

组合数学概率论杂记

组合数学概率论杂记

n个球放入m盒子问题

- 1.球同，盒不同，无空盒
- 2.球同，盒不同，允许空盒
- 3.球不同，盒相同，无空盒
- 4.球不同，盒相同，允许空盒
- 5.球不同，盒不同，无空盒
- 6.球不同，盒不同，允许空箱
- 7.球同，盒同，允许空箱
- 8.球同，盒同，无空箱

参考资料

n个球放入m盒子问题

1.球同，盒不同，无空盒

$$\begin{cases} C(n-1, m-1), n \geq m \\ 0, n < m \end{cases}$$

使用插板法考虑，在n-1个小球间隙中选择m-1个间隙

2.球同，盒不同，允许空盒

$$C(n+m-1, m-1) = C(n+m-1, n)$$

可以理解为先规定第一个是盒（避免重排），剩下n+m-1个位置中选出n个球或者m-1个盒子的位置。

3.球不同，盒相同，无空盒

就是第二类斯特林数 $S[n][m]$

$$\begin{cases} S[n][m] = m * S[n-1][m] + S[n-1][m-1], 1 \leq m < n \\ S[k][k] = 1, k \geq 0 \\ S[k][0] = 0, k \geq 1 \end{cases}$$

对于前i个球，如果前面i-1个球已经放在m个箱子里了，那么现在第i个球放在哪个箱子都可以，所以 $m * S[n-1][m]$ ，如果前面i-1个球放在了m-1个箱子里，那么第i个球就得新开一个箱子放，所以是 $S[n-1][m-1]$

4.球不同，盒相同，允许空盒

$$\sum S[n][i], 0 \leq i \leq m$$

用n个球放入i箱子的情况的总和就是答案。

5.球不同，盒不同，无空盒

$$S[n][m] * \text{frac}[m] \quad (S \text{表示第二类斯特林数}, \text{frac} \text{表示阶乘})$$

就是给定了盒子的存放顺序，然后转化为了第3种情况。

6.球不同，盒不同，允许空箱

$$\text{power}(m, n)$$

每个球都有m种选择

7.球同，盒同，允许空箱

$$\begin{cases} dp[n][m] = dp[n][m-1] + dp[n-m][m], n \geq m \\ dp[n][m] = dp[n][m-1], n < m \\ \text{边界 } dp[k][1] = dp[1][k] = dp[0][k] = 1; \end{cases}$$

当前阶段，可以选择在所有的箱子里面都放一个球或者常规放球。

8.球同，盒同，无空箱

$$dp[n-m][m], \text{其中 } dp \text{与情况7相同}$$

就相当于先在每个盒子里放了一个球，然后再做情况7的分析。

参考资料

<https://blog.csdn.net/qwb492859377/article/details/50654627>