暨南大学考试试卷

教师填写	教学年度：2010－2011 年度 第 2 学期	课程类别 必修[√] 选修[ ]
	课程名称：概率论与数理统计(经管3学分)	考试方式 开卷[ ] 闭卷[√]
	授课教师：黄颖强,张培爱,胡代强,杜志华,吕荐瑞,陈见生	试卷类别(A, B)
	考试时间：2011 年 07 月 08 日	[A] 共 6 页
考生填写	________学院 ________专业 ________班(级)	
	姓名________ 学号________	内招[√] 外招[ ]

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
得 分							

得分	评阅人

一、填空题

（共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分）

1. 已知$P(A)=0.3, P\left(B|A\right)=0.4, P\left(B|\bar{A}\right)=0.5$, 则$P(B)=$____0.47_____。

2. 已知连续型ξ的密度函数为$\varphi(x)=\begin{cases} k\cos x, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ 0, & 其它 \end{cases}$, 则$k=$____$\frac{1}{2}$_____。

3. 已知随机变量ξ的期望和方差各为$E\xi=3, D\xi=2$, 则$E\xi^2=$____11_____。

4. 电子管寿命ξ满足平均寿命为1000小时的指数分布，则它的寿命小于2000小时概率为______$1-e^{-2}$__________。

5. 标准正态分布的密度函数为$\varphi_0(x)=$ _________$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$____________。

6. 已知ξ和η相互独立且$\xi\sim N(1,4), \eta\sim N(2,5)$，则 $\xi-2\eta\sim$__$N(-3,24)$___。

7. 设总体有分布

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

。现抽取容量为3的样本值(x_1, x_2, x_3)为$(1,2,1)$, 则θ的最大似然估计$\hat{\theta}$为_____$\frac{5}{6}$______。

8. 从正态总体 $N(\mu,4)$ 中抽取容量为9的样本值 $(1,6,10,3,5,2,8,9,1)$. 取 $\alpha=0.01$，对μ作区间估计得到置信区间为 _____(3.283, 6.717)__________。

得分	评阅人

二、单选题

（共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. 对任何一个本校男学生，以A表示他是大一学生，B表示他是大二学生，则事件A和B是（ B ）

(A) 对立事件　　(B) 互斥事件

(C) 既是对立事件又是互斥事件　　(D) 不是对立事件也不是互斥事件

2. 某人每期买一张彩票，若不中奖继续购买，直到中奖为止。则该人总共购买次数 ξ 满足（ C ）

(A) 两点分布　(B) 均匀分布　(C) 几何分布　(D) 正态分布

3. 设随机变量ξ和η相互独立，则下列命题不一定成立的是（ D ）

(A) $E(\xi+\eta)=E\xi+E\eta$　　(B) $E(\xi\eta)=E\xi\cdot E\eta$

(C) $D(\xi-\eta)=D\xi+D\eta$　　(D) $D(\xi\eta)=D\xi\cdot D\eta$

4. 最常见也是最重要的连续型分布是（ B ）

(A) 指数分布　(B) 正态分布　(C) 均匀分布　(D) Γ分布

5. 下列说法不正确的是（ B ）

(A) 大数定律说明了大量相互独立且同分布的随机变量的均值的稳定性

(B) 大数定律说明大量相互独立且同分布的随机变量的均值近似于正态分布

(C) 中心极限定理说明了大量相互独立且同分布的随机变量的和的稳定性

(D) 中心极限定理说明大量相互独立且同分布的随机变量的和近似于正态分布

6. 在数理统计中，对总体X和样本$(X_1,\cdots,X_n)$的说法哪个是不正确的（ D ）

(A) 总体是随机变量　　(B) 样本是n元随机变量

(C) $X_1,\cdots,X_n$相互独立　　(D) $X_1=X_2=\cdots=X_n$

7. 样本平均数$\bar{X}$未必是总体期望值μ的（ A ）

(A) 最大似然估计　(B) 有效估计　(C) 一致估计　(D) 无偏估计

8. 未知正态总体的期望μ，要检验假设H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2$是否成立，该选择的统计量是（ C ）

(A) $U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$　(B) $T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$　(C) $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$　(D) $\chi^2=\frac{S^2}{(n-1)\sigma_0^2}$

得分	评阅人

三、计算题

（共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分）

1. 设二元随机变量(ξ,η)的联合分布表为

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1
0	0	1/3	0
1	1/3	0	1/3

。

（1） 求关于ξ和η的边缘分布。

（2） 判断ξ和η的独立性。

（3） 判断ξ和η的相关性。

解：（1） 边缘分布为

ξ	0	1
P	1/3	2/3

，

η	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

. ------ 3分

（2） 由$P(\xi=0,\eta=0)=\frac{1}{3}\neq\frac{1}{9}=P(\xi=0)P(\eta=0)$，知$\xi$和$\eta$不独立. ---- 6分

（3） 由联合分布表求得$\xi\eta$的分布为

$\xi\eta$	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

.

因此有 $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E\xi E\eta=0-\frac{2}{3}\cdot 0=0$，因此$\xi$和$\eta$不相关. — 10分

2. 设随机变量$\xi\sim N(1,4)$，求$P(-1<\xi<5)$。

解：$P(-1<\xi<5)=\Phi_0\left(\frac{5-1}{2}\right)-\Phi_0\left(\frac{-1-1}{2}\right)$ ---------- 3分

$=\Phi_0(2)-\Phi_0(-1)$ ---------- 5分

$=\Phi_0(2)+\Phi_0(1)-1$ ---------- 8分

$=0.9773+0.8413-1=0.8186$ ---------- 10分

3. 设每发炮弹命中飞机的概率是0.2且相互独立，现在发射100发炮弹。

(1) 用切贝谢夫不等式估计命中数目ξ在10发到30发之间的概率。

(2) 用中心极限定理估计命中数目ξ在10发到30发之间的概率。

解：$E\xi = np = 100\cdot 0.2 = 20, D\xi = npq = 100\cdot 0.2\cdot 0.8 = 16.$ ——— 2分

(1) $P(10 < \xi < 30) = P(|\xi - E\xi| < 10) \geq 1 - \frac{D\xi}{10^2} = 1 - \frac{16}{100} = 0.84.$ -- 6分

(2) $P(10 < \xi < 30) \approx \Phi_0\left(\frac{30-20}{\sqrt{16}}\right) - \Phi_0\left(\frac{10-20}{\sqrt{16}}\right)$

$= 2\Phi_0(2.5) - 1 = 2\cdot 0.9938 - 1 = 0.9876$ ——— 10分

4. 从正态总体$N(\mu,\ \sigma^2)$中抽出样本容量为16的样本，算得其平均数为3160，标准差为100。试检验假设H_0: $\mu = 3140$是否成立（ $\alpha = 0.01$ ）。

解：(1) 待检假设 H_0: $\mu = 3140.$ ————————— 2分

(2) 选取统计量 $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$ —————— 4分

(3) 查表得到 $t_\alpha = t_\alpha(n-1) = t_{0.01}(15) = 2.947.$ ——— 6分

(4) 计算统计值 $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{3160 - 3140}{100/4} = 0.8.$ ———— 8分

(5) 由于 $|t| < t_\alpha$，故接受 H_0，即假设成立. ——— 10分

得分	评阅人

四、证明题

（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

1. 设事件A和B相互独立，证明A和$\bar{B}$相互独立。

证明：$P\left(A\cdot\bar{B}\right)=P(A-B)=P(A-AB)$ --- 1分

$=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)$ — 3分

$=P(A)(1-P(B))=P(A)P\left(\bar{B}\right)$ --- 5分

所以A和$\bar{B}$相互独立。

2. 证明在区间$[a,b]$的均匀分布ξ的方差为$\frac{1}{12}(b-a)^2$。

证明：区间$[a,b]$的均匀分布ξ的密度函数为$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & \text{如果 } a<x<b;\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$ — 1分

因此 $E\xi=\int_{-\infty}^{\infty}x\varphi(x)\,dx=\int_a^b x\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{a+b}{2},$ — 2分

$E\xi^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\varphi(x)\,dx=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{a^2+ab+b^2}{3};$ --- 3分

从而 $D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$ --- 5分

3. 设到某商场的顾客人数ξ满足参数为λ的普哇松分布，每个到该商场的顾客购物的概率为p，且相互独立。证明：到某商场购物的顾客人数η满足参数为$p\lambda$的普哇松分布。

证明：$P(\eta=k)=\sum\limits_{n=k}^{\infty}P(\xi=n,\eta=k)=\sum\limits_{n=k}^{\infty}P(\xi=n)P\big(\eta=k|\xi=n\big)$ ——— 1分

$=\sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\cdot C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{(n-k)!k!}e^{-\lambda}p^k(1-p)^{n-k}$ ——— 2分

$=\sum\limits_{t=0}^{\infty}\frac{\lambda^{t+k}}{t!k!}e^{-\lambda}p^k(1-p)^t=\left(\sum\limits_{t=0}^{\infty}\frac{[(1-p)\lambda]^t}{t!}e^{-(1-p)\lambda}\right)\cdot\frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-p\lambda}$ ——— 3分

$=\frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-p\lambda}$ ——— 4分

因此，η 满足参数为 $p\lambda$ 的普哇松分布. ——— 5分

4. 从总体ξ中取一样本$(X_1,\ \cdots,\ X_n)$, $E\xi=\mu$, $D\xi=\sigma^2$，证明样本方差S^2是总体方差σ^2的无偏估计。

证明：由样本$(X_1,\cdots,X_n)$取自总体ξ可知$EX_i=\mu, DX_i=\sigma^2$, 对所有i。——— 1分

因此 $E\bar{X}=\mu, D\bar{X}=\frac{\sigma^2}{n}$. 由方差的计算公式$D\eta=E\eta^2-(E\eta)^2$, ——— 2分

可以得到$EX_i^2=\mu^2+\sigma^2, E\bar{X}^2=\mu^2+\frac{\sigma^2}{n}$. 所以我们有 ——— 3分

$ES^2=E\left(\frac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)\right)=\frac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}EX_i^2-nE\bar{X}^2\right)$ ——— 4分

$\quad=\frac{1}{n-1}\left(n\left(\mu^2+\sigma^2\right)-n\left(\mu^2+\frac{\sigma^2}{n}\right)\right)=\sigma^2.$ ——— 5分

即S^2是总体方差σ^2的无偏估计。

附录（一些可能用到的数据）：$\Phi_0(0.5)=0.6915$, $\Phi_0(1)=0.8413$, $\Phi_0(2)=0.9773$, $\Phi_0(2.5)=0.9938$, $u_{0.01}=2.576$, $t_{0.01}(8)=3.355$, $t_{0.01}(9)=3.250$ $t_{0.01}(15)=2.947$, $t_{0.01}(16)=2.921$, $\chi^2_{0.005}(8)=22.0$, $\chi^2_{0.005}(9)=23.6$, $\chi^2_{0.005}(15)=32.8$, $\chi^2_{0.005}(16)=34.3$, $\chi^2_{0.995}(8)=1.34$, $\chi^2_{0.995}(9)=1.73$, $\chi^2_{0.995}(15)=4.60$, $\chi^2_{0.995}(16)=5.14$.