Mehr als ein Testergebnis: Konfidenzintervalle im Unterricht erlebbar machen

Von der Ja/Nein-Entscheidung des Hypothesentests zur Intervallschätzung – praxisnah mit Zollstock, Ellipse, GeoGebra und Python

Reimund Vehling

20.02.2026

Leitgedanken

Worum es mir heute wirklich geht

Zentrale Leitfrage

Was bedeutet es, wenn wir aus einer Stichprobe
auf die Grundgesamtheit schließen?

Worum es mir heute wirklich geht

Zentrale Leitfrage

Was bedeutet es, wenn wir aus einer Stichprobe
auf die Grundgesamtheit schließen?

Vier Eckpfeiler meines Ansatzes

- Unterscheide streng: Modell vs. Realisation.
- Unterscheide streng: Zufallsgröße X (Modell) vs. Realisation x (Realität).
- Nutze: Handlungen, Bilder und Gedankenexperimente, um Unsicherheit verständlich zu machen - *vor* dem Erlernen formaler Verfahren.
- Suche: Anschlussfähigkeit zur Universität, ohne die formale Bildungsbarriere unnötig zu erhöhen - Strukturen sichtbar machen, nicht die technische Oberfläche.

Zwei Seiten einer Medaille

Hypothesentest

Ist dieses p plausibel?

$\leftrightarrow$

Konfidenzintervall

Welche p sind plausibel?

Was beide verbindet: dieselbe Stichprobe, dieselben Daten – nur die andere Frage.

Hypothesentest

Ist dieses p plausibel?

$\leftrightarrow$

Konfidenzintervall

Welche p sind plausibel?

Zwei Seiten einer Medaille

Was beide verbindet: dieselbe Stichprobe, dieselben Daten – nur die andere Frage.

Hypothesentest
Ist dieses p plausibel?

$\leftrightarrow$

Konfidenzintervall
Welche p sind plausibel?

Der Test auf Niveau α verwirft H_0 $\iff$ *$p_0 \notin$ KI*

Zwei Seiten einer Medaille: Realität, Modell, Modelle

Realität

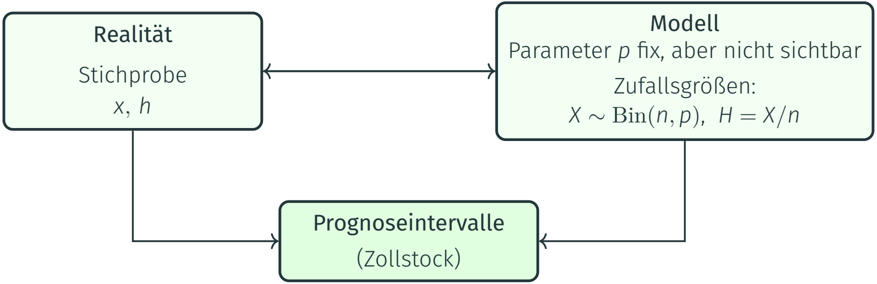
Stichprobe
x, h

$\longleftrightarrow$

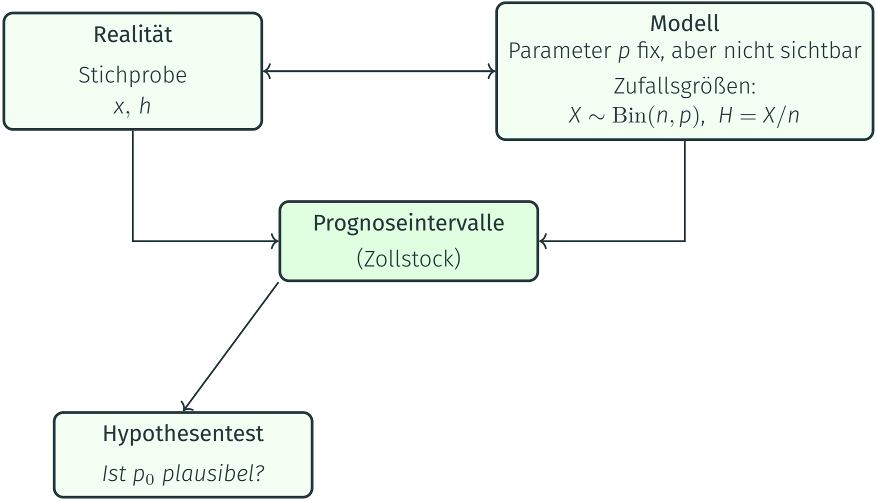
Modell
Parameter p fix, aber nicht sichtbar

Zufallsgrößen:
$X \sim \mathrm{Bin}(n, p), \;\; H = X/n$

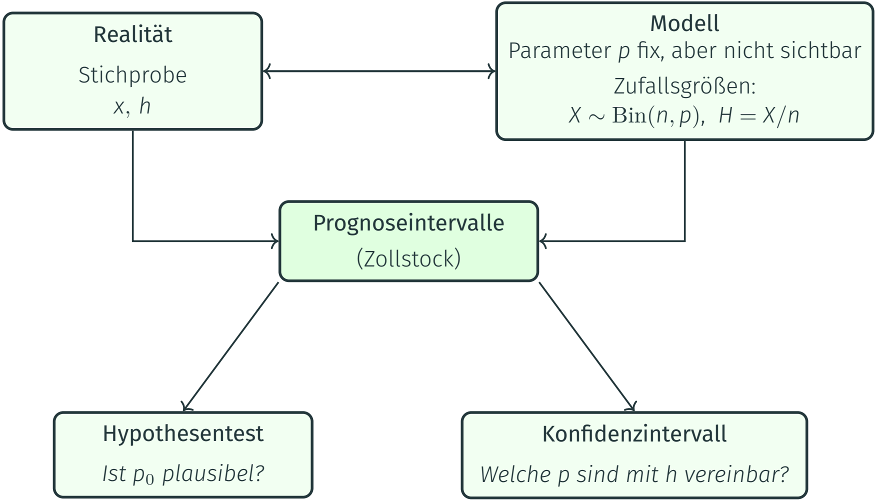
Zwei Seiten einer Medaille: Realität, Modell, Modelle



Zwei Seiten einer Medaille: Realität, Modell, Modelle



Zwei Seiten einer Medaille: Realität, Modell, Modelle



Leitprinzip der gesamten Inferenz

Trenne Modell und Realität messerscharf!

Leitprinzip der gesamten Inferenz

Trenne Modell und Realität messerscharf!

Modellwelt

- beschreibt Zufallsgrößen (z. B. $H = X/n$)
- stellt Wahrscheinlichkeiten, Verteilungen und Prognoseintervalle bereit
- lebt *vor* der Stichprobenziehung

Leitprinzip der gesamten Inferenz

Trenne Modell und Realität messerscharf!

Modellwelt

- beschreibt Zufallsgrößen (z. B. $H = X/n$)
- stellt Wahrscheinlichkeiten, Verteilungen und Prognoseintervalle bereit
- lebt *vor* der Stichprobenziehung

Datenwelt

- enthält die beobachtete Realisation (z. B. $h = x/n$)
- ist das, was tatsächlich passiert ist
- beginnt *nach* der Stichprobenziehung

Ein Konfidenzintervall ist nicht erfahrungsbasiert, es ist

- *kein Erfahrungsurteil.*
- *kein Glaubensmaß*
- *keine subjektive Unsicherheit*

Ein Konfidenzintervall ist nicht erfahrungsbasiert, es ist

- *kein Erfahrungsurteil.*
- *kein Glaubensmaß*
- *keine subjektive Unsicherheit*

… sondern …

eine Eigenschaft eines Zufallsexperiments unter einem Modell.

Ein Konfidenzintervall ist nicht erfahrungsbasiert, es ist

- *kein Erfahrungsurteil.*
- *kein Glaubensmaß*
- *keine subjektive Unsicherheit*

… sondern …

eine Eigenschaft eines Zufallsexperiments unter einem Modell.

Ein Konfidenzintervall ist nicht erfahrungsbasiert, es ist

- *kein Erfahrungsurteil.*
- *kein Glaubensmaß*
- *keine subjektive Unsicherheit*

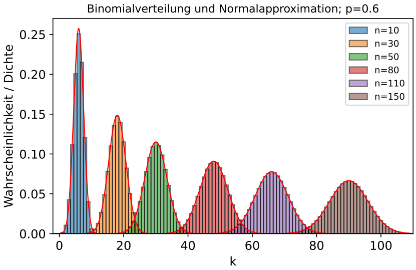
... sondern ...
eine Eigenschaft eines Zufallsexperiments unter einem Modell.

Erfahrung motiviert Modelle.

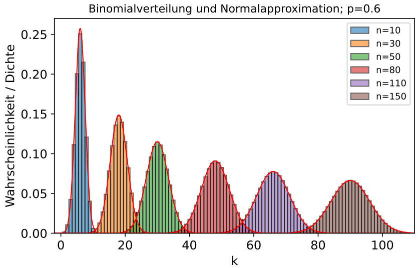
Konfidenzintervalle sind Aussagen über Verfahren innerhalb eines Modells.

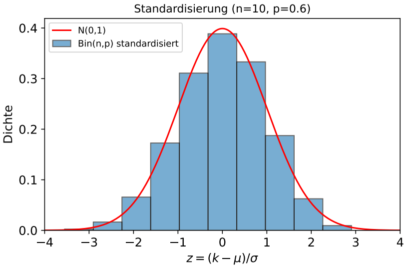
Prognoseintervalle

Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation

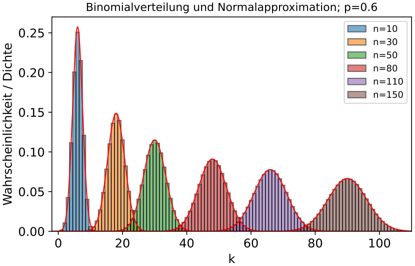


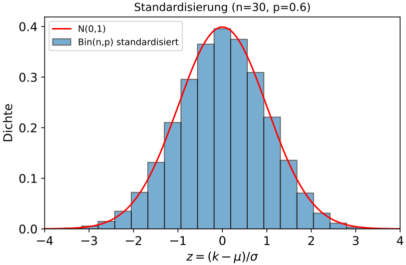
Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation



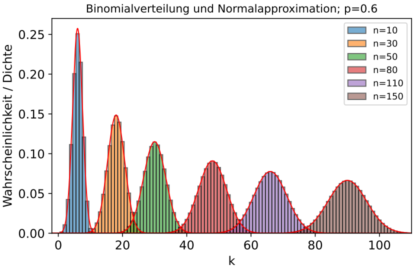


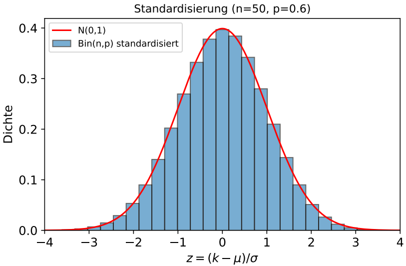
Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation



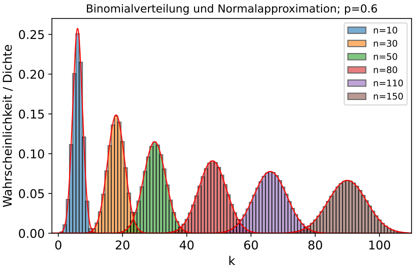


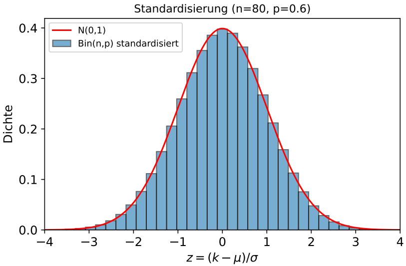
Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation



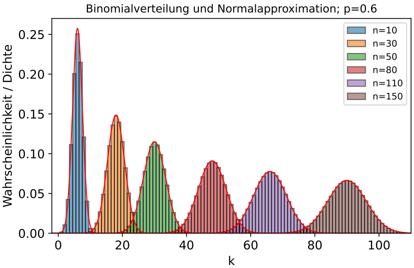


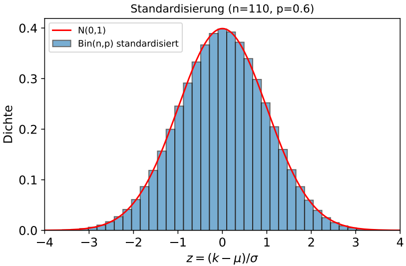
Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation



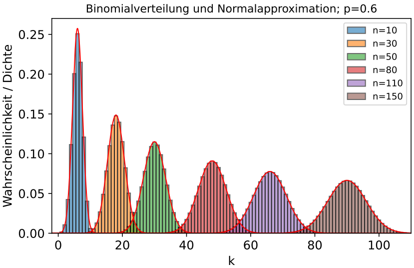


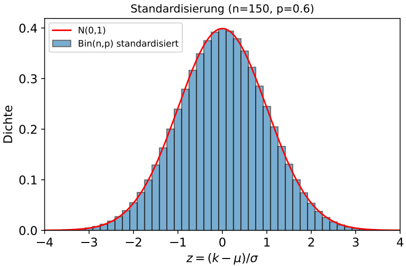
Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation



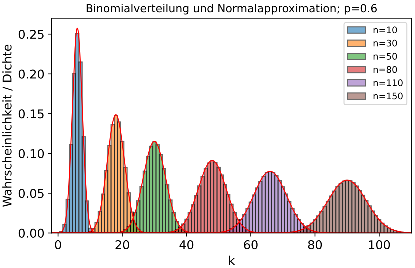


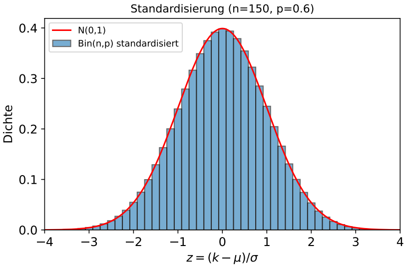
Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation

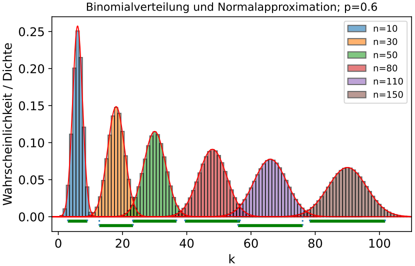




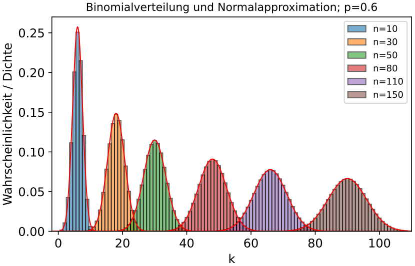
Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation

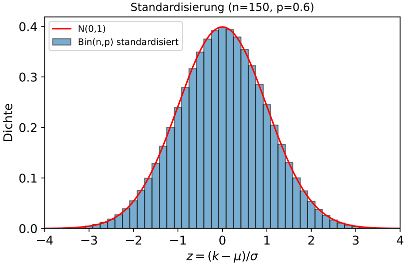


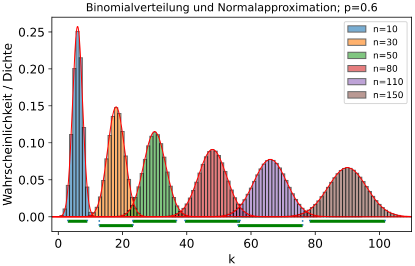


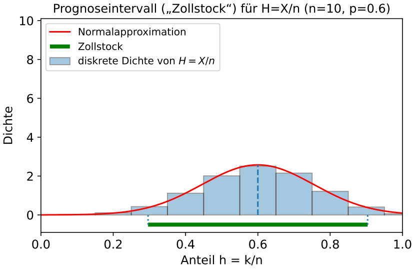


Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation

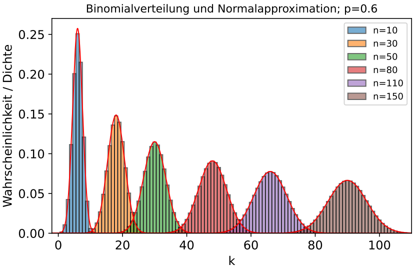


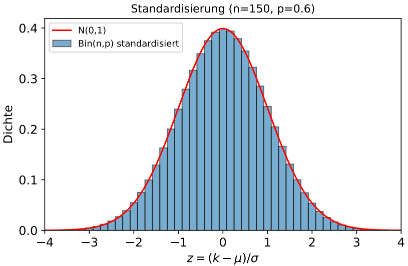


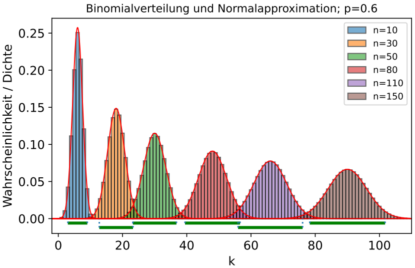


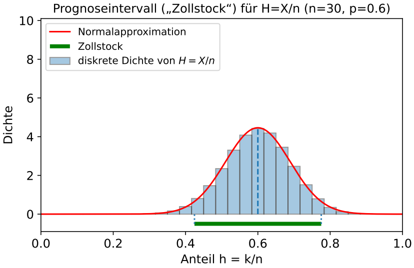


Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation

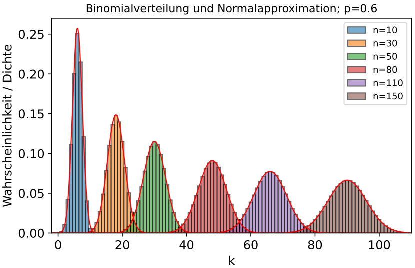


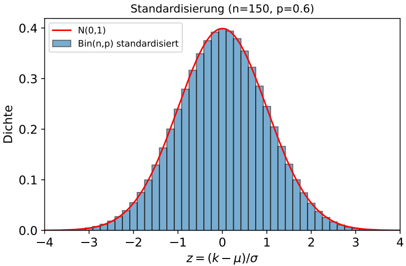


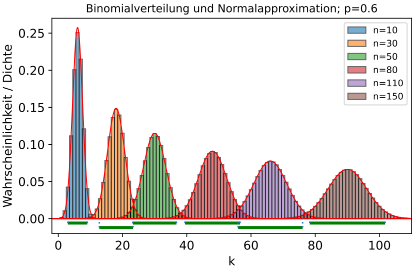


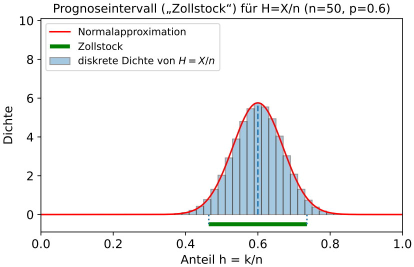


Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation

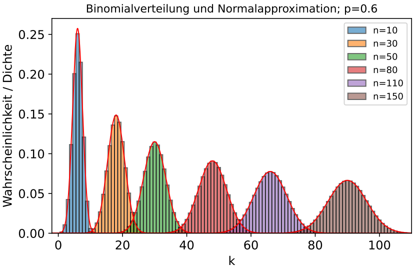


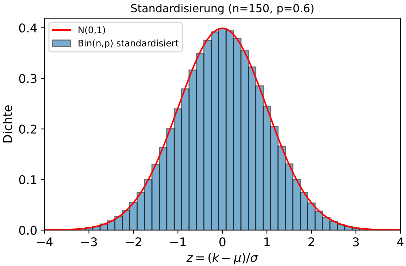


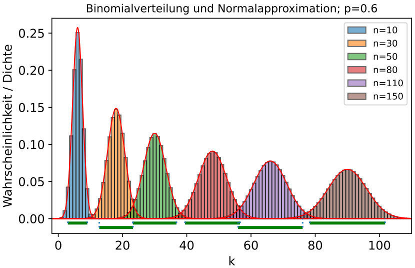


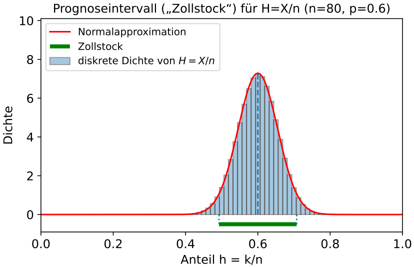


Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation

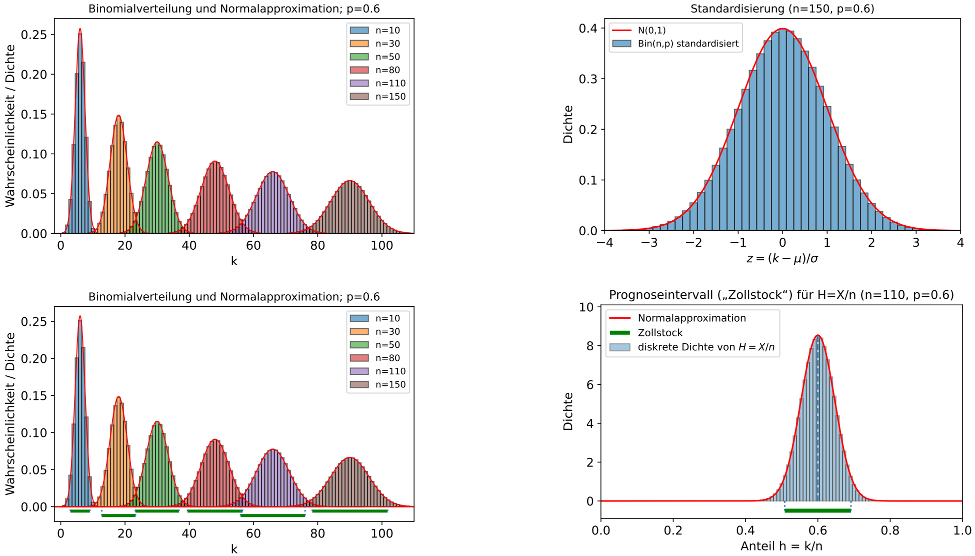




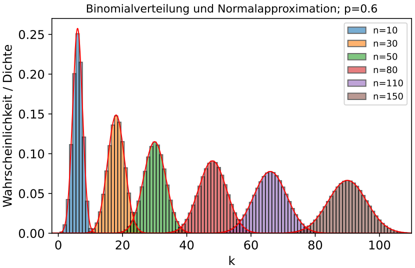


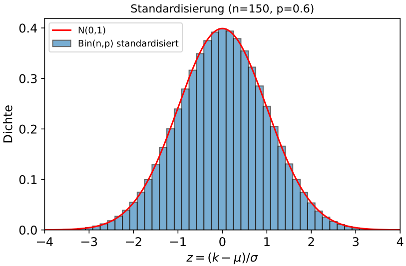


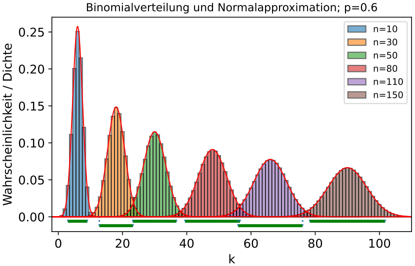
Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation

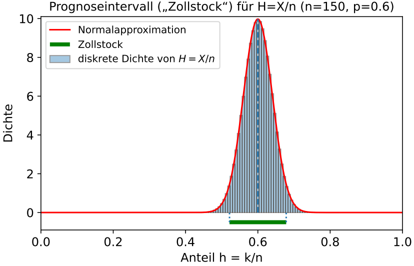


Der Zollstock als rücktransformierte Normalapproximation









Prognoseintervall - der Zollstock

Ein 95%-**Prognoseintervall** zu einer Trefferwahrscheinlichkeit p ist ein Intervall, in das die *zufällige* Trefferanzahl X bzw. die *zufällige* Trefferhäufigkeit $H = X/n$ bei einem *bevorstehenden* Bernoulliexperiment gegebener Länge n mit einer Mindestwahrscheinlichkeit 95% fällt.

Prognoseintervall - der Zollstock

Ein 95%-**Prognoseintervall** zu einer Trefferwahrscheinlichkeit p ist ein Intervall, in das die *zufällige* Trefferanzahl X bzw. die *zufällige* Trefferhäufigkeit $H = X/n$ bei einem *bevorstehenden* Bernoulliexperiment gegebener Länge n mit einer Mindestwahrscheinlichkeit 95% fällt.

Prognoseintervalle schauen in die Zukunft. Man schließt mit ihnen vom Modell (der Wahrscheinlichkeit) auf die Realität (relative Häufigkeit).

Bei gegebener Trefferwahrscheinlichkeit p liegt die *zufällige* Trefferhäufigkeit $H = X/n$ mit ca. 95% Sicherheit im Prognoseintervall

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\; p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

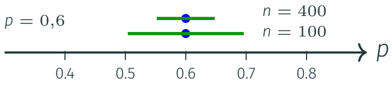
Prognoseintervall - der Zollstock

Ein 95%-**Prognoseintervall** zu einer Trefferwahrscheinlichkeit p ist ein Intervall, in das die *zufällige* Trefferanzahl X bzw. die *zufällige* Trefferhäufigkeit $H = X/n$ bei einem *bevorstehenden* Bernoulliexperiment gegebener Länge n mit einer Mindestwahrscheinlichkeit 95% fällt.

Prognoseintervalle schauen in die Zukunft. Man schließt mit ihnen vom Modell (der Wahrscheinlichkeit) auf die Realität (relative Häufigkeit).

Bei gegebener Trefferwahrscheinlichkeit p liegt die *zufällige* Trefferhäufigkeit $H = X/n$ mit ca. 95% Sicherheit im Prognoseintervall

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$



Prognoseintervalle - Denken in Verteilungen

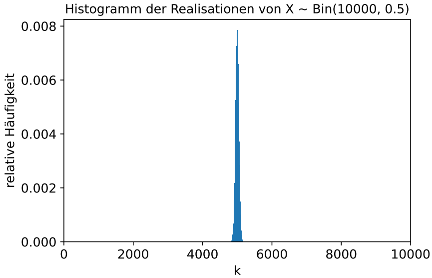
Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X gilt: $n = 10\,000;\ p = 0{,}5.$

Finden Sie Aufgaben der Form $P(X = k); P(X \leq k); P(X \geq k); P(a \leq X \leq b), \ldots$.

Prognoseintervalle - Denken in Verteilungen

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X gilt: $n = 10\,000$; $p = 0{,}5$.

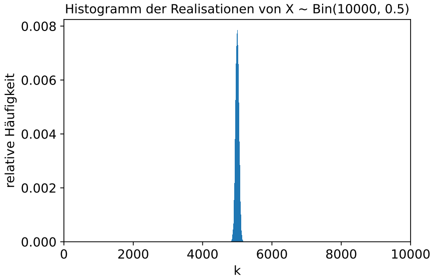
Finden Sie Aufgaben der Form $P(X = k)$; $P(X \leq k)$; $P(X \geq k)$; $P(a \leq X \leq b)$, … .

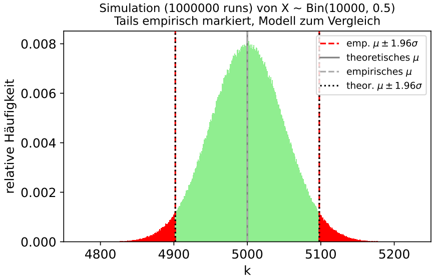


Prognoseintervalle - Denken in Verteilungen

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X gilt: $n = 10\,000;\ p = 0{,}5$.

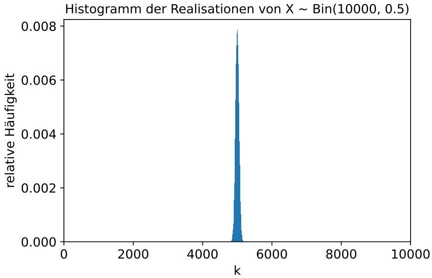
Finden Sie Aufgaben der Form $P(X = k); P(X \leq k); P(X \geq k); P(a \leq X \leq b), \ldots$.

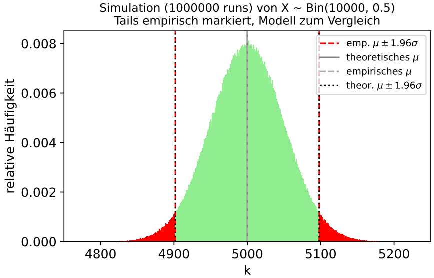




Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X gilt: $n = 10\,000$; $p = 0{,}5$.

Finden Sie Aufgaben der Form $P(X = k); P(X \leq k); P(X \geq k); P(a \leq X \leq b), \ldots$.



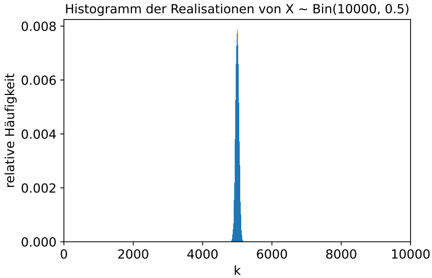


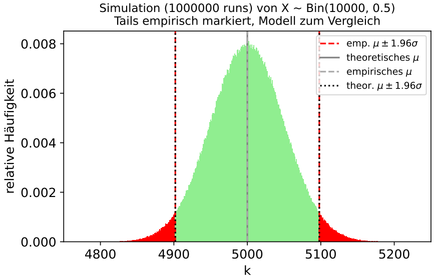
Idee (ohne Rechner): $\mu = n \cdot p = 5000$; $\sigma = \sqrt{10000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 50$; $2\sigma = 100$

Folgerung: In ca. 95% aller *zukünftigen* Fälle gilt: $4900 \leq X \leq 5100$.

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X gilt: $n = 10\,000$; $p = 0{,}5$.

Finden Sie Aufgaben der Form $P(X = k)$; $P(X \leq k)$; $P(X \geq k)$; $P(a \leq X \leq b), \ldots$.





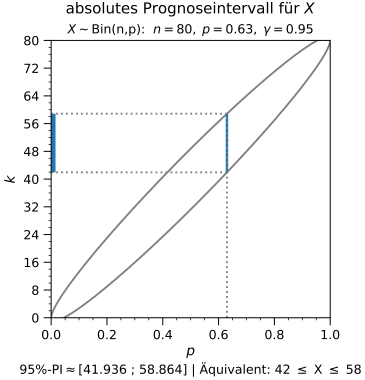
Idee (ohne Rechner): $\mu = n \cdot p = 5000$; $\sigma = \sqrt{10000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 50$; $2\sigma = 100$

Folgerung: In ca. 95% aller *zukünftigen* Fälle gilt: $4900 \leq X \leq 5100$. $(0{,}49 \leq \frac{X}{n} \leq 0{,}51)$

Prognoseintervalle: absolut und relativ - Normierung liefert Einsichten

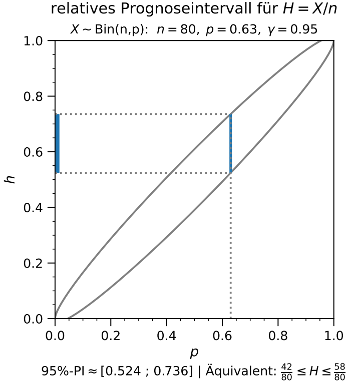
Absolutes Prognoseintervall für X

$$\left[n\cdot p - z\sqrt{np(1-p)},\ n\cdot p + z\sqrt{np(1-p)}\right]$$



Relatives Prognoseintervall für $H = X/n$

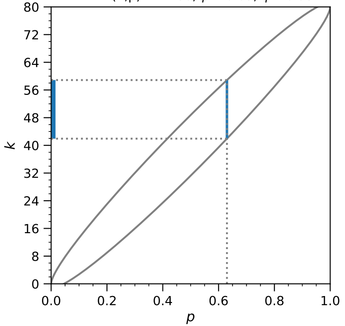
$$\left[p - z\sqrt{p(1-p)/n},\ p + z\sqrt{p(1-p)/n}\right]$$



Prognoseintervalle: absolut und relativ - Normierung liefert Einsichten

Absolutes Prognoseintervall für X

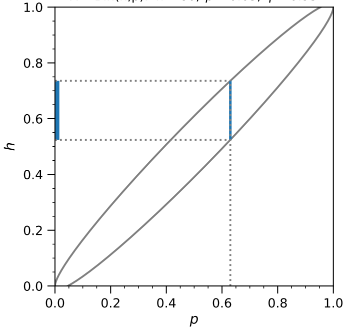
$$\left[n\cdot p - z\sqrt{np(1-p)},\ n\cdot p + z\sqrt{np(1-p)}\right]$$



95%-PI ≈ [41.936 ; 58.864] | Äquivalent: 42 ≤ X ≤ 58

Relatives Prognoseintervall für $H = X/n$

$$\left[p - z\sqrt{p(1-p)/n},\ p + z\sqrt{p(1-p)/n}\right]$$



95%-PI ≈ [0.524 ; 0.736] | Äquivalent: $\frac{42}{80} \leq H \leq \frac{58}{80}$

Lineare Transformation $H = \frac{X}{n}$. Skalierung ändert die Darstellung, nicht die Struktur.
Normierung ist eine lineare Transformation - das $1/\sqrt{n}$-Gesetz wird sichtbar.

Hypothesentest

Ein Hypothesentest entscheidet, ob beobachtete Daten unter Annahme von H_0 ungewöhnlich sind.

Die Entscheidungsregel wird *vor* den Daten festgelegt.

Zeitliche Ordnung eines Tests

1. **Vor der Stichprobe:** Modell, Signifikanzniveau und Entscheidungsregel werden festgelegt.
2. **Dann:** Die Stichprobe wird erhoben.
3. **Danach:** Die festgelegte Regel wird auf die Daten angewendet.

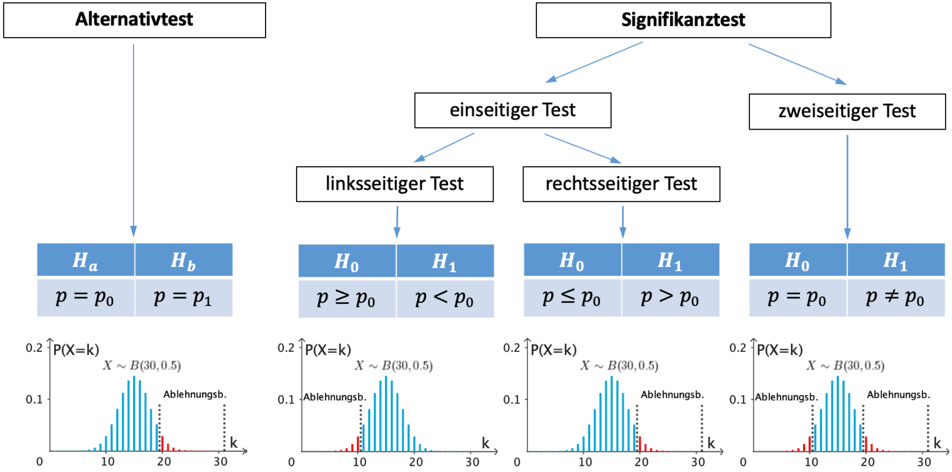
Gedankenexperiment eines Tests:

Wie ungewöhnlich wären diese Daten,
wenn H_0 gegolten hätte?

Testen bewertet Daten – nicht die Wahrheit.

Hypothesentests - ganz schön verwirrend, trotz Diagramm

Hypothesentest – eine erste Übersicht

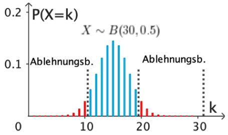


Hypothesentest – eine erste Übersicht

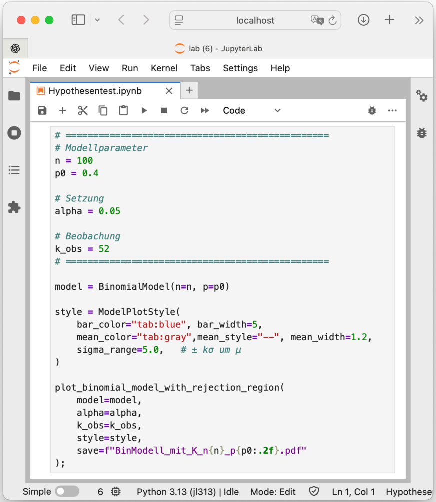
Signifikanztest

zweiseitiger Test

H_0	H_1
$p = p_0$	$p \neq p_0$

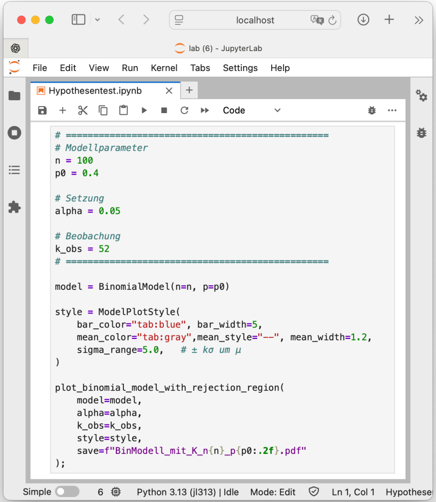


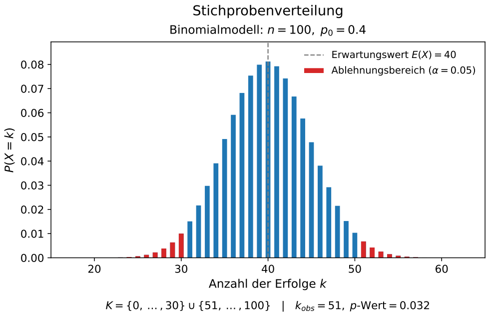
Modell - Setzung - Style - Ausgabe - Interpretation



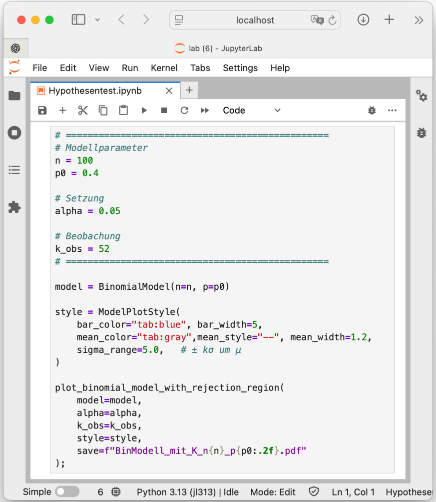

```python
# ================================================
# Modellparameter
n = 100
p0 = 0.4

# Setzung
alpha = 0.05

# Beobachung
k_obs = 52
# ================================================

model = BinomialModel(n=n, p=p0)

style = ModelPlotStyle(
    bar_color="tab:blue", bar_width=5,
    mean_color="tab:gray",mean_style="--", mean_width=1.2,
    sigma_range=5.0,   # ± kσ um μ
)

plot_binomial_model_with_rejection_region(
    model=model,
    alpha=alpha,
    k_obs=k_obs,
    style=style,
    save=f"BinModell_mit_K_n{n}_p{p0:.2f}.pdf"
);
```

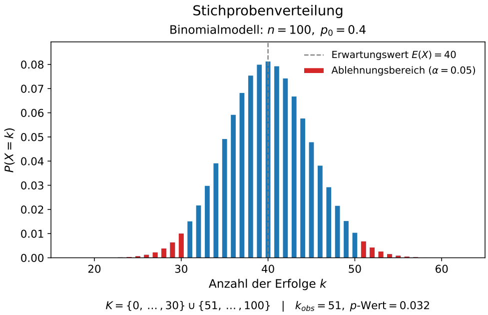
Modell - Setzung - Style - Ausgabe - Interpretation



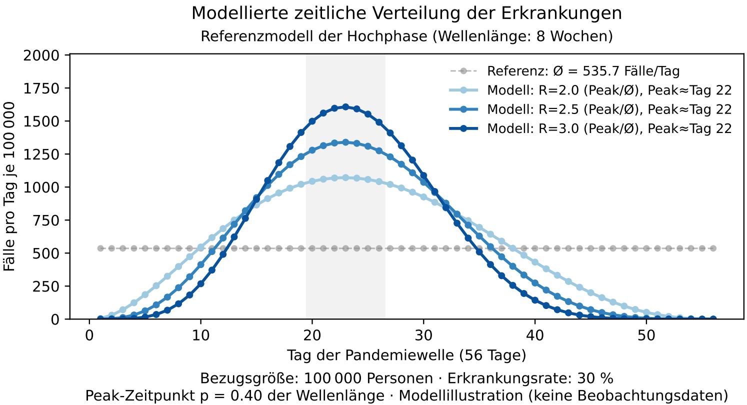


Modell - Setzung - Style - Ausgabe - Interpretation





Trennung von Modell und Realität - außerhalb der Schule



Die Power eines Tests - Grundwissen (wäre schön)

Die Power eines Tests - Grundwissen (wäre schön)

Die Power eines Testes

- Die Power beschreibt die Leistungsfähigkeit eines Tests – nicht die Relevanz eines Effekts.
- Relevanz ist keine stochastische Kategorie - sie gehört zur Fragestellung, nicht zum Test.
- Ob ein Effekt relevant ist, entschiedet nicht der Test, sondern der Kontext der Fragestellung.
- Mit genügend großem Stichprobenumfang kann jeder noch so kleine Unterschied statistisch auffällig werden.
- Ein großes n macht Tests empfindlich, nicht unbedingt wichtiger.

Die Power eines Tests - Grundwissen (wäre schön)

Die Power eines Testes

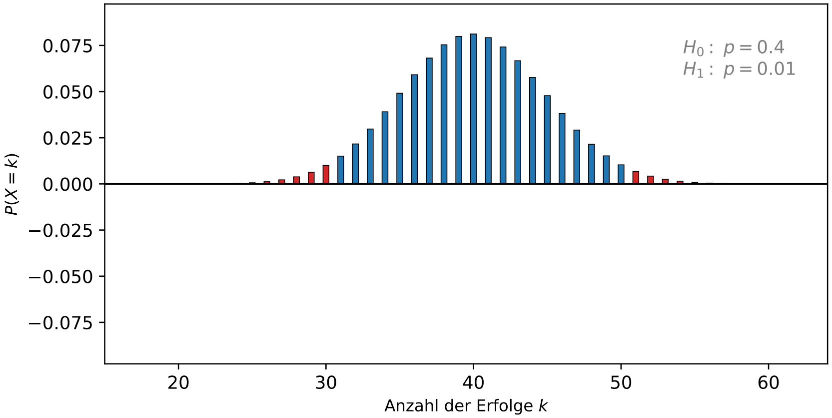
- Die Power beschreibt die Leistungsfähigkeit eines Tests – nicht die Relevanz eines Effekts.
- Relevanz ist keine stochastische Kategorie - sie gehört zur Fragestellung, nicht zum Test.
- Ob ein Effekt relevant ist, entschiedet nicht der Test, sondern der Kontext der Fragestellung.
- Mit genügend großem Stichprobenumfang kann jeder noch so kleine Unterschied statistisch auffällig werden.
- Ein großes n macht Tests empfindlich, nicht unbedingt wichtiger.

Die Power (Teststärke) eines zweiseitigen Binomialtests beschreibt die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese $H_0 : p = p_0$ korrekt abzulehnen, wenn eine bestimmte Alternativhypothese $H_1 : p = p_1; \ (p_1 \neq p_0)$ wahr ist.

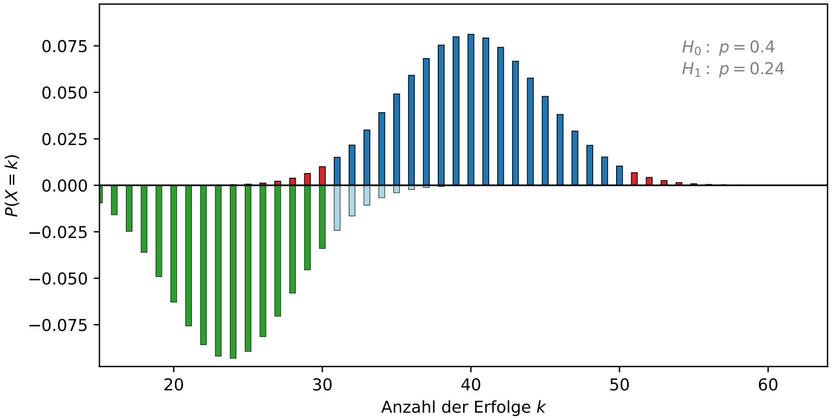
$$\text{Power} = \mathbb{P}(X \leq k_u | p_1) + \mathbb{P}(X \geq k_o | p_1), \quad K = \{0, \ldots, k_u\} \cup \{k_o, \ldots, n\}$$

Die Power ohne Formeln – mit Spiegelung und Denken in Verteilungen

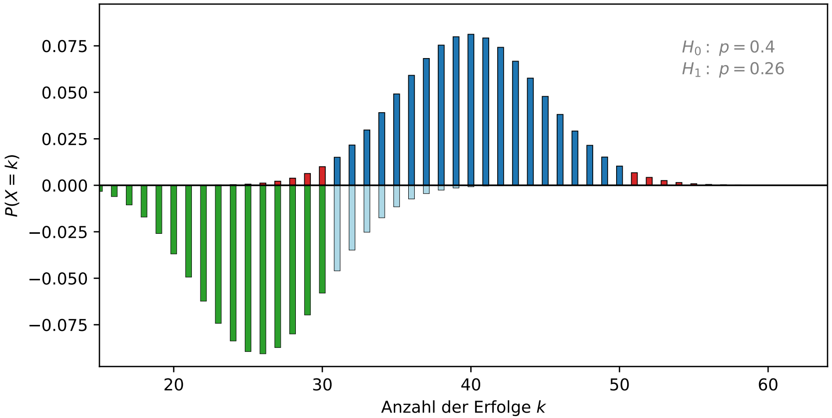
Die Power ohne Formeln – mit Spiegelung und Denken in Verteilungen



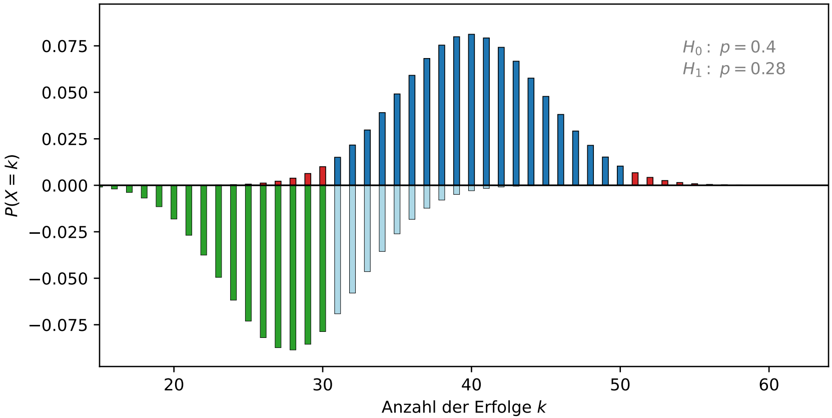
Die Power ohne Formeln – mit Spiegelung und Denken in Verteilungen



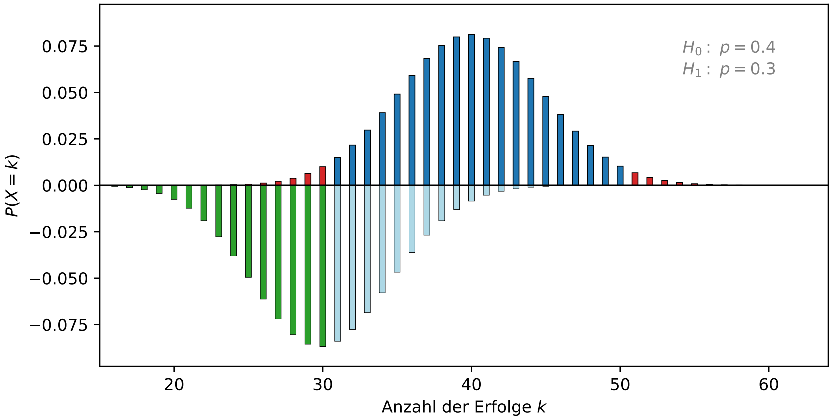
Die Power ohne Formeln – mit Spiegelung und Denken in Verteilungen



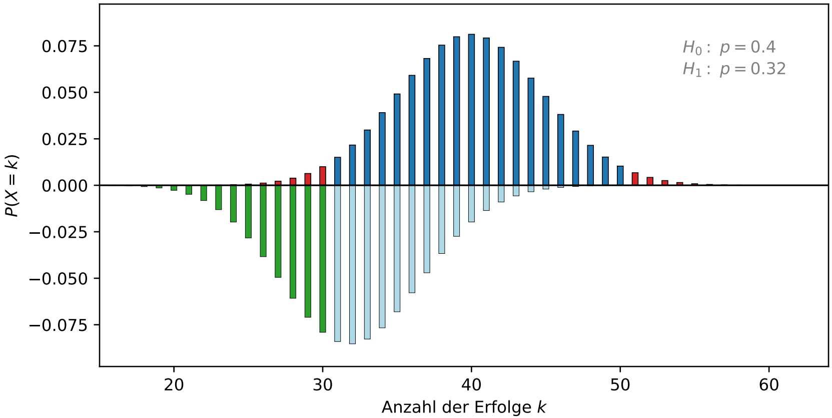
Die Power ohne Formeln – mit Spiegelung und Denken in Verteilungen



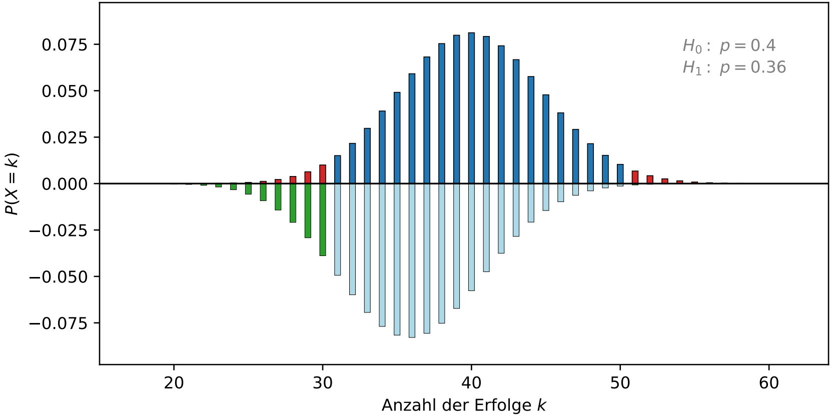
Die Power ohne Formeln – mit Spiegelung und Denken in Verteilungen



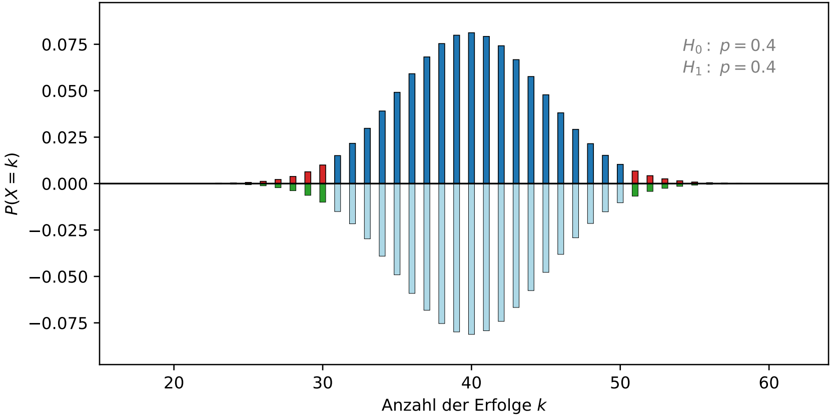
Die Power ohne Formeln – mit Spiegelung und Denken in Verteilungen



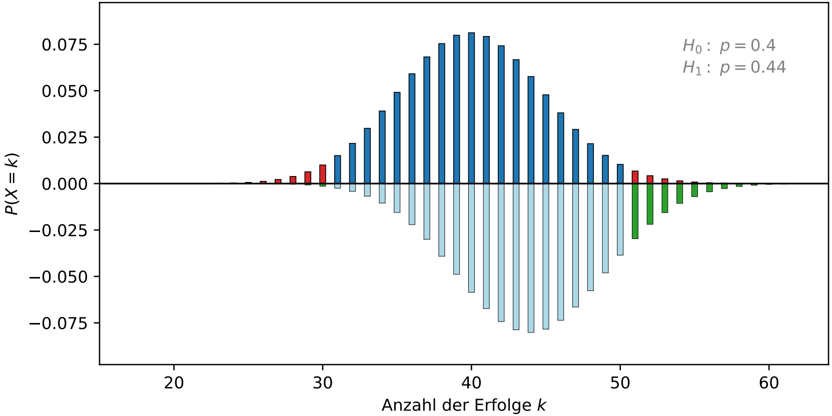
Die Power ohne Formeln – mit Spiegelung und Denken in Verteilungen



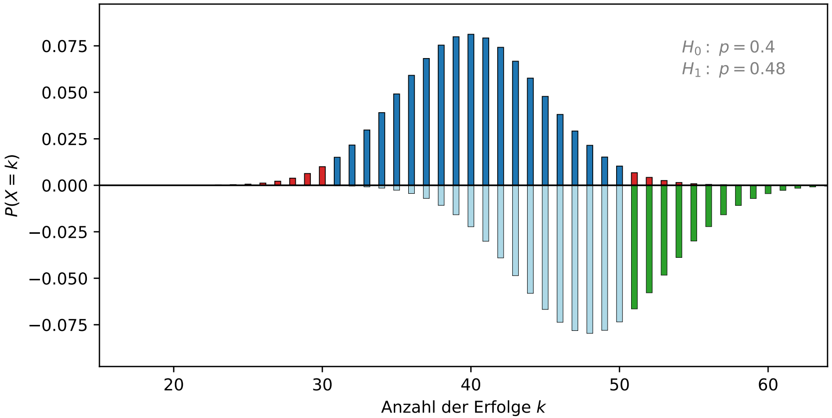
Die Power ohne Formeln – mit Spiegelung und Denken in Verteilungen



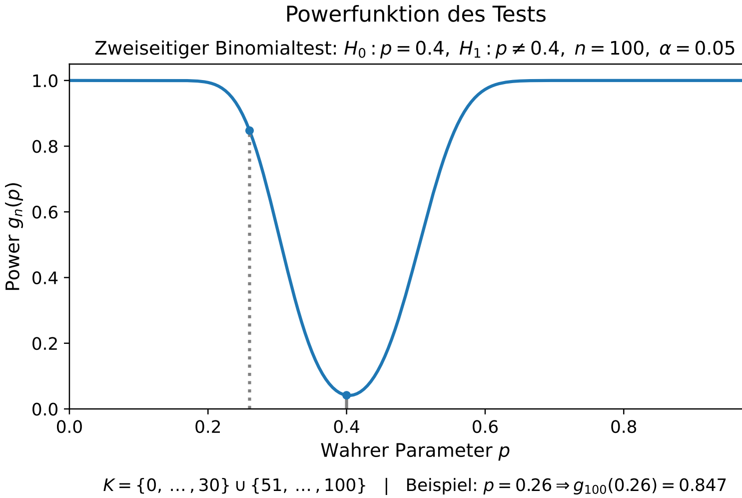
Die Power ohne Formeln – mit Spiegelung und Denken in Verteilungen



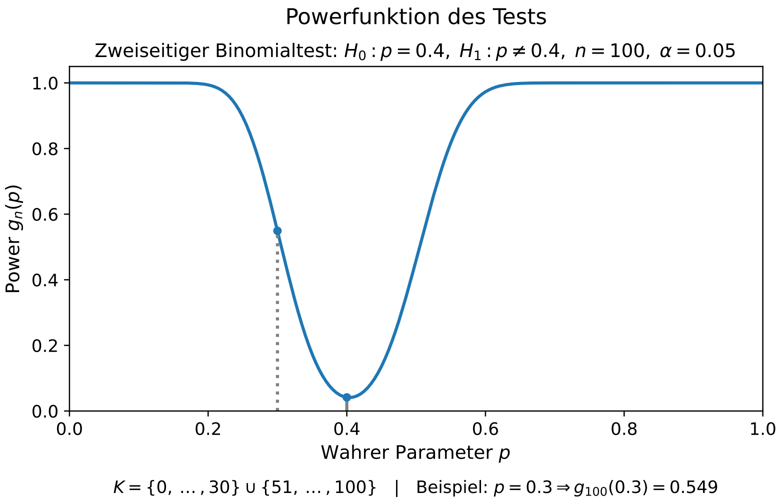
Die Power ohne Formeln – mit Spiegelung und Denken in Verteilungen



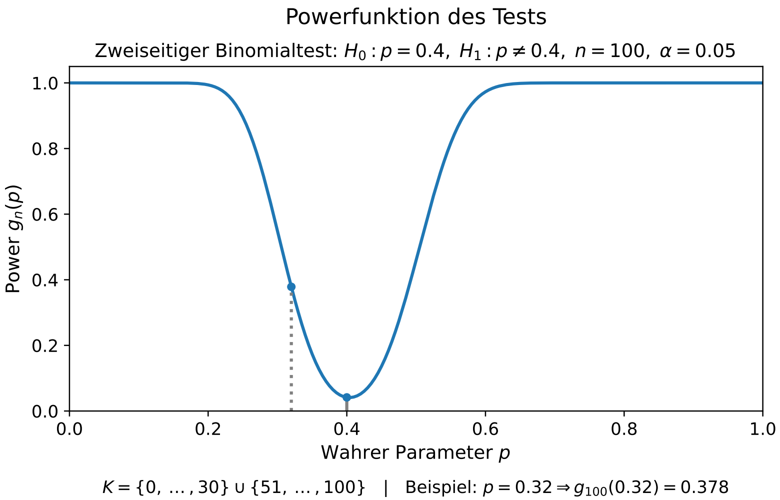
Powerfunktion $g_n(p) = \mathbb{P}_p(X \in K)$ - Wahrscheinlichkeitsmasse von p in K



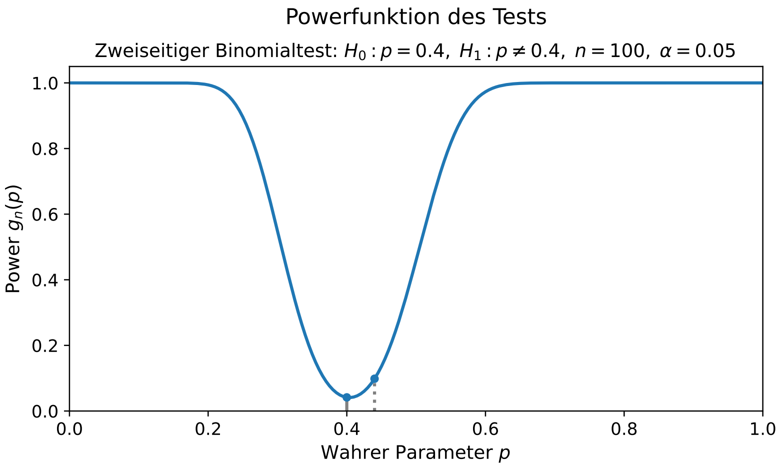
Powerfunktion $g_n(p) = \mathbb{P}_p(X \in K)$ - Wahrscheinlichkeitsmasse von p in K



Powerfunktion $g_n(p) = \mathbb{P}_p(X \in K)$ - Wahrscheinlichkeitsmasse von p in K

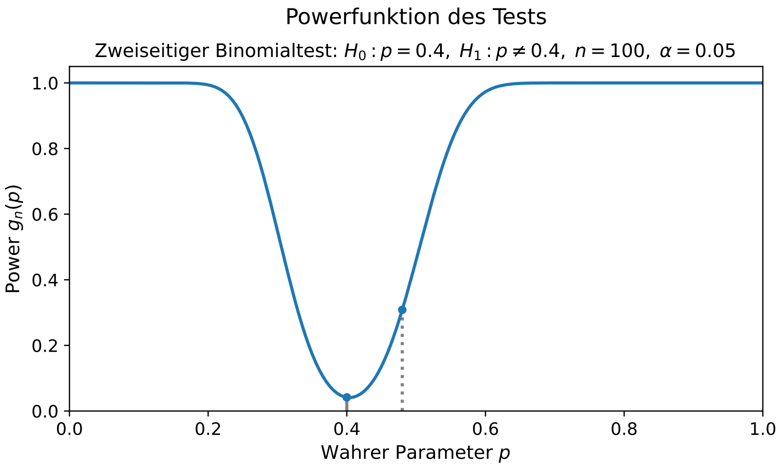


Powerfunktion $g_n(p) = \mathbb{P}_p(X \in K)$ - Wahrscheinlichkeitsmasse von p in K



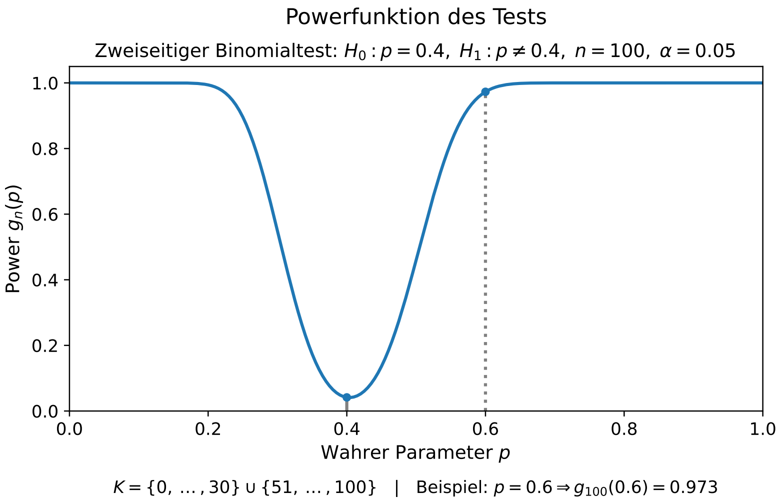
$K = \{0, \ldots, 30\} \cup \{51, \ldots, 100\}$ | Beispiel: $p = 0.44 \Rightarrow g_{100}(0.44) = 0.098$

Powerfunktion $g_n(p) = \mathbb{P}_p(X \in K)$ - Wahrscheinlichkeitsmasse von p in K

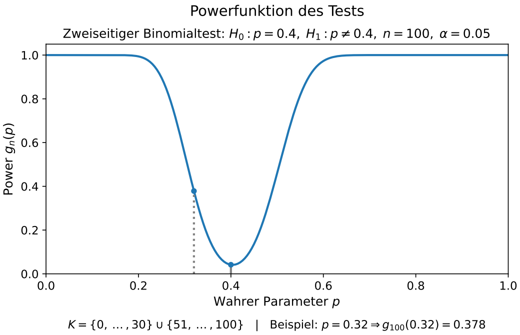


$K = \{0, \dots, 30\} \cup \{51, \dots, 100\}$ | Beispiel: $p = 0.48 \Rightarrow g_{100}(0.48) = 0.308$

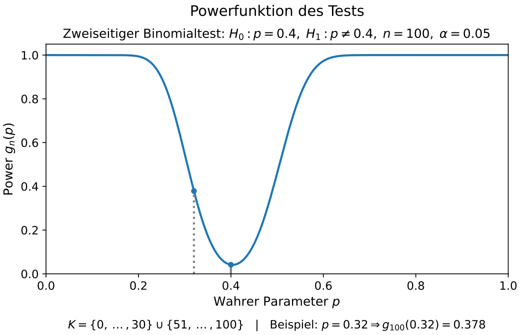
Powerfunktion $g_n(p) = \mathbb{P}_p(X \in K)$ - Wahrscheinlichkeitsmasse von p in K

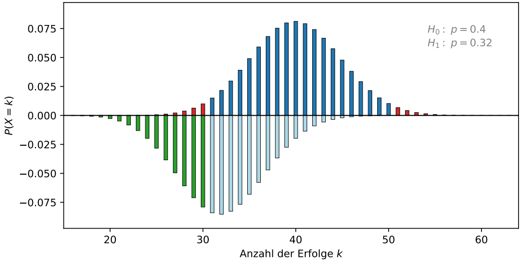


Powerfunktion und Spiegelung



Powerfunktion und Spiegelung





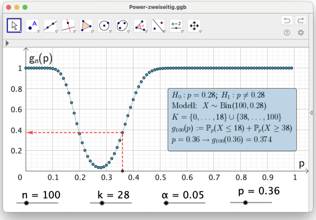
Ein Modell – zwei digitale Perspektiven

GeoGebra & Python – zwei Werkzeuge, ein Modell

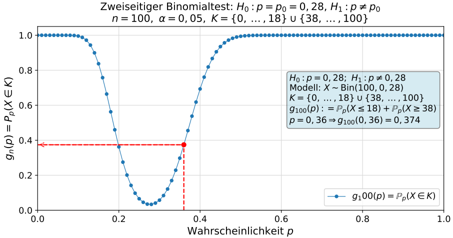
GeoGebra Schulnah, interaktiv und zeilenorientiert, sofort sichtbare Objekte

Python Präzise, reproduzierbar, ideal für Simulation und professionelles Arbeiten

GeoGebra: Diskrete Powerfunktion



Python: Diskrete Powerfunktion



Didaktische Leitidee: GeoGebra zum Verstehen – Python zum Produzieren.

Planung des Stichprobenumfangs – sinnvoll probieren

Ausgangsfrage: Wie groß muss der Stichprobenumfang n mindestens sein, damit ein Test auf Niveau $\alpha = 0{,}1$ für $H_0 : p \leq 0{,}5$ gegen $H_1 : p > 0{,}5$ mit Wahrscheinlichkeit $\gamma = 0{,}9$ die richtige Entscheidung (H_1 trifft zu) gibt, falls $p = 0{,}6$ gilt?

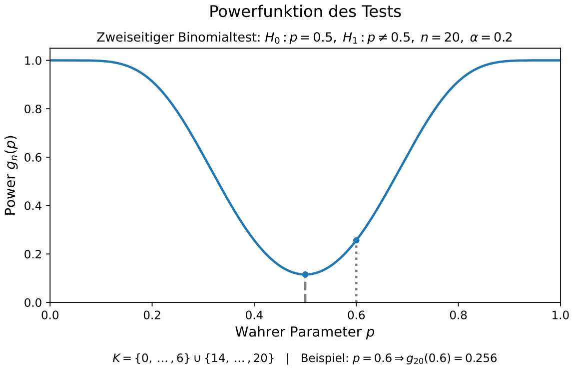
Planung des Stichprobenumfangs – sinnvoll probieren

Ausgangsfrage: Wie groß muss der Stichprobenumfang n mindestens sein, damit ein Test auf Niveau $\alpha = 0{,}1$ für $H_0 : p \leq 0{,}5$ gegen $H_1 : p > 0{,}5$ mit Wahrscheinlichkeit $\gamma = 0{,}9$ die richtige Entscheidung (H_1 trifft zu) gibt, falls $p = 0{,}6$ gilt?

Grafiken können helfen...

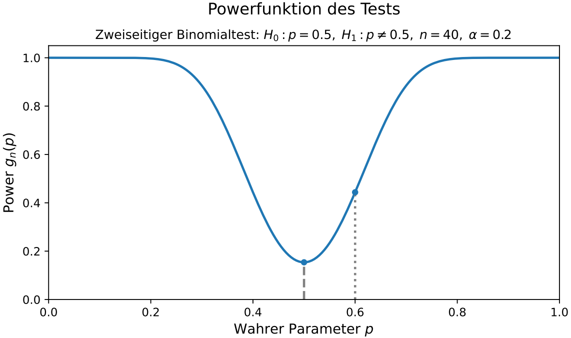
Planung des Stichprobenumfangs – sinnvoll probieren

Ausgangsfrage: Wie groß muss der Stichprobenumfang n mindestens sein, damit ein Test auf Niveau $\alpha = 0{,}1$ für $H_0 : p \leq 0{,}5$ gegen $H_1 : p > 0{,}5$ mit Wahrscheinlichkeit $\gamma = 0{,}9$ die richtige Entscheidung (H_1 trifft zu) gibt, falls $p = 0{,}6$ gilt?



Planung des Stichprobenumfangs – sinnvoll probieren

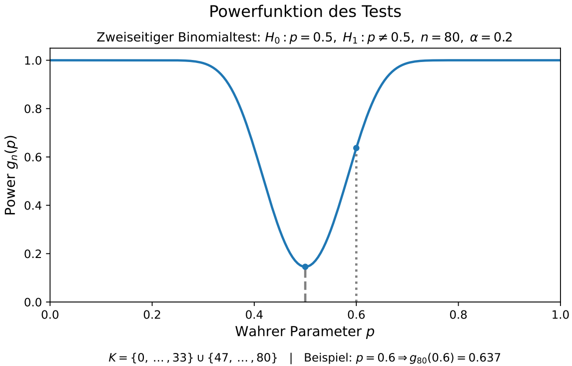
Ausgangsfrage: Wie groß muss der Stichprobenumfang n mindestens sein, damit ein Test auf Niveau $\alpha = 0{,}1$ für $H_0 : p \leq 0{,}5$ gegen $H_1 : p > 0{,}5$ mit Wahrscheinlichkeit $\gamma = 0{,}9$ die richtige Entscheidung (H_1 trifft zu) gibt, falls $p = 0{,}6$ gilt?



$K = \{0, \dots, 15\} \cup \{25, \dots, 40\}$ | Beispiel: $p = 0.6 \Rightarrow g_{40}(0.6) = 0.444$

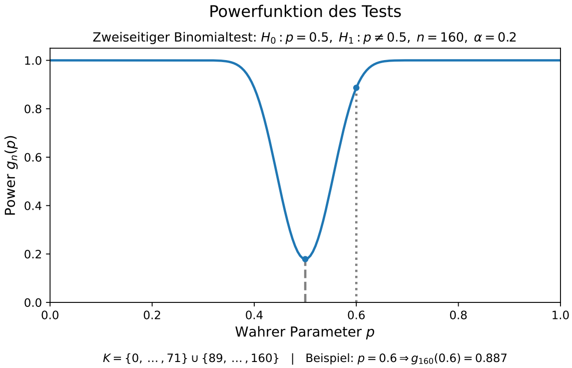
Planung des Stichprobenumfangs – sinnvoll probieren

Ausgangsfrage: Wie groß muss der Stichprobenumfang n mindestens sein, damit ein Test auf Niveau $\alpha = 0{,}1$ für $H_0 : p \leq 0{,}5$ gegen $H_1 : p > 0{,}5$ mit Wahrscheinlichkeit $\gamma = 0{,}9$ die richtige Entscheidung (H_1 trifft zu) gibt, falls $p = 0{,}6$ gilt?



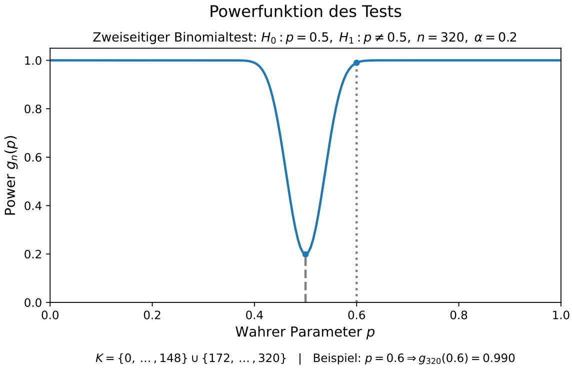
Planung des Stichprobenumfangs – sinnvoll probieren

Ausgangsfrage: Wie groß muss der Stichprobenumfang n mindestens sein, damit ein Test auf Niveau $\alpha = 0{,}1$ für $H_0 : p \leq 0{,}5$ gegen $H_1 : p > 0{,}5$ mit Wahrscheinlichkeit $\gamma = 0{,}9$ die richtige Entscheidung (H_1 trifft zu) gibt, falls $p = 0{,}6$ gilt?



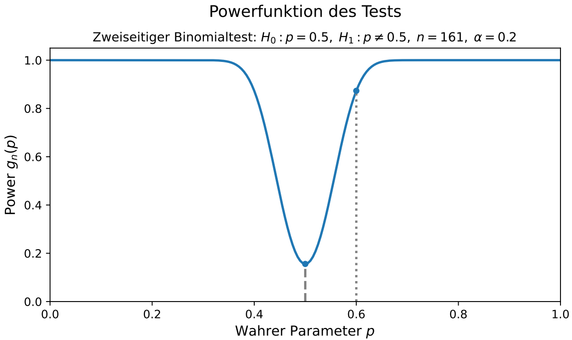
Planung des Stichprobenumfangs – sinnvoll probieren

Ausgangsfrage: Wie groß muss der Stichprobenumfang n mindestens sein, damit ein Test auf Niveau $\alpha = 0{,}1$ für $H_0 : p \leq 0{,}5$ gegen $H_1 : p > 0{,}5$ mit Wahrscheinlichkeit $\gamma = 0{,}9$ die richtige Entscheidung (H_1 trifft zu) gibt, falls $p = 0{,}6$ gilt?



Planung des Stichprobenumfangs – sinnvoll probieren

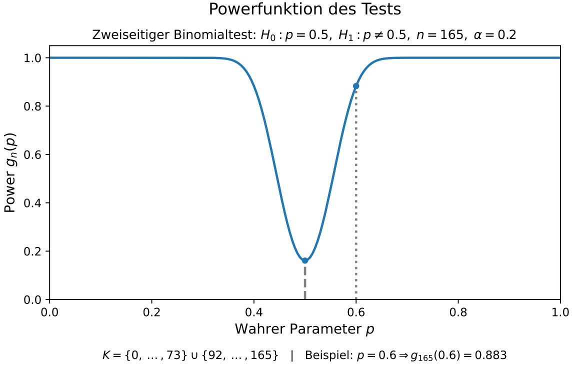
Ausgangsfrage: Wie groß muss der Stichprobenumfang n mindestens sein, damit ein Test auf Niveau $\alpha = 0{,}1$ für $H_0 : p \leq 0{,}5$ gegen $H_1 : p > 0{,}5$ mit Wahrscheinlichkeit $\gamma = 0{,}9$ die richtige Entscheidung (H_1 trifft zu) gibt, falls $p = 0{,}6$ gilt?



$K = \{0, \ldots, 71\} \cup \{90, \ldots, 161\}$ | Beispiel: $p = 0.6 \Rightarrow g_{161}(0.6) = 0.873$

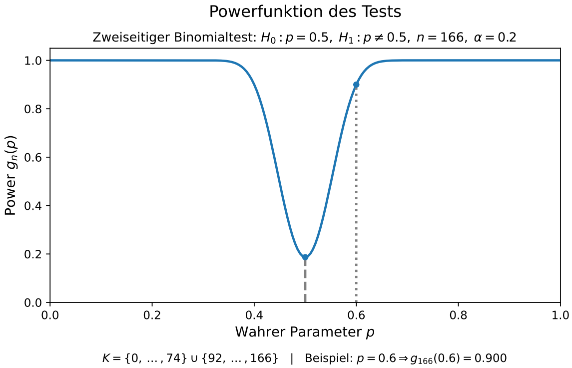
Planung des Stichprobenumfangs – sinnvoll probieren

Ausgangsfrage: Wie groß muss der Stichprobenumfang n mindestens sein, damit ein Test auf Niveau $\alpha = 0{,}1$ für $H_0 : p \leq 0{,}5$ gegen $H_1 : p > 0{,}5$ mit Wahrscheinlichkeit $\gamma = 0{,}9$ die richtige Entscheidung (H_1 trifft zu) gibt, falls $p = 0{,}6$ gilt?



Planung des Stichprobenumfangs – sinnvoll probieren

Ausgangsfrage: Wie groß muss der Stichprobenumfang n mindestens sein, damit ein Test auf Niveau $\alpha = 0{,}1$ für $H_0 : p \leq 0{,}5$ gegen $H_1 : p > 0{,}5$ mit Wahrscheinlichkeit $\gamma = 0{,}9$ die richtige Entscheidung (H_1 trifft zu) gibt, falls $p = 0{,}6$ gilt?



Planung des Stichprobenumfangs – mit Zollstöcken

Test $H_0 : p \leq 0{,}5$ gegen $H_1 : p > 0{,}5$ mit $\alpha = 0{,}1\,; \quad \gamma = 0{,}9\,; \quad p_1 = 0{,}6.$

Zwei Zollstöcke aber auch...

Planung des Stichprobenumfangs – mit Zollstöcken

Test $H_0 : p \leq 0{,}5$ gegen $H_1 : p > 0{,}5$ mit $\alpha = 0{,}1\,; \quad \gamma = 0{,}9\,; \quad p_1 = 0{,}6.$

Zwei Zollstöcke aber auch...

Überlappung, kleines n

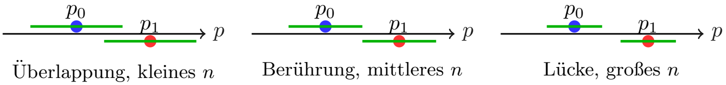
Berührung, mittleres n

Lücke, großes n

Planung des Stichprobenumfangs – mit Zollstöcken

Test $H_0 : p \leq 0{,}5$ gegen $H_1 : p > 0{,}5$ mit $\alpha = 0{,}1\,; \quad \gamma = 0{,}9\,; \quad p_1 = 0{,}6.$

Zwei Zollstöcke aber auch...



- rechte Grenze des 80%-PI unter p_0: $f(n) = p_0 + \Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{p_0(1-p_0)/n}$
- linke Grenze des 90%-PI unter p_1: $g(n) = p_1 - \Phi^{-1}(\gamma)\sqrt{p_1(1-p_1)/n}$

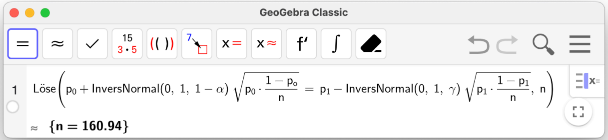
Planung des Stichprobenumfangs – mit Zollstöcken

Test $H_0 : p \leq 0{,}5$ gegen $H_1 : p > 0{,}5$ mit $\alpha = 0{,}1\,; \quad \gamma = 0{,}9\,; \quad p_1 = 0{,}6.$

Zwei Zollstöcke aber auch...

Überlappung, kleines n | Berührung, mittleres n | Lücke, großes n

- rechte Grenze des 80%-PI unter p_0: $f(n) = p_0 + \Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{p_0(1-p_0)/n}$
- linke Grenze des 90%-PI unter p_1: $g(n) = p_1 - \Phi^{-1}(\gamma)\sqrt{p_1(1-p_1)/n}$



IQB-Aufgabe 2022 - n gesucht mit Grafik

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2022

Aufgaben für das Fach Mathematik

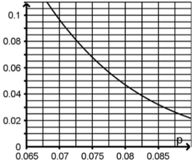
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	WTR

2 Ein Händler vermutet, dass die Fitnessarmbänder eines bestimmten Herstellers besonders häufig Fehler aufweisen. Um einen Anhaltspunkt für den Anteil der fehlerhaften Armbänder unter allen Fitnessarmbändern dieses Herstellers zu gewinnen, führt er einen Signifikanztest mit der Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Armbänder beträgt mindestens 7 %." durch.

Für diesen Test gilt:

- Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn höchstens vier Armbänder fehlerhaft sind.
- Der Abbildung kann die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art in Abhängigkeit vom Anteil p fehlerhafter Armbänder entnommen werden.



a Ermitteln Sie den Umfang der für den Test verwendeten Stichprobe. 5

b Geben Sie an, welche Überlegung den Händler dazu veranlasst haben könnte, die gewählte Nullhypothese der Alternative „Der Anteil der fehlerhaften Armbänder beträgt höchstens 7 %." vorzuziehen. Begründen Sie Ihre Angabe. 3

IQB-Aufgabe 2022 - n gesucht mit Grafik

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2022

Aufgaben für das Fach Mathematik

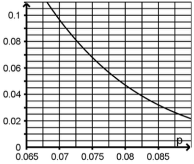
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	WTR

2 Ein Händler vermutet, dass die Fitnessarmbänder eines bestimmten Herstellers besonders häufig Fehler aufweisen. Um einen Anhaltspunkt für den Anteil der fehlerhaften Armbänder unter allen Fitnessarmbändern dieses Herstellers zu gewinnen, führt er einen Signifikanztest mit der Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Armbänder beträgt mindestens 7 %." durch.

Für diesen Test gilt:

- Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn höchstens vier Armbänder fehlerhaft sind.
- Der Abbildung kann die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art in Abhängigkeit vom Anteil p fehlerhafter Armbänder entnommen werden.



a Ermitteln Sie den Umfang der für den Test verwendeten Stichprobe. 5

b Geben Sie an, welche Überlegung den Händler dazu veranlasst haben könnte, die gewählte Nullhypothese der Alternative „Der Anteil der fehlerhaften Armbänder beträgt höchstens 7 %." vorzuziehen. Begründen Sie Ihre Angabe. 3

2	a	Die Abbildung liefert für $p = 0{,}07$ einen Wert zwischen 0,095 und 0,1. Y: Anzahl der fehlerhaften Armbänder $P_{0,07}^{112}(Y \le 4) \approx 0{,}101$, $P_{0,07}^{113}(Y \le 4) \approx 0{,}097$, $P_{0,07}^{114}(Y \le 4) \approx 0{,}093$ Die Stichprobe hatte also einen Umfang von 113 Armbändern.	5
	b	Der Händler möchte vermeiden, irrtümlich von einem zu geringen Anteil fehlerhafter Armbänder auszugehen, da dies beispielsweise zu unerwartet vielen Reklamationen durch Kunden führen könnte. Bei der gewählten Nullhypothese beträgt das Risiko für diesen Irrtum höchstens 9,7 % und ist damit gering. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich von einem zu großen Anteil auszugehen, kann dagegen wesentlich größer sein.	3

IQB-Aufgabe 2022 - n gesucht mit Grafik

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2022

Aufgaben für das Fach Mathematik

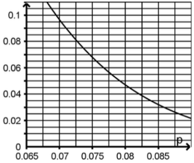
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	WTR

2 Ein Händler vermutet, dass die Fitnessarmbänder eines bestimmten Herstellers besonders häufig Fehler aufweisen. Um einen Anhaltspunkt für den Anteil der fehlerhaften Armbänder unter allen Fitnessarmbändern dieses Herstellers zu gewinnen, führt er einen Signifikanztest mit der Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Armbänder beträgt mindestens 7 %.“ durch.

Für diesen Test gilt:

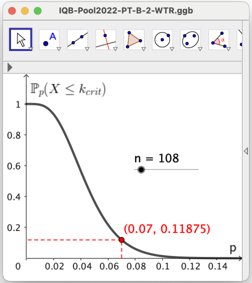
- Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn höchstens vier Armbänder fehlerhaft sind.
- Der Abbildung kann die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art in Abhängigkeit vom Anteil p fehlerhafter Armbänder entnommen werden.



a Ermitteln Sie den Umfang der für den Test verwendeten Stichprobe. 5

b Geben Sie an, welche Überlegung den Händler dazu veranlasst haben könnte, die gewählte Nullhypothese der Alternative „Der Anteil der fehlerhaften Armbänder beträgt höchstens 7 %.“ vorzuziehen. Begründen Sie Ihre Angabe. 3

2	**a**	Die Abbildung liefert für $p = 0{,}07$ einen Wert zwischen 0,095 und 0,1. Y: Anzahl der fehlerhaften Armbänder $P_{0,07}^{112}(Y \le 4) \approx 0{,}101$, $P_{0,07}^{113}(Y \le 4) \approx 0{,}097$, $P_{0,07}^{114}(Y \le 4) \approx 0{,}093$ Die Stichprobe hatte also einen Umfang von 113 Armbändern.	5
	b	Der Händler möchte vermeiden, irrtümlich von einem zu geringen Anteil fehlerhafter Armbänder auszugehen, da dies beispielsweise zu unerwartet vielen Reklamationen durch Kunden führen könnte. Bei der gewählten Nullhypothese beträgt das Risiko für diesen Irrtum höchstens 9,7 % und ist damit gering. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich von einem zu großen Anteil auszugehen, kann dagegen wesentlich größer sein.	3



Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder
Pool für das Jahr 2022
Aufgaben für das Fach Mathematik

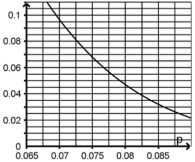
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	WTR

2 Ein Händler vermutet, dass die Fitnessarmbänder eines bestimmten Herstellers besonders häufig Fehler aufweisen. Um einen Anhaltspunkt für den Anteil der fehlerhaften Armbänder unter allen Fitnessarmbändern dieses Herstellers zu gewinnen, führt er einen Signifikanztest mit der Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Armbänder beträgt mindestens 7 %." durch.

Für diesen Test gilt:

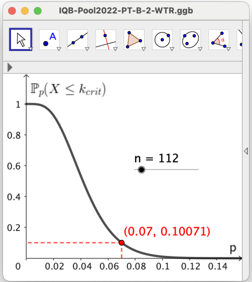
- Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn höchstens vier Armbänder fehlerhaft sind.
- Der Abbildung kann die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art in Abhängigkeit vom Anteil p fehlerhafter Armbänder entnommen werden.



a Ermitteln Sie den Umfang der für den Test verwendeten Stichprobe. 5

b Geben Sie an, welche Überlegung den Händler dazu veranlasst haben könnte, die gewählte Nullhypothese der Alternative „Der Anteil der fehlerhaften Armbänder beträgt höchstens 7 %." vorzuziehen. Begründen Sie Ihre Angabe. 3

2	**a**	Die Abbildung liefert für $p = 0{,}07$ einen Wert zwischen 0,095 und 0,1. Y: Anzahl der fehlerhaften Armbänder $P_{0,07}^{112}(Y \le 4) \approx 0{,}101$, $P_{0,07}^{113}(Y \le 4) \approx 0{,}097$, $P_{0,07}^{114}(Y \le 4) \approx 0{,}093$ Die Stichprobe hatte also einen Umfang von 113 Armbändern.	5
	b	Der Händler möchte vermeiden, irrtümlich von einem zu geringen Anteil fehlerhafter Armbänder auszugehen, da dies beispielsweise zu unerwartet vielen Reklamationen durch Kunden führen könnte. Bei der gewählten Nullhypothese beträgt das Risiko für diesen Irrtum höchstens 9,7 % und ist damit gering. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich von einem zu großen Anteil auszugehen, kann dagegen wesentlich größer sein.	3



IQB-Aufgabe 2022 - n gesucht mit Grafik

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2022

Aufgaben für das Fach Mathematik

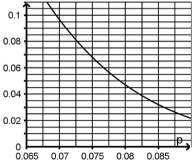
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	WTR

2 Ein Händler vermutet, dass die Fitnessarmbänder eines bestimmten Herstellers besonders häufig Fehler aufweisen. Um einen Anhaltspunkt für den Anteil der fehlerhaften Armbänder unter allen Fitnessarmbändern dieses Herstellers zu gewinnen, führt er einen Signifikanztest mit der Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Armbänder beträgt mindestens 7 %." durch.

Für diesen Test gilt:

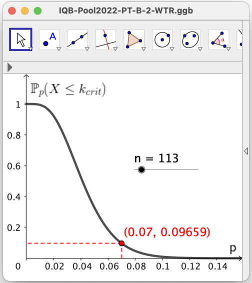
- Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn höchstens vier Armbänder fehlerhaft sind.
- Der Abbildung kann die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art in Abhängigkeit vom Anteil p fehlerhafter Armbänder entnommen werden.



a Ermitteln Sie den Umfang der für den Test verwendeten Stichprobe. 5

b Geben Sie an, welche Überlegung den Händler dazu veranlasst haben könnte, die gewählte Nullhypothese der Alternative „Der Anteil der fehlerhaften Armbänder beträgt höchstens 7 %." vorzuziehen. Begründen Sie Ihre Angabe. 3

2	a	Die Abbildung liefert für $p = 0{,}07$ einen Wert zwischen 0,095 und 0,1. Y: Anzahl der fehlerhaften Armbänder $P_{0,07}^{112}(Y \le 4) \approx 0{,}101$, $P_{0,07}^{113}(Y \le 4) \approx 0{,}097$, $P_{0,07}^{114}(Y \le 4) \approx 0{,}093$ Die Stichprobe hatte also einen Umfang von 113 Armbändern.	5
	b	Der Händler möchte vermeiden, irrtümlich von einem zu geringen Anteil fehlerhafter Armbänder auszugehen, da dies beispielsweise zu unerwartet vielen Reklamationen durch Kunden führen könnte. Bei der gewählten Nullhypothese beträgt das Risiko für diesen Irrtum höchstens 9,7 % und ist damit gering. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich von einem zu großen Anteil auszugehen, kann dagegen wesentlich größer sein.	3



IQB-Aufgabe 2022 - n gesucht mit Grafik

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2022

Aufgaben für das Fach Mathematik

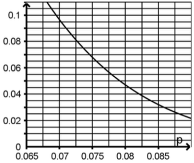
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	WTR

2 Ein Händler vermutet, dass die Fitnessarmbänder eines bestimmten Herstellers besonders häufig Fehler aufweisen. Um einen Anhaltspunkt für den Anteil der fehlerhaften Armbänder unter allen Fitnessarmbändern dieses Herstellers zu gewinnen, führt er einen Signifikanztest mit der Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Armbänder beträgt mindestens 7 %." durch.

Für diesen Test gilt:

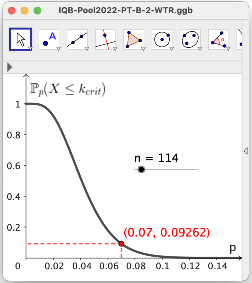
- Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn höchstens vier Armbänder fehlerhaft sind.
- Der Abbildung kann die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art in Abhängigkeit vom Anteil p fehlerhafter Armbänder entnommen werden.



a Ermitteln Sie den Umfang der für den Test verwendeten Stichprobe. 5

b Geben Sie an, welche Überlegung den Händler dazu veranlasst haben könnte, die gewählte Nullhypothese der Alternative „Der Anteil der fehlerhaften Armbänder beträgt höchstens 7 %." vorzuziehen. Begründen Sie Ihre Angabe. 3

2	a	Die Abbildung liefert für $p = 0{,}07$ einen Wert zwischen 0,095 und 0,1. Y: Anzahl der fehlerhaften Armbänder $P_{0,07}^{112}(Y \le 4) \approx 0{,}101$, $P_{0,07}^{113}(Y \le 4) \approx 0{,}097$, $P_{0,07}^{114}(Y \le 4) \approx 0{,}093$ Die Stichprobe hatte also einen Umfang von 113 Armbändern.	5
	b	Der Händler möchte vermeiden, irrtümlich von einem zu geringen Anteil fehlerhafter Armbänder auszugehen, da dies beispielsweise zu unerwartet vielen Reklamationen durch Kunden führen könnte. Bei der gewählten Nullhypothese beträgt das Risiko für diesen Irrtum höchstens 9,7 % und ist damit gering. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich von einem zu großen Anteil auszugehen, kann dagegen wesentlich größer sein.	3



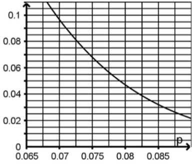
IQB-Aufgabe 2022 - n gesucht mit Grafik

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder
Pool für das Jahr 2022
Aufgaben für das Fach Mathematik

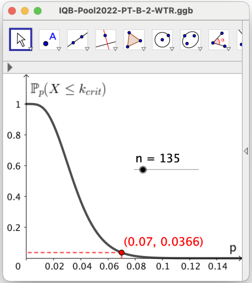
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	WTR

2 Ein Händler vermutet, dass die Fitnessarmbänder eines bestimmten Herstellers besonders häufig Fehler aufweisen. Um einen Anhaltspunkt für den Anteil der fehlerhaften Armbänder unter allen Fitnessarmbändern dieses Herstellers zu gewinnen, führt er einen Signifikanztest mit der Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Armbänder beträgt mindestens 7 %." durch.	
Für diesen Test gilt: ♦ Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn höchstens vier Armbänder fehlerhaft sind. ♦ Der Abbildung kann die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art in Abhängigkeit vom Anteil p fehlerhafter Armbänder entnommen werden.	
a Ermitteln Sie den Umfang der für den Test verwendeten Stichprobe.	5
b Geben Sie an, welche Überlegung den Händler dazu veranlasst haben könnte, die gewählte Nullhypothese der Alternative „Der Anteil der fehlerhaften Armbänder beträgt höchstens 7 %." vorzuziehen. Begründen Sie Ihre Angabe.	3



2	**a**	Die Abbildung liefert für $p = 0{,}07$ einen Wert zwischen 0,095 und 0,1. Y: Anzahl der fehlerhaften Armbänder $P_{0,07}^{112}(Y \leq 4) \approx 0{,}101$, $P_{0,07}^{113}(Y \leq 4) \approx 0{,}097$, $P_{0,07}^{114}(Y \leq 4) \approx 0{,}093$ Die Stichprobe hatte also einen Umfang von 113 Armbändern.	5
	b	Der Händler möchte vermeiden, irrtümlich von einem zu geringen Anteil fehlerhafter Armbänder auszugehen, da dies beispielsweise zu unerwartet vielen Reklamationen durch Kunden führen könnte. Bei der gewählten Nullhypothese beträgt das Risiko für diesen Irrtum höchstens 9,7 % und ist damit gering. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich von einem zu großen Anteil auszugehen, kann dagegen wesentlich größer sein.	3



IQB-Aufgabe 2022 - n gesucht mit Grafik

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2022

Aufgaben für das Fach Mathematik

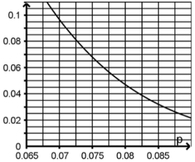
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	WTR

2 Ein Händler vermutet, dass die Fitnessarmbänder eines bestimmten Herstellers besonders häufig Fehler aufweisen. Um einen Anhaltspunkt für den Anteil der fehlerhaften Armbänder unter allen Fitnessarmbändern dieses Herstellers zu gewinnen, führt er einen Signifikanztest mit der Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Armbänder beträgt mindestens 7 %." durch.

Für diesen Test gilt:

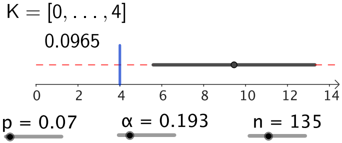
- Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn höchstens vier Armbänder fehlerhaft sind.
- Der Abbildung kann die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art in Abhängigkeit vom Anteil p fehlerhafter Armbänder entnommen werden.



a Ermitteln Sie den Umfang der für den Test verwendeten Stichprobe. 5

b Geben Sie an, welche Überlegung den Händler dazu veranlasst haben könnte, die gewählte Nullhypothese der Alternative „Der Anteil der fehlerhaften Armbänder beträgt höchstens 7 %." vorzuziehen. Begründen Sie Ihre Angabe. 3

2	a	Die Abbildung liefert für $p = 0{,}07$ einen Wert zwischen 0,095 und 0,1. Y: Anzahl der fehlerhaften Armbänder $P_{0,07}^{112}(Y \le 4) \approx 0{,}101$, $P_{0,07}^{113}(Y \le 4) \approx 0{,}097$, $P_{0,07}^{114}(Y \le 4) \approx 0{,}093$ Die Stichprobe hatte also einen Umfang von 113 Armbändern.	5
	b	Der Händler möchte vermeiden, irrtümlich von einem zu geringen Anteil fehlerhafter Armbänder auszugehen, da dies beispielsweise zu unerwartet vielen Reklamationen durch Kunden führen könnte. Bei der gewählten Nullhypothese beträgt das Risiko für diesen Irrtum höchstens 9,7 % und ist damit gering. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich von einem zu großen Anteil auszugehen, kann dagegen wesentlich größer sein.	3



IQB-Aufgabe 2022 - n gesucht mit Grafik

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder
Pool für das Jahr 2022
Aufgaben für das Fach Mathematik

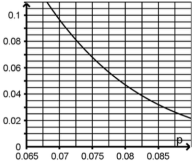
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	WTR

2 Ein Händler vermutet, dass die Fitnessarmbänder eines bestimmten Herstellers besonders häufig Fehler aufweisen. Um einen Anhaltspunkt für den Anteil der fehlerhaften Armbänder unter allen Fitnessarmbändern dieses Herstellers zu gewinnen, führt er einen Signifikanztest mit der Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Armbänder beträgt mindestens 7 %." durch.

Für diesen Test gilt:

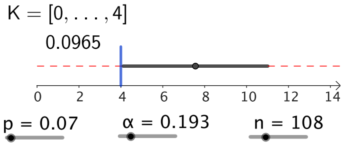
- Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn höchstens vier Armbänder fehlerhaft sind.
- Der Abbildung kann die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art in Abhängigkeit vom Anteil p fehlerhafter Armbänder entnommen werden.



a Ermitteln Sie den Umfang der für den Test verwendeten Stichprobe. 5

b Geben Sie an, welche Überlegung den Händler dazu veranlasst haben könnte, die gewählte Nullhypothese der Alternative „Der Anteil der fehlerhaften Armbänder beträgt höchstens 7 %." vorzuziehen. Begründen Sie Ihre Angabe. 3

2	**a**	Die Abbildung liefert für $p = 0{,}07$ einen Wert zwischen 0,095 und 0,1. Y: Anzahl der fehlerhaften Armbänder $P_{0,07}^{112}(Y \le 4) \approx 0{,}101$, $P_{0,07}^{113}(Y \le 4) \approx 0{,}097$, $P_{0,07}^{114}(Y \le 4) \approx 0{,}093$ Die Stichprobe hatte also einen Umfang von 113 Armbändern.	5
	b	Der Händler möchte vermeiden, irrtümlich von einem zu geringen Anteil fehlerhafter Armbänder auszugehen, da dies beispielsweise zu unerwartet vielen Reklamationen durch Kunden führen könnte. Bei der gewählten Nullhypothese beträgt das Risiko für diesen Irrtum höchstens 9,7 % und ist damit gering. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich von einem zu großen Anteil auszugehen, kann dagegen wesentlich größer sein.	3



IQB-Aufgabe 2023 - argumentieren mit Grafik

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2023

Aufgaben für das Fach Mathematik

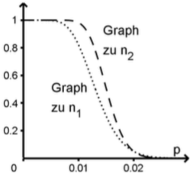
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	MMS/WTR

b Es soll davon ausgegangen werden, dass 80 000 Personen an dem Spiel teilnehmen werden. Der Erwartungswert der Anzahl der Personen mit zwei Strandkörben wird mit μ bezeichnet. Ermitteln Sie den kleinsten möglichen ganzzahligen Wert von c, für den die Anzahl der Personen mit zwei Strandkörben mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % im Intervall $[\mu - c; \mu + c]$ liegt. 4

c Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person nach der Teilnahme am Gewinnspiel eine Reise bei dem Reiseunternehmen bucht, wird mit p bezeichnet. Für das Unternehmen wäre eine Verlängerung des Gewinnspiels für $p \geq 2\%$ mit Vorteilen verbunden, für $p < 2\%$ dagegen mit finanziellen Verlusten. Die Nullhypothese „p beträgt mindestens 2 %." soll auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Je größer der Umfang der Stichprobe gewählt wird, desto teurer ist die Durchführung des Tests. 5

Das Gewinnspiel soll nur dann nicht verlängert werden, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden müsste.



Die Abbildung stellt für zwei mögliche Stichprobenumfänge n_1 und n_2 mit $n_1 < n_2$ in Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit dafür dar, dass das Ergebnis des Tests im Ablehnungsbereich liegt. Geben Sie an, unter welcher Bedingung sich der größere Stichprobenumfang für das Unternehmen lohnen könnte, und begründen Sie Ihre Angabe unter Verwendung der Abbildung sowie des Fehlers zweiter Art.

IQB-Aufgabe 2023 - argumentieren mit Grafik

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2023

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

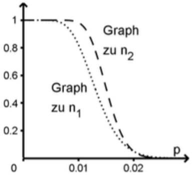
Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	MMS/WTR

b Es soll davon ausgegangen werden, dass 80 000 Personen an dem Spiel teilnehmen werden. Der Erwartungswert der Anzahl der Personen mit zwei Strandkörben wird mit μ bezeichnet. Ermitteln Sie den kleinsten möglichen ganzzahligen Wert von c, für den die Anzahl der Personen mit zwei Strandkörben mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % im Intervall $[\mu - c; \mu + c]$ liegt. 4

c Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person nach der Teilnahme am Gewinnspiel eine Reise bei dem Reiseunternehmen bucht, wird mit p bezeichnet. Für das Unternehmen wäre eine Verlängerung des Gewinnspiels für $p \geq 2\%$ mit Vorteilen verbunden, für $p < 2\%$ dagegen mit finanziellen Verlusten. Die Nullhypothese „p beträgt mindestens 2 %." soll auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Je größer der Umfang der Stichprobe gewählt wird, desto teurer ist die Durchführung des Tests. 5

Das Gewinnspiel soll nur dann nicht verlängert werden, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden müsste.

Die Abbildung stellt für zwei mögliche Stichprobenumfänge n_1 und n_2 mit $n_1 < n_2$ in Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit dafür dar, dass das Ergebnis des Tests im Ablehnungsbereich liegt. Geben Sie an, unter welcher Bedingung sich der größere Stichprobenumfang für das Unternehmen lohnen könnte, und begründen Sie Ihre Angabe unter Verwendung der Abbildung sowie des Fehlers zweiter Art.



c Der Fehler zweiter Art kann auftreten, wenn $p < 0{,}02$ gilt, beispielsweise für $p = 0{,}014$. Für diesen Wert von p liegt der Graph zu n_2 oberhalb des Graphen zu n_1. Damit ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, das Gewinnspiel irrtümlich zu verlängern, für n_2 kleiner als für n_1. Bei größerem Stichprobenumfang ist für das Unternehmen also das Risiko, durch eine Verlängerung des Gewinnspiels finanzielle Verluste zu erleiden, geringer. Gleichzeitig sind aber die Kosten für die Durchführung des Tests höher. Damit könnte sich der größere Stichprobenumfang für das Unternehmen lohnen, wenn die zusätzlichen Kosten für den größeren Stichprobenumfang verhältnismäßig gering wären. 5

IQB-Aufgabe 2023 - argumentieren mit Grafik

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2023

Aufgaben für das Fach Mathematik

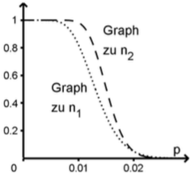
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	MMS/WTR

b Es soll davon ausgegangen werden, dass 80 000 Personen an dem Spiel teilnehmen werden. Der Erwartungswert der Anzahl der Personen mit zwei Strandkörben wird mit μ bezeichnet. Ermitteln Sie den kleinsten möglichen ganzzahligen Wert von c, für den die Anzahl der Personen mit zwei Strandkörben mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % im Intervall $[\mu - c; \mu + c]$ liegt. 4

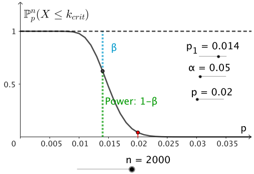
c Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person nach der Teilnahme am Gewinnspiel eine Reise bei dem Reiseunternehmen bucht, wird mit p bezeichnet. Für das Unternehmen wäre eine Verlängerung des Gewinnspiels für $p \geq 2\%$ mit Vorteilen verbunden, für $p < 2\%$ dagegen mit finanziellen Verlusten. Die Nullhypothese „p beträgt mindestens 2 %." soll auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Je größer der Umfang der Stichprobe gewählt wird, desto teurer ist die Durchführung des Tests. 5

Das Gewinnspiel soll nur dann nicht verlängert werden, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden müsste.



Die Abbildung stellt für zwei mögliche Stichprobenumfänge n_1 und n_2 mit $n_1 < n_2$ in Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit dafür dar, dass das Ergebnis des Tests im Ablehnungsbereich liegt. Geben Sie an, unter welcher Bedingung sich der größere Stichprobenumfang für das Unternehmen lohnen könnte, und begründen Sie Ihre Angabe unter Verwendung der Abbildung sowie des Fehlers zweiter Art.

c Der Fehler zweiter Art kann auftreten, wenn $p < 0{,}02$ gilt, beispielsweise für $p = 0{,}014$. Für diesen Wert von p liegt der Graph zu n_2 oberhalb des Graphen zu n_1. Damit ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, das Gewinnspiel irrtümlich zu verlängern, für n_2 kleiner als für n_1. Bei größerem Stichprobenumfang ist für das Unternehmen also das Risiko, durch eine Verlängerung des Gewinnspiels finanzielle Verluste zu erleiden, geringer. Gleichzeitig sind aber die Kosten für die Durchführung des Tests höher. Damit könnte sich der größere Stichprobenumfang für das Unternehmen lohnen, wenn die zusätzlichen Kosten für den größeren Stichprobenumfang verhältnismäßig gering wären. 5



IQB-Aufgabe 2023 - argumentieren mit Grafik

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2023

Aufgaben für das Fach Mathematik

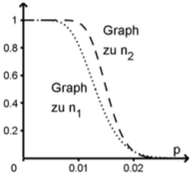
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	MMS/WTR

b Es soll davon ausgegangen werden, dass 80 000 Personen an dem Spiel teilnehmen werden. Der Erwartungswert der Anzahl der Personen mit zwei Strandkörben wird mit μ bezeichnet. Ermitteln Sie den kleinsten möglichen ganzzahligen Wert von c, für den die Anzahl der Personen mit zwei Strandkörben mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % im Intervall $[\mu - c; \mu + c]$ liegt. 4

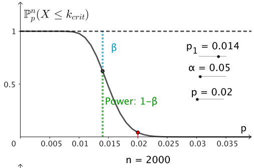
c Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person nach der Teilnahme am Gewinnspiel eine Reise bei dem Reiseunternehmen bucht, wird mit p bezeichnet. Für das Unternehmen wäre eine Verlängerung des Gewinnspiels für $p \geq 2\%$ mit Vorteilen verbunden, für $p < 2\%$ dagegen mit finanziellen Verlusten. Die Nullhypothese „p beträgt mindestens 2 %." soll auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Je größer der Umfang der Stichprobe gewählt wird, desto teurer ist die Durchführung des Tests. 5

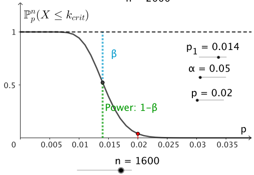
Das Gewinnspiel soll nur dann nicht verlängert werden, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden müsste.



Die Abbildung stellt für zwei mögliche Stichprobenumfänge n_1 und n_2 mit $n_1 < n_2$ in Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit dafür dar, dass das Ergebnis des Tests im Ablehnungsbereich liegt. Geben Sie an, unter welcher Bedingung sich der größere Stichprobenumfang für das Unternehmen lohnen könnte, und begründen Sie Ihre Angabe unter Verwendung der Abbildung sowie des Fehlers zweiter Art.

c Der Fehler zweiter Art kann auftreten, wenn $p < 0{,}02$ gilt, beispielsweise für $p = 0{,}014$. Für diesen Wert von p liegt der Graph zu n_2 oberhalb des Graphen zu n_1. Damit ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, das Gewinnspiel irrtümlich zu verlängern, für n_2 kleiner als für n_1. Bei größerem Stichprobenumfang ist für das Unternehmen also das Risiko, durch eine Verlängerung des Gewinnspiels finanzielle Verluste zu erleiden, geringer. Gleichzeitig sind aber die Kosten für die Durchführung des Tests höher. Damit könnte sich der größere Stichprobenumfang für das Unternehmen lohnen, wenn die zusätzlichen Kosten für den größeren Stichprobenumfang verhältnismäßig gering wären. 5





Konfidenzintervalle - wie werden sie berechnet und wo steckt der Zufall?

Konfidenzintervall - der Versuch einer Definition

Ergebnis der Fortbildung

Definition

Ein **Konfidenzintervall** zu einer beobachteten relativen Häufigkeit h besteht aus allen denjenigen Wahrscheinlichkeiten (p-Werten), in deren Prognoseintervall die beobachtete relative Häufigkeit h liegt.

Konfidenzintervall - der Versuch einer Definition

Ergebnis der Fortbildung

Definition

Ein **Konfidenzintervall** zu einer beobachteten relativen Häufigkeit h besteht aus allen denjenigen Wahrscheinlichkeiten (p-Werten), in deren Prognoseintervall die beobachtete relative Häufigkeit h liegt.

Ergebnis am Schreibtisch

Definition

Ein **Konfidenzintervall** zu einer beobachteten relativen Häufigkeit h ist die Menge aller Wahrscheinlichkeiten p im Binomialmodell $\mathrm{Bin}(n, p)$, in deren Prognoseintervall die beobachtete relative Häufigkeit h liegt.

Konfidenzintervall - der Versuch einer Definition

Definition

Ein Konfidenzintervall zu einer beobachteten relativen Häufigkeit h ist die Menge aller Wahrscheinlichkeiten p im Binomialmodell $\mathrm{Bin}(n, p)$, in deren Prognoseintervall die beobachtete relative Häufigkeit h liegt.

Konfidenzintervall - der Versuch einer Definition

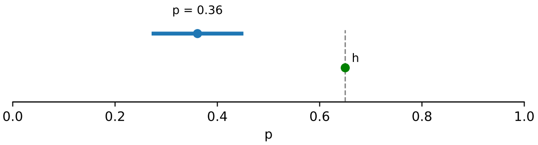
Definition

Ein Konfidenzintervall zu einer beobachteten relativen Häufigkeit h ist die Menge aller Wahrscheinlichkeiten p im Binomialmodell $\mathrm{Bin}(n, p)$, in deren Prognoseintervall die beobachtete relative Häufigkeit h liegt.

Wo ist hier der Zufall?

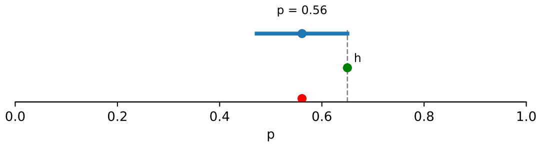
Konfidenzintervalle freirubbeln - und berechnen

Stichprobenziehung: $n = 120$; $x = 78$; $h = 0{,}65$



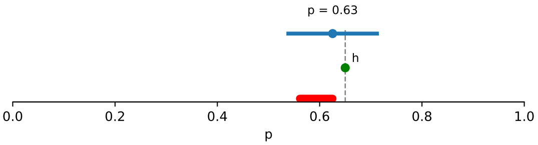
Konfidenzintervalle freirubbeln - und berechnen

Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 78;\ h = 0{,}65$



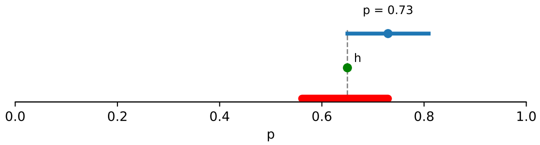
Konfidenzintervalle freirubbeln - und berechnen

Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 78;\ h = 0{,}65$



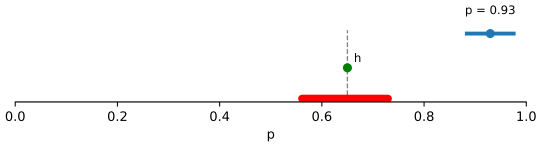
Konfidenzintervalle freirubbeln - und berechnen

Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 78;\ h = 0{,}65$



Konfidenzintervalle freirubbeln - und berechnen

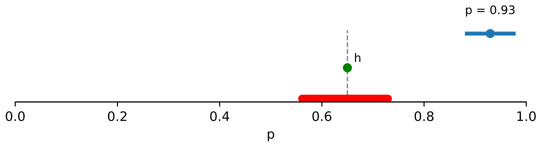
Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 78;\ h = 0{,}65$



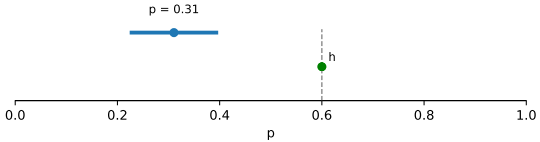
Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 72;\ h = 0{,}60$

Konfidenzintervalle freirubbeln - und berechnen

Stichprobenziehung: $n = 120$; $x = 78$; $h = 0{,}65$

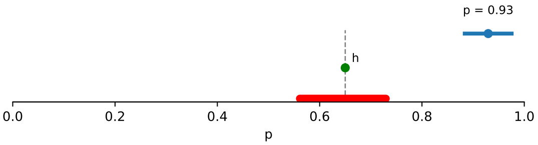


Stichprobenziehung: $n = 120$; $x = 72$; $h = 0{,}60$

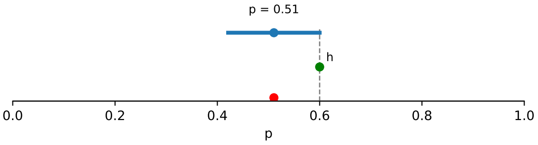


Konfidenzintervalle freirubbeln - und berechnen

Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 78;\ h = 0{,}65$

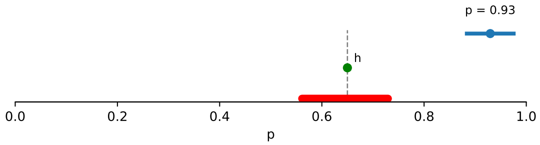


Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 72;\ h = 0{,}60$

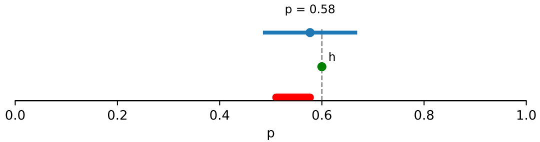


Konfidenzintervalle freirubbeln - und berechnen

Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 78;\ h = 0{,}65$

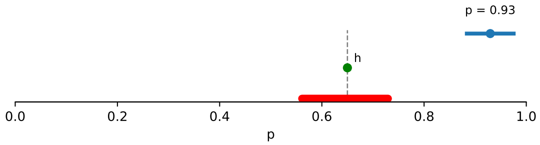


Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 72;\ h = 0{,}60$

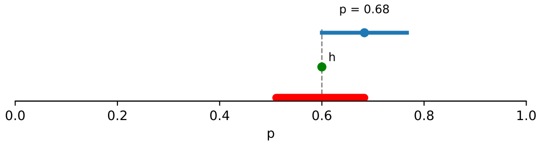


Konfidenzintervalle freirubbeln - und berechnen

Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 78;\ h = 0{,}65$

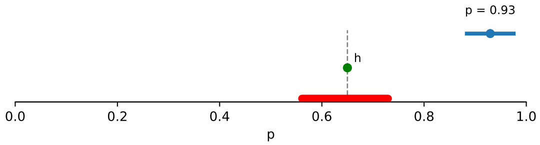


Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 72;\ h = 0{,}60$

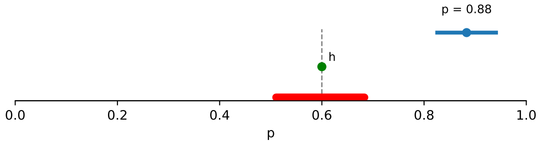


Konfidenzintervalle freirubbeln - und berechnen

Stichprobenziehung: $n = 120$; $x = 78$; $h = 0{,}65$

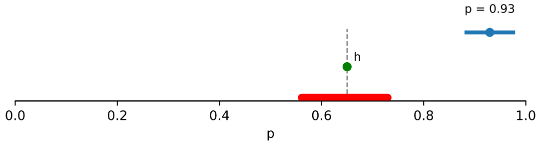


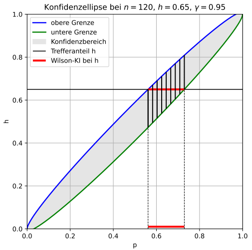
Stichprobenziehung: $n = 120$; $x = 72$; $h = 0{,}60$



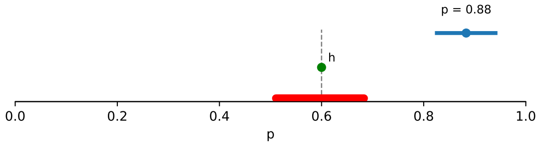
Konfidenzintervalle freirubbeln - und berechnen

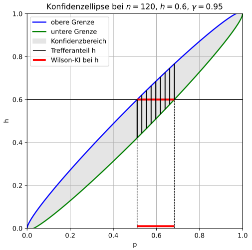
Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 78;\ h = 0{,}65$



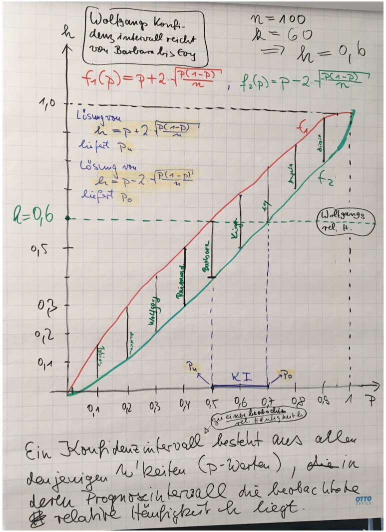


Stichprobenziehung: $n = 120;\ x = 72;\ h = 0{,}60$

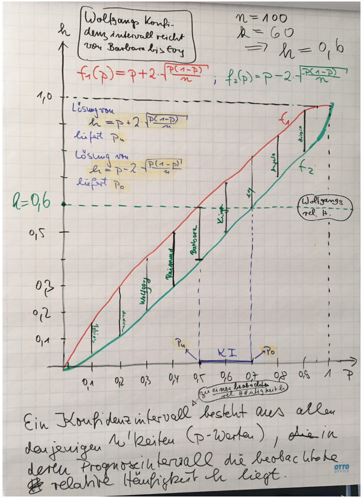




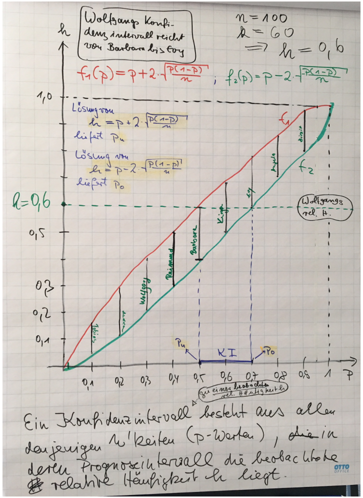
Konfidenzellipse (do it yourself) - während einer denkwürdigen Fortbildung



Die Konfidenzellipse (do it yourself) - während einer denkwürdigen Fortbildung



Die Konfidenzellipse als Denkraum



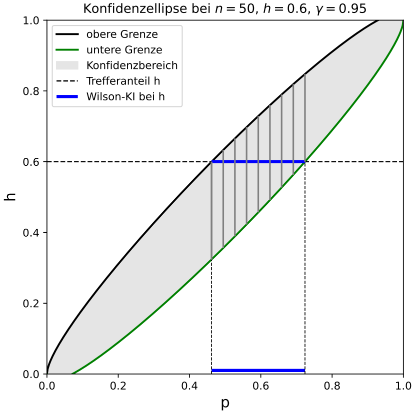
Mehr als eine Grafik

Die Konfidenzellipse ist kein Poster und kein Rechenhilfsmittel,
sondern ein gemeinsamer **Denkraum**.

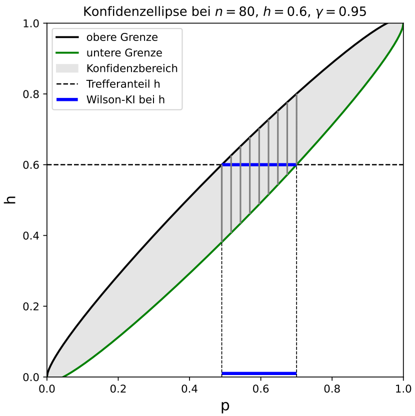
- Sie macht Abhängigkeiten sichtbar.
- Sie erlaubt Perspektivwechsel (Schnitte).
- Sie verbindet Geometrie und Stochastik.
- Sie trägt Prognose- und Konfidenzintervalle.

Nicht anschauen – benutzen.
Immer wieder – im Klassenraum – gemeinsam.

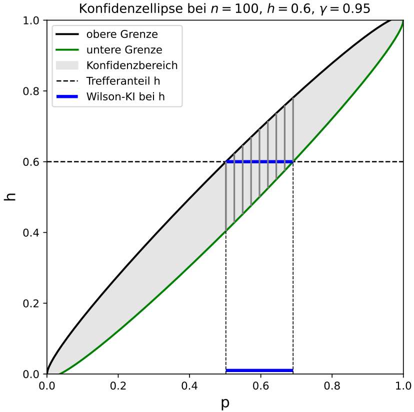
Konfidenzellipsen – ein Überblick, falls n verändert wird



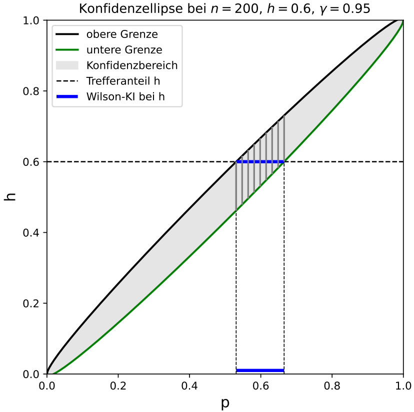
Konfidenzellipsen – ein Überblick, falls n verändert wird



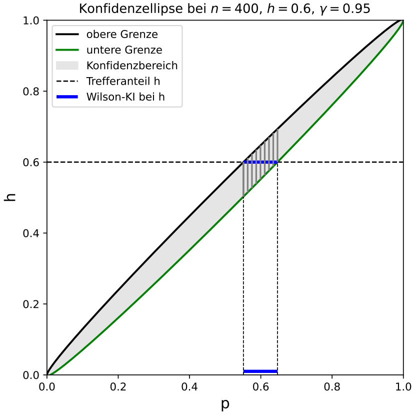
Konfidenzellipsen – ein Überblick, falls n verändert wird



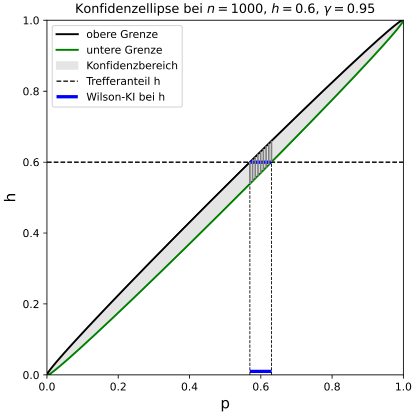
Konfidenzellipsen – ein Überblick, falls n verändert wird



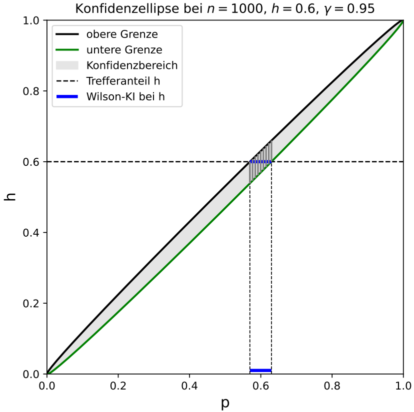
Konfidenzellipsen – ein Überblick, falls n verändert wird

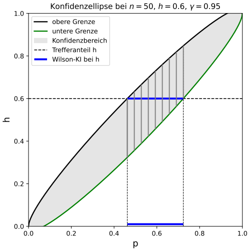


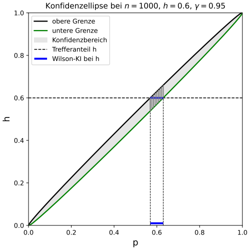
Konfidenzellipsen – ein Überblick, falls n verändert wird



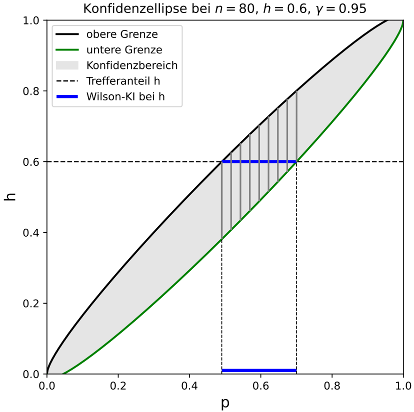
Konfidenzellipsen – ein Überblick, falls n verändert wird







Konfidenzellipsen – ein Überblick, falls n verändert wird



Schnitt des oberen Astes der Ellipse mit $h = 0{,}6$ liefert die linke Grenze p_u des Konfidenzintervalls:

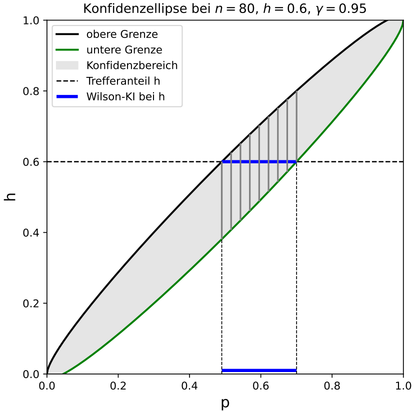
$$0{,}6 = p_u + 1,96\sqrt{\frac{p_u(1-p_u)}{n}}$$

Schnitt des unteren Astes der Ellipse

mit $h = 0{,}6$ liefert die rechte Grenze p_o des Konfidenzintervalls:

$$0{,}6 = p_o - 1,96\sqrt{\frac{p_o(1-p_o)}{n}}$$

Konfidenzellipsen – ein Überblick, falls n verändert wird

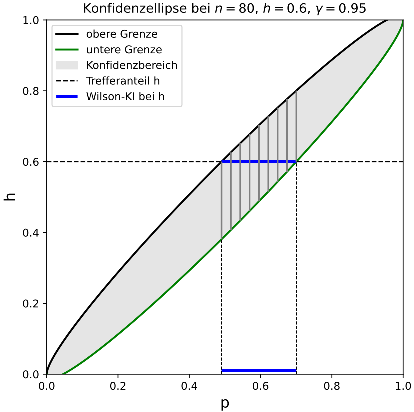


Die Konfidenzellipse hilft ...

- Prognoseintervalle von Konfidenzintervallen zu unterscheiden,
- Berechnungen zu verstehen,
- Abhängigkeiten zu entdecken und zu begründen.

Sie ist keine Darstellung der Verfahrenswahrscheinlichkeit.

Konfidenzellipsen – ein Überblick, falls n verändert wird



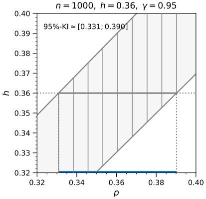
Die Konfidenzellipse hilft ...

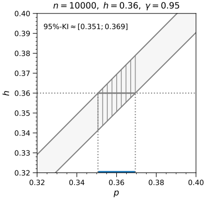
- Prognoseintervalle von Konfidenzintervallen zu unterscheiden,
- Berechnungen zu verstehen,
- Abhängigkeiten zu entdecken und zu begründen.

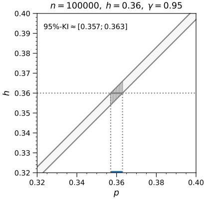
Sie ist keine Darstellung der Verfahrenswahrscheinlichkeit.

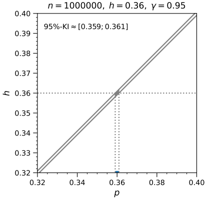
Überdeckungswahrscheinlichkeit: Zahlenwert
Sicherheitswahrscheinlichkeit: Wird oft benutzt, umgangssprachlich besetzt, 95% sicher - was soll ich mir darunter vorstellen?
Verfahrenswahrscheinlichkeit: Die Wahrscheinlichkeit gehört dem Verfahren, nicht dem Ergebnis; der Perspektivwechsel wird deutlich.

n verschieden, $\gamma = 0{,}95$



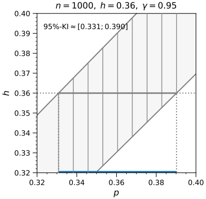


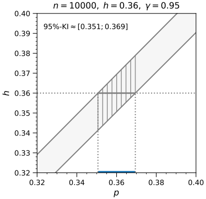


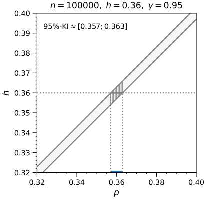


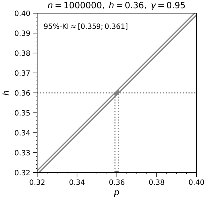
Konfidenzintervall - Abhängigkeit vom n und γ

n verschieden, $\gamma = 0{,}95$

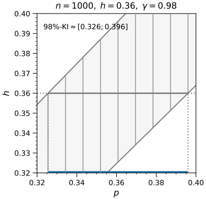


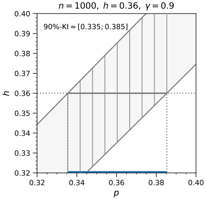


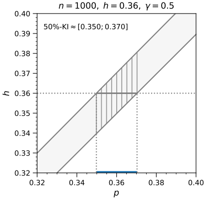


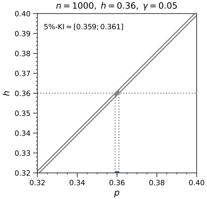


$n = 1000$, γ verschieden

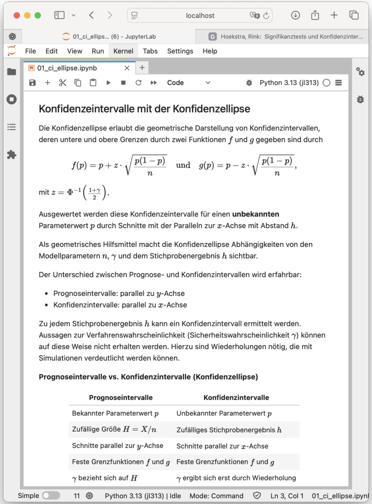








Konfidenzellipse – mehr als ein Programm



Konfidenzeintervalle mit der Konfidenzellipse

Die Konfidenzellipse erlaubt die geometrische Darstellung von Konfidenzintervallen, deren untere und obere Grenzen durch zwei Funktionen f und g gegeben sind durch

$$f(p) = p + z \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad \text{und} \quad g(p) = p - z \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},$$

mit $z = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$.

Ausgewertet werden diese Konfidenzeintervalle für einen **unbekannten** Parameterwert p durch Schnitte mit der Paralleln zur x-Achse mit Abstand h.

Als geometrisches Hilfsmittel macht die Konfidenzellipse Abhängigkeiten von den Modellparametern n, γ und dem Stichprobenergebnis h sichtbar.

Der Unterschied zwischen Prognose- und Konfidenzintervallen wird erfahrbar:

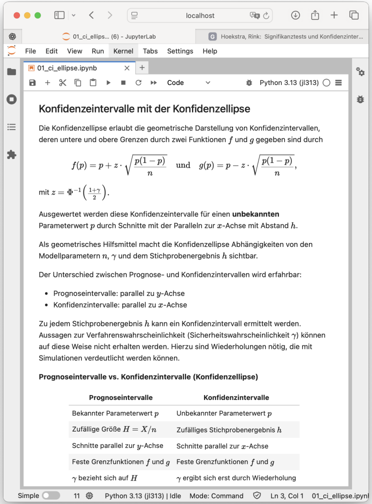
- Prognoseintervalle: parallel zu y-Achse
- Konfidenzintervalle: parallel zu x-Achse

Zu jedem Stichprobenergebnis h kann ein Konfidenzintervall ermittelt werden. Aussagen zur Verfahrenswahrscheinlichkeit (Sicherheitswahrscheinlichkeit γ) können auf diese Weise nicht erhalten werden. Hierzu sind Wiederholungen nötig, die mit Simulationen verdeutlicht werden können.

Prognoseintervalle vs. Konfidenzintervalle (Konfidenzellipse)

Prognoseintervalle	Konfidenzintervalle
Bekannter Parameterwert p	Unbekannter Parameterwert p
Zufällige Größe $H = X/n$	Zufälliges Stichprobenergebnis h
Schnitte parallel zur y-Achse	Schnitte parallel zur x-Achse
Feste Grenzfunktionen f und g	Feste Grenzfunktionen f und g
γ bezieht sich auf H	γ ergibt sich erst durch Wiederholung

Konfidenzellipse – mehr als ein Programm



Konfidenzeintervalle mit der Konfidenzellipse

Die Konfidenzellipse erlaubt die geometrische Darstellung von Konfidenzintervallen, deren untere und obere Grenzen durch zwei Funktionen f und g gegeben sind durch

$$f(p) = p + z \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad \text{und} \quad g(p) = p - z \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},$$

mit $z = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$.

Ausgewertet werden diese Konfidenzeintervalle für einen **unbekannten** Parameterwert p durch Schnitte mit der Parallen zur x-Achse mit Abstand h.

Als geometrisches Hilfsmittel macht die Konfidenzellipse Abhängigkeiten von den Modellparametern n, γ und dem Stichprobenergebnis h sichtbar.

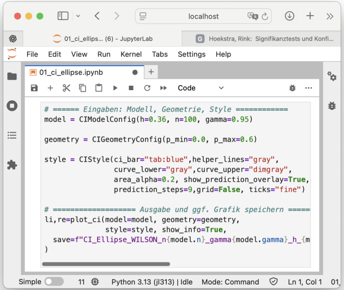
Der Unterschied zwischen Prognose- und Konfidenzintervallen wird erfahrbar:

- Prognoseintervalle: parallel zu y-Achse
- Konfidenzintervalle: parallel zu x-Achse

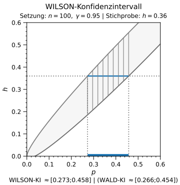
Zu jedem Stichprobenergebnis h kann ein Konfidenzintervall ermittelt werden. Aussagen zur Verfahrenswahrscheinlichkeit (Sicherheitswahrscheinlichkeit γ) können auf diese Weise nicht erhalten werden. Hierzu sind Wiederholungen nötig, die mit Simulationen verdeutlicht werden können.

Prognoseintervalle vs. Konfidenzintervalle (Konfidenzellipse)

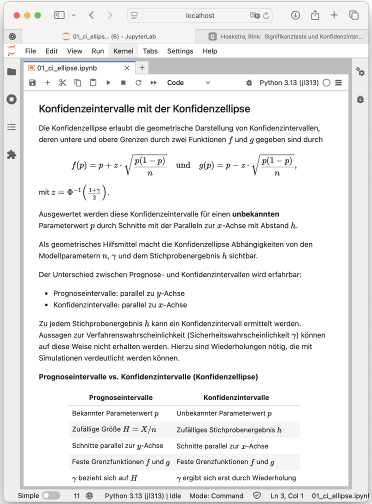
Prognoseintervalle	Konfidenzintervalle
Bekannter Parameterwert p	Unbekannter Parameterwert p
Zufällige Größe $H = X/n$	Zufälliges Stichprobenergebnis h
Schnitte parallel zur y-Achse	Schnitte parallel zur x-Achse
Feste Grenzfunktionen f und g	Feste Grenzfunktionen f und g
γ bezieht sich auf H	γ ergibt sich erst durch Wiederholung



```python
# ====== Eingaben: Modell, Geometrie, Style ===========
model = CIModelConfig(h=0.36, n=100, gamma=0.95)

geometry = CIGeometryConfig(p_min=0.0, p_max=0.6)

style = CIStyle(ci_bar="tab:blue",helper_lines="gray",
                curve_lower="gray",curve_upper="dimgray",
                area_alpha=0.2, show_prediction_overlay=True,
                prediction_steps=9,grid=False, ticks="fine")

# ================== Ausgabe und ggf. Grafik speichern =====
li,re=plot_ci(model=model, geometry=geometry,
              style=style, show_info=True,
  save=f"CI_Ellipse_WILSON_n{model.n}_gamma{model.gamma}_h_{m
)
```



Konfidenzellipse – mehr als ein Programm



Konfidenzintervalle mit der Konfidenzellipse

Die Konfidenzellipse erlaubt die geometrische Darstellung von Konfidenzintervallen, deren untere und obere Grenzen durch zwei Funktionen f und g gegeben sind durch

$$f(p) = p + z \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad \text{und} \quad g(p) = p - z \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},$$

mit $z = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$.

Ausgewertet werden diese Konfidenzintervalle für einen **unbekannten** Parameterwert p durch Schnitte mit der Paralleln zur x-Achse mit Abstand h.

Als geometrisches Hilfsmittel macht die Konfidenzellipse Abhängigkeiten von den Modellparametern n, γ und dem Stichprobenergebnis h sichtbar.

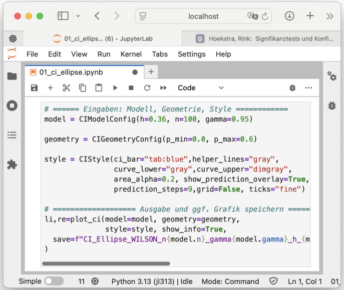
Der Unterschied zwischen Prognose- und Konfidenzintervallen wird erfahrbar:

- Prognoseintervalle: parallel zu y-Achse
- Konfidenzintervalle: parallel zu x-Achse

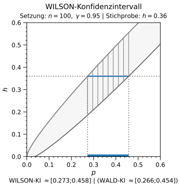
Zu jedem Stichprobenergebnis h kann ein Konfidenzintervall ermittelt werden. Aussagen zur Verfahrenswahrscheinlichkeit (Sicherheitswahrscheinlichkeit γ) können auf diese Weise nicht erhalten werden. Hierzu sind Wiederholungen nötig, die mit Simulationen verdeutlicht werden können.

Prognoseintervalle vs. Konfidenzintervalle (Konfidenzellipse)

Prognoseintervalle	Konfidenzintervalle
Bekannter Parameterwert p	Unbekannter Parameterwert p
Zufällige Größe $H = X/n$	Zufälliges Stichprobenergebnis h
Schnitte parallel zur y-Achse	Schnitte parallel zur x-Achse
Feste Grenzfunktionen f und g	Feste Grenzfunktionen f und g
γ bezieht sich auf H	γ ergibt sich erst durch Wiederholung



```python
# ====== Eingaben: Modell, Geometrie, Style ===========
model = CIModelConfig(h=0.36, n=100, gamma=0.95)

geometry = CIGeometryConfig(p_min=0.0, p_max=0.6)

style = CIStyle(ci_bar="tab:blue",helper_lines="gray",
                curve_lower="gray",curve_upper="dimgray",
                area_alpha=0.2, show_prediction_overlay=True,
                prediction_steps=9,grid=False, ticks="fine")

# =================== Ausgabe und ggf. Grafik speichern =====
li,re=plot_ci(model=model, geometry=geometry,
              style=style, show_info=True,
  save=f"CI_Ellipse_WILSON_n{model.n}_gamma{model.gamma}_h_{m
)
```



WILSON: Normalapproximation, Grenzen durch Lösen der Gleichung $(h-p)^2 = \frac{z^2}{n}\, p(1-p)$

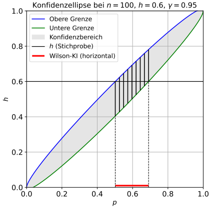
Konfidenzintervalle - WILSON, WALD und Clopper-Pearson

WILSON: Normalapproximation, Grenzen durch Lösen der Gleichung $(h-p)^2 = \frac{z^2}{n}p(1-p)$

$$h = p_u - z\sqrt{p_u(1-p_u)/n}$$

$$h = p_o + z\sqrt{p_o(1-p_0)/n}$$

$$p_{u,o} = (1-a)\cdot\tfrac{1}{2} + a\cdot h \mp z\cdot\sqrt{\tfrac{1}{4a}\cdot\tfrac{1-a}{a} + \tfrac{h(1-h)}{n}};\ a := \tfrac{1}{1+z^2/n}$$



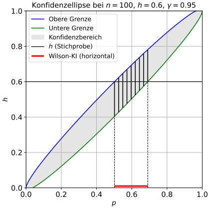
Konfidenzintervalle - WILSON, WALD und Clopper-Pearson

WILSON: Normalapproximation, Grenzen durch Lösen der Gleichung $(h-p)^2 = \frac{z^2}{n} p(1-p)$

$$h = p_u - z\sqrt{p_u(1-p_u)/n}$$

$$h = p_o + z\sqrt{p_o(1-p_0)/n}$$

$$p_{u,o} = (1-a)\cdot\tfrac{1}{2} + a\cdot h \mp z\cdot\sqrt{\tfrac{1}{4a}\cdot\tfrac{1-a}{a} + \tfrac{h(1-h)}{n}};\ \ a := \tfrac{1}{1+z^2/n}$$



WALD: Approximation der Lösungen von WILSON; in GeoGebra und Rechnern implementiert

$$\left[h - z_{1-\alpha/2}\sqrt{h(1-h)/n},\ h + z_{1-\alpha/2}\sqrt{h(1-h)/n}\right]$$

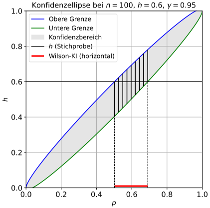
Konfidenzintervalle - WILSON, WALD und Clopper-Pearson

WILSON: Normalapproximation, Grenzen durch Lösen der Gleichung $(h-p)^2 = \frac{z^2}{n} p(1-p)$

$$h = p_u - z\sqrt{p_u(1-p_u)/n}$$

$$h = p_o + z\sqrt{p_o(1-p_o)/n}$$

$$p_{u,o} = (1-a)\cdot\tfrac{1}{2} + a\cdot h \mp z\cdot\sqrt{\tfrac{1}{4a}\cdot\tfrac{1-a}{a} + \tfrac{h(1-h)}{n}};\quad a := \tfrac{1}{1+z^2/n}$$



WALD: Approximation der Lösungen von WILSON; in GeoGebra und Rechnern implementiert

$$\left[h - z_{1-\alpha/2}\sqrt{h(1-h)/n},\; h + z_{1-\alpha/2}\sqrt{h(1-h)/n}\right]$$

Clopper–Pearson (exakt): Inversion der Binomialverteilung; garantiert $\mathbb{P}_p(\mathrm{KI} \ni p) \geq 1-\alpha$ für alle p.
Grenzen über F-Verteilung

$$p_{\text{low}} = \frac{k}{k + (n-k+1)\,F_{1-\alpha/2;\;2(n-k+1),\,2k}}, \qquad p_{\text{high}} = \frac{(k+1)\,F_{1-\alpha/2;\;2(k+1),\,2(n-k)}}{(n-k) + (k+1)\,F_{1-\alpha/2;\;2(k+1),\,2(n-k)}}.$$

Vergleich von Konfidenzintervallen

Tabelle 1: $n = 100$; $\gamma = 0{,}95$

k	$\hat{p}$	Wald	Wilson	Clopper–Pearson
30	0,3	[0,2102 ; 0,3898]	[0,2189 ; 0,3958]	[0,2124 ; 0,3998]
32	0,32	[0,2286 ; 0,4114]	[0,2367 ; 0,4166]	[0,2302 ; 0,4208]
34	0,34	[0,2472 ; 0,4328]	[0,2546 ; 0,4372]	[0,2482 ; 0,4415]
36	0,36	[0,2659 ; 0,4541]	[0,2727 ; 0,4576]	[0,2664 ; 0,4621]
37	0,37	[0,2754 ; 0,4646]	[0,2818 ; 0,4678]	[0,2756 ; 0,4724]
38	0,38	[0,2849 ; 0,4751]	[0,291 ; 0,4779]	[0,2848 ; 0,4825]
39	0,39	[0,2944 ; 0,4856]	[0,3002 ; 0,488]	[0,294 ; 0,4927]

Die drei Verfahren liefern leicht unterschiedliche, aber sehr ähnliche Intervalle. Wichtig ist nicht die Formel, sondern der gemeinsame Grundgedanke: Ein KI gibt an, welche p-Werte mit den Daten verträglich sind.

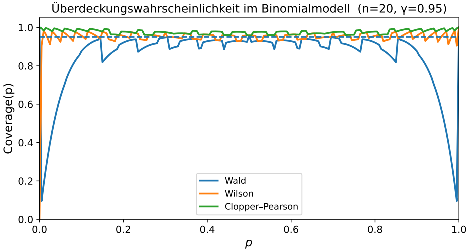
Vergleich von Konfidenzintervallen

Tabelle 2: $n = 1000;\ \gamma = 0{,}95$

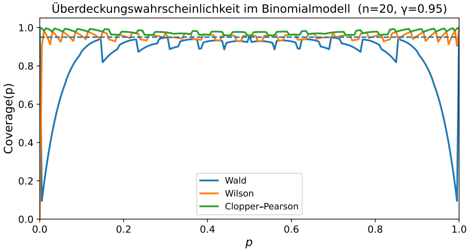
k	$\hat{p}$	Wald	Wilson	Clopper–Pearson
300	0,3	[0,2716 ; 0,3284]	[0,2724 ; 0,3291]	[0,2717 ; 0,3295]
320	0,32	[0,2911 ; 0,3489]	[0,2918 ; 0,3496]	[0,2912 ; 0,3499]
340	0,34	[0,3106 ; 0,3694]	[0,3113 ; 0,3699]	[0,3106 ; 0,3703]
360	0,36	[0,3302 ; 0,3898]	[0,3308 ; 0,3902]	[0,3302 ; 0,3906]
370	0,37	[0,3401 ; 0,3999]	[0,3406 ; 0,4004]	[0,34 ; 0,4008]
380	0,38	[0,3499 ; 0,4101]	[0,3504 ; 0,4105]	[0,3498 ; 0,4109]
390	0,39	[0,3598 ; 0,4202]	[0,3602 ; 0,4206]	[0,3596 ; 0,421]

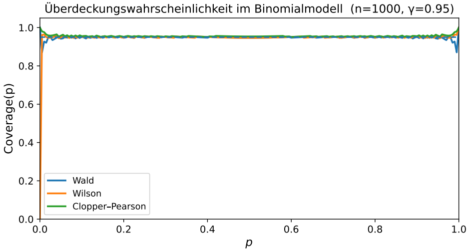
Die drei Verfahren liefern leicht unterschiedliche, aber sehr ähnliche Intervalle. Wichtig ist nicht die Formel, sondern der gemeinsame Grundgedanke: Ein KI gibt an, welche p-Werte mit den Daten verträglich sind.

Überdeckungswahrscheinlichkeiten mit Python

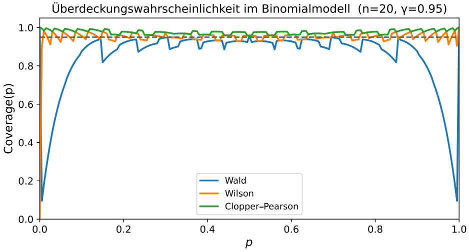


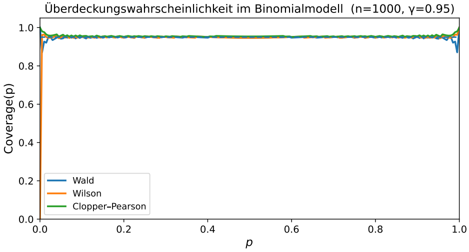
Überdeckungswahrscheinlichkeiten mit Python

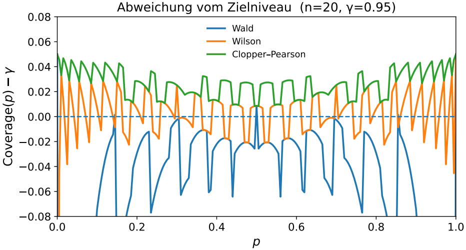




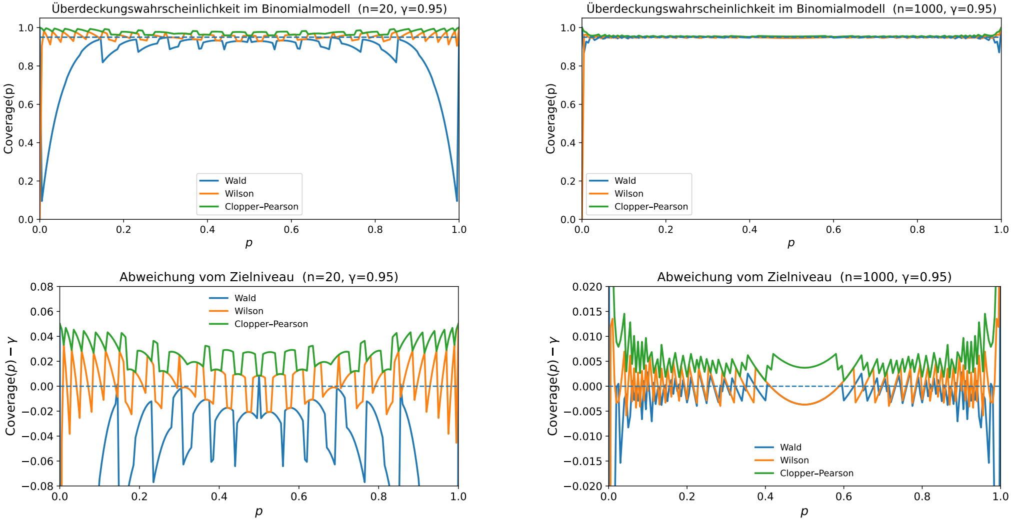
Überdeckungswahrscheinlichkeiten mit Python



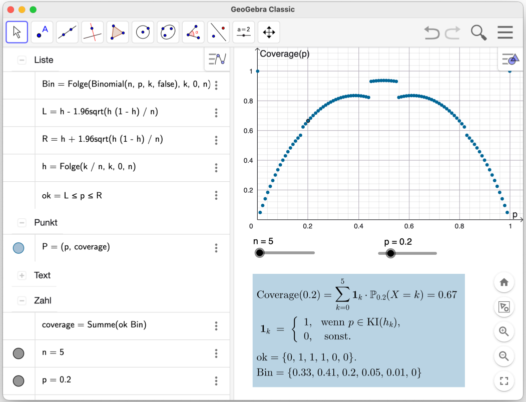




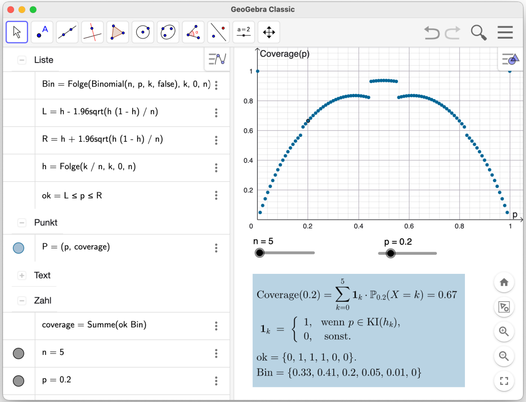
Überdeckungswahrscheinlichkeiten mit Python



Überdeckungswahrscheinlichkeiten mit GeoGebra



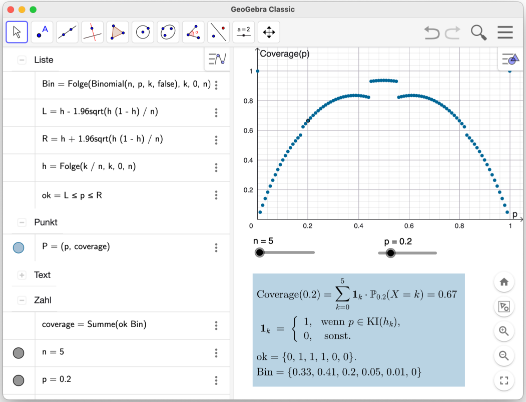
Überdeckungswahrscheinlichkeiten mit GeoGebra - Trennung sichtbar machen



- **Gleichzeitigkeit mehrerer Ebenen**
  Modell – Realisation – Entscheidung – Wahrscheinlichkeit
- **Reduktion ohne Vereinfachung**
  Jede Zeile hat eine klar benennbare Funktion
- **Datentypen als Denkwerkzeuge**
  Listen – logische Ausdrücke – Funktionen – Punkte

Kein neues Konzept – sondern Sichtbarmachung dessen, was im Modell ohnehin gedacht werden muss.

Überdeckungswahrscheinlichkeiten mit GeoGebra - mehrere Ebenen, klar getrennt



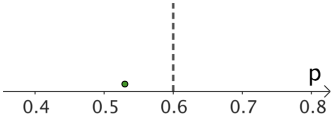
- **Modell**
  Alle möglichen Stichprobenergebnisse im Binomialmodell
  (Liste der Wahrscheinlichkeiten: Bin = Folge(...)

- **Entscheidung**
  Für jedes Ergebnis:
  Liegt der Parameter im zugehörigen Konfidenzintervall?
  (Boolesche Bewertung: ok $= L \leq p \leq R$ *)*

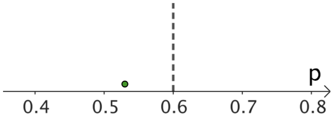
- **Aggregation**
  Summe der Modellwahrscheinlichkeiten der „guten" Fälle
  (Überdeckungswahrscheinlichkeit: Summe(ok Bin))

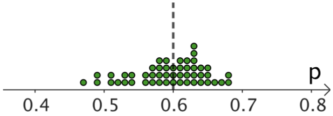
Keine Simulation – sondern exakte Modellrechnung.
Kein neues Objekt – sondern eine neue Sicht.

Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren

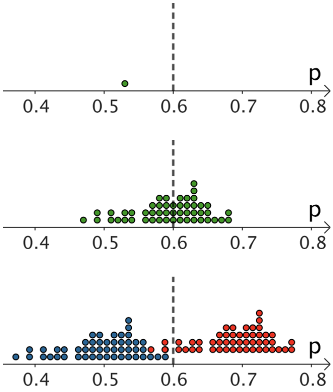


Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren

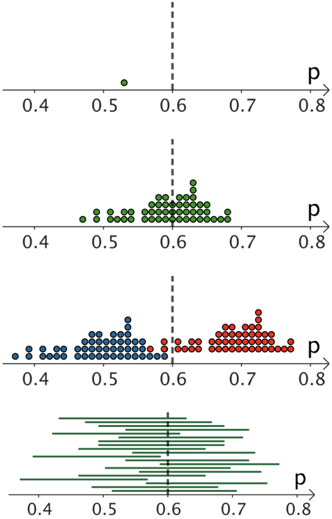




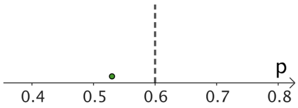
Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



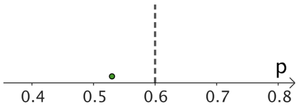
Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



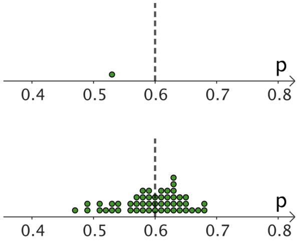
Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



Eine Stichprobe – ein Ergebnis in der Realität

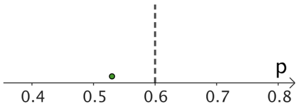
In der Realität beobachten wir genau einen Wert h. Der wahre Parameter liegt irgendwo in $[0, 1]$ – mehr wissen wir nicht.

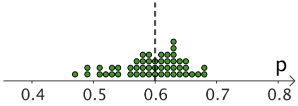
Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



Eine Stichprobe – ein Ergebnis in der Realität

In der Realität beobachten wir genau einen Wert h. Der wahre Parameter liegt irgendwo in $[0, 1]$ – mehr wissen wir nicht.





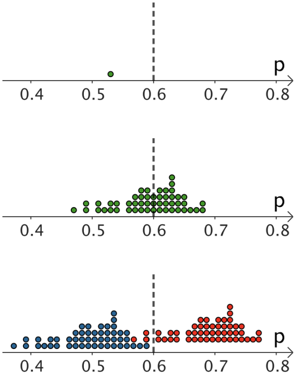
Eine Stichprobe – ein Ergebnis in der Realität

In der Realität beobachten wir genau einen Wert h. Der wahre Parameter liegt irgendwo in $[0, 1]$ – mehr wissen wir nicht.

Gedankenexperiment im Modell

Im Modell denken wir viele mögliche Stichproben. So entsteht eine Verteilung möglicher Ergebnisse in unserem Kopf.

Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



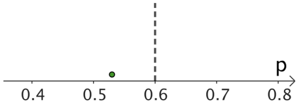
Eine Stichprobe – ein Ergebnis in der Realität

In der Realität beobachten wir genau einen Wert h. Der wahre Parameter liegt irgendwo in $[0, 1]$ – mehr wissen wir nicht.

Gedankenexperiment im Modell

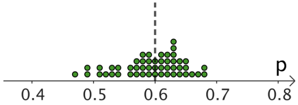
Im Modell denken wir viele mögliche Stichproben. So entsteht eine Verteilung möglicher Ergebnisse in unserem Kopf.

Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



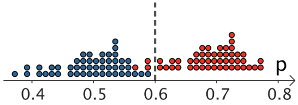
Eine Stichprobe – ein Ergebnis in der Realität

In der Realität beobachten wir genau einen Wert h. Der wahre Parameter liegt irgendwo in $[0, 1]$ – mehr wissen wir nicht.



Gedankenexperiment im Modell

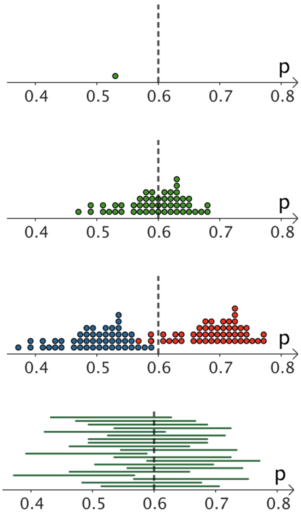
Im Modell denken wir viele mögliche Stichproben. So entsteht eine Verteilung möglicher Ergebnisse in unserem Kopf.



Grenzen durch gedachte Extremfälle im Modell

Um den unbekannten Parameter einzugrenzen, betrachten wir zu jeder möglichen Stichprobe die kleinste und größte noch plausible Lage.

Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren

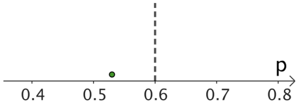


Eine Stichprobe – ein Ergebnis in der Realität
In der Realität beobachten wir genau einen Wert h. Der wahre Parameter liegt irgendwo in $[0, 1]$ – mehr wissen wir nicht.

Gedankenexperiment im Modell
Im Modell denken wir viele mögliche Stichproben. So entsteht eine Verteilung möglicher Ergebnisse in unserem Kopf.

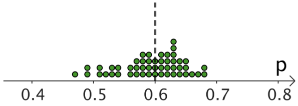
Grenzen durch gedachte Extremfälle im Modell
Um den unbekannten Parameter einzugrenzen, betrachten wir zu jeder möglichen Stichprobe die kleinste und größte noch plausible Lage.

Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



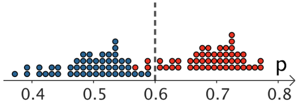
Eine Stichprobe – ein Ergebnis in der Realität

In der Realität beobachten wir genau einen Wert h. Der wahre Parameter liegt irgendwo in $[0, 1]$ – mehr wissen wir nicht.



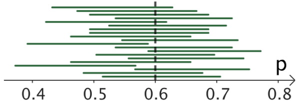
Gedankenexperiment im Modell

Im Modell denken wir viele mögliche Stichproben. So entsteht eine Verteilung möglicher Ergebnisse in unserem Kopf.



Grenzen durch gedachte Extremfälle im Modell

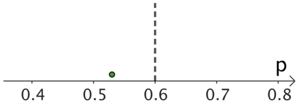
Um den unbekannten Parameter einzugrenzen, betrachten wir zu jeder möglichen Stichprobe die kleinste und größte noch plausible Lage.



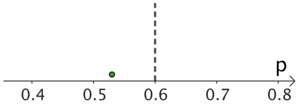
Das Intervall als Verfahren im Modell

Wiederholen wir dieses Vorgehen gedanklich, so überdecken die entstehenden Intervalle den wahren Parameter in einem festen Anteil der Fälle.

Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren

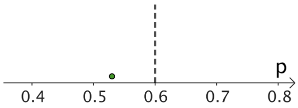


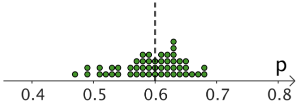
Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



Realisation

Ein konkretes Intervall zu einem beobachteten Stichprobenergebnis h.

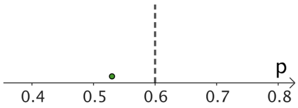




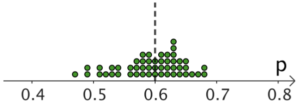
Realisation

Ein konkretes Intervall zu einem beobachteten Stichprobenergebnis h.

Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren

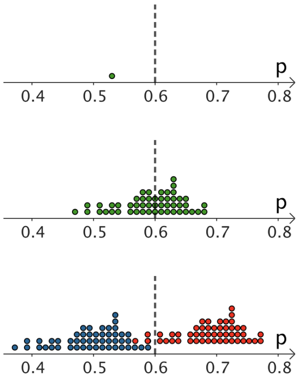


Realisation
Ein konkretes Intervall zu einem beobachteten Stichprobenergebnis h.



Zufallsgröße
Das Stichprobenergebnis wird als Zufallsgröße $H = X/n$ modelliert.

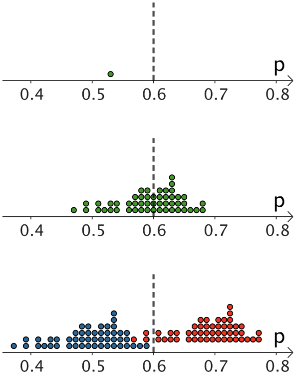
Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



Realisation
Ein konkretes Intervall zu einem beobachteten Stichprobenergebnis h.

Zufallsgröße
Das Stichprobenergebnis wird als Zufallsgröße $H = X/n$ modelliert.

Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



Realisation

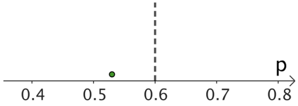
Ein konkretes Intervall zu einem beobachteten Stichprobenergebnis h.

Zufallsgröße

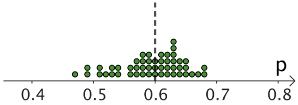
Das Stichprobenergebnis wird als Zufallsgröße $H = X/n$ modelliert.

Zufällige Intervallgrenzen

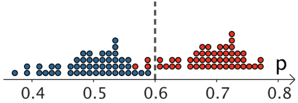
Die linke und rechte Grenze $L(H)$ und $R(H)$ sind selbst Zufallsgrößen.



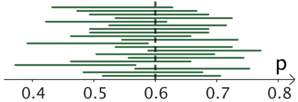
Realisation
Ein konkretes Intervall zu einem beobachteten Stichprobenergebnis h.



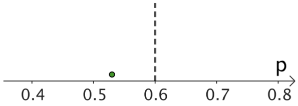
Zufallsgröße
Das Stichprobenergebnis wird als Zufallsgröße $H = X/n$ modelliert.



Zufällige Intervallgrenzen
Die linke und rechte Grenze $L(H)$ und $R(H)$ sind selbst Zufallsgrößen.

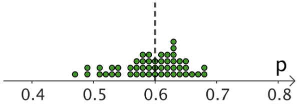


Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



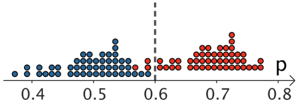
Realisation

Ein konkretes Intervall zu einem beobachteten Stichprobenergebnis h.



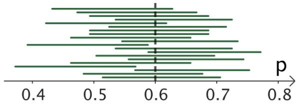
Zufallsgröße

Das Stichprobenergebnis wird als Zufallsgröße $H = X/n$ modelliert.



Zufällige Intervallgrenzen

Die linke und rechte Grenze $L(H)$ und $R(H)$ sind selbst Zufallsgrößen.

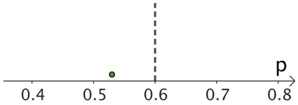


Konfidenzverfahren

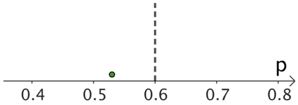
Das Verfahren ist so konstruiert, dass gilt

$$\mathbb{P}_p\big([L(H), R(H)] \ni p\big) = 0{,}95.$$

Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



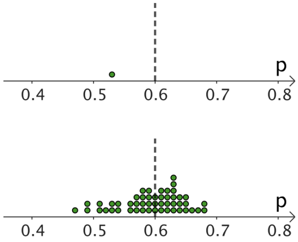
Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



1. **WALD-Intervall als Realisation** $\rightarrow$ Realität

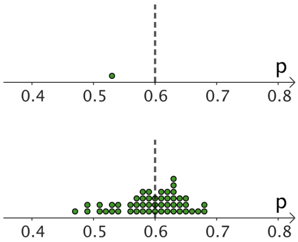
$$\left[\, h \mp 1{,}96\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\,\right]$$

Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



1. **WALD-Intervall als Realisation** $\rightarrow$ Realität

$$\left[\, h \mp 1{,}96\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\,\right]$$



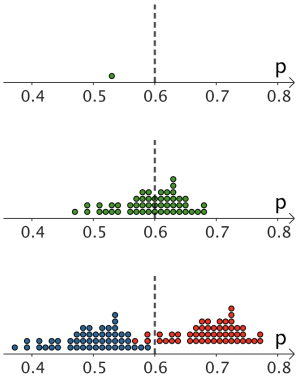
1. WALD-Intervall als Realisation $\rightarrow$ Realität

$$\left[\, h \mp 1{,}96\sqrt{\tfrac{h(1-h)}{n}}\,\right]$$

2. Viele mögliche h-Werte $\rightarrow$ Modell

$$H = \frac{X}{n}$$

Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren

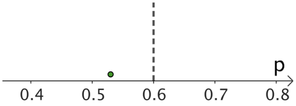


1. WALD-Intervall als Realisation $\to$ Realität

$$\left[\, h \mp 1{,}96\sqrt{\tfrac{h(1-h)}{n}}\,\right]$$

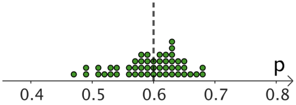
2. Viele mögliche h-Werte $\to$ Modell

$$H = \frac{X}{n}$$



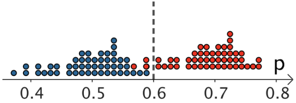
1. **WALD-Intervall als Realisation** $\rightarrow$ Realität

$$\left[\, h \mp 1{,}96\sqrt{\tfrac{h(1-h)}{n}}\,\right]$$



2. **Viele mögliche h-Werte** $\rightarrow$ Modell

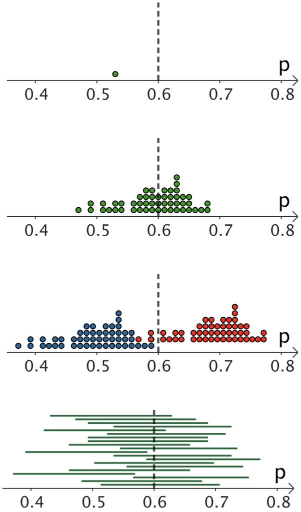
$$H = \frac{X}{n}$$



3. **Grenzen als Zufallsgrößen $L(H)$ und $R(H)$** $\rightarrow$ Modelle

$$\big[L(H), R(H)\big] = \left[\, H \mp 1{,}96\sqrt{\tfrac{H(1-H)}{n}}\,\right]$$

Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



1. **WALD-Intervall als Realisation** $\rightarrow$ Realität

$$\left[\, h \mp 1{,}96\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\,\right]$$

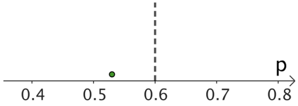
2. **Viele mögliche** h**-Werte** $\rightarrow$ Modell

$$H = \frac{X}{n}$$

3. **Grenzen als Zufallsgrößen** $L(H)$ **und** $R(H)$ $\rightarrow$ Modelle

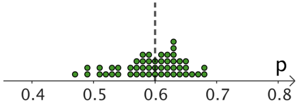
$$\big[L(H), R(H)\big] = \left[\, H \mp 1{,}96\sqrt{\frac{H(1-H)}{n}}\,\right]$$

Vom Zahlenintervall zum Zufallsintervall – der Weg zum Konfidenzverfahren



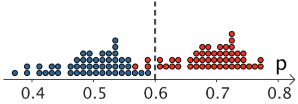
1. **WALD-Intervall als Realisation** $\rightarrow$ Realität

$$\left[\, h \mp 1{,}96\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\,\right]$$



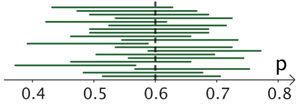
2. **Viele mögliche h-Werte** $\rightarrow$ Modell

$$H = \frac{X}{n}$$



3. **Grenzen als Zufallsgrößen $L(H)$ und $R(H)$** $\rightarrow$ Modelle

$$\big[L(H), R(H)\big] = \left[\, H \mp 1{,}96\sqrt{\frac{H(1-H)}{n}}\,\right]$$

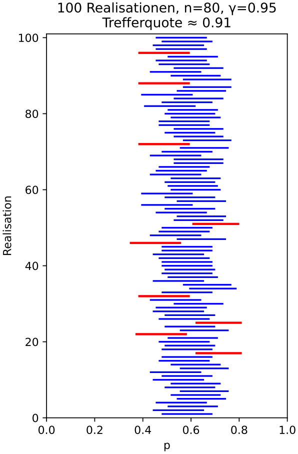


4. **KI als Verfahren (viele Intervalle)** $\rightarrow$ Modelle

$$\mathbb{P}_p\big([L(H), R(H)] \ni p\big) \;=\; 0{,}95$$

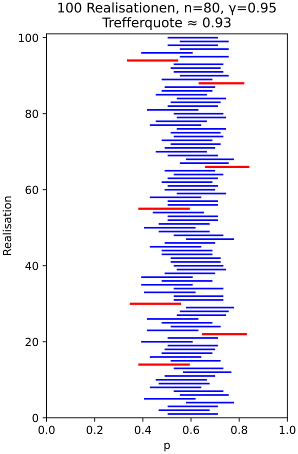
Simulationen - der Weg zum Verständnis

Anteil der KI, die den wahren Parameter enthalten



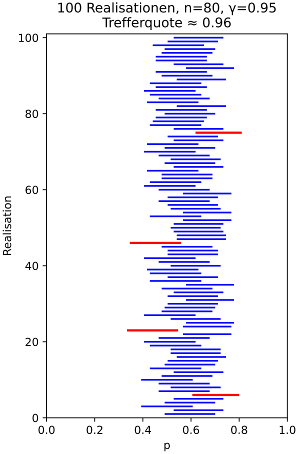
Simulationen - der Weg zum Verständnis

Anteil der KI, die den wahren Parameter enthalten

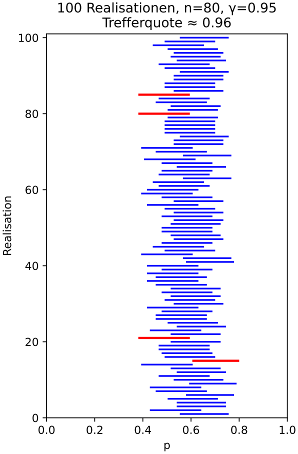


Simulationen - der Weg zum Verständnis

Anteil der KI, die den wahren Parameter enthalten

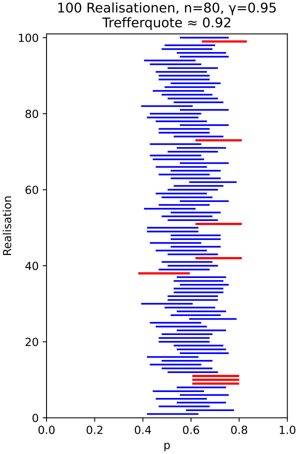


Anteil der KI, die den wahren Parameter enthalten



Simulationen - der Weg zum Verständnis

Anteil der KI, die den wahren Parameter enthalten

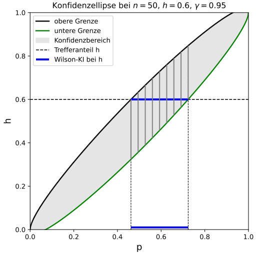


Wo steckt hier eigentlich der Zufall?

- Der Zufall steckt **nicht** im Parameter.
- Er steckt **nicht** im Vertrauen.
- Er steckt **nicht** im konkreten Intervall.

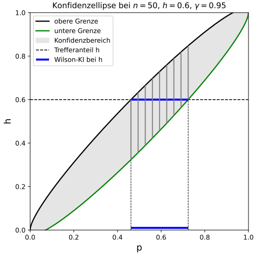
Wo steckt hier eigentlich der Zufall?

- Der Zufall steckt **nicht** im Parameter.
- Er steckt **nicht** im Vertrauen.
- Er steckt **nicht** im konkreten Intervall.



Wo steckt hier eigentlich der Zufall?

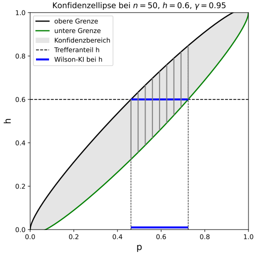
- Der Zufall steckt **nicht** im Parameter.
- Er steckt **nicht** im Vertrauen.
- Er steckt **nicht** im konkreten Intervall.



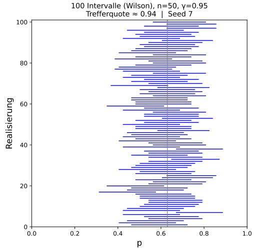
Er steckt im **Gedanken der Wiederholung.**

Wo steckt hier eigentlich der Zufall?

- Der Zufall steckt **nicht** im Parameter.
- Er steckt **nicht** im Vertrauen.
- Er steckt **nicht** im konkreten Intervall.



Er steckt im **Gedanken der Wiederholung.**



„Ich habe nur eine Stichprobe - nur eine einzige, mehr nicht.“

$\rightarrow$ radikale Realitätsakzeptanz, kein implizites *man könnte ja noch* ...

„Ich habe nur eine Stichprobe - nur eine einzige, mehr nicht.“

$\rightarrow$ radikale Realitätsakzeptanz, kein implizites *man könnte ja noch* ...

„Ich vertraue dem berechneten Intervall, dass es den Parameter einfängt.“

$\rightarrow$ Vertrauen nicht in das Ergebnis, sondern in das Verfahren (Perspektivwechsel).

„Ich habe nur eine Stichprobe - nur eine einzige, mehr nicht.“

$\rightarrow$ radikale Realitätsakzeptanz, kein implizites *man könnte ja noch* ...

„Ich vertraue dem berechneten Intervall, dass es den Parameter einfängt.“

$\rightarrow$ Vertrauen nicht in das Ergebnis, sondern in das Verfahren (Perspektivwechsel).

„Ich vertraue, dass es zu den $95\,\%$ aller gehört.“

$\rightarrow$ Die $95\,\%$ klassifizieren, sie sind nicht probabilistisch.
Das Intervall ist eines von vielen möglichen. Ich weiß nicht, zu welcher Sorte es gehört.

„Ich habe nur eine Stichprobe - nur eine einzige, mehr nicht.“

$\rightarrow$ radikale Realitätsakzeptanz, kein implizites *man könnte ja noch* ...

„Ich vertraue dem berechneten Intervall, dass es den Parameter einfängt.“

$\rightarrow$ Vertrauen nicht in das Ergebnis, sondern in das Verfahren (Perspektivwechsel).

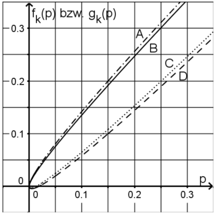
„Ich vertraue, dass es zu den $95\,\%$ aller gehört.“

$\rightarrow$ Die $95\,\%$ klassifizieren, sie sind nicht probabilistisch.
Das Intervall ist eines von vielen möglichen. Ich weiß nicht, zu welcher Sorte es gehört.

„Mehr kann ich nicht verlangen. Mehr geht nicht.“

$\rightarrow$ Das ist keine Schwäche, sondern epistemische Bescheidenheit.

Auf der Grundlage der Stichprobe können mithilfe der abgebildeten Graphen A, B, C und D für den zu ermittelnden Schätzwert Konfidenzintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 % und 95 % bestimmt werden.



Jeder der Graphen lässt sich durch eine der folgenden Funktionen beschreiben:

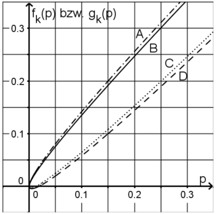
$$f_k : p \mapsto p - k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \qquad g_k : p \mapsto p + k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$

Dabei ist $p \in [0;1]$, $k \in \mathbb{R}^+$ und n der Umfang der Stichprobe.

f Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Entscheiden Sie, ob die Aussage „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft." durch das bestimmte Konfidenzintervall gestützt werden kann. 3

g Der Mitarbeiter zieht eine zweite Stichprobe vom Umfang $2n$. Auch in dieser Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft. Begründen Sie, dass die Länge des zugehörigen Konfidenzintervalls im Vergleich zur ersten Stichprobe – bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit – geringer, aber nicht halb so groß ist. 3

Auf der Grundlage der Stichprobe können mithilfe der abgebildeten Graphen A, B, C und D für den zu ermittelnden Schätzwert Konfidenzintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 % und 95 % bestimmt werden.



Jeder der Graphen lässt sich durch eine der folgenden Funktionen beschreiben:

$$f_k : p \mapsto p - k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \qquad g_k : p \mapsto p + k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$

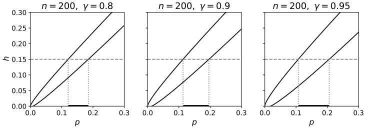
Dabei ist $p \in [0;1]$, $k \in \mathbb{R}^+$ und n der Umfang der Stichprobe.

f Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Entscheiden Sie, ob die Aussage „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft." durch das bestimmte Konfidenzintervall gestützt werden kann. 3

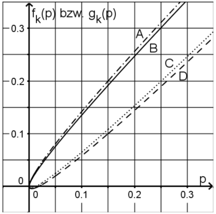
g Der Mitarbeiter zieht eine zweite Stichprobe vom Umfang $2n$. Auch in dieser Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft. Begründen Sie, dass die Länge des zugehörigen Konfidenzintervalls im Vergleich zur ersten Stichprobe – bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit – geringer, aber nicht halb so groß ist. 3

Lösungshinweise mit Variationen zu f)

Zeichnen: gleiches n, verschiedenes γ



Auf der Grundlage der Stichprobe können mithilfe der abgebildeten Graphen A, B, C und D für den zu ermittelnden Schätzwert Konfidenzintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 % und 95 % bestimmt werden.



Jeder der Graphen lässt sich durch eine der folgenden Funktionen beschreiben:

$$f_k : p \mapsto p - k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \qquad g_k : p \mapsto p + k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$

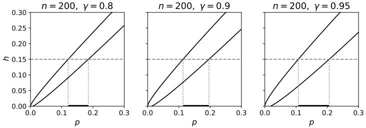
Dabei ist $p \in [0;1]$, $k \in \mathbb{R}^+$ und n der Umfang der Stichprobe.

f Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Entscheiden Sie, ob die Aussage „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft." durch das bestimmte Konfidenzintervall gestützt werden kann. 3

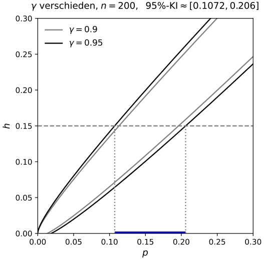
g Der Mitarbeiter zieht eine zweite Stichprobe vom Umfang 2n. Auch in dieser Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft. Begründen Sie, dass die Länge des zugehörigen Konfidenzintervalls im Vergleich zur ersten Stichprobe – bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit – geringer, aber nicht halb so groß ist. 3

Lösungshinweise mit Variationen zu f)

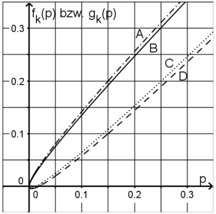
Zeichnen: gleiches n, verschiedenes γ



Zeichnen: Konfidenzellipsen



Auf der Grundlage der Stichprobe können mithilfe der abgebildeten Graphen A, B, C und D für den zu ermittelnden Schätzwert Konfidenzintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 % und 95 % bestimmt werden.



Jeder der Graphen lässt sich durch eine der folgenden Funktionen beschreiben:

$$f_k : p \mapsto p - k \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \qquad g_k : p \mapsto p + k \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

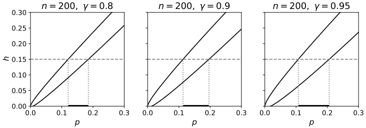
Dabei ist $p \in [0;1]$, $k \in \mathrm{IR}^+$ und n der Umfang der Stichprobe.

f Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Entscheiden Sie, ob die Aussage „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft." durch das bestimmte Konfidenzintervall gestützt werden kann. 3

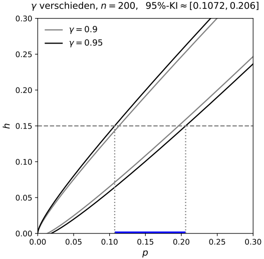
g Der Mitarbeiter zieht eine zweite Stichprobe vom Umfang $2n$. Auch in dieser Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft. Begründen Sie, dass die Länge des zugehörigen Konfidenzintervalls im Vergleich zur ersten Stichprobe – bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit – geringer, aber nicht halb so groß ist. 3

Lösungshinweise mit Variationen zu f)

Zeichnen: gleiches n, verschiedenes γ

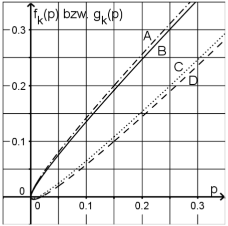


Zeichnen: Konfidenzellipsen



Erläutern: 0,2 $\in 95\%$-KI $\rightarrow$ Aussage kann gestützt werden

Auf der Grundlage der Stichprobe können mithilfe der abgebildeten Graphen A, B, C und D für den zu ermittelnden Schätzwert Konfidenzintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 % und 95 % bestimmt werden.



Jeder der Graphen lässt sich durch eine der folgenden Funktionen beschreiben:

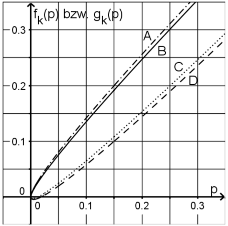
$$f_k : p \mapsto p - k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \qquad g_k : p \mapsto p + k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$

Dabei ist $p \in [0;1]$, $k \in \mathrm{IR}^+$ und n der Umfang der Stichprobe.

f Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Entscheiden Sie, ob die Aussage „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft." durch das bestimmte Konfidenzintervall gestützt werden kann. 3

g Der Mitarbeiter zieht eine zweite Stichprobe vom Umfang $2n$. Auch in dieser Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft. Begründen Sie, dass die Länge des zugehörigen Konfidenzintervalls im Vergleich zur ersten Stichprobe – bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit – geringer, aber nicht halb so groß ist. 3

Auf der Grundlage der Stichprobe können mithilfe der abgebildeten Graphen A, B, C und D für den zu ermittelnden Schätzwert Konfidenzintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 % und 95 % bestimmt werden.



Jeder der Graphen lässt sich durch eine der folgenden Funktionen beschreiben:

$$f_k : p \mapsto p - k \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \qquad g_k : p \mapsto p + k \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

Dabei ist $p \in [0;1]$, $k \in \mathbb{R}^+$ und n der Umfang der Stichprobe.

f Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Entscheiden Sie, ob die Aussage „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft." durch das bestimmte Konfidenzintervall gestützt werden kann. 3

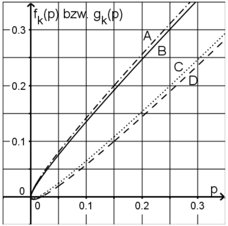
g Der Mitarbeiter zieht eine zweite Stichprobe vom Umfang $2n$. Auch in dieser Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft. Begründen Sie, dass die Länge des zugehörigen Konfidenzintervalls im Vergleich zur ersten Stichprobe – bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit – geringer, aber nicht halb so groß ist. 3

Lösungshinweise zu g)

Erwartungshorizon (IQB):

g	Für die Länge des Konfidenzintervalls ergibt sich: $2k \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{2n}} = 2k \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ Es gilt: $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{1}{2}$	3

Auf der Grundlage der Stichprobe können mithilfe der abgebildeten Graphen A, B, C und D für den zu ermittelnden Schätzwert Konfidenzintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 % und 95 % bestimmt werden.



Jeder der Graphen lässt sich durch eine der folgenden Funktionen beschreiben:

$$f_k : p \mapsto p - k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \qquad g_k : p \mapsto p + k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$

Dabei ist $p \in [0;1]$, $k \in \mathbb{R}^+$ und n der Umfang der Stichprobe.

f Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Entscheiden Sie, ob die Aussage „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft." durch das bestimmte Konfidenzintervall gestützt werden kann. 3

g Der Mitarbeiter zieht eine zweite Stichprobe vom Umfang $2n$. Auch in dieser Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft. Begründen Sie, dass die Länge des zugehörigen Konfidenzintervalls im Vergleich zur ersten Stichprobe – bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit – geringer, aber nicht halb so groß ist. 3

Lösungshinweise zu g)

Erwartungshorizon (IQB):

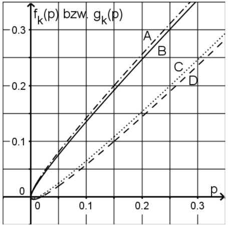
g	Für die Länge des Konfidenzintervalls ergibt sich: $2k \cdot \sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{2n}} = 2k \cdot \sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ Es gilt: $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{1}{2}$	3

Vorsicht: Das gilt nur für WALD-Konfidenzintervalle.

WALD-KI: $\left[h - k \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\, ,\ h + k \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\right]$

$\rightarrow$ Länge des WALD-KI: $2k \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$

Auf der Grundlage der Stichprobe können mithilfe der abgebildeten Graphen A, B, C und D für den zu ermittelnden Schätzwert Konfidenzintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 % und 95 % bestimmt werden.



Jeder der Graphen lässt sich durch eine der folgenden Funktionen beschreiben:

$$f_k : p \mapsto p - k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \qquad g_k : p \mapsto p + k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$

Dabei ist $p \in [0;1]$, $k \in \mathbb{R}^+$ und n der Umfang der Stichprobe.

f Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Entscheiden Sie, ob die Aussage „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft." durch das bestimmte Konfidenzintervall gestützt werden kann. 3

g Der Mitarbeiter zieht eine zweite Stichprobe vom Umfang $2n$. Auch in dieser Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft. Begründen Sie, dass die Länge des zugehörigen Konfidenzintervalls im Vergleich zur ersten Stichprobe – bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit – geringer, aber nicht halb so groß ist. 3

Lösungshinweise zu g)

Erwartungshorizon (IQB):

g	Für die Länge des Konfidenzintervalls ergibt sich: $2k \cdot \sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{2n}} = 2k \cdot \sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ Es gilt: $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{1}{2}$	3

Vorsicht: Das gilt nur für WALD-Konfidenzintervalle.

WALD-KI: $\left[h - k \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\,,\; h + k \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\right]$

$\rightarrow$ Länge des WALD-KI: $2k \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$

WILSON-KI:

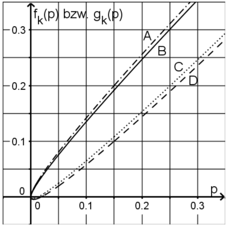
Grenzen dieses Intervalls sind Lösungen von

$$h = p_u + k \cdot \sqrt{\frac{p_u(1-p_u)}{n}}; \quad h = p_o - k \cdot \sqrt{\frac{p_o(1-p_o)}{n}}$$

$\rightarrow$ Länge des WILSON-KI:

$$\frac{n}{k^2+n} \cdot 2k \cdot \sqrt{\left(\frac{k}{2n}\right)^2 + \frac{h(1-h)}{n}}$$

Auf der Grundlage der Stichprobe können mithilfe der abgebildeten Graphen A, B, C und D für den zu ermittelnden Schätzwert Konfidenzintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 % und 95 % bestimmt werden.



Jeder der Graphen lässt sich durch eine der folgenden Funktionen beschreiben:

$$f_k : p \mapsto p - k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \qquad g_k : p \mapsto p + k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$

Dabei ist $p \in [0;1]$, $k \in \mathbb{R}^+$ und n der Umfang der Stichprobe.

f Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Entscheiden Sie, ob die Aussage „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft.“ durch das bestimmte Konfidenzintervall gestützt werden kann. 3

g Der Mitarbeiter zieht eine zweite Stichprobe vom Umfang $2n$. Auch in dieser Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft. Begründen Sie, dass die Länge des zugehörigen Konfidenzintervalls im Vergleich zur ersten Stichprobe – bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit – geringer, aber nicht halb so groß ist. 3

Lösungshinweise zu g)

Erwartungshorizon (IQB):

g	Für die Länge des Konfidenzintervalls ergibt sich: $2k\cdot\sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{2n}} = 2k\cdot\sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$ Es gilt: $\frac{1}{\sqrt{2}}<1$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\neq\frac{1}{2}$	3

Vorsicht: Das gilt nur für WALD-Konfidenzintervalle.

WALD-KI: $\left[h - k\cdot\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\ ,\ h + k\cdot\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\right]$

$\rightarrow$ Länge des WALD-KI: $2k\cdot\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$

WILSON-KI:

Grenzen dieses Intervalls sind Lösungen von

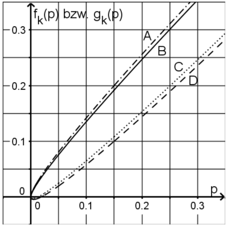
$$h = p_u + k\cdot\sqrt{\frac{p_u(1-p_u)}{n}}; \quad h = p_o - k\cdot\sqrt{\frac{p_o(1-p_o)}{n}}$$

$\rightarrow$ Länge des WILSON-KI:

$$\frac{n}{k^2+n}\cdot 2k\cdot\sqrt{\left(\frac{k}{2n}\right)^2 + \frac{h(1-h)}{n}}$$

sehr gute Näherung ($n \gg k$): $2k\cdot\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$

Auf der Grundlage der Stichprobe können mithilfe der abgebildeten Graphen A, B, C und D für den zu ermittelnden Schätzwert Konfidenzintervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 % und 95 % bestimmt werden.



Jeder der Graphen lässt sich durch eine der folgenden Funktionen beschreiben:

$$f_k : p \mapsto p - k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \qquad g_k : p \mapsto p + k \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$$

Dabei ist $p \in [0;1]$, $k \in \mathbb{R}^+$ und n der Umfang der Stichprobe.

f Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Entscheiden Sie, ob die Aussage „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft." durch das bestimmte Konfidenzintervall gestützt werden kann. 3

g Der Mitarbeiter zieht eine zweite Stichprobe vom Umfang $2n$. Auch in dieser Stichprobe sind 15 % der Bildschirme fehlerhaft. Begründen Sie, dass die Länge des zugehörigen Konfidenzintervalls im Vergleich zur ersten Stichprobe – bei gleicher Sicherheitswahrscheinlichkeit – geringer, aber nicht halb so groß ist. 3

Lösungshinweise zu g)

Erwartungshorizon (IQB):

g	Für die Länge des Konfidenzintervalls ergibt sich: $2k\cdot\sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{2n}} = 2k\cdot\sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$ Es gilt: $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{1}{2}$	3

Vorsicht: Das gilt nur für WALD-Konfidenzintervalle.

WALD-KI: $\left[h - k\cdot\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\ ,\ h + k\cdot\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\right]$

$\rightarrow$ Länge des WALD-KI: $2k\cdot\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$

WILSON-KI:
Grenzen dieses Intervalls sind Lösungen von

$$h = p_u + k\cdot\sqrt{\frac{p_u(1-p_u)}{n}}; \quad h = p_o - k\cdot\sqrt{\frac{p_o(1-p_o)}{n}}$$

$\rightarrow$ Länge des WILSON-KI:

$$\frac{n}{k^2+n}\cdot 2k\cdot\sqrt{\left(\frac{k}{2n}\right)^2 + \frac{h(1-h)}{n}}$$

sehr gute Näherung ($n \gg k$): $2k\cdot\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$

WALD-KI: Näherung von WILSON-KI
WILSON-KI: $\mathrm{Bin}(n,p) \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$

Kurz nach einer Änderung im Herstellungsverfahren stellt das Unternehmen den Anteil fehlerhafter Geräte von 25 % infrage. Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % einen Schätzwert für den Anteil fehlerhafter Geräte zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 100 Geräten betrachtet. Abbildung 1 zeigt die Graphen der folgenden für $p \in [0;1]$ definierten Funktionen:

$$f: p \mapsto p - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}} \qquad g: p \mapsto p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}}$$

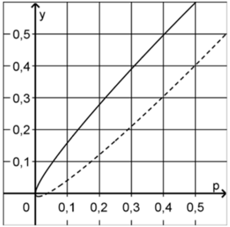


Abb. 1

d Bestimmen Sie grafisch alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Geräte in der Stichprobe, für die bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % jeweils Anlass dazu bestehen würde, die Korrektheit des gegebenen Anteils fehlerhafter Geräte infrage zu stellen. 3

e Die betrachtete Stichprobe enthält 19 fehlerhafte Geräte. Bestimmen Sie grafisch das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. 3

IQB-Pool für das Jahr 2019 - PT B - WTR - Aufgabe 1d), 1e)

Kurz nach einer Änderung im Herstellungsverfahren stellt das Unternehmen den Anteil fehlerhafter Geräte von 25 % infrage. Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % einen Schätzwert für den Anteil fehlerhafter Geräte zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 100 Geräten betrachtet. Abbildung 1 zeigt die Graphen der folgenden für $p \in [0;1]$ definierten Funktionen:

$f: p \mapsto p - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}}$ $\qquad$ $g: p \mapsto p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}}$

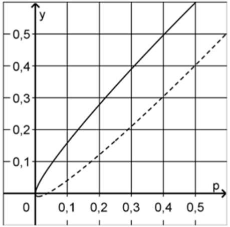


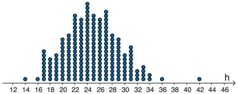
Abb. 1

d Bestimmen Sie grafisch alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Geräte in der Stichprobe, für die bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % jeweils Anlass dazu bestehen würde, die Korrektheit des gegebenen Anteils fehlerhafter Geräte infrage zu stellen. 3

e Die betrachtete Stichprobe enthält 19 fehlerhafte Geräte. Bestimmen Sie grafisch das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. 3

Lösungshinweise mit Variationen zu d)

Simulieren: 100 Simulationen mit $p = 0{,}25$ und $n = 100$



IQB-Pool für das Jahr 2019 - PT B - WTR - Aufgabe 1d), 1e)

Kurz nach einer Änderung im Herstellungsverfahren stellt das Unternehmen den Anteil fehlerhafter Geräte von 25 % infrage. Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % einen Schätzwert für den Anteil fehlerhafter Geräte zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 100 Geräten betrachtet. Abbildung 1 zeigt die Graphen der folgenden für $p \in [0;1]$ definierten Funktionen:

$$f: p \mapsto p - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{100}} \qquad g: p \mapsto p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{100}}$$

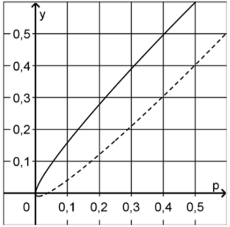


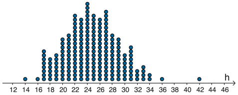
Abb. 1

d Bestimmen Sie grafisch alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Geräte in der Stichprobe, für die bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % jeweils Anlass dazu bestehen würde, die Korrektheit des gegebenen Anteils fehlerhafter Geräte infrage zu stellen. 3

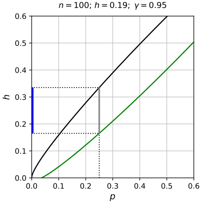
e Die betrachtete Stichprobe enthält 19 fehlerhafte Geräte. Bestimmen Sie grafisch das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. 3

Lösungshinweise mit Variationen zu d)

Simulieren: 100 Simulationen mit $p = 0{,}25$ und $n = 100$



Zeichnen: Konfidenzellipse



Kurz nach einer Änderung im Herstellungsverfahren stellt das Unternehmen den Anteil fehlerhafter Geräte von 25 % infrage. Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % einen Schätzwert für den Anteil fehlerhafter Geräte zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 100 Geräten betrachtet. Abbildung 1 zeigt die Graphen der folgenden für $p \in [0;1]$ definierten Funktionen:

$$f: p \mapsto p - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}} \qquad g: p \mapsto p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}}$$

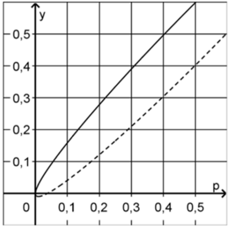


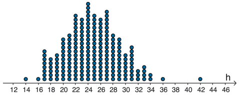
Abb. 1

d Bestimmen Sie grafisch alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Geräte in der Stichprobe, für die bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % jeweils Anlass dazu bestehen würde, die Korrektheit des gegebenen Anteils fehlerhafter Geräte infrage zu stellen. 3

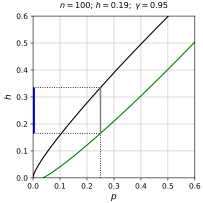
e Die betrachtete Stichprobe enthält 19 fehlerhafte Geräte. Bestimmen Sie grafisch das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. 3

Lösungshinweise mit Variationen zu d)

Simulieren: 100 Simulationen mit $p = 0{,}25$ und $n = 100$



Zeichnen: Konfidenzellipse



Rechnen: 95 %-Prognoseintervall:

$$\left[np - 1{,}96\sqrt{np(1-p)}; np + 1{,}96\sqrt{np(1-p)}\right]$$

$$[16{,}51; 33{,}49] \to [17; 33]$$

Kurz nach einer Änderung im Herstellungsverfahren stellt das Unternehmen den Anteil fehlerhafter Geräte von 25 % infrage. Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % einen Schätzwert für den Anteil fehlerhafter Geräte zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 100 Geräten betrachtet. Abbildung 1 zeigt die Graphen der folgenden für $p \in [0;1]$ definierten Funktionen:

$$f: p \mapsto p - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}} \qquad g: p \mapsto p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}}$$

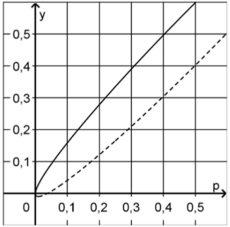


Abb. 1

d Bestimmen Sie grafisch alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Geräte in der Stichprobe, für die bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % jeweils Anlass dazu bestehen würde, die Korrektheit des gegebenen Anteils fehlerhafter Geräte infrage zu stellen. 3

e Die betrachtete Stichprobe enthält 19 fehlerhafte Geräte. Bestimmen Sie grafisch das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. 3

Kurz nach einer Änderung im Herstellungsverfahren stellt das Unternehmen den Anteil fehlerhafter Geräte von 25 % infrage. Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % einen Schätzwert für den Anteil fehlerhafter Geräte zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 100 Geräten betrachtet. Abbildung 1 zeigt die Graphen der folgenden für $p \in [0;1]$ definierten Funktionen:

$$f: p \mapsto p - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{100}} \qquad g: p \mapsto p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}$$

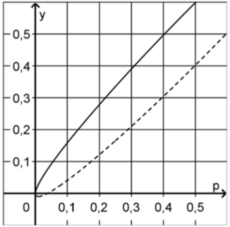


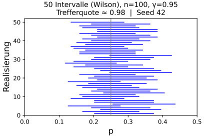
Abb. 1

d Bestimmen Sie grafisch alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Geräte in der Stichprobe, für die bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % jeweils Anlass dazu bestehen würde, die Korrektheit des gegebenen Anteils fehlerhafter Geräte infrage zu stellen. 3

e Die betrachtete Stichprobe enthält 19 fehlerhafte Geräte. Bestimmen Sie grafisch das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. 3

Lösungshinweise mit Variationen zu e)

Simulieren: 50 Simulationen mit $p = 0{,}25;$ n=100; γ=0,95



Kurz nach einer Änderung im Herstellungsverfahren stellt das Unternehmen den Anteil fehlerhafter Geräte von 25 % infrage. Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % einen Schätzwert für den Anteil fehlerhafter Geräte zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 100 Geräten betrachtet. Abbildung 1 zeigt die Graphen der folgenden für $p \in [0;1]$ definierten Funktionen:

$$f: p \mapsto p - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{100}} \qquad g: p \mapsto p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{100}}$$

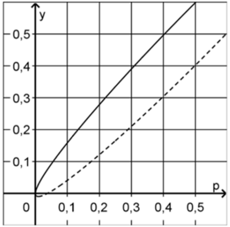


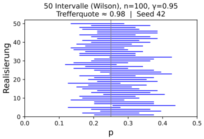
Abb. 1

d Bestimmen Sie grafisch alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Geräte in der Stichprobe, für die bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % jeweils Anlass dazu bestehen würde, die Korrektheit des gegebenen Anteils fehlerhafter Geräte infrage zu stellen. 3

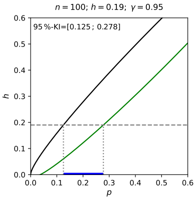
e Die betrachtete Stichprobe enthält 19 fehlerhafte Geräte. Bestimmen Sie grafisch das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. 3

Lösungshinweise mit Variationen zu e)

Simulieren: 50 Simulationen mit $p = 0{,}25$; n=100; γ=0,95



Zeichnen: Konfidenzellipse



Kurz nach einer Änderung im Herstellungsverfahren stellt das Unternehmen den Anteil fehlerhafter Geräte von 25 % infrage. Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % einen Schätzwert für den Anteil fehlerhafter Geräte zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 100 Geräten betrachtet. Abbildung 1 zeigt die Graphen der folgenden für $p \in [0;1]$ definierten Funktionen:

$$f: p \mapsto p - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}} \qquad g: p \mapsto p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}}$$

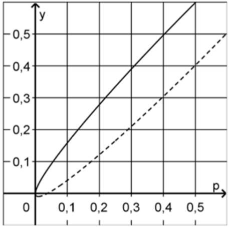


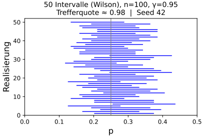
Abb. 1

d Bestimmen Sie grafisch alle möglichen Anzahlen fehlerhafter Geräte in der Stichprobe, für die bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % jeweils Anlass dazu bestehen würde, die Korrektheit des gegebenen Anteils fehlerhafter Geräte infrage zu stellen. 3

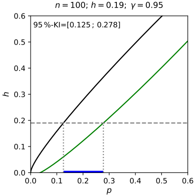
e Die betrachtete Stichprobe enthält 19 fehlerhafte Geräte. Bestimmen Sie grafisch das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. 3

Lösungshinweise mit Variationen zu e)

Simulieren: 50 Simulationen mit $p = 0{,}25$; n=100; γ=0,95



Zeichnen: Konfidenzellipse



Rechnen: 95 %-WILSON-Konfidenzintervall:

$$h = p + 1{,}96\sqrt{p(1-p)/n};\ \ p_l \approx 0{,}125$$
$$h = p - 1{,}96\sqrt{p(1-p)/n};\ \ p_r \approx 0{,}278$$

Anwendungen - eine kleine Auswahl

Methodik-Politbarometer, Forschungsgruppe Wahlen

forschungsgruppe.de

Forschungsgruppe Wahlen > Umfragen > Politbarometer > Methodik

Methodik der Politbarometer-Untersuchungen

Die Forschungsgruppe Wahlen e.V. führt seit 1977 regelmäßig für das ZDF Politbarometer-Umfragen durch. Diese erfassen Meinungen und Einstellungen der wahlberechtigten Bevölkerung zu aktuellen Ereignissen, zu Parteien und Politikern, aber auch zu allgemeinen gesellschaftlichen Entwicklungen.

Erhebung
Die Daten für das Politbarometer werden jeweils von Dienstag bis Donnerstag erhoben und am Freitag werden die Ergebnisse veröffentlicht. Dabei werden in den westlichen Bundesländern jeweils ca. 1.000 zufällig ausgewählte Wahlberechtigte befragt, in den östlichen Bundesländern ca. 500. Eine Überquotierung des Ostens erfolgt, um eigenständige Aussagen über die ostdeutschen Länder treffen zu können. Die Zusammenfassung dieser Befragten führt nach Ausgleich der Überquotierung im Osten rechnerisch zu ca. 1.250 Interviews.

Zufallsauswahl
Entscheidend ist dabei, dass die gewonnenen Ergebnisse repräsentativ für die Gesamtheit der wahlberechtigten Bevölkerung in Deutschland sind. Dies wird durch eine strenge Zufallsauswahl bei der Bestimmung der zu befragenden Personen gewährleistet. Die Daten werden dabei mit drei verschiedenen Erhebungsverfahren und Teilstichproben gewonnen: Persönlich telefonisch im Festnetz und am Mobiltelefon sowie Online via SMS-Einladung.

Für die Stichprobe wird im Bereich der Festnetzanschlüsse eine zweistufige Zufallsauswahl verwendet: Zunächst werden Privathaushalte ausgewählt, dann eine Person eines jeden Haushalts. Hierbei wird diejenige Person befragt, die von den Wahlberechtigten im Haushalt als letzte Geburtstag hatte. Die Auswahlgrundlage umfasst auch nicht im Telefonbuch eingetragene Haushalte, die prinzipiell über eine Festnetznummer telefonisch erreichbar sind. Basis sind die im Telefonbuch eingetragenen Privatnummern, bei denen die letzten drei Ziffern gelöscht und anschließend mit den Zahlen '000' bis '999' aufgefüllt werden. Dieser Datenbestand wird durch Hinzuziehung der Informationen der Bundesnetzagentur über die (Teil-)Belegung von Rufnummernblöcken und des Branchenverzeichnisses kritisch geprüft und entsprechend bereinigt.

Bei der persönlichen Befragung im Bereich der Mobilfunknummern führen die zufallsgenerierten Mobilfunknummern direkt zu der zu befragenden Person.

In einer weiteren Teilstichprobe zufallsgenerierter Mobilfunknummern erhalten zu befragende Wahlberechtigte per SMS einen ausführbaren Link, der unmittelbar zum einmalig online auszufüllenden Fragebogen führt.

Gewichtung
Die Auswertung der Studie erfolgt gewichtet. Zunächst werden die designbedingten Unterschiede (Zahl der Nummern für Telefongespräche, Anzahl der Zielpersonen im Haushalt) in den Auswahlwahrscheinlichkeiten korrigiert. Dabei werden auch die Teilstichproben aus dem Festnetz und dem Mobilfunknetz, einschließlich der SMS-basierten Online-Befragung auf der Basis der ermittelten Strukturmerkmale zusammengeführt (Dual Frame). In einem weiteren Schritt erfolgt eine Korrektur der Teilnahmeverweigerung durch Anpassung der Verteilungen der Stichprobe an die Strukturen der Grundgesamtheit. Die Sollverteilungen für Geschlecht, Alter und Bildung sind dem Mikrozensus und der repräsentativen Wahlstatistik entnommen. Die gewichtete Umfrage ist unter Berücksichtigung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen von Stichproben repräsentativ für die wahlberechtigte Bevölkerung Deutschlands. Da es sich um eine Zufallsstichprobe handelt, kann für jedes Stichprobenergebnis ein Vertrauensbereich angegeben werden, innerhalb dessen der wirkliche Wert des Merkmals in der Gesamtheit mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit liegt. Unter Berücksichtigung des Stichprobendesigns und des Gewichtungsmodells ergeben sich bei einem Stichprobenumfang von n = 1.250 folgende Vertrauensbereiche: Der Fehlerbereich beträgt bei einem Anteilswert von 40 Prozent rund +/- drei Prozentpunkte und bei einem Anteilswert von 10 Prozent rund +/- zwei Prozentpunkte.

Forschungsgruppe Wahlen: Vertrauensbereiche in der Praxis

- Dual-Frame-Stichprobe (Festnetz, Mobilfunk, SMS-Online): unterschiedliche Auswahlwahrscheinlichkeiten.
- Gewichtung korrigiert
  - designbedingte Unterschiede (z. B. Haushaltsgröße, Zahl der Rufnummern),
  - und Nonresponse durch Anpassung an Strukturen des Mikrozensus (Geschlecht, Alter, Bildung).
- Ergebnis: Die gewichtete Stichprobe ist – *im Modell* – repräsentativ für die Grundmenge.
- Da eine modellierte Zufallsstichprobe zugrunde liegt, werden Vertrauensbereiche angegeben:
  - bei 40 % etwa ± 3 Prozentpunkte, bei 10 %: etwa ± 2 Prozentpunkte.

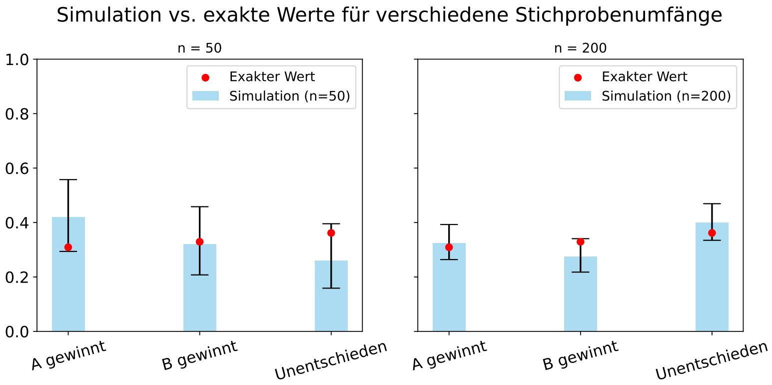
Designfaktor: Modell $\to$ Realität

Gewichtung bläht die Varianz auf. Praktisch arbeitet man mit einem *effektiven Stichprobenumfang* $n_{\text{eff}} = n/\text{Designfaktor}$.

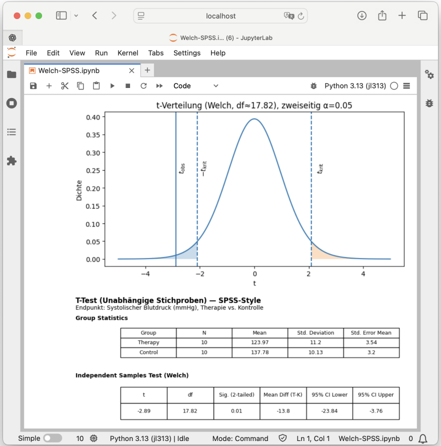
Simulationen ohne Konfidenzintervalle - wertlos

Das Spiel *Differenz trifft*: Die Proportionalstrategie ist nicht die „optimale“ Strategie

$$A = (3,5,4,3,2,1); \quad B = (3,7,4,3,1,0); \quad p = \left(\frac{3}{18}, \frac{5}{18}, \frac{4}{18}, \frac{3}{18}, \frac{2}{18}, \frac{1}{18}\right)$$



Anwendung in der Medizin: Welch-t-Test



T-Test (Unabhängige Stichproben) — SPSS-Style
Endpunkt: Systolischer Blutdruck (mmHg), Therapie vs. Kontrolle

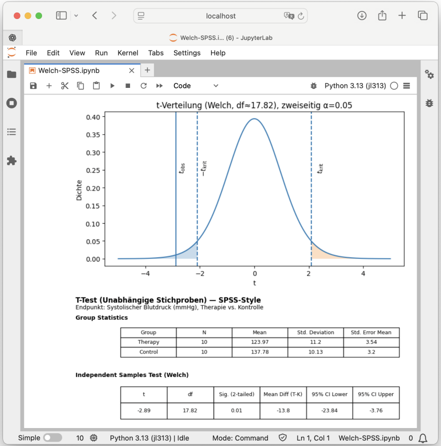
Group Statistics

Group	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Therapy	10	123.97	11.2	3.54
Control	10	137.78	10.13	3.2

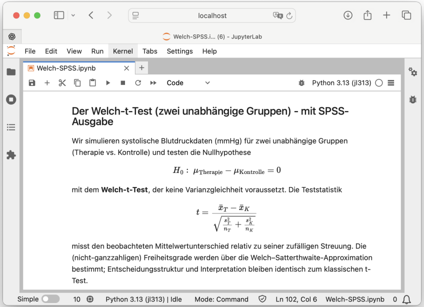
Independent Samples Test (Welch)

t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Diff (T-K)	95% CI Lower	95% CI Upper
-2.89	17.82	0.01	-13.8	-23.84	-3.76

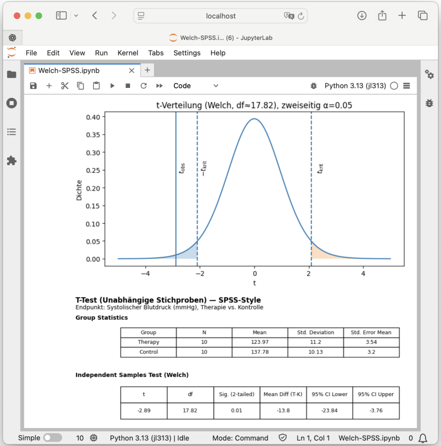
Teststatistik, Verteilung, kritischer Bereich.



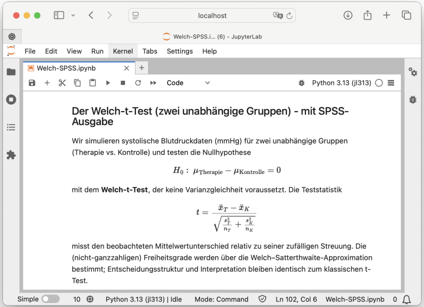
Teststatistik, Verteilung, kritischer Bereich.



Anwendung in der Medizin: Welch-t-Test



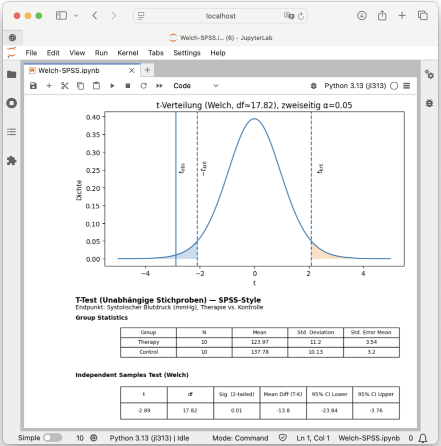
Teststatistik, Verteilung, kritischer Bereich.



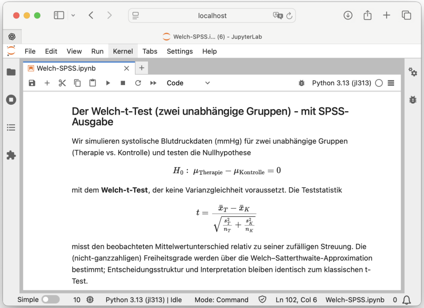
Gleiche Struktur wie beim Hypothesentest:

Teststatistik, Referenzverteilung, Entscheidungsregel.

Anwendung in der Medizin: Welch-t-Test



Teststatistik, Verteilung, kritischer Bereich.



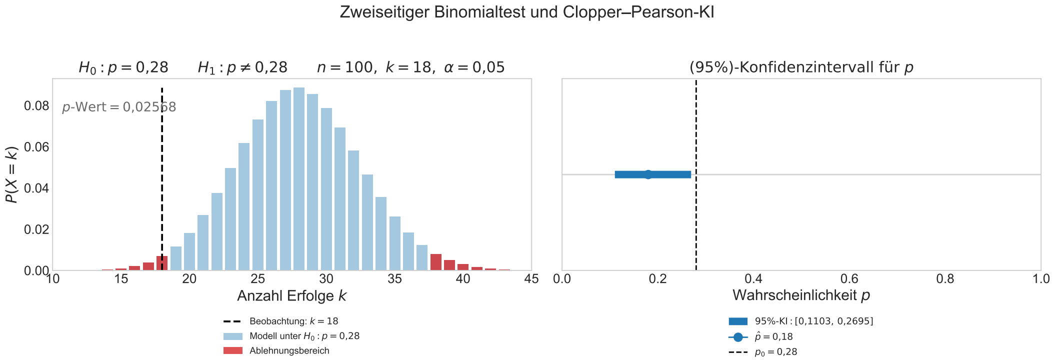
Gleiche Struktur wie beim Hypothesentest:

Teststatistik, Referenzverteilung, Entscheidungsregel.

Kein neues Prinzip – nur andere Sprache (SPSS). Test und Konfidenzintervall sind zwei Seiten derselben Struktur.

Hypothesentest und Konfidenzintervalle - zwei Seiten einer Medaille

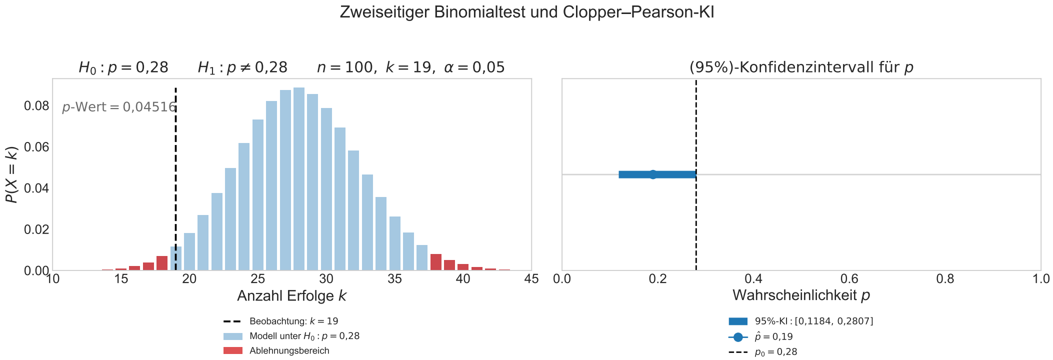
Zweiseitiger Test und Konfidenzintervall – 15 Situationen



Beobachtung: $k = 18$

Der Test auf Niveau α verwirft H_0 $\iff$ $p_0 \notin KI$

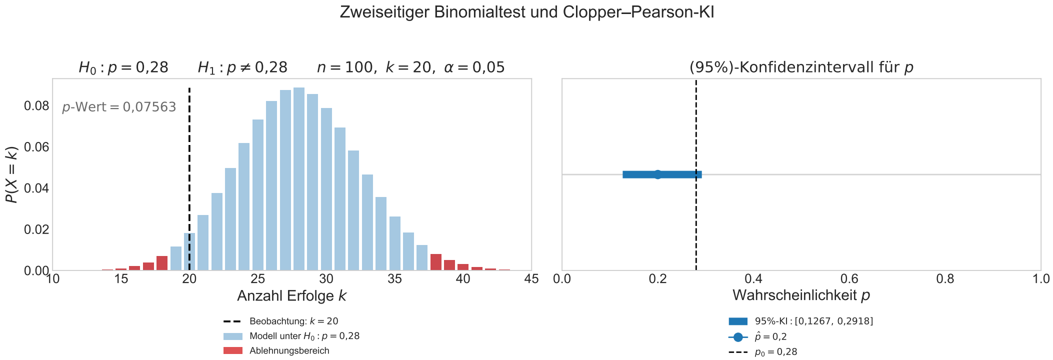
Zweiseitiger Test und Konfidenzintervall – 15 Situationen



Beobachtung: $k = 19$

Der Test auf Niveau α verwirft nicht $H_0 \quad \Longleftrightarrow \quad p_0 \in KI$

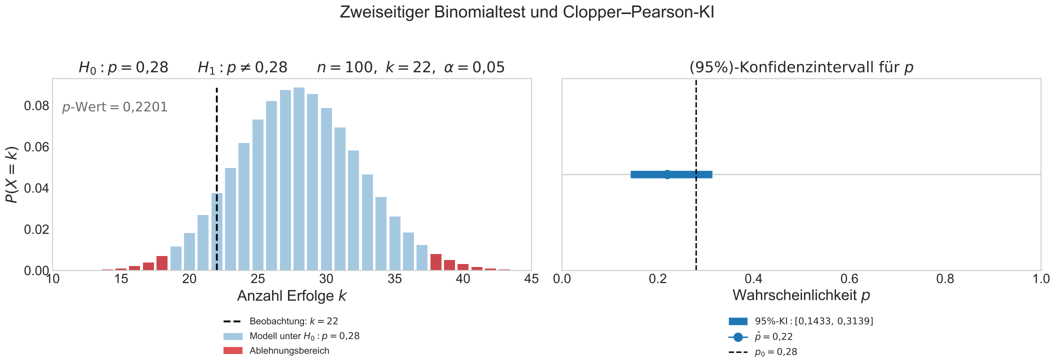
Zweiseitiger Test und Konfidenzintervall – 15 Situationen



Beobachtung: $k = 20$

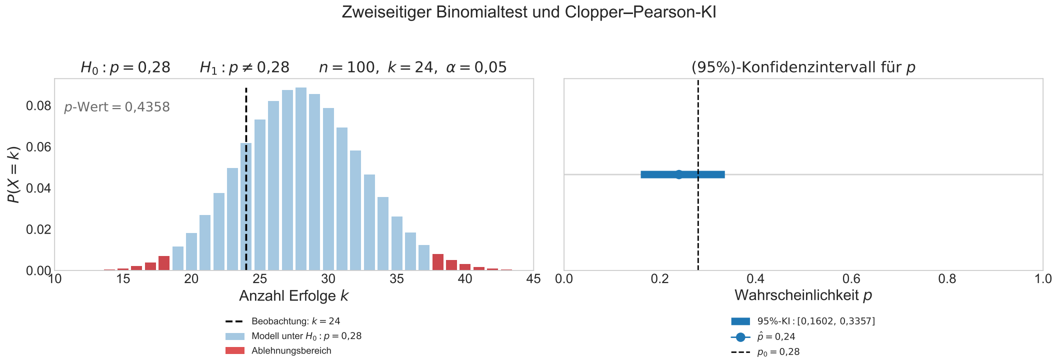
Der Test auf Niveau α verwirft nicht $H_0 \quad \Longleftrightarrow \quad p_0 \in KI$

Zweiseitiger Test und Konfidenzintervall – 15 Situationen



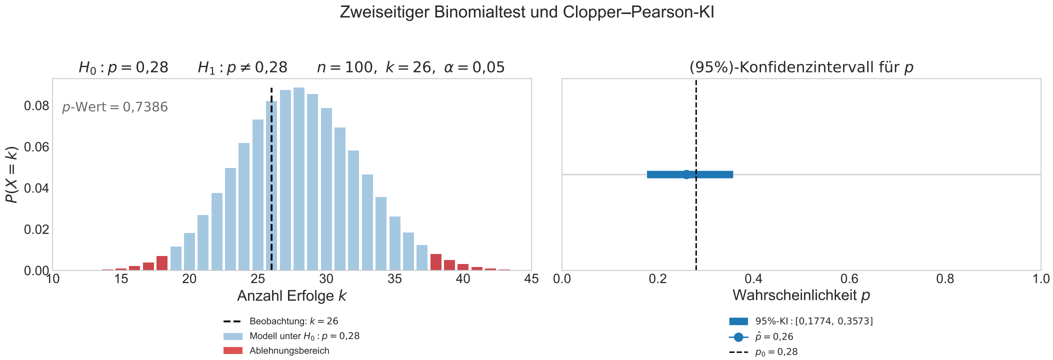
Beobachtung: $k = 22$

Der Test auf Niveau α verwirft nicht $H_0 \iff p_0 \in KI$



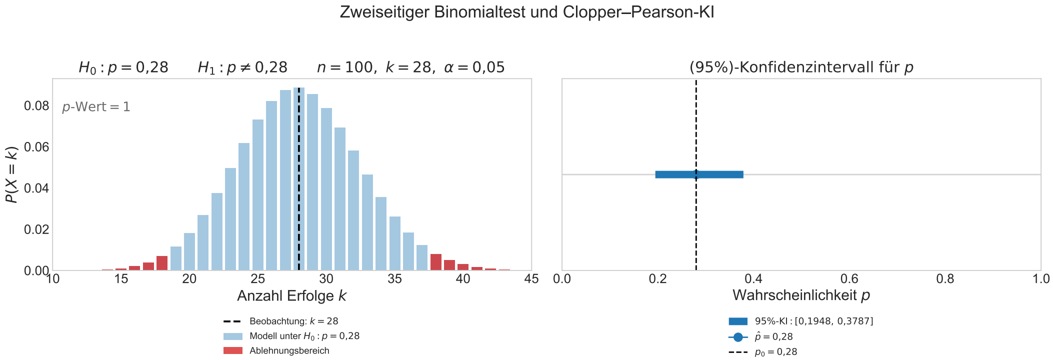
Beobachtung: $k = 24$

Der Test auf Niveau α verwirft nicht H_0 $\iff$ $p_0 \in KI$



Beobachtung: $k = 26$

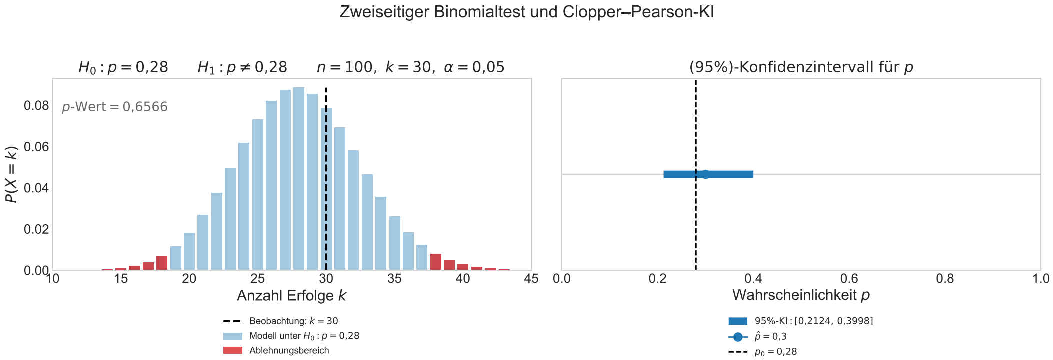
Der Test auf Niveau α verwirft nicht H_0 $\iff$ $p_0 \in KI$



Beobachtung: $k = 28$

Der Test auf Niveau α verwirft nicht $H_0 \iff p_0 \in KI$

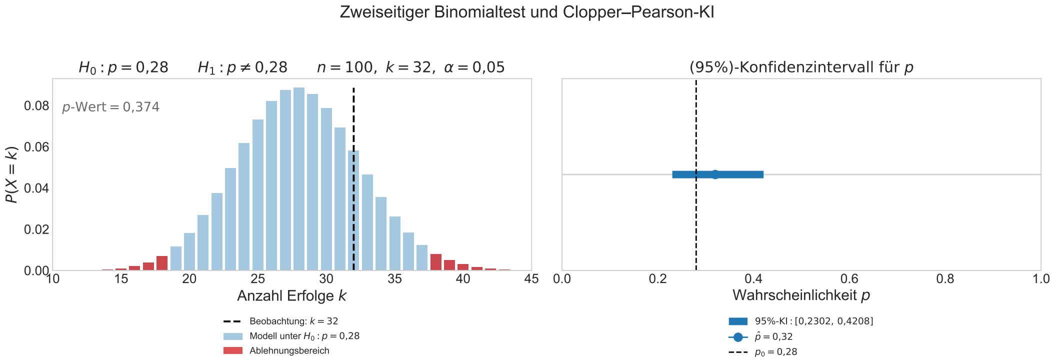
Zweiseitiger Test und Konfidenzintervall – 15 Situationen



Beobachtung: $k = 30$

Der Test auf Niveau α verwirft nicht H_0 $\iff$ $p_0 \in KI$

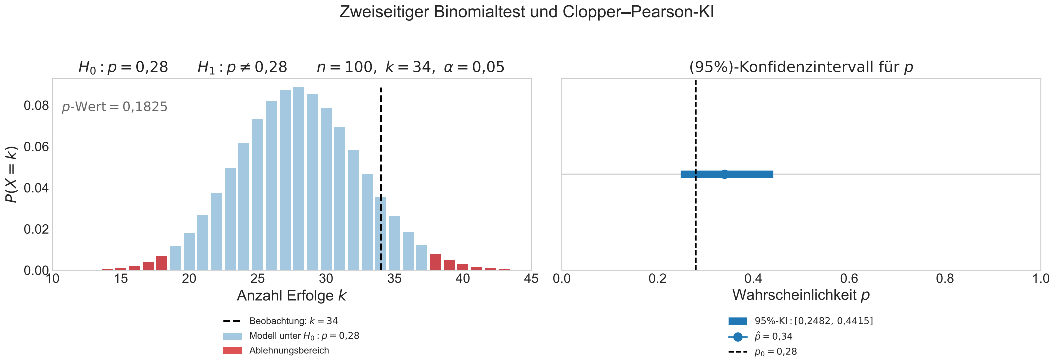
Zweiseitiger Test und Konfidenzintervall – 15 Situationen



Beobachtung: $k = 32$

Der Test auf Niveau α verwirft nicht H_0 $\iff$ $p_0 \in KI$

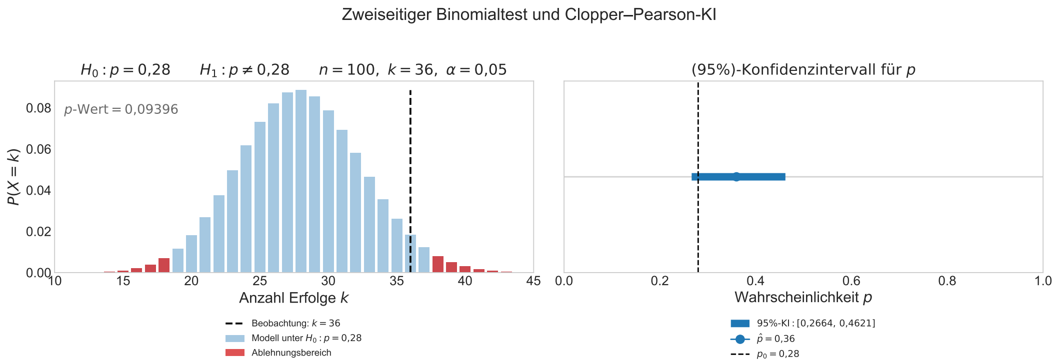
Zweiseitiger Test und Konfidenzintervall – 15 Situationen



Beobachtung: $k = 34$

Der Test auf Niveau α verwirft nicht H_0 $\iff$ $p_0 \in KI$

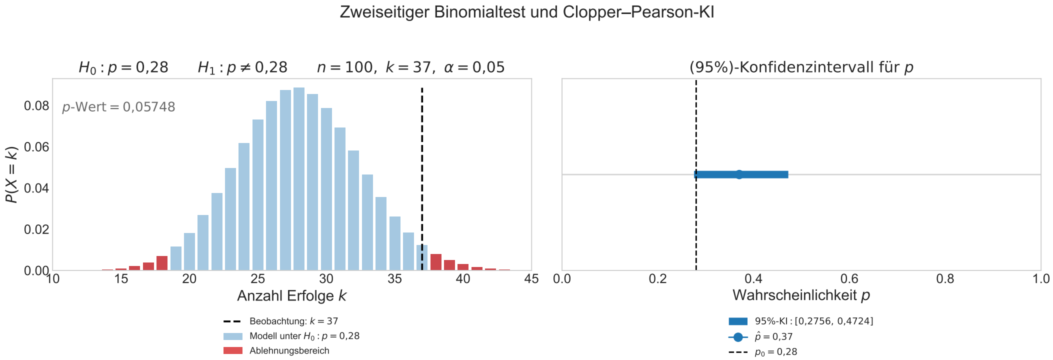
Zweiseitiger Test und Konfidenzintervall – 15 Situationen



Beobachtung: $k = 36$

Der Test auf Niveau α verwirft nicht H_0 $\iff$ $p_0 \in KI$

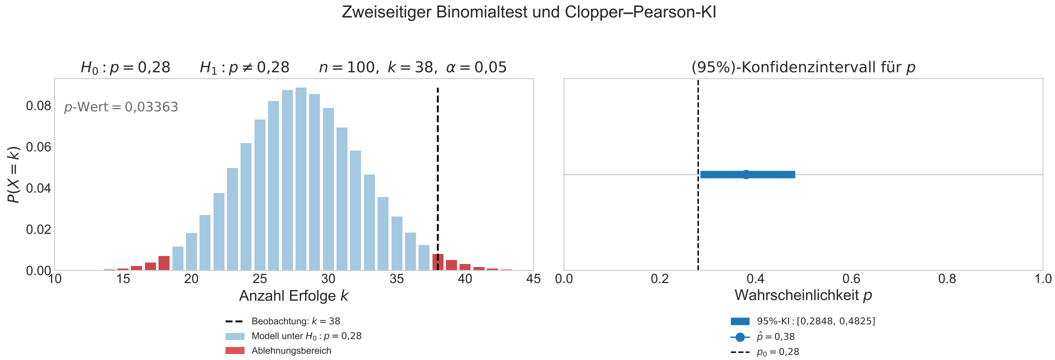
Zweiseitiger Test und Konfidenzintervall – 15 Situationen



Beobachtung: $k = 37$

Der Test auf Niveau α verwirft nicht $H_0 \quad \Longleftrightarrow \quad p_0 \in KI$

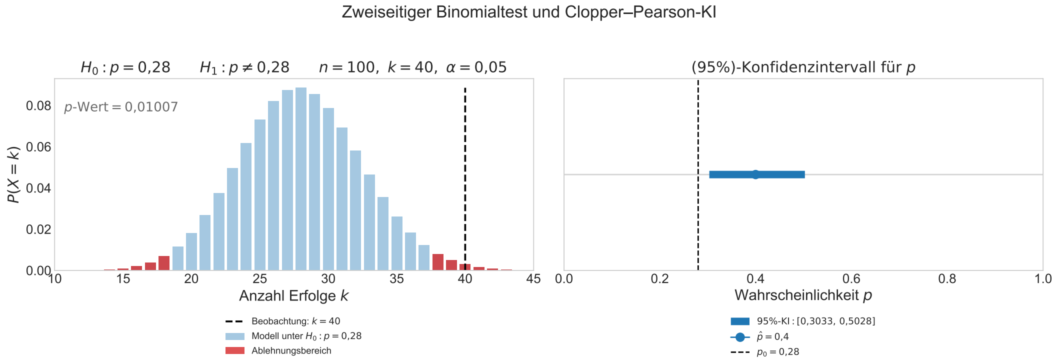
Zweiseitiger Test und Konfidenzintervall – 15 Situationen



Beobachtung: $k = 38$

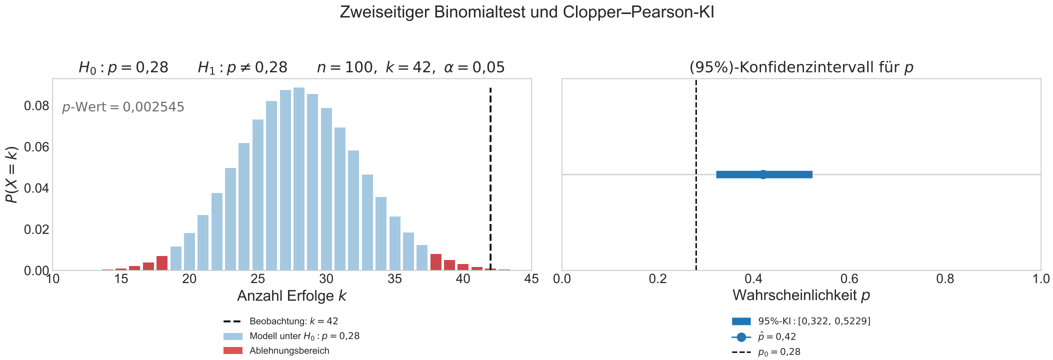
Der Test auf Niveau α verwirft $H_0 \iff p_0 \notin KI$

Zweiseitiger Test und Konfidenzintervall – 15 Situationen



Beobachtung: $k = 40$

Der Test auf Niveau α verwirft H_0 $\iff$ $p_0 \notin KI$



Beobachtung: $k = 42$

Der Test auf Niveau α verwirft H_0 $\iff$ $p_0 \notin KI$

Ein zweiseitiger Test zum Niveau α verwirft $H_0\colon p = p_0$

$$\iff$$

$p_0 \notin (1 - \alpha)$-Konfidenzintervall.

Hypothesentest

Beim Hypothesentest liegt der Zollstock fest –
und die Stichprobe bewegt sich.

Konfidenzintervall

Beim Konfidenzintervall liegt die Stichprobe fest –
und wir verschieben den Zollstock, um ein Intervall zu konstruieren,
dass sich bewegt.

In der Realität bleibt die Stichprobe gleich.
Die Bewegung bezieht sich auf gedankliche Wiederholungen.

Sicht von oben.

Sicht von oben.

Konfidenzintervalle beschreiben Verfahrenseigenschaften bei Wiederholung, nicht die Unsicherheit eines konkreten Parameters.

Sicht von oben.

Konfidenzintervalle beschreiben Verfahrenseigenschaften bei Wiederholung, nicht die Unsicherheit eines konkreten Parameters.

Hypothesentests beschreiben Verfahrenseigenschaften bei Wiederholung, nicht die Wahrscheinlichkeit einer konkreten Hypothese.

Sicht von oben.

Konfidenzintervalle beschreiben Verfahrenseigenschaften bei Wiederholung,
nicht die Unsicherheit eines konkreten Parameters.

Hypothesentests beschreiben Verfahrenseigenschaften bei Wiederholung,
nicht die Wahrscheinlichkeit einer konkreten Hypothese.

Etwas konkreter.

Sicht von oben.

Konfidenzintervalle beschreiben Verfahrenseigenschaften bei Wiederholung,
nicht die Unsicherheit eines konkreten Parameters.

Hypothesentests beschreiben Verfahrenseigenschaften bei Wiederholung,
nicht die Wahrscheinlichkeit einer konkreten Hypothese.

Etwas konkreter.

Ein **Konfidenzintervall** beschreibt die Menge aller Parameterwerte,
die mit den beobachteten Daten vereinbar sind,
bei einem gegebenen Sicherheitsniveau.

Sicht von oben.

Konfidenzintervalle beschreiben Verfahrenseigenschaften bei Wiederholung,
nicht die Unsicherheit eines konkreten Parameters.

Hypothesentests beschreiben Verfahrenseigenschaften bei Wiederholung,
nicht die Wahrscheinlichkeit einer konkreten Hypothese.

Etwas konkreter.

Ein **Konfidenzintervall** beschreibt die Menge aller Parameterwerte,
die mit den beobachteten Daten vereinbar sind,
bei einem gegebenen Sicherheitsniveau.

Ein **Hypothesentest** ist ein Schnitt durch dieses Intervall.

Rückblick und Ausblick

Worum es mir heute wirklich geht

Zentrale Leitfrage

Was bedeutet es, wenn wir aus einer Stichprobe
auf die Grundgesamtheit schließen?

Worum es mir heute wirklich geht

Zentrale Leitfrage

Was bedeutet es, wenn wir aus einer Stichprobe
auf die Grundgesamtheit schließen?

Vier Eckpfeiler meines Ansatzes

- Unterscheide streng: Modell vs. Realisation.
- Unterscheide streng: Zufallsgröße X (Modell) vs. Realisation x (Realität).
- Nutze: Handlungen, Bilder und Gedankenexperimente, um Unsicherheit verständlich zu machen - *vor* dem Erlernen formaler Verfahren.
- Suche: Anschlussfähigkeit zur Universität, ohne die formale Bildungsbarriere unnötig zu erhöhen - Strukturen sichtbar machen, nicht die technische Oberfläche.

Zwei Seiten einer Medaille: Realität, Modell, Modelle

Realität

Stichprobe

x, h

$\longleftrightarrow$

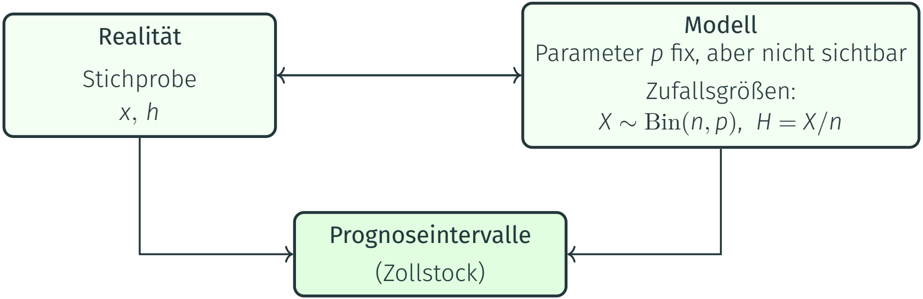
Modell

Parameter p fix, aber nicht sichtbar

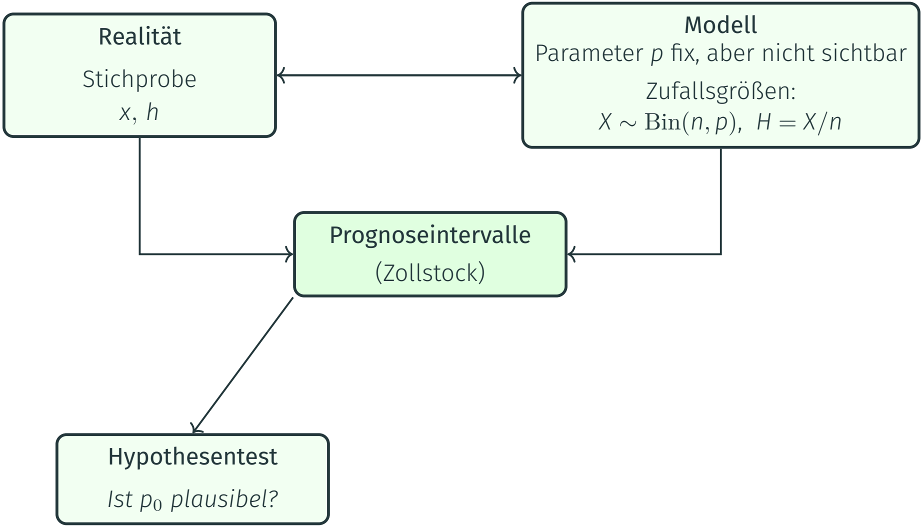
Zufallsgrößen:

$X \sim \mathrm{Bin}(n, p), \;\; H = X/n$

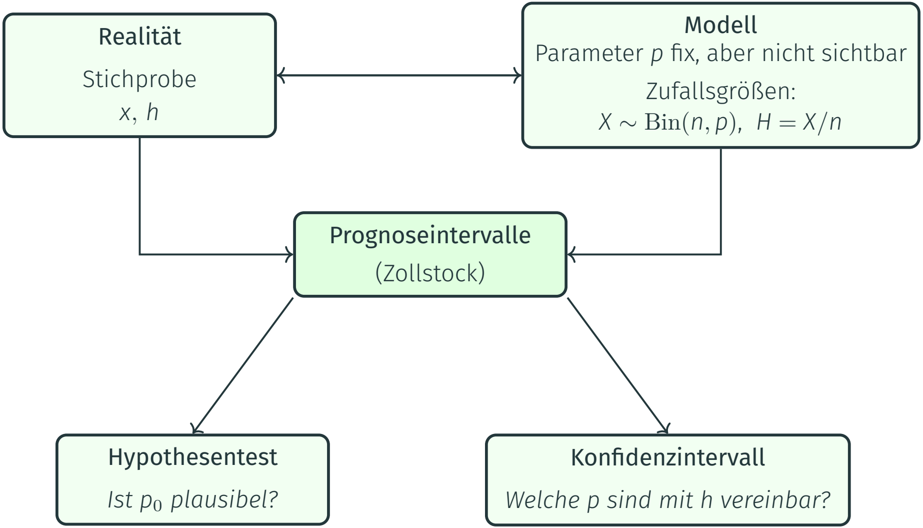
Zwei Seiten einer Medaille: Realität, Modell, Modelle



Zwei Seiten einer Medaille: Realität, Modell, Modelle



Zwei Seiten einer Medaille: Realität, Modell, Modelle



Das Fundament in drei Sätzen.

Das Fundament in drei Sätzen.

- Modelle sind formale Ersatzwelten.
- Tests und Konfidenzintervalle bewerten Daten, nicht Wahrheit.
- Zufallsvariablen leben im Gedankenexperiment, Daten in der Realität.

Das Fundament in drei Sätzen.

- Modelle sind formale Ersatzwelten.
- Tests und Konfidenzintervalle bewerten Daten, nicht Wahrheit.
- Zufallsvariablen leben im Gedankenexperiment, Daten in der Realität.

Beispiel: Münzwurf

Das Fundament in drei Sätzen.

- Modelle sind formale Ersatzwelten.
- Tests und Konfidenzintervalle bewerten Daten, nicht Wahrheit.
- Zufallsvariablen leben im Gedankenexperiment, Daten in der Realität.

Beispiel: Münzwurf

- Wir beobachten die Realität - hier sind es die Häufigkeiten
- Wir legen ein Modell fest - und damit Wahrscheinlichkeiten.
- Wir rechnen strikt im Modell.
- Die Realität ist unser Prüfstein, nicht unser Rechenraum.
- Kurz und knackig: Häufigkeiten beobachten wir, Wahrscheinlichkeiten legen wir fest.

Das Fundament in drei Sätzen.

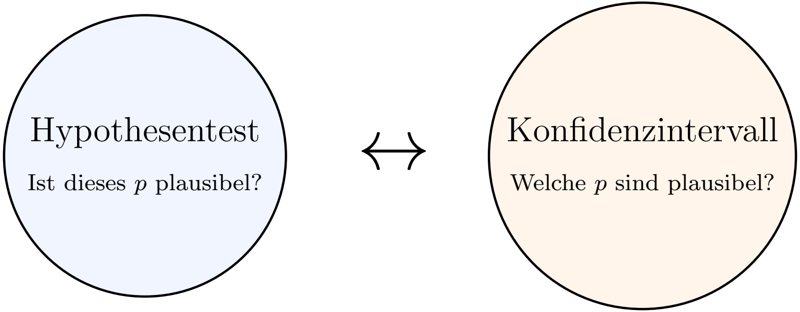
- Modelle sind formale Ersatzwelten.
- Tests und Konfidenzintervalle bewerten Daten, nicht Wahrheit.
- Zufallsvariablen leben im Gedankenexperiment, Daten in der Realität.

Beispiel: Münzwurf

- Wir beobachten die Realität - hier sind es die Häufigkeiten
- Wir legen ein Modell fest - und damit Wahrscheinlichkeiten.
- Wir rechnen strikt im Modell.
- Die Realität ist unser Prüfstein, nicht unser Rechenraum.
- Kurz und knackig: Häufigkeiten beobachten wir, Wahrscheinlichkeiten legen wir fest.

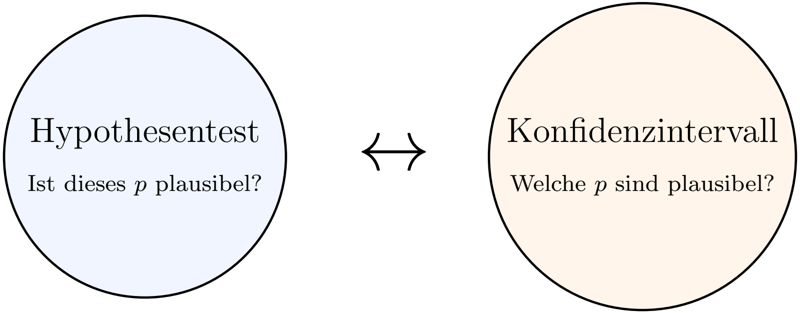
Daten können ein Modell stützen oder infrage stellen – sie können es nicht wahr machen.
Modelle können sich bewähren – sie werden dadurch aber nicht wahr.

Zwei Seiten einer Medaille



Zwei Seiten einer Medaille

Was beide verbindet: dieselbe Stichprobe, dieselben Daten – nur die andere Frage.



Zwei Seiten einer Medaille

Was beide verbindet: dieselbe Stichprobe, dieselben Daten – nur die andere Frage.

Hypothesentest $\leftrightarrow$ **Konfidenzintervall**

Ist dieses p plausibel? — Welche p sind plausibel?

Der Test auf Niveau α verwirft H_0 $\iff$ $p_0 \notin$ *KI*

These: Anschlussfähigkeit entsteht durch Ehrlichkeit.

These: Anschlussfähigkeit entsteht durch Ehrlichkeit.

Universitäre Anschlussfähigkeit heißt nicht:

- mehr Formeln
- mehr Beweise
- mehr Symbole

These: Anschlussfähigkeit entsteht durch Ehrlichkeit.

Universitäre Anschlussfähigkeit heißt nicht:

- mehr Formeln
- mehr Beweise
- mehr Symbole

Sondern hier:

- saubere Begriffe
- korrekte Objekt-Ebenen
- keine stillschweigenden Bedeutungswechsel

These: Anschlussfähigkeit entsteht durch Ehrlichkeit.

Universitäre Anschlussfähigkeit heißt nicht:

- mehr Formeln
- mehr Beweise
- mehr Symbole

Sondern hier:

- saubere Begriffe
- korrekte Objekt-Ebenen
- keine stillschweigenden Bedeutungswechsel

Konkret:

- p bleibt Parameter
- Intervalle sind Zufallsobjekte
- Wahrscheinlichkeit bezieht sich auf Verfahren
- Bilder und Code widersprechen der Theorie nicht

These: Stoff wird nicht einfacher, wenn man ihn weichzeichnet.

These: Stoff wird nicht einfacher, wenn man ihn weichzeichnet.

Vermeide:

- „Stell dir das so vor …“
- „Im Grunde heißt das …“
- „Das ist jetzt nicht ganz korrekt, aber …“

These: Stoff wird nicht einfacher, wenn man ihn weichzeichnet.

Vermeide:

- „Stell dir das so vor …“
- „Im Grunde heißt das …“
- „Das ist jetzt nicht ganz korrekt, aber …“

Stattdessen:

- „Wir betrachten im Modell …“
- „Wir konstruieren folgendes Objekt …“
- „Im Gedankenexperiment …“
- „Diese Grafik repräsentiert das Modell, nicht die Realität““

These: Stoff wird nicht einfacher, wenn man ihn weichzeichnet.

Vermeide:

- „Stell dir das so vor …“
- „Im Grunde heißt das …“
- „Das ist jetzt nicht ganz korrekt, aber …“

Stattdessen:

- „Wir betrachten im Modell …“
- „Wir konstruieren folgendes Objekt …“
- „Im Gedankenexperiment …“
- „Diese Grafik repräsentiert das Modell, nicht die Realität““

Das entlastet kognitiv, selbst wenn der Anspruch höher ist.
Das ist nicht schwerer – nur ehrlicher.