暨 南 大 学 考 试 试 卷

<table>
<tr><td rowspan="4">教师填写</td><td>20__13__ - 20__14__ 学年度第 __1__ 学期</td><td>课程类别
必修 [ ] 选修 [ ]</td></tr>
<tr><td>课程名称：____概率论与数理统计______</td><td>考试方式
开卷 [ ] 闭卷 [ ]</td></tr>
<tr><td>授课教师姓名：__罗世庄______________</td><td rowspan="2">试卷类别 (A、B)
[A] 共 6 页</td></tr>
<tr><td>考试时间：__2014____年__1____月__10__日</td></tr>
<tr><td>考生填写</td><td colspan="2">__________________学院(校) ______________________专业________班(级)
姓名________________学号___________________________内招 [ ] 外招 [ ]</td></tr>
</table>

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

一、单选题 （每小题 2 分，共 20 分）请将答案填写在相应括弧内。

1. 设 A、B、C 是三个随机事件，则事件 “ A 发生但 B 和 C 均不发生 ” 可表示为 ………..…(C).
   (A) A ； (B) $\bar{B}\bar{C}$ ； (C) $A\bar{B}\bar{C}$ ； (D) $\overline{ABC}$

2. 随机事件 A 与 B 互不相容， 且 $P(A)=0.4, P(B)=0.3$ 则以下 不正确的公式是 ………… (B).
   (A) $P(AB)=0$ ； (B) $P(AB)=0.12$ ； (C) $P(A\cup B)=0.7$ ； (D) $P(A|B)=0$

3. 函数 sin x 在以下哪个区间上可以作为随机变量的密度函数？ ……………………………… .(A).
   (A) $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ； (B) $[0,\pi]$ ； (C) $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ ； (D) $[0,2\pi]$.

4. 设随机变量 X 的分布函数是 $F(x)=A-e^{-\frac{x}{2}}, (0<x<+\infty)$，则 ……………………… ...(B).
   (A) $A=0$ ； (B) $A=1$ ； (C) $A=2$ ； (D) $A=-1$.

5. 设随机变量 X 服从泊松分布 P(2)，则概率 P{X=1}= …………………… ..…..………… .…(D).
   (A) e^{-2} ； (B) $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ ； (C) $\frac{1}{2}e^{-2}$ ； (D) $2e^{-2}$

6. 设随机变量 X 的数学期望和方差分别为 E(X)=5, D(X)=2, 则 D(4X+2)= ………………… .(C).
   (A) 8 ； (B) 10 ； (C) 32 ； (D) 34

7. 概率论中用来阐述大量随机现象平均结果的稳定性的定理统称为 ………… ..……… ..…. .(B).
   (A) 中心极限定理； (B) 大数定律； (C) 稳定性原理； (D) 概率公理

8. 从总体 N(5,10) 中随机抽取容量为 5 的样本，则该样本均值所服从的分布是 ……… ..…… (D).
   (A) N(5,10) ； (B) N(1,2) ； (C) N(1,10) ； (D) N(5,2).

9. 设 $\hat{\theta}$ 是总体参数 θ 的估计量，且有 $E(\hat{\theta})=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的……………………………… ..(D).
   (A) 有效估计量； (B) 一致估计量； (C) 最优估计量； (D) 无偏估计量

10. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_5$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本 ，则服从分布 t (4) 的样本函数是 …..……… ..(C).

(A) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{5}}$ ；　　(B) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{4}}$ ；　　(C) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{5}}$ ；　　(D) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{4}}$

二、计算题 **(I)** （共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

1. 设 A 和 B 是两个随机事件， $P(A)=0.5, P(B)=0.6, P(B|A)=0.4$ ，求 $P(AB)$， $P(A\cup B)$ 及 $P(A|B)$。

解：

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=0.5\times 0.4=0.2 \qquad (2\text{ 分})$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.6-0.2=0.9 \qquad (2\text{ 分})$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.2}{0.6}=\frac{1}{3} \qquad (2\text{ 分})$$

2. 已知一箱中装有 10 个红球和 4 个黑球，从中随机取出 3 个球。求取出 2 红球和 1 个黑球的概率。

解：令 A 表示事件“出 2 红球 1 个黑球”，则

$$P(A)=\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3} \qquad (2\text{ 分})$$

$$=\frac{\frac{6\times 5}{2\times 1}\times 4}{\frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1}}=\frac{3\times 5\times 4}{3\times 4\times 7}=\frac{5}{7} \qquad (4\text{ 分})$$

3. 已知一条生产线的次品率是 10%，随机抽查 5 件产品，求所抽查的产品中有次品的概率。

解：令 X 表示被抽取的 5 件产品中所含的次品数，则 $X\sim B(5,0.1)$

$$P(X>0)=1-P(X=0) \qquad (2\text{ 分})$$

$$=1-C_5^0(0.1)^0(0.9)^5 \qquad (2\text{ 分})$$

$$=1-(0.9)^5=1-0.59049=0.40951 \qquad (2\text{ 分})$$

4. 一盒中装有 20 个零件，其中有 5 个次品。从盒每次随意取出一件 (不放回)，求在第三次才取到正品的概率。

解：令 A_i 表示第 i 次取到正品，则三次内取到正品的概率为

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2) \qquad (2\text{ 分})$$

$$=\frac{5}{20}\times\frac{4}{19}\times\frac{15}{18}=\frac{5}{19\times 6}=\frac{5}{114}=0.04386 \qquad (4\text{ 分})$$

5. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}8x, & 0<x<C\\ 0 & \text{其它.}\end{cases}$，求常数 C 和概率 $P(0<x<\frac{1}{4})$。

解：因为 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_0^C 8xdx=4x^2\Big|_0^C=4C^2=1$， 所以 $C=\frac{1}{2}$ (3 分)

所以 $P(0<x<\frac{1}{4})=\int_0^{\frac{1}{4}}8xdx=4x^2\Big|_0^{\frac{1}{4}}=4\left[(\frac{1}{4})^2-0\right]=\frac{1}{4}$ (3 分)

三、计算题 (II) （共 4 小题，每题 5 分，共 20 分）

1.　设随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$，求其函数 $Y=X^2$ 的密度函数 $f_Y(y)$。

解：

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx=\int_0^{\sqrt{y}} 2xdx=x^2\Big|_0^{\sqrt{y}}=(\sqrt{y})^2=y\quad (0<y<1)$$ (3 分)

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=(y)'=1\quad (0<y<1)$$

所以 $$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1;\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$ (2 分)

2.　设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，求 E(X) 和 D(X)。

解：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2(1-x)dx=2\int_0^1 (x-x^2)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$ (3 分)

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2(1-x)dx=2\int_0^1 (x^2-x^3)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=2\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right]=2\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{3-2}{18}=\frac{1}{18}$$ (2 分)

3. 设二维离散随机变量 (X,Y) 的联合分布律如下表

X \ Y	−1	0	1
1	0.2	0.3	0.1
2	0.1	0.1	0.2

求 Y 的边缘分布和当 X=1 时 Y 的条件分布，并判断 X 与 Y 是否相互独立。

解：Y 的边缘分布为

Y	−1	0	1
P_Y	0.3	0.4	0.3

(2 分)

当 X=1 时 Y 的条件分布

Y	−1	0	1
$P_{Y\mid X=1}$	1/3	1/2	1/6

2 分)

因为 $P(X=1,Y=1)\neq P(X=1)(Y=1)$，所以 X 与 Y 不相互独立。 (1 分)

4. 设总体 X 的密度函数是 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta 3^{\theta}x^{-(\theta+1)}, & x>3;\\ 0, & 其它,\end{cases}$，其中 $\theta>0$. $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一个随机样本，

求未知参数 θ 的最大似然估计。

解：

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta 3^{\theta}x_i^{-(\theta+1)}=\theta^n 3^{n\theta}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-(\theta+1)}\quad x_i>3$$ (2 分)

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+n\theta\ln 3-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+n\ln 3-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

$$\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n\ln 3}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\ln 3}$$ (3 分)

四、应用题（共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）

1. 一批零件的合格率为 90%，利用中心极限定理估计在随机抽取的 200 件零件中，不合格的零件数不超过 10 件的概率．

解：设 X 表示不合格零件数， X 服从二项分布 B(2000,0.1)

所以 E(X)=200*0.1=20 ，

D(X)= 200*0.1*0.9=18　　(2 分)

由中心极限定理知

$$P(X \le 10)=P\left(\frac{X-20}{\sqrt{18}} \le \frac{10-20}{\sqrt{18}}\right)=P\left(Z \le -\frac{10}{\sqrt{18}}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{-10}{\sqrt{18}}\right)=1-\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{18}}\right)$$　　(3 分)

$$=1-\Phi(2.36)=1-0.9909=0.0091$$

2. 一批滚珠的直径服从正态分布，现随机抽取 16 颗，测得平均直径为 10.1 (mm) 样本标准差为 0.1 (mm)，求这批滚珠直径的均值和方差的置信度为 0.95 的置信区间（相关参数查第 8 页数表）。

解： $\alpha=0.05,\ t_{0.05}(15)=2.131,\ \chi^2_{0.025}(15)=6.262,\ \chi^2_{0.975}(15)=27.488$

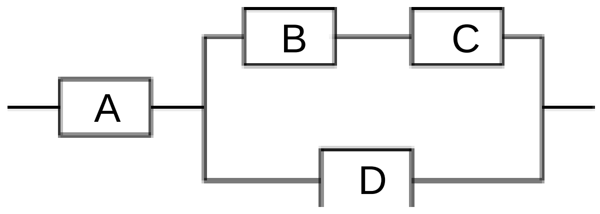
均值置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left[10.1-2.131\frac{0.1}{\sqrt{16}},\ 10.1+2.131\frac{0.1}{\sqrt{16}}\right]$$　　(3 分)

均值和方差的置信度为 0.95 的置信区间

$$\left[\frac{15\times(0.1)^2}{27.488},\ \frac{15\times(0.1)^2}{6.262}\right]$$　　(2 分)

3. 某设备有 4 个独立工作的部件 A,B,C,D，它们的联接方式如右图所示。若这些部件的正常工作的概率均为 0.9，试求该系统可以正常工作的概率。



解：令 A，B，C，D 分别表示相应部件正常工作，令 G 表示系统正常工作。则

则 $$G=A(BC\cup D)=ABC\cup AD$$

因为，部件 A，B，C，D 独立工作，所以

$$P(G)=P(ABC\cup AD)=P(ABC)+P(AD)-P((ABC)\cap(AD))\qquad(2\text{ 分})$$

$$=P(ABC)+P(AD)-P(ABCD)$$

$$=P(A)P(B)P(C)+P(A)P(D)-P(A)P(B)P(C)P(D)$$

$$=0.9^3+0.9^2-0.9^4=0.9^2(0.9+1-0.9^2)=0.9^2(1+0.9(1-0.9))$$

$$=0.81(1+0.09)=0.81+0.0729=0.8829\qquad(3\text{ 分})$$

即系统的正常工作的概率为 0.8829.

4. 一建筑公司为其所建的路灯选配灯泡，在竞标的两个品牌的灯泡中各选取 9 只进行使用寿命测试。测试结果统计如下表

指标	品牌 1	品牌 2
样本均值（小时）	2000	1970
标准差（小时）	100	80

假设两品牌的灯泡寿命均服从正态分布且方差相同。试检验两品牌灯泡寿命有无显著差异？（显著水平 $\alpha=0.01$，检验临界值查第 8 页数表）

解：假设 $H_0:\mu_1=\mu_2$，$H_1:\mu_1\neq\mu_2$　　(1 分)

检验统计量 $$T=\frac{X_1-X_2}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)\qquad(1\text{ 分})$$

检验临界值 $$t_\alpha(n_1+n_2-2)=t_{0.01}(16)=2.921\qquad(1\text{ 分})$$

检验统计量样本值 $$T=\frac{\bar X_1-\bar X_2}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{2000-1970}{\sqrt{\frac{8\times100^2+8\times80^2}{16}}\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}}=0.703\qquad(1\text{ 分})$$

统计推断　因为 $|T|=0.707<2.921$，所以接受原假设，即在 0.01 显著水平上认为两品牌灯泡寿命无显著差异。　　(1 分)

四、证明题（6 分）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是正态分布总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本，X_{n+1} 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 且与 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立，证明统计量 U 服从标准正态分布，其中

$$U=\frac{\bar{X}-X_{n+1}}{\sqrt{\frac{(n+1)\sigma^2}{n}}},\qquad \text{其中：}\ \bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

证明：因为

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right),\quad X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2) \qquad (2\text{ 分})$$

所以

$$\bar{X}-X_{n+1}\sim N\left(\mu-\mu,\frac{\sigma^2}{n}+\sigma^2\right)=N\left(0,\frac{(n+1)\sigma^2}{n}\right) \qquad (2\text{ 分})$$

$$\frac{\bar{X}-X_{n+1}}{\sqrt{\frac{(n+1)\sigma^2}{n}}}\sim N(0,1) \qquad (2\text{ 分})$$

表 1：标准正态分布数值表 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

表 2：t 分布双侧分位数值表 $P(|t(n)|>t_\alpha)=\alpha$（n：自由度）

n \ α	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
∞	0.126	0.253	0.385	0.524	0.675	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.327	2.576

表 3：χ^2 分布上侧分位数值表 $P(\chi^2>\chi^2_\alpha(n))=\alpha$（n：自由度）

n \ α	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718