinweise mit Variationen zu e)

Simulieren: 50 Simulationen mit $p = 0{,}25$; n=100; γ=0,95



Kurz nach einer Änderung im Herstellungsverfahren stellt das Unternehmen den Anteil fehlerhafter Geräte von 25 % infrage. Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % einen Schätzwert für den Anteil fehlerhafter Geräte zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 100 Geräten betrachtet. Abbildung 1 zeigt die Graphen der folgenden für $p \in [0;1]$ definierten Funktionen:

$$f: p \mapsto p - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{100}} \qquad g: p \mapsto p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{100}}$$

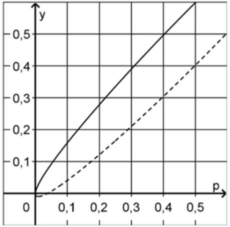


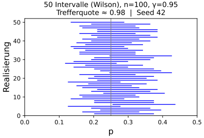
Abb. 1

d Bestimmen Sie grafisch alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Geräte in der Stichprobe, für die bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % jeweils Anlass dazu bestehen würde, die Korrektheit des gegebenen Anteils fehlerhafter Geräte infrage zu stellen. 3

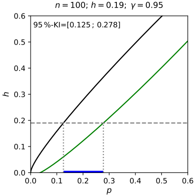
e Die betrachtete Stichprobe enthält 19 fehlerhafte Geräte. Bestimmen Sie grafisch das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. 3

Lösungshinweise mit Variationen zu e)

Simulieren: 50 Simulationen mit $p = 0{,}25$; n=100; γ=0,95



Zeichnen: Konfidenzellipse



Kurz nach einer Änderung im Herstellungsverfahren stellt das Unternehmen den Anteil fehlerhafter Geräte von 25 % infrage. Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % einen Schätzwert für den Anteil fehlerhafter Geräte zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 100 Geräten betrachtet. Abbildung 1 zeigt die Graphen der folgenden für $p \in [0;1]$ definierten Funktionen:

$$f: p \mapsto p - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}} \qquad g: p \mapsto p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}}$$

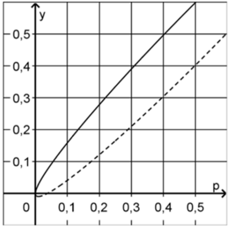


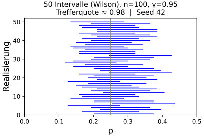
Abb. 1

d Bestimmen Sie grafisch alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Geräte in der Stichprobe, für die bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % jeweils Anlass dazu bestehen würde, die Korrektheit des gegebenen Anteils fehlerhafter Geräte infrage zu stellen. 3

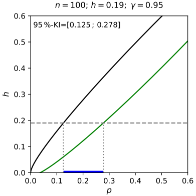
e Die betrachtete Stichprobe enthält 19 fehlerhafte Geräte. Bestimmen Sie grafisch das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. 3

Lösungshinweise mit Variationen zu e)

Simulieren: 50 Simulationen mit $p = 0{,}25$; n=100; γ=0,95



Zeichnen: Konfidenzellipse



Rechnen: $95\,\%$-WILSON-Konfidenzintervall:

$$h = p + 1{,}96\sqrt{p(1-p)/n}; \;\; p_l \approx 0{,}125$$
$$h = p - 1{,}96\sqrt{p(1-p)/n}; \;\; p_r \approx 0{,}278$$

Anwendungen - eine kleine Auswahl

Methodik-Politbarometer, Forschungsgruppe Wahlen

forschungsgruppe.de

Forschungsgruppe Wahlen > Umfragen > Politbarometer > Methodik

Methodik der Politbarometer-Untersuchungen

Die Forschungsgruppe Wahlen e.V. führt seit 1977 regelmäßig für das ZDF Politbarometer-Umfragen durch. Diese erfassen Meinungen und Einstellungen der wahlberechtigten Bevölkerung zu aktuellen Ereignissen, zu Parteien und Politikern, aber auch zu allgemeinen gesellschaftlichen Entwicklungen.

Erhebung
Die Daten für das Politbarometer werden jeweils von Dienstag bis Donnerstag erhoben und am Freitag werden die Ergebnisse veröffentlicht. Dabei werden in den westlichen Bundesländern jeweils ca. 1.000 zufällig ausgewählte Wahlberechtigte befragt, in den östlichen Bundesländern ca. 500. Eine Überquotierung des Ostens erfolgt, um eigenständige Aussagen über die ostdeutschen Länder treffen zu können. Die Zusammenfassung dieser Befragten führt nach Ausgleich der Überquotierung im Osten rechnerisch zu ca. 1.250 Interviews.

Zufallsauswahl
Entscheidend ist dabei, dass die gewonnenen Ergebnisse repräsentativ für die Gesamtheit der wahlberechtigten Bevölkerung in Deutschland sind. Dies wird durch eine strenge Zufallsauswahl bei der Bestimmung der zu befragenden Personen gewährleistet. Die Daten werden dabei mit drei verschiedenen Erhebungsverfahren und Teilstichproben gewonnen: Persönlich telefonisch im Festnetz und am Mobiltelefon sowie Online via SMS-Einladung.

Für die Stichprobe wird im Bereich der Festnetzanschlüsse eine zweistufige Zufallsauswahl verwendet: Zunächst werden Privathaushalte ausgewählt, dann eine Person eines jeden Haushalts. Hierbei wird diejenige Person befragt, die von den Wahlberechtigten im Haushalt als letzte Geburtstag hatte. Die Auswahlgrundlage umfasst auch nicht im Telefonbuch eingetragene Haushalte, die prinzipiell über eine Festnetznummer telefonisch erreichbar sind. Basis sind die im Telefonbuch eingetragenen Privatnummern, bei denen die letzten drei Ziffern gelöscht und anschließend mit den Zahlen '000' bis '999' aufgefüllt werden. Dieser Datenbestand wird durch Hinzuziehung der Informationen der Bundesnetzagentur über die (Teil-)Belegung von Rufnummernblöcken und des Branchenverzeichnisses kritisch geprüft und entsprechend bereinigt.

Bei der persönlichen Befragung im Bereich der Mobilfunknummern führen die zufallsgenerierten Mobilfunknummern direkt zu der zu befragenden Person.

In einer weiteren Teilstichprobe zufallsgenerierter Mobilfunknummern erhalten zu befragende Wahlberechtigte per SMS einen ausführbaren Link, der unmittelbar zum einmalig online auszufüllenden Fragebogen führt.

Gewichtung
Die Auswertung der Studie erfolgt gewichtet. Zunächst werden die designbedingten Unterschiede (Zahl der Nummern für Telefongespräche, Anzahl der Zielpersonen im Haushalt) in den Auswahlwahrscheinlichkeiten korrigiert. Dabei werden auch die Teilstichproben aus dem Festnetz und dem Mobilfunknetz, einschließlich der SMS-basierten Online-Befragung auf der Basis der ermittelten Strukturmerkmale zusammengeführt (Dual Frame). In einem weiteren Schritt erfolgt eine Korrektur der Teilnahmeverweigerung durch Anpassung der Verteilungen der Stichprobe an die Strukturen der Grundgesamtheit. Die Sollverteilungen für Geschlecht, Alter und Bildung sind dem Mikrozensus und der repräsentativen Wahlstatistik entnommen. Die gewichtete Umfrage ist unter Berücksichtigung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen von Stichproben repräsentativ für die wahlberechtigte Bevölkerung Deutschlands. Da es sich um eine Zufallsstichprobe handelt, kann für jedes Stichprobenergebnis ein Vertrauensbereich angegeben werden, innerhalb dessen der wirkliche Wert des Merkmals in der Gesamtheit mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit liegt. Unter Berücksichtigung des Stichprobendesigns und des Gewichtungsmodells ergeben sich bei einem Stichprobenumfang von n = 1.250 folgende Vertrauensbereiche: Der Fehlerbereich beträgt bei einem Anteilswert von 40 Prozent rund +/- drei Prozentpunkte und bei einem Anteilswert von 10 Prozent rund +/- zwei Prozentpunkte.

Forschungsgruppe Wahlen: Vertrauensbereiche in der Praxis

- Dual-Frame-Stichprobe (Festnetz, Mobilfunk, SMS-Online): unterschiedliche Auswahlwahrscheinlichkeiten.
- Gewichtung korrigiert
  - designbedingte Unterschiede (z. B. Haushaltsgröße, Zahl der Rufnummern),
  - und Nonresponse durch Anpassung an Strukturen des Mikrozensus (Geschlecht, Alter, Bildung).
- Ergebnis: Die gewichtete Stichprobe ist – *im Modell* – repräsentativ für die Grundmenge.
- Da eine modellierte Zufallsstichprobe zugrunde liegt, werden Vertrauensbereiche angegeben:
  - bei 40 % etwa ± 3 Prozentpunkte, bei 10 %: etwa ± 2 Prozentpunkte.

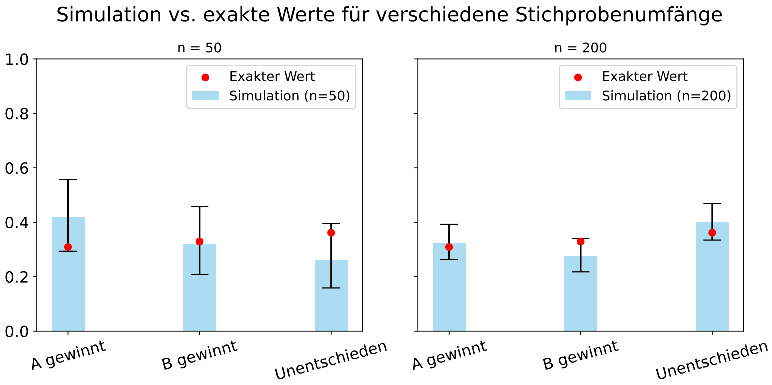
Designfaktor: Modell $\rightarrow$ Realität

Gewichtung bläht die Varianz auf. Praktisch arbeitet man mit einem *effektiven Stichprobenumfang* $n_{\text{eff}} = n/\text{Designfaktor}$.

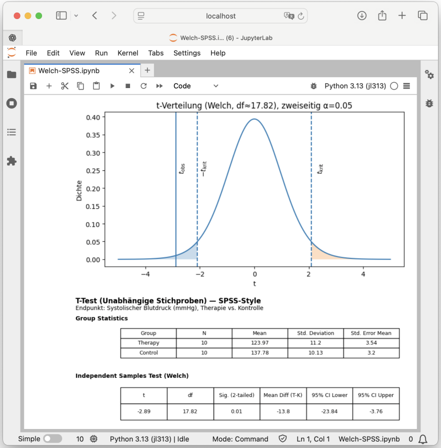
Simulationen ohne Konfidenzintervalle - wertlos

Das Spiel *Differenz trifft*: Die Proportionalstrategie ist nicht die „optimale“ Strategie

$$A = (3, 5, 4, 3, 2, 1); \quad B = (3, 7, 4, 3, 1, 0); \quad p = \left(\frac{3}{18}, \frac{5}{18}, \frac{4}{18}, \frac{3}{18}, \frac{2}{18}, \frac{1}{18}\right)$$



Anwendung in der Medizin: Welch-t-Test

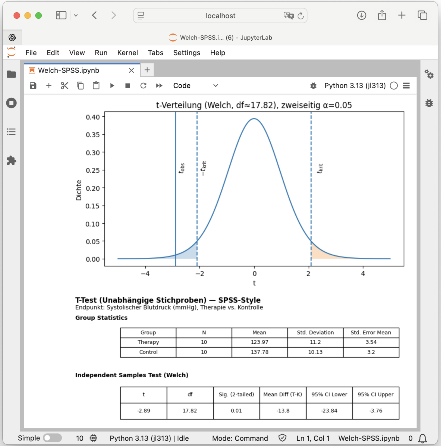


Group	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Therapy	10	123.97	11.2	3.54
Control	10	137.78	10.13	3.2

t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Diff (T-K)	95% CI Lower	95% CI Upper
-2.89	17.82	0.01	-13.8	-23.84	-3.76

Teststatistik, Verteilung, kritischer Bereich.

Anwendung in der Medizin: Welch-t-Test



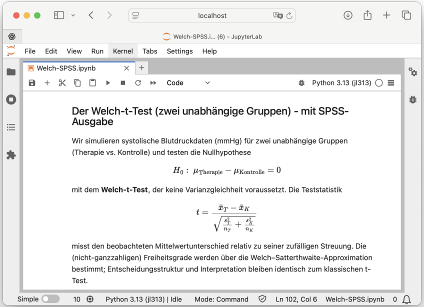
T-Test (Unabhängige Stichproben) — SPSS-Style
Endpunkt: Systolischer Blutdruck (mmHg), Therapie vs. Kontrolle

Group Statistics

Group	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Therapy	10	123.97	11.2	3.54
Control	10	137.78	10.13	3.2

Independent Samples Test (Welch)

t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Diff (T-K)	95% CI Lower	95% CI Upper
-2.89	17.82	0.01	-13.8	-23.84	-3.76



Der Welch-t-Test (zwei unabhängige Gruppen) - mit SPSS-Ausgabe

Wir simulieren systolische Blutdruckdaten (mmHg) für zwei unabhängige Gruppen (Therapie vs. Kontrolle) und testen die Nullhypothese

$$H_0: \mu_{\text{Therapie}} - \mu_{\text{Kontrolle}} = 0$$

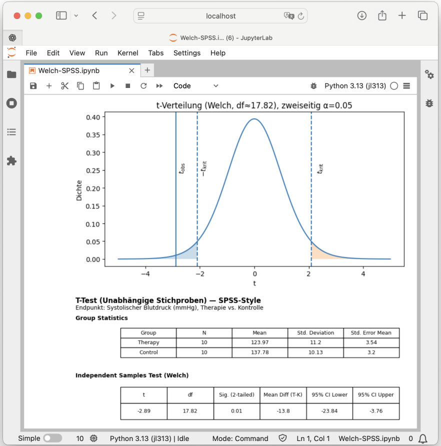
mit dem **Welch-t-Test**, der keine Varianzgleichheit voraussetzt. Die Teststatistik

$$t = \frac{\bar{x}_T - \bar{x}_K}{\sqrt{\frac{s_T^2}{n_T} + \frac{s_K^2}{n_K}}}$$

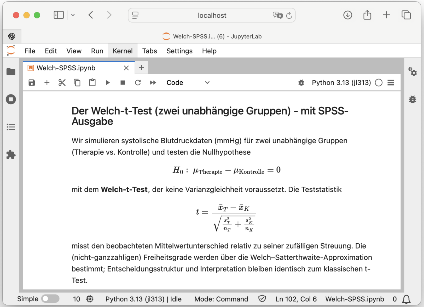
misst den beobachteten Mittelwertunterschied relativ zu seiner zufälligen Streuung. Die (nicht-ganzzahligen) Freiheitsgrade werden über die Welch–Satterthwaite-Approximation bestimmt; Entscheidungsstruktur und Interpretation bleiben identisch zum klassischen t-Test.

Teststatistik, Verteilung, kritischer Bereich.

Anwendung in der Medizin: Welch-t-Test



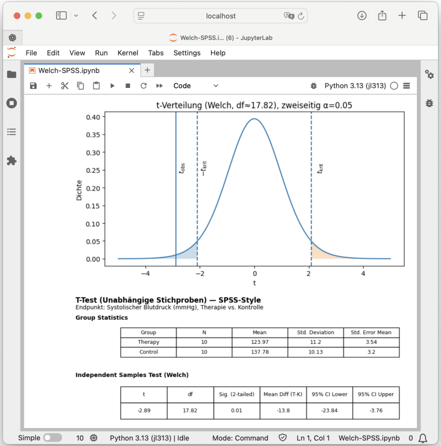
Teststatistik, Verteilung, kritischer Bereich.

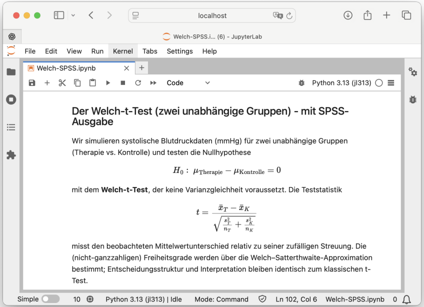


Gleiche Struktur wie beim Hypothesentest:

Teststatistik, Referenzverteilung, Entscheidungsregel.

Anwendung in der Medizin: Welch-t-Test





Gleiche Struktur wie beim Hypothesentest:

Teststatistik, Referenzverteilung, Entscheidungsregel.

Kein neues Prinzip – nur andere Sprache (SPSS). Test und Konfidenzintervall sind zwei Seiten derselben Struktur.

Teststatistik, Verteilung, kritischer Bereich.

Rückblick und Ausblick

Inferenz bedeutet, Daten als Realisationen
von Zufallsgrößen in einem Modellraum
zu betrachten.

Inferenz bedeutet, Daten als Realisationen
von Zufallsgrößen in einem Modellraum
zu betrachten.

Konfidenzintervalle beschreiben Eigenschaften
dieses Verfahrens unter Wiederholung.
Konkret: Ein Konfidenzintervall beschreibt alle Parameterwerte,
die mit den Daten vereinbar sind,
bei einem gegebenen Sicherheitsniveau.

Zwei Seiten einer Medaille: Realität, Modell, Modelle

Realität

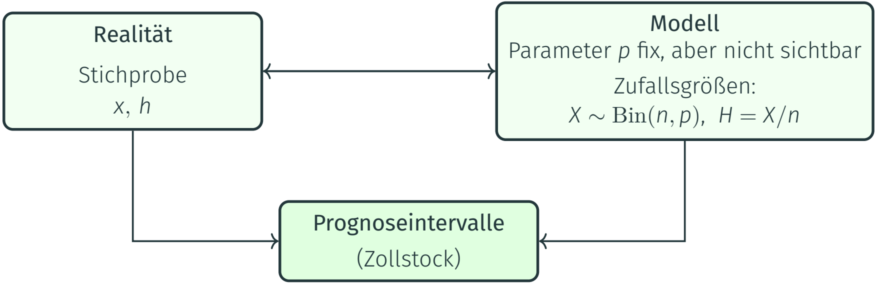
Stichprobe
x, h

$\longleftrightarrow$

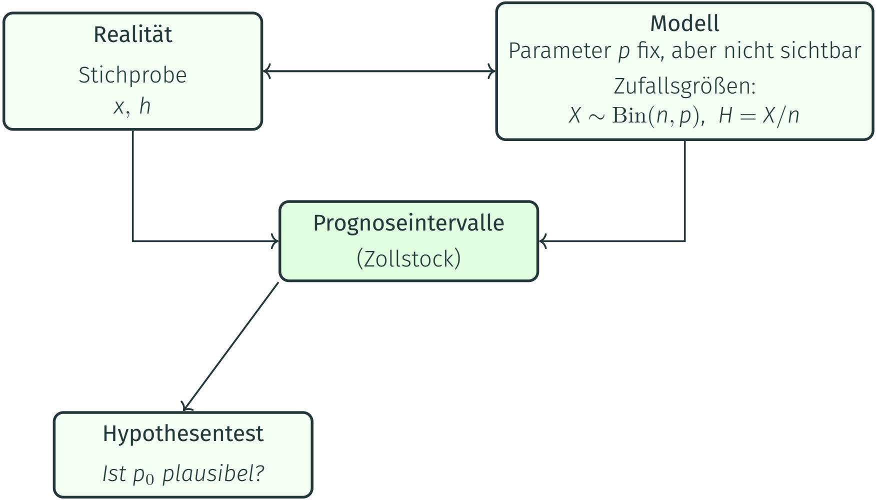
Modell
Parameter p fix, aber nicht sichtbar

Zufallsgrößen:
$X \sim \mathrm{Bin}(n, p), \; H = X/n$

Zwei Seiten einer Medaille: Realität, Modell, Modelle



Zwei Seiten einer Medaille: Realität, Modell, Modelle



Zwei Seiten einer Medaille: Realität, Modell, Modelle